UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

Aplicacions interactives per la docència de control amb computador: alguns exemples de llaç obert

Josep Fàbregas i Cornellà, Ramon Costa Castelló

IOC-DT-P-2005-17
Setembre 2005

Institut d'Organització i Control
de Sistemes Industrials

En el nou marc de l'Espai Europeu d'Educació Superior (EEES) el treball individual de l'estudiant jugarà cada cop un rol més important dins els estudis. Dins aquest context les eines d'autoformació interactives seran de gran important. En aquest treball s'han desenvolupat un conjunt d'eines que poden ésser de gran utilitat per il·lustrar diferents aspectes de la teoria presentada en la assignatura de Control amb Computador de la ETSEIB. Aquestes eines són un conjunt d'aplicacions individuals cadascuna d'elles pensades per un concepte concret. Aquestes aplicacions han estat desenvolupades amb el programa Sysquake. SysQuake és una programa orientat a la simulació i a la visualització de dades científiques. A través de l'ús innovador de gràfics interactius, SysQuake proporciona eines necessàries per a la resolució de problemes matemàtics complexes'.

Aquest document conté una descripció funcional de les diferents aplicacions (fitxes) que pot servir con manual d'usuari de cadascuna d'elles.

En Josep Fàbregas i Cornellà, estudiant d'Enginyeria Industrial de la ETSEIB, ha comptat amb el suport d'una beca finançada mitjançada un ajut de noves iniciatives del departament d'Enginyeria de Sistemes Automàtica i Informàtica Industrial de la UPC, concedida a en Ramon Costa Castelló (convocatòria 2004).

ÍNDEX:

Fitxa1: Teorema del mostratge (Tema 2)

1) Breu explicació teòrica:

Anomenem la freqüència de mostratge f_s (Hz) o ω_s (rad/s). La freqüència de mostratge està relacionada amb el període de mostratge T_s (s) de la següent manera:

$$f_s = \frac{1}{T_s}[Hz]$$
$$\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi / T_s[rad / s]$$

Teorema del mostratge:

Si la freqüència més alta continguda en un senyal analògic és $\omega_{màx}$, la mínima freqüència de mostreig necessària per tal de poder reconstruir el senyal inicial a partir de les seves mostres és $\omega_s > 2*\omega_{màx}$. En cas contrari, apareix el fenomen de recobriment espectral (aliasing).

El Teorema del mostratge garanteix que totes les components freqüencials del senyal analògic es corresponen amb les components espectrals de temps discret a la banda primària.

Exemple descrit en l'aplicació:

Essent $y(t) = \sin(\omega \cdot t)$ un senyal de temps continu, la seva transformada de Fourier generalitzada és: $Y(j\cdot\omega) = F\{y(t)\} = c_1 \cdot \delta(\omega) + c_{-1} \cdot \delta(-\omega)$ on els coeficients són $c_1 = \frac{1}{2\cdot j}$ i $c_{-1} = -\frac{1}{2\cdot j}$.

La versió mostrejada del senyal presenta una transformada de Fourier generalitzada de la forma: $Y^*(j\cdot\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} Y(j\cdot\omega + n\cdot j\cdot\omega_s)$, on $\omega_s = \frac{2\cdot\pi}{T_s}$. Substituint l'expressió de $Y(j\cdot\omega)$, s'obté:

$$Y^*(j\cdot\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_1 \cdot \delta(\omega + n\cdot\omega_s) + c_{-1} \cdot \delta(-\omega + n\cdot\omega_s)$$

Alguns casos interessants:

i. Si es tria una freqüència de mostratge ω_s tal que $\exists n_1, n_2$ que compleixen $\omega + n_1 \cdot \omega_s = -\omega + n_2 \cdot \omega_s$, l'espectre del senyal mostrejat és idènticament 0. En l'aplicació es pot observar en el cas de $n_1 = 0$ i $n_2 = 1$.

ii. En el cas que $\omega_s > 2 \cdot \omega$ (es compleix el Teorema del mostratge), el senyal contingut a la banda primària és $c_1 \cdot \delta(\omega) + c_{-1} \cdot \delta(-\omega)$, i per tant, el senyal reconstruït és el senyal original.

iii. En el cas que $\omega_s < 2 \cdot \omega$, el senyal contingut a la banda primària és $c_{-1} \cdot \delta(\omega - \omega_s) + c_1 \cdot \delta(-\omega + \omega_s)$, i per tant, és d'una freqüència diferent a la del senyal original. Per aquest motiu, es produeix el recobriment espectral (cal fixar-se que els coeficients canvien i que per tant, es produeix un canvi de fase).

2) Pantalla:

