

geometria no euclidiana i de la gestació del *Disquisitiones*, escrits que permeten albirar què hi havia darrera de la versió publicada. La versió de 1825 és molt interessant ja que mostra com sorgeix el teorema *egregium* de la teoria de superfícies a partir de la fórmula de l'excés de l'àrea d'un triangle geodèsic, tot i que el desenvolupament complet no estava prou justificat, per la qual cosa Gauss va fer una presentació analítica en les *Disquisitiones*, fent un camí invers que parteix del teorema egregi per arribar a la fórmula de l'excés. És un exemple fefaent de com l'origen de les idees no sempre es transporta a la presentació final dels resultats obtinguts. En aquest sentit crec que hauria estat interessant incloure el text de 1825 a l'apèndix B, i no tant sols la descripció dels seus capítols (per a una versió anglesa podeu consultar [3]).

En l'apèndix D es comenta el treball de Bolyai i la lectura que en farà Gauss, donant per tancat el problema de la teoria de les paral·leles. En els apèndixs E, F i G es desenvolupa de manera sistemàtica i analítica la geometria esfèrica, el càlcul de la derivada de l'angle d'inclinació d'una superfície arbitrària i el teorema del defecte, de manera molt similar a com ho fa Gauss. En aquests apèndixs, així com en l'H, dedicat al desenvolupament de la geometria analítica

hiperbòlica seguint l'analogia de Lambert, es fa un esforç reeixit per fer una presentació analítica que corrobore les hipòtesis de partida, alhora que aproxima els temes tractats a l'estudiós actual.

Els capítols de geometria esfèrica i hiperbòlica estan complementats per l'apèndix I, en el qual Girbau dona una demostració directa de les fórmules de la trigonometria esfèrica i hiperbòlica basant-se en el dibuix i en el model de l'hiperboloide de la geometria no euclidiana, respectivament.

En definitiva, estem davant d'un llibre imprescindible, que no ha de faltar en la biblioteca dels amants de la geometria, encara que sigui la biblioteca virtual!

Referències

- [1] DOMBROWSKI, P. *150 years after Gauss "Disquisitiones generales circa superficies curvas"*. Astérisque 62. Soc. Math. France, 1979.
- [2] *Conferències FME. Vol. 3. Curs C. F. Gauss, 2005-2006*. UPC, 2006.
- [3] GAUSS, K. F. *General investigations of curved surfaces*. Edició a cura de P. Pesic. Dover edition, 2005. [Edició original Princeton U., 1902].
- [4] SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, 1970.

Pere Pascual Gainza
UPC

Racó biogràfic

Richard Dedekind: L'altre gran matemàtic de Braunschweig



Julius Wilhelm Richard Dedekind va néixer a Braunschweig el 5 d'octubre de 1831. Braunschweig era llavors una petita ciutat d'uns 40.000 habitants (avui en té 240.000) situada a la part superior d'Alemanya, a uns setanta quilòmetres de Hannover tirant cap a l'est. A uns cent quilòmetres cap al sud es troba la ciutat de Göttingen, amb la seva universitat anomenada

«Georgia Augusta». Carl Friedrich Gauss havia nascut també a Braunschweig i fou professor de Dedekind a la Georgia Augusta.

La família de Dedekind formava part de la classe benestant d'aquella ciutat de la Baixa Saxonia. El pare de Dedekind havia estudiat dret i era professor del Collegium Carolinum de Braunschweig. El Carolinum, que es remuntava al 1745, era una prestigiosa institució educativa que preparava els estudiants que volien ingressar a la universitat; Gauss en fou alumne i també Dedekind. La mare de Dedekind, Caroline Henriette, era filla d'un professor del Carolinum. El

matrimoni Dedekind tenia quatre fills, dos nois i dues noies; Richard era el més petit.

Dels set als setze anys va anar al «gymnasium» de Braunschweig; inicialment es va interessar per la física i la química, però finalment es va decantar cap a les matemàtiques perquè segons ell deia era l'única disciplina que tenia un rigor lògic. Abans d'entrar a la Universitat va passar dos anys al Carolinum aprenent àlgebra, geometria analítica, mecànica i càlcul. Quan el 1850 Dedekind va entrar a la Universitat Georgia Augusta de Göttingen per estudiar matemàtiques, no era encara el lloc d'excel·lència matemàtica que seria anys després. Les matemàtiques eren ensenyades per M. A. Stern, G. Ulrich i C. F. Gauss, i la física ho era per Listing i Wilhelm Weber. Stern va impartir a Dedekind les primeres lliçons sobre teoria de nombres i amb Gauss va aprendre sobre el mètode dels mínims quadrats, càlcul de probabilitats, integrals definides i geodesia superior. Més tard Gauss va dirigir la tesi de Dedekind sobre integrals eulerianes. Dedekind fou l'últim deixeble de Gauss.