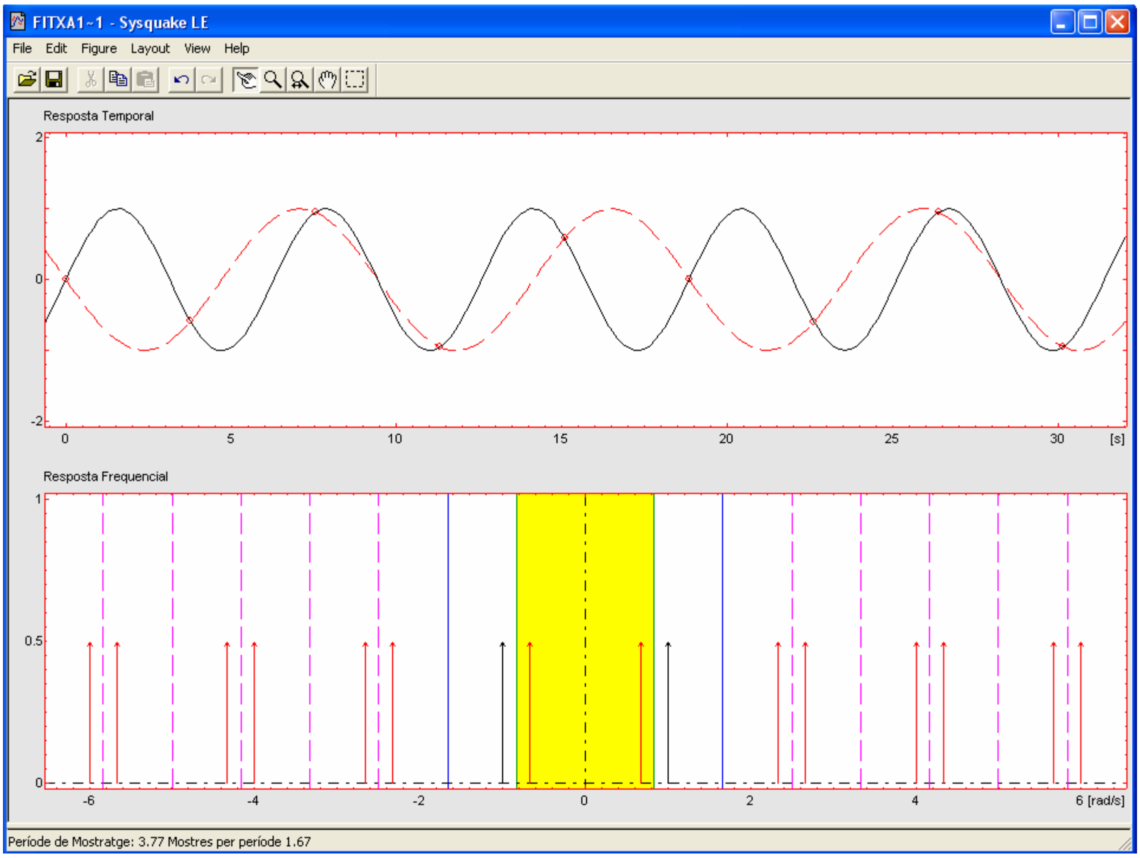


Figura Resposta Temporal

- Senyal sinusoïdal de temps continu (línia contínua de color negre) de període $T_p = 2\pi$ [segons].
- Mostres preses de la senyal contínua cada T_s [segons], essent T_s el període de mostratge (cercles de color vermell).
- Senyal reconstruïda a partir de les mostres (línia discontínua de color vermell) quan hi ha solapament (aliasing). Component freqüencial dins la banda primària.

Figura Freqüencial

- Espectre discret: Components freqüencials de la senyal de temps continu situades a $\pm\omega_p = \dfrac{2\pi}{T_p}$ [rad/s] (línies contínues verticals de color negre).
- Rèpliques de l'espectre introduïdes pel procés del mostratge situades a freqüències múltiples de $(n{\cdot}\omega_s \pm \omega_p)$ [rad/s] (línies contínues verticals de color vermell).
- Freqüència de Nyquist situada a $\pm\dfrac{\omega_s}{2}$ [rad/s] (línia contínua vertical de color verd). L'àrea compresa entre aquests valors es correspon amb la banda primària (àrea de color groc).
- Freqüència de Mostratge situada a $\pm\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$ [rad/s] (línia contínua vertical de color blau).
- Bandes complementàries col·locades a freqüències múltiples de la freqüència de Nyquist $n * \dfrac{\omega_s}{2}, |n| > 2$ (línies discontínues verticals de color magenta).

3) Interactivitat:

L'estudiant pot interaccionar amb el programa canviant alguns dels paràmetres que defineixen el Teorema del mostratge amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del submenú que apareix en pantalla).

Figura Resposta Temporal

- Període de Mostratge (T_s)

  El programa permet modificar el període de mostratge (T_s) col·locant-se sobre qualsevol de les mostres preses de la senyal sinus.

Figura Resposta Freqüencial

- Freqüència de Nyquist ($\pm\frac{\omega_s}{2}$)

  El programa permet modificar la freqüència de Nyquist col·locant-se sobre aquesta, podent així ampliar o disminuir la banda primària segons convingui.

- Freqüència de Mostratge ($\pm\omega_s$)

  (anàleg a la freqüència de Nyquist)

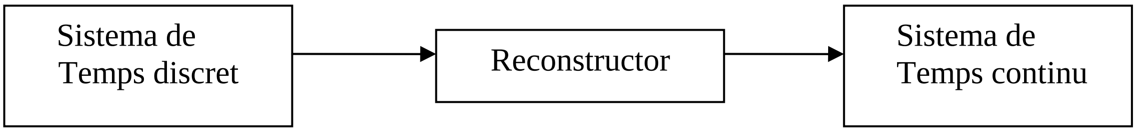
1) Breu explicació teòrica:

La reconstrucció de dades un cop realitzat el mostratge consisteix en, donada una seqüència de números: $f(0), f(T_s), f(2{\cdot}T_s),..., f(k{\cdot}T_s),...$, construir un senyal de temps continu $f(t), t \geq 0$, a partir de la informació continguda en aquesta seqüència. Aquest procés pot considerar-se com un procés d'extrapolació, ja que el senyal es construeix en base a la informació continguda només en els instants de mostratge passats.

Un dels mètodes més utilitzats per generar l'aproximació es basa en el desenvolupament en sèries de potències de la funció $f(t)$ en l'interval entre dos instants de temps de mostratge consecutius $k{\cdot}T_s$ i $(k+1){\cdot}T_s$:

$$f_k(t) = f(k{\cdot}T_s) + f^{(1)}(k{\cdot}T_s){\cdot}(t - k{\cdot}T_s) + \frac{f^{(2)}(k{\cdot}T_s)}{2!}{\cdot}(t - k{\cdot}T_s)^2 + ...$$

on $f_k(t) = f(t)$ per $k{\cdot}T_s \leq t < (k+1){\cdot}T_s$



Mantenidor d'ordre zero (ZOH)

El polinomi utilitzat per efectuar aquesta funció és de grau zero $f_k(t) = f(k{\cdot}T_s)$, doncs manté el valor de $f(k{\cdot}T_s)$ a l'interval $k{\cdot}T_s \leq t < (k+1){\cdot}T_s$, fins que arriba la mostra següent $f[(k+1){\cdot}T_s]$.

La funció de transferència d'aquest mantenidor és $G_{zoh}(s) = \dfrac{1 - \exp(-T_s{\cdot}s)}{s}$.