El 1854 Dedekind s'habilita com a Privatdozent a la Georgia Augusta i comença donant cursos de geometria projectiva i àlgebra superior. En aquests cursos, que tenien molt pocs alumnes matriculats, a vegades només dos, Dedekind és el primer de parlar de la teoria de Galois i d'introduir el concepte de *grup abstracte*.

En aquest període Dedekind continua assistint a altres cursos i seminaris per tal d'augmentar el seu coneixement matemàtic. Així, quan el 1855 mor Gauss, procedent de la Universitat de Berlín arriba P. Dirichlet a Göttingen per ocupar la Càtedra de Matemàtiques que resultava d'haver convertit la d'Astronomia que ocupava Gauss. Llavors Dedekind decideix assistir als cursos sobre teoria de nombres, teoria del potencial, integrals definides i equacions en derivades parcials que imparteix Dirichlet. Ben aviat farà amistat amb Dirichlet i entrarà a forma part del seu equip.

Dedekind assisteix també a un seminari fisicomatemàtic dirigit pel físic Wilhelm Weber. La personalitat de Weber entusiasmarà Dedekind, no tant per la matèria explicada sinó per la manera de fer-ho. En una carta que Dedekind dirigeix a Klein el 26 d'abril de 1913 escriu:

[...] el gran curs de Weber, distribuït en dos semestres, em causà la més profunda impressió; la separació rigorosa entre els fets

fonamentals descoberts gràcies a les experiències més simples i les hipòtesis lligades a aquests per l'enteniment humà, oferia un model insuperable de la veritable investigació científica, com jo no havia conegut mai fins llavors [...].

És en aquest seminari on es troba amb Bernhard Riemann, que és cinc anys més gran que ell. Riemann, de caràcter reservat, mantindrà llargues converses amb Dedekind i ells dos esdevindran grans amics fins a la prematura mort de Riemann el 1866. Dedekind assistirà a les classes de Riemann sobre funcions abelianes i el·líptiques.

Gauss, Dirichlet i Riemann van ser els tres matemàtics de Göttingen que van influir en Dedekind. Tots tres morien molt abans que ell. Gauss el 1855, quan tenia setanta-vuit anys, Dirichlet el 1859, quan en tenia cinquanta-quatre, i Riemann el 1866, quan en tenia quaranta. Dedekind visqué fins al 1916, tenia llavors vuitanta-cinc anys.

El 1858 Dedekind entra com a professor al Politècnic de Zuric. Un any després acompanya Riemann a Berlín amb motiu del nomenament d'aquest últim com a membre corresponent de l'Acadèmia de Berlín. En aquesta ocasió Dedekind coneixerà els matemàtics berlinesos Weierstrass, Kummer, Kronecker i Borchardt.

Dedekind sempre havia volgut tornar a Braunschweig i l'ocasió es presentà l'any 1862, quan tenia trenta-un anys. L'antic Collegium Carolinum havia passat a ser una Escola Politècnica i llavors Dedekind hi aconsegueix una càtedra. Dedekind decideix instal·lar-se definitivament a la seva ciutat natal. Això implicava quedar allunyat dels centres principals en recerca matemàtica i, encara més, implicava haver de renunciar a ocupar càtedres en universitats prestigioses i influents com va haver de fer en diverses ocasions. A Braunschweig Dedekind va compartir casa amb la seva germana Júlia, que era novel·lista; els dos es mantindran solters fins al final de les seves vides. Dedekind volia la tranquil·litat que li oferia la seva ciutat per poder treballar sense pressions acadèmiques en l'estudi i recerca de la matemàtica pura que a ell més l'interessava: la teoria de nombres i la fonamentació de la matemàtica.