Mantenidor de primer ordre (FOH)

Si s'utilitzen els dos primers termes del desenvolupament, $f_k(t) = f(k \cdot T_s) + f^{(1)}(k \cdot T_s) \cdot (t - k \cdot T_s) = f(k \cdot T_s) + \frac{f(k \cdot T_s) - f[(k-1) \cdot T_s]}{T_s} \cdot (t - k \cdot T_s)$, a fi d'extrapolar la funció $f(t)$ a l'interval $k \cdot T_s \leq t < (k+1) \cdot T_s$, el dispositiu és conegut com el mantenidor de primer ordre.

En aquest cas, la seva funció de transferència és $G_{foh}(s) = \frac{1 + T_s \cdot s}{s} \cdot [G_{zoh}(s)]^2$.

Reconstructor ideal

Un senyal analògic amb espectre de freqüència nul fora de l'interval [$-\omega_0$, ω_0] és reconstruïble totalment si es mostreja amb una freqüència $\omega_s > 2 * \omega_0$ (Teorema de Shannon).
La reconstrucció s'obté mitjançant el següent càlcul:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \cdot T_s) \cdot \frac{\sin(\omega_s \cdot (t - k \cdot T_s)/2)}{(\omega_s \cdot (t - k \cdot T_s)/2)}$$

Tren d'impulsos

En general, la funció d'un mostrejador pot considerar-se com la conversió d'un senyal analògic en un senyal modulat per polsos o digital. La sortida d'aquest dispositiu és un tren d'impulsos d'amplada finita, les amplituds dels quals són iguals a la magnitud del senyal d'entrada en els instants de mostratge corresponents.

La representació en el domini del temps de la funció analògica com a tren d'impulsos s'expressa de la forma:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot T_s) \cdot \delta(t - k \cdot T_s)$$

i la seva transformada de Laplace:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot T_s) \cdot \exp(-k \cdot T_s)$$

2) Pantalla:

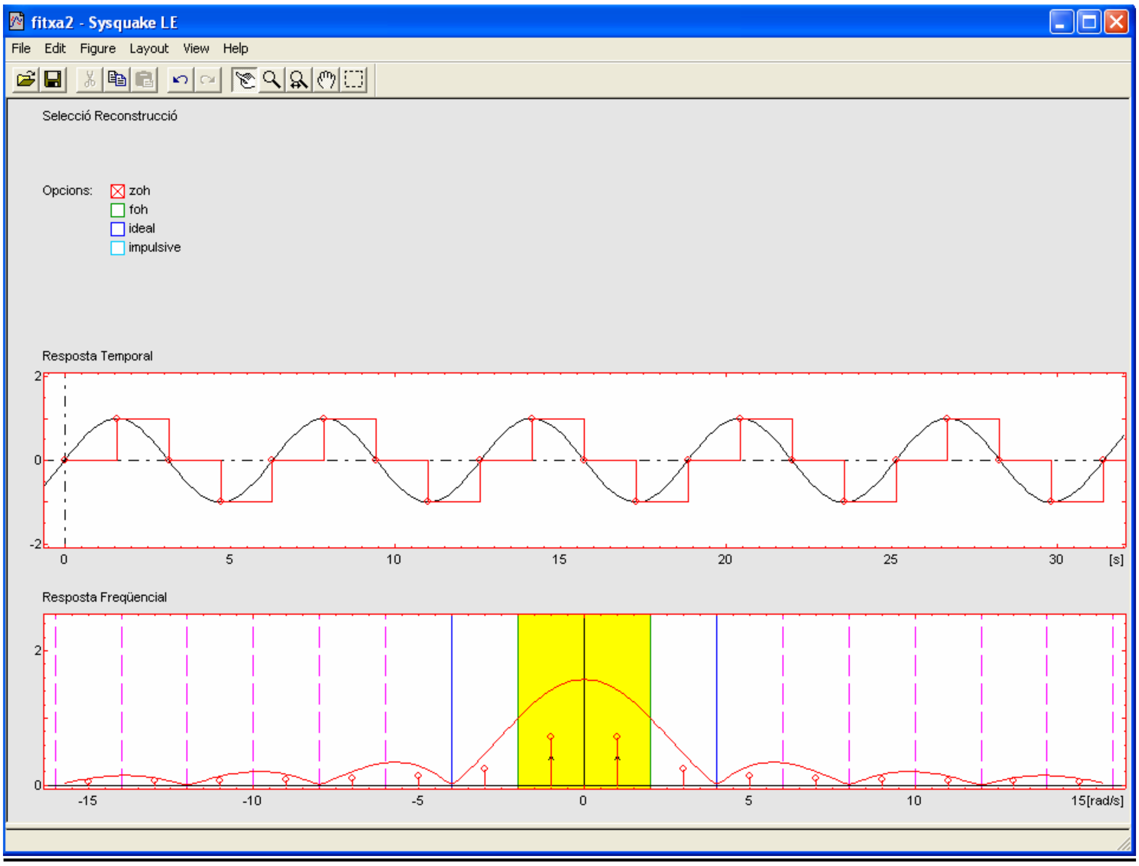


Figura Resposta Temporal

- Senyal sinusoïdal de temps continu (línia contínua de color negre) de període $T_p = 2\pi$ [segons].
- Mostres preses del senyal de temps continu cada T_s [segons], essent T_s el període de mostratge (cercles damunt del senyal de temps continu).

Segons l'opció seleccionada:

- Sortida del mantenidor d'ordre 0 (línia contínua de color vermell).
- Sortida del mantenidor de primer ordre (línia contínua de color verd).
- Sortida del reconstructor ideal (línia contínua de color blau).
- Tren d'impulsos modulats pel senyal de temps continu espaiats T_s segons (línies discontínues verticals de color blau cel).

Figura Resposta Freqüencial

- Espectre discret: Components freqüencials de la senyal de temps continu situades a $\pm\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ $[\mathrm{rad/s}]$ (línies contínues verticals de color negre).
- Freqüència de Nyquist situada a $\pm\frac{\omega_s}{2}$ [rad/s] (línia contínua vertical de color verd). L'àrea compresa entre aquests valors es correspon amb la banda primària (àrea de color groc).
- Freqüència de Mostratge situada a $\pm\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ [rad/s] (línia contínua vertical de color blau).
- Bandes complementàries col·locades a freqüències múltiples de la freqüència de Nyquist $n * \frac{\omega_s}{2}, |n| > 2$ (línies discontínues verticals de color magenta).