El 1881, juntament amb Heinrich Weber, va publicar «Theorie der algebraischen Funktionen

einer Veranderlichen» (Teoria de les funcions algebraiques d'una variable) al *Journal de Crelle*, una obra fonamental sobre teoria de nombres. Els treballs profunds de Dedekind en teoria de nombres van encetar una nova manera de fer àlgebra i en definitiva una nova manera de fer matemàtiques, allò que més tard s'anomenaria *la matemàtica moderna*. E. Noether en va recollir els resultats i en les seves classes solia repetir «això ja es troba en Dedekind». E. Noether sentia una gran admiració per Dedekind i entre els anys 1930-1932, conjuntament amb R. Fricke i Ö. Ore, editaria la seva obra completa comentada.

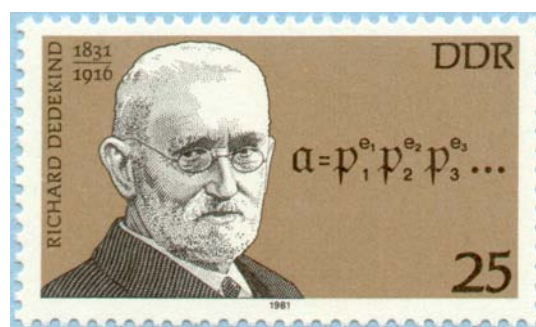
L'altre gran assoliment de Dedekind va resultar del seu afany sempre present d'ensenyar i escriure les matemàtiques amb rigor lògic. Els matemàtics utilitzaven els irracionals però en mancava una fonamentació rigorosa. Dedekind, mitjançant la idea dels *talls* en la recta racional, aconseguí establir-ne una. Aquesta construcció dels nombres reals és explicada a *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (1872) i a *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888). En aquest últim llibre es troba també una axiomàtica per als nombres naturals que anticipa la de Peano.

Una altra labor meritòria de Dedekind fou d'editar i comentar les obres d'aquells que ell considerava els seus mestres en matemàtiques: Gauss, Dirichlet i Riemann. En aquesta línia cal remarcar la publicació de les lliçons sobre teoria de nombres de Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Els treballs de Dirichlet en teoria de nombres el van portar cap a la recerca en els camps dels nombres algebraics. Dedekind va editar les lliçons de Dirichlet el 1863. En una tercera (1879) i en una quarta edició (1894) d'aquesta obra, Dedekind hi afegí una addenda en la qual, seguint la idea de Kummer dels *nombres ideals*, introduïa la noció d'ideal d'un anell tal com avui es coneix, encara que la mateixa paraula *anell* fou introduïda més tard per Hilbert. Aquesta addenda es considera una de les principals fonts primàries sobre la creació de la teoria d'ideals d'anells. Dedekind i Kronecker foren els primers a obtenir una teoria satisfactòria de la factorització en conjunts d'enters algebraics. Els *nombres primers* passaven a ser *ideals primers* en Dedekind.

En un important article conjunt amb Heinrich Weber, publicat el 1882, utilitza la seva teoria dels ideals en l'estudi de les superfícies

de Riemann, relaciona idees geomètriques amb anells de polinomis i amplia el concepte de *mòdul* que ja havia introduït anteriorment i obté una demostració en termes algebraics del teorema de Riemann-Roch.

Hilbert va saber dels resultats de Dedekind a través de les classes que Heinrich Weber donava a la Universitat de Königsberg. El concepte d'ideal de Dedekind va ser recollit per Hilbert, que, en l'estudi de la teoria d'invariants algebraics, el va utilitzar per demostrar el seu teorema de les bases.



Dedekind no va viure aïllat a Braunschweig: a part de mantenir una correspondència important amb matemàtics com Frobenius, Cantor, Lipschitz, Keferstein, Klein i Weber, va ser membre corresponent de l'Acadèmia de Göttingen des del 1862, de l'Acadèmia de Berlín des del 1888 i de l'Acadèmia de París des del 1910 i, una vegada reconegut com a expert en teoria de nombres algebraics, rebia a Braunschweig la visita d'altres matemàtics.

Tenia una gran afecció per la música, tocava el piano i el violoncel. Els seus llocs preferits de vacances eren Suïssa, el Tirol i la Selva Negra. El 1874, en una estada a Interlaken (Suïssa), Dedekind es va trobar amb Cantor i, en aquell lloc envoltat de llacs, van estar parlant sobre allò que després esdevindria la teoria de conjunts, que tant influiria en el formalisme posterior de la matemàtica.