<u>Segons l'opció seleccionada:</u>

- Corba de guany del mantenidor d'ordre zero (corba contínua de color vermell) i superposició de les amplituds avaluades a freqüències múltiples de $(n{\cdot}\omega_s \pm \omega_p)$ [rad/s] (línies contínues verticals de color vermell).
- Corba de guany del mantenidor de primer ordre (corba contínua de color verd) i superposició de les amplituds avaluades a freqüències múltiples de $(n{\cdot}\omega_s \pm \omega_p)$ [rad/s] (línies contínues verticals de color verd).
- Apareix una 'finestra' d'amplitud unitària i d'amplada ω_s. La freqüència de les components espectrals que queden dins d'aquesta finestra és la freqüència del senyal reconstruït. Aquest fet es pot apreciar superposant les opcions del reconstructor ideal i del tren d'impulsos.
- Rèpliques de l'espectre introduïdes pel procés del mostratge corresponents al tren d'impulsos situades a freqüències múltiples de $(n{\cdot}\omega_s \pm \omega_p)$ [rad/s] (línies contínues verticals de color blau cel).

3) Interactivitat:

L'estudiant pot interaccionar amb el programa canviant alguns dels paràmetres que defineixen el Teorema del mostratge amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del submenú que apareix en pantalla). Per a poder seleccionar les diferents opcions de reconstrucció, s'ha de clickar sobre el requadre de l'opció que es desitgi realitzar: mantenidor d'ordre 0 (zoh: zero order holder), mantenidor de primer ordre (foh: first order holder), reconstructor ideal (ideal), o bé, impulsive (tren d'impulsos).

Per defecte apareix l'opció del mantenidor d'ordre 0, però l'aplicació permet superposar cada una de les diferents opcions.

- Període de Mostratge (T_s)

  El programa permet modificar el període de mostratge (T_s) col·locant-se sobre qualsevol de les mostres preses del senyal d'entrada.

- Freqüència de Nyquist ($\pm\frac{\omega_s}{2}$)

  El programa permet modificar la freqüència de Nyquist col·locant-se sobre aquesta, podent així ampliar o disminuir la banda primària segons convingui.

- Freqüència de Mostratge ($\pm\omega_s$)

  (anàleg a la freqüència de Nyquist)

1) Breu explicació teòrica:

Tant en l'anàlisi com en el disseny de sistemes de control de temps continu, s'acostuma a fer referència a la configuració dels pols i els zeros de la funció de transferència del sistema en el pla s. De manera semblant, els pols i els zeros d'una funció de transferència en z també determinen el comportament dels sistemes de temps discret (sistemes digitals).

Sigui $f(t)$ l'entrada a un mostrejador ideal i $f^*(t)$ la seva sortida, s'escriu $F^*(s)$ com la seva Transformada de Laplace:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot Ts) \cdot \delta(t - k \cdot Ts) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot T_s) \cdot \exp(-k \cdot T_s \cdot s)$$

Quan un sistema està sotmès al mostratge o rep dades digitals, una de les propietats de la funció mostrejada $F^*(s)$ és que presenta un número infinit de pols, espaiats de forma periòdica en intervals definits per $\pm n \cdot \omega_s$, amb $n = 0, 1, 2, \ldots$, en el pla s, al llarg de l'eix vertical, i on ω_s és la freqüència de mostratge.

Mitjançant la transformació de la variable complexa $s = \sigma + j \cdot \omega$ a partir del canvi $z = \exp(T_s \cdot s)$, s'obté la seva Transformada Z:

$$F(z) = F^*(s)\Big|_{s = \frac{1}{T_s} \cdot \ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot T_s) \cdot z^{-k}$$

Doncs bé, la Transformada Z, el què fa d'alguna manera és convertir tots els pols en un número finit de pols en el pla z, és a dir, mapeja la banda primària de $F^*(s)$ en el pla z:

Propietat de $F^*(s)$: $F^*(s \pm j \cdot n \cdot \omega_s) = F^*(s)$

$$\exp(s \pm j \cdot n \cdot \omega_s) \cdot T_s = \exp(s \cdot T_s) \cdot \exp(\pm j \cdot 2\pi \cdot n) = \exp(s \cdot T_s) = z$$

Això, és equivalent a dir que totes les bandes complementàries del pla s són també mapejades dins el mateix cercle de radi la unitat del pla z.

Relació entre el pla s i el pla z:

- Tots els punts que estan en el semiplà esquerre del pla s corresponen a punts dins del cercle unitari del pla z (zona estable)
- Tots els punts en el semiplà dret del pla s corresponen a punts fora del cercle unitari del pla z (zona inestable)
- Tots els punts sobre l'eix jω del pla s, corresponen a punts sobre el cercle unitari |z| = 1 del pla z (zona marginalment estable)

En els diferents exemples d'aquesta fitxa, s'han considerat dos tipus de sistemes. En l'exemple d'un únic pol, un sistema de primer ordre del tipus $G(s)=\frac{1}{\tau \cdot s+1}$, on la constant τ és la constant de temps; i en el cas de tenir dos pols, un sistema de segon ordre del tipus $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s+\omega_n^2}$, on ω_n és la pulsació natural del sistema i ξ el factor d'esmorteïment. En tots els casos, l'entrada al sistema és un graó unitari $(x(t)=u_s(t))$.

- *Sistema de 1er ordre:*

pol real: $s=-\sigma$

  - Moviment lliure del pol real al llarg de l'eix real del pla s

(Rel_plas_plaz_pol_real.sq)

Al variar la posició del pol real $(s=-\frac{1}{\tau})$, el que s'està fent en realitat és variar la constant de temps τ, que dóna una idea del temps que triga la sortida del sistema en assolir l'estat estacionari.