El 1894, quan va complir seixanta-tres anys, Dedekind es va retirar de la vida professional, tot i que ocasionalment va impartir algunes lliçons i no va deixar els seus estudis i recerques matemàtiques fins al dia de la seva mort, que va esdevenir el 12 de febrer de 1916.

Bibliografia

DEDEKIND, R. *¿Qué són y para qué sirven los números?* Alianza Editorial, 1998.

JAMES, I. *Remarkable Mathematicians*. Cambridge University Press, 2002.

ZARZUELA S. «Emmy Noether i l'àlgebra com-

mutativa». *Conferències FME. Vol. 6. Curs E. Noether 2008-2009*. UPC, 2009.

Eduard Recasens Gallart
UPC

Webs de matemàtiques

Humor matemàtic

Tothom coneix la tradició de les tires humorístiques diàries, que moltes vegades han gaudit d'un gran prestigi al món del comentari humorístic, polític o social. Internet ha permès la universalització d'aquests acudits gràfics i, lògicament, n'ha incrementat molt favorablement la facilitat de publicació. Per tant, han proliferat les tires còmiques amateurs que es dediquen a multitud de temes.

Les matemàtiques no havien de ser menys. La tira còmica XKCD (<http://www.xkcd.com>) és definida pel mateix autor com «un webcòmic de romanç, sarcasme, matemàtiques i llenguatge.» Aquest còmic fa servir acudits matemàtics força sovint, que denoten que l'autor té certs coneixements de les matemàtiques avançades i el seu món. Un exemple clàssic és el còmic «Apocalypse» (<http://www.xkcd.com/599>), on, davant la imminència de l'apocalipsi i la resurrecció dels morts, el matemàtic protagonista escriu un article, hi posa també el nom dels seus amics, i va a la tomba del Paul Erdős per convèncer-lo, un cop ressuscitat, que inclogui el seu nom a l'article, i així tots ells puguin tenir número d'Erdős igual a 1.

L'autor de XKCD és Randall Munroe, físic de formació, però que va deixar la seva feina de dissenyador per a la NASA quan l'èxit de XKCD li va permetre dedicar-s'hi a temps complet. L'autor dedica uns quants còmics a les matemàtiques periòdicament, i els intercala amb d'altres dedicats a les relacions de parella o a temes relacionats amb Internet. Però els còmics matemàtics contenen joies com «Haiku Proof» (<http://www.xkcd.com/622>), on dona una demostració del fet que hi ha infinits nombres primers en forma d'haiku. O aquell «Threesome» (<http://www.xkcd.com/613>), en què fa bro-

ma amb els físics, que no es desenvolupen bé en un *ménage à trois* perquè no saben resoldre el problema dels tres cossos.

Aquells que treballin amb la notació polonesa inversa o que estiguin acostumats a fer operacions amb les clàssiques calculadores Hewlett-Packard es divertiran força amb el còmic «RPS» (<http://www.xkcd.com/645>), o bé els estadístics podran riure veient com l'autor fa broma del fet que *correlació no implica causalitat*, en el còmic «Correlation» (<http://www.xkcd.com/552>). XKCD és un còmic divertit i intel·ligent. Com a última mostra, consulteu també <http://www.xkcd.com/230>, que no es pot descriure fàcilment amb paraules.

Més centrat en les matemàtiques és «Abstruse Goose» (<http://abstrusegoose.com>), que també fa broma amb el món matemàtic, de vegades amb humor, de vegades de manera crítica. A aquest últim cas pertany la vinyeta «Landscape» (<http://abstrusegoose.com/211>), on es lamenta de l'excessiva especialització de la matemàtica contemporània. Però un dels acudits que m'ha fet riure més en els últims temps és el teorema dels calçotets simplement connexos. Vegeu-lo a «The simply connected underwear theorem» (<http://abstrusegoose.com/121>). Especialment quan l'autor assegura que encara es posaria aquells calçotets de grup fonamental \mathbb{Z} .

En resum, cada cop són més comuns els webs còmics que es relacionen amb les matemàtiques. Altres recomanacions són «Brown Sharpie» (<http://brownsharpie.courtneygibbons.com>) o bé «Spiked Math» (<http://spikedmath.com>). Per a riure una bona estona amb acudits, alguns clàssics, d'altres originals, alguns bons i d'altres no tant, però sempre al voltant de les matemàtiques.

Pep Burillo
UPC