- *Sistema de 2on ordre:*

2 pols de la forma: $s_{1,2}=-\xi \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}=-\sigma \pm j \cdot \omega_p$

  - Lloc geomètric d'amortiment constant $(\sigma = ctnt)$

Rectes verticals a $-\sigma$ en el pla s / Circumferències en el pla z de la forma $z=\exp(\sigma \cdot T_s)$

(Rel_ps_pz_pcom_a_const.sq)

El factor d'amortiment representa la rapidesa amb la que disminueix o augmenta la resposta del sistema en el temps, ja que el seu invers és la constant de temps en segons.

- Lloc geomètric de freqüència pròpia constant $(\omega_p = ctnt)$

Rectes horitzontals a $\pm(j \cdot \omega_p)$ en el pla s / Rectes radials d'angle $\pm(\omega_p \cdot T_s)$ en el pla z

(Rel_ps_pz_pcom_f_const.sq)

- Lloc geomètric amb coeficient d'esmorteïment constant $(\xi = ctnt)$

Rectes amb l'angle respecte l'eix vertical constant $(\pm\beta = ctnt, \xi \square \sin(\beta))$ en el pla s / Espirals logarítmiques de la forma $z = \exp(-\sin\beta + j \cdot \cos\beta) \cdot \omega_n \cdot T_s$ en el pla z

(Rel_ps_pz_pcom_ce_const.sq)

Es pot observar que quan el coeficient d'esmorteïment és pròxim a zero, la resposta del sistema oscil·la, mentre que a mesura que ens apropem a $\xi = 1$ és major l'amortiguament de les oscil·lacions fins que deixa de presentar-les.

- Mapejat de la banda primària

Moviment lliure dels pols pel contorn de la banda primària en el pla s.

(Rel_ps_pz_pcom_frontera.sq)

2) Pantalla:

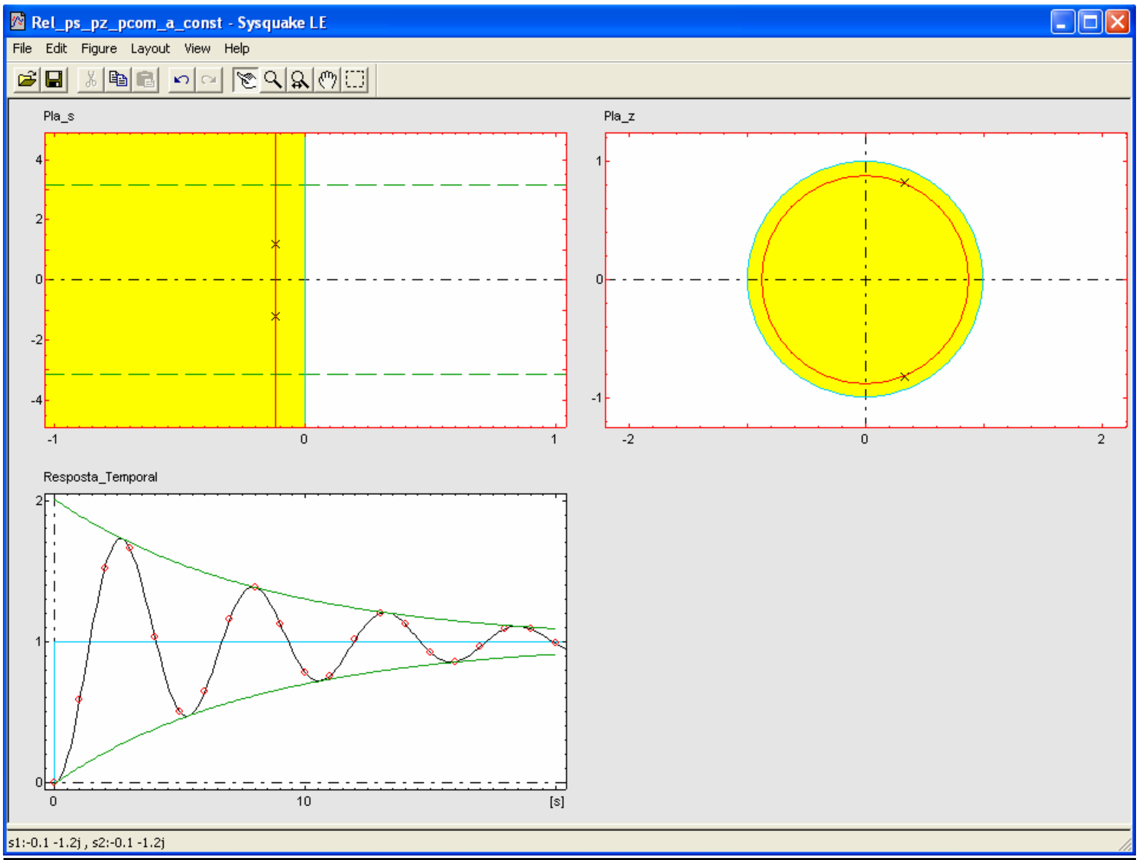


Figura Pla_s / Figura Pla_z

Les dues figures corresponen a la localització dels pols del sistema de temps continu i de temps discret respectivament. Els llocs geomètrics dels pols de cada exemple s'han senyalitzat de color vermell.

La zona estable dels pols s'ha pintat de color groc i en el pla s s'ha limitat la banda primària amb dues línies discontínues horitzontals.

Figura Resposta_Temporal

En aquesta figura es mostra la resposta temporal (color negre) del sistema a una entrada graó (color blau cel). Sobre la resposta temporal s'han superposat les mostres preses en intervals de T_s segons (cercles de color vermell). A més, també es presenta l'evolvent de la sortida del sistema (color verd).

3) Interactivitat:

L'estudiant pot interaccionar amb el programa modificant la posició dels pols d'ambdós dominis, o bé canviant la posició dels llocs geomètrics amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del submenú que apareix en pantalla).

Fitxa4: Esquemes de blocs (Tema 4)

1) Breu explicació teòrica:

✓ *Sistemes de dades discretes amb elements en sèrie separats sense mostrejador*

La Transformada Z de la sortida de tot el sistema pot expressar-se com $C(z) = Z[G_1(s) \cdot G_2(s)] \cdot R(z)$, on $C(z)$ és la transformada de la sortida del sistema global i $R(z)$ és la transformada del senyal d'entrada (en tots els casos s'ha considerat que el senyal d'entrada de temps continu és un graó unitari $r(t) = u_s(t)$).

En cas de tenir dos sistemes $G_1(s)$ i $G_2(s)$ no separats per un mostrejador, el que es fa és transformar el producte $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$ com si es tractés d'una sola funció.

Així, la notació que s'introdueix és: $Z[G_1(s) \cdot G_2(s)] = \overline{G_1 \cdot G_2(z)} = \overline{G_2 \cdot G_1(z)}$. Cal notar que $\overline{G_1 \cdot G_2(z)} \neq G_1(z) \cdot G_2(z)$.

✓ Sistemes de dades discretes amb elements en sèrie separats per un mostrejador

En aquest cas els dos sistemes de primer ordre estan separats per un mostrejador que és idèntic al que es té a l'entrada i funciona simultàniament amb aquest. Per tal de facilitar l'aplicació de la Transformada Z, s'introdueix un mostrejador fictici a la sortida del sistema global.

La Transformada Z de la sortida de tot el sistema s'expressa de la següent manera:

$$C(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot R(z)$$

En aquest cas doncs, la funció de transferència en z dels dos sistemes separats per un mostrejador és igual al producte de les transformades dels dos sistemes.

En aquesta aplicació s'han pres dos sistemes de primer ordre de la forma $G_1(s) = \dfrac{1}{\tau_1 \cdot s + 1}$ i $G_2(s) = \dfrac{1}{\tau_2 \cdot s + 1}$, amb les constants de temps $\tau_1 = 1.02$ segons i $\tau_2 = 1.05$ segons.

2) Pantalla:

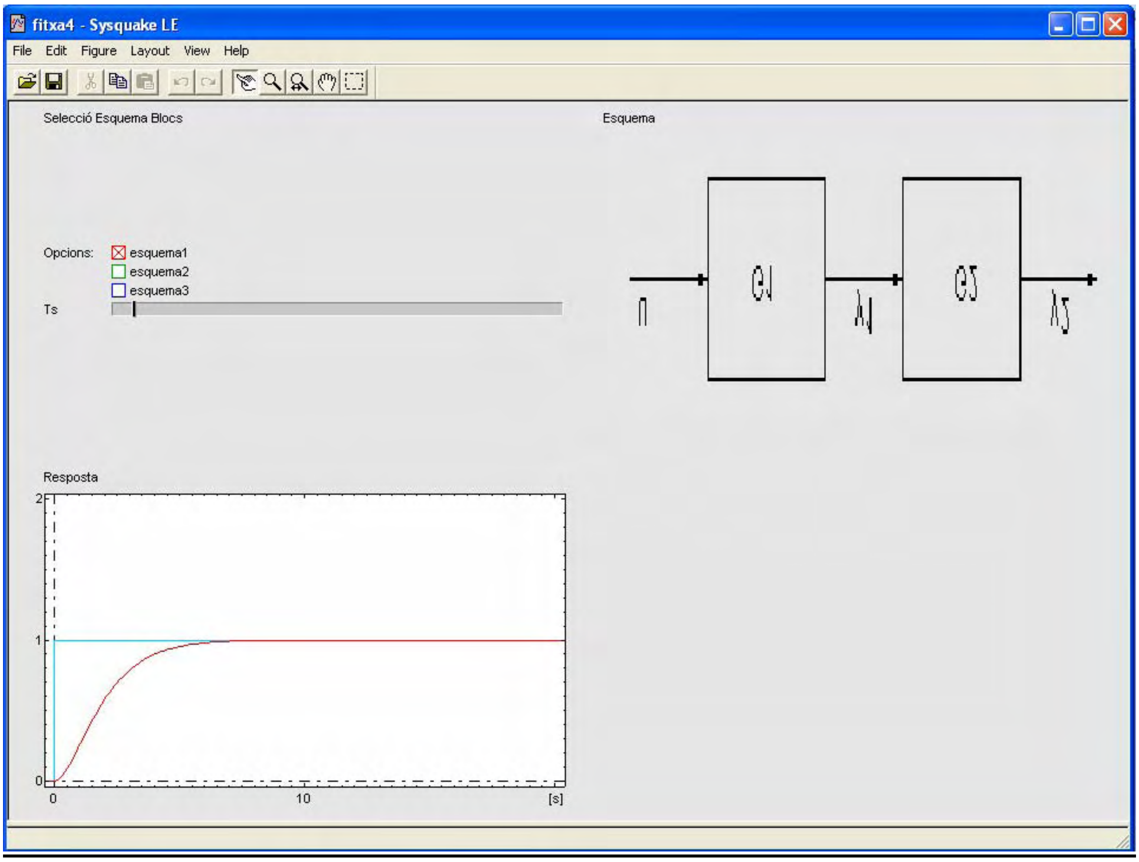
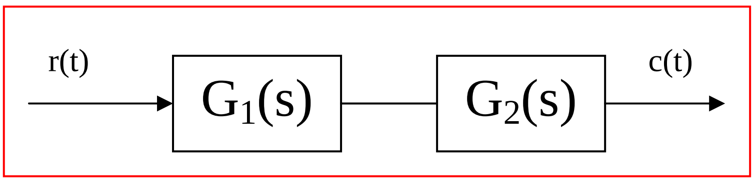
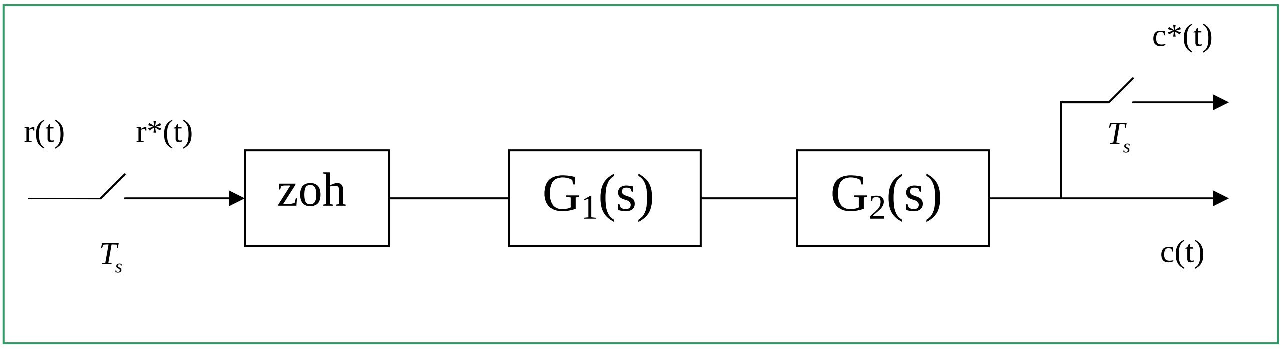


Figura Esquema

Esquema 1



Esquema 2 (sistemes separats sense mostrejador)



Esquema 3 (sistemes separats per un mostrejador)

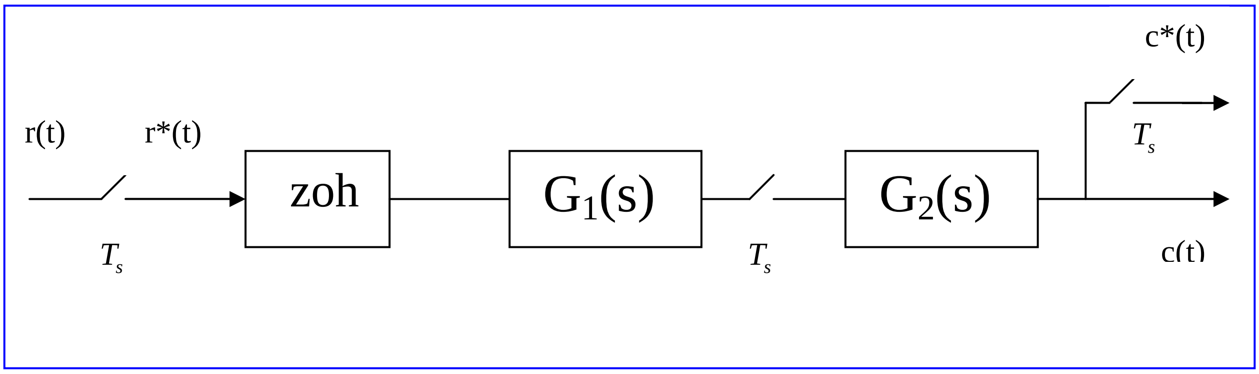


Figura Resposta

- Senyal d'entrada graó unitari al sistema $r(t) = u_s(t)$ (color blau cel)
- Senyal de sortida del sistema (color vermell)

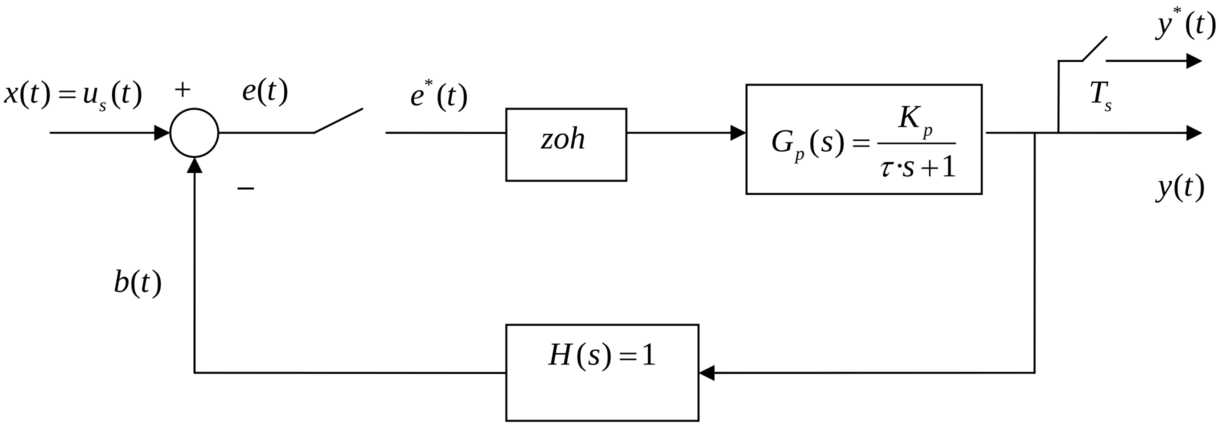
3) Interactivitat:

L'estudiant pot interaccionar amb el programa canviant el període de mostratge (T_s) amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del submenú que apareix en pantalla). A més, es pot escollir entre els diferents esquemes de blocs que hi ha en aquesta fitxa.
Per defecte apareix l'opció de l'esquema 1 que es manté premuda sempre, però l'aplicació permet superposar la resposta del sistema de l'esquema 2 i de l'esquema 3 per separat o simultàniament segons es vulgui.

- Període de Mostratge (T_s)

  El programa permet modificar el període de mostratge (T_s) col·locant-se sobre l'slider que apareix sota les opcions en forma de requadres.

1) Breu explicació teòrica:



Plantegem les equacions del sistema global:

$$Y(s)=G_p(s)\cdot G_{zoh}(s)\cdot E^*(s)$$
$$E(s)=X(s)-H(s)\cdot G_p(s)\cdot G_{zoh}(s)\cdot E^*(s)$$

Estrellem les equacions:

$$Y^*=\overline{G_p\cdot G_{zoh}}^*\cdot E^*$$
$$E^*=X^*-\overline{H\cdot G_p\cdot G_{zoh}}^*\cdot E^*$$

Transformem:

$$Y(z)=\overline{G_p\cdot G_{zoh}(z)}\cdot E(z)$$
$$E(z)=X(z)-\overline{H\cdot G_p\cdot G_{zoh}(z)}\cdot E(z)=X(z)-\overline{G_p\cdot G_{zoh}(z)}\cdot E(z)$$

Funció de transferència global:

$$W(z)=\frac{\overline{G_p\cdot G_{zoh}(z)}}{1+\overline{G_p\cdot G_{zoh}(z)}}=\frac{L(z)}{1+L(z)}$$

L(z): <u>funció de transferència de llaç obert de temps discret</u>

$$L(z)=\overline{G_p\cdot G_{zoh}(z)}=(1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$$

El fet de tenir el mantenidor d'ordre zero (zoh) a la cadena directa, no fa variar ni l'ordre ni el tipus de la funció de transferència de la cadena directa quan s'aplica la Transformada Z ($G_p(s)$ i L(z) tenen el mateix ordre i tipus).

Transformada z de l'error:

$$E(z) = \frac{1}{1+L(z)} \cdot X(z)$$

En aquest exemple, s'ha considerat que l'entrada al sistema és un senyal graó unitari $x(t) = u_s(t)$, mentre que la planta és un sistema de primer ordre de la forma $G_p(s) = \frac{K_p}{\tau \cdot s + 1}$ on la constant de temps τ s'ha pres $\tau = 1s$.

Doncs bé, en aquesta fitxa es pretén visualitzar l'efecte de alimentar el sistema. Es pot observar que quan no es realment, la resposta és estable per a qualsevol parella de valors de la constant de proporcionalitat K_p i del període de mostratge T_s .

En canvi, quan regalimant-me, la resposta no sempre és estable. Tant si es fixa un valor de la constant K_p i es varia el període de mostratge o visaves, es pot comprovar que la resposta d'inestabilitat per alguns valors determinats.

2) Pantalla:

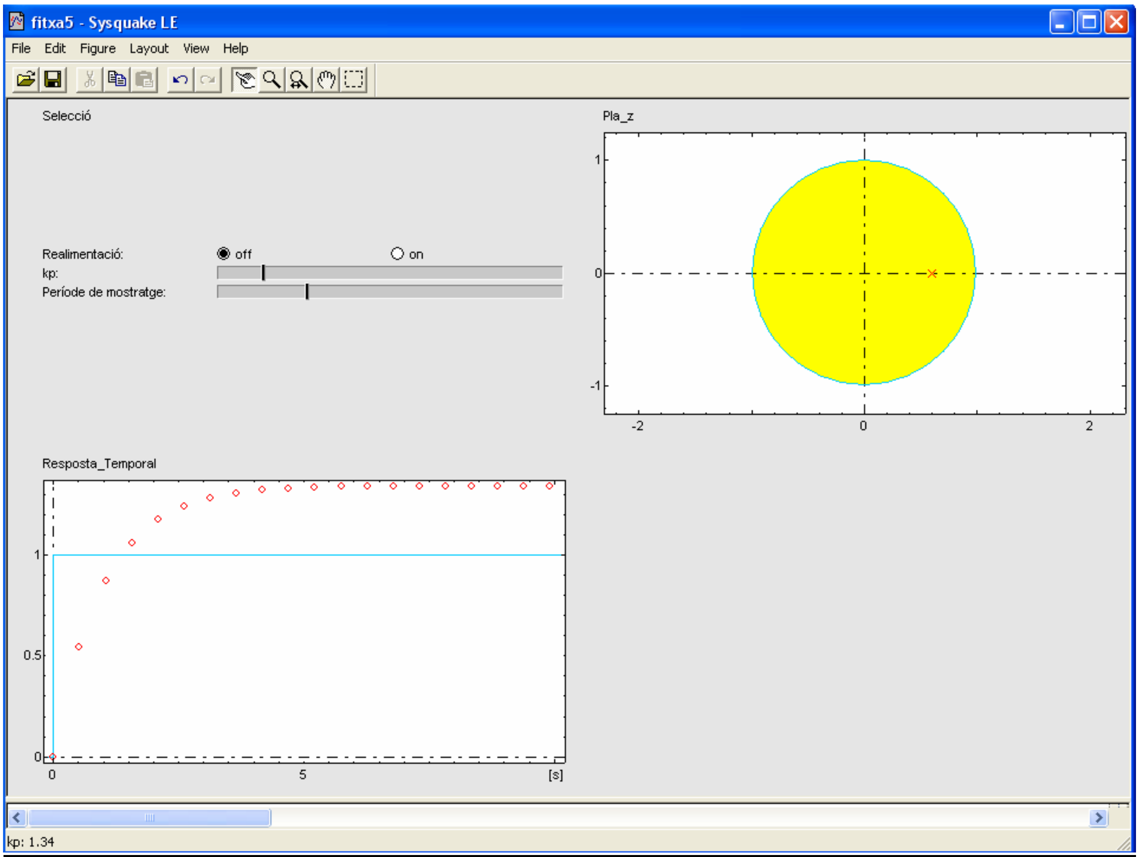


Figura Selecció

Apareixen dos botons manipula-les (posició on/of) que ens permeten activar la realimentació del sistema, juntament amb dos clisters que permeten variar el valor de la constant kp i el període de mostratge T_s. Quan s'està damunt de qualsevol dels dos clisters, apareix a la barra inferior de la pantalla el valor del paràmetre que s'estigui manipulant.

Figura Pla_z

La figura correspon a la localització dels pols del sistema de temps discret (creu de color vermell). La zona estable dels pols en el pla s'ha pintat de color groc.

Figura Resposta_Temporal

En aquesta figura es mostra la resposta temporal (cercles de color vermell) del sistema discret a una entrada graó unitari (color blau cel).

3) Interactivitat:

L'estudiant pot interaccionar amb el programa canviant 3 dels paràmetres que defineixen aquesta fitxa amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del sumen que apareix en pantalla).

Per defecte apareix l'opció Realimentació desactivada (posició of), un valor de la constant de proporcionalitat de $kp = 1$ i del període de mostratge de $T_s = 1s$.

- Realimentació (posició on/of)

  Quan el botó es troba en la posició on, estem alimentant la cadena directa del sistema global.
- Constant de proporcionalitat (kp)

  El programa permet modificar la constant de proporcionalitat (kp) col·locant-se sobre l'slider corresponent.
- Període de mostratge (T_s)

  El programa permet modificar el període de mostratge (T_s) col·locant-se sobre l'slider corresponent.

1) Breu explicació teòrica:

La resposta temporal d'un sistema de temps discret queda totalment caracteritzada a partir de la posició dels pols i zeros de la funció de transferència. En aquesta fitxa s'analitza com varia aquesta resposta a partir de la posició dels diferents pols i zeros.

2) Pantalla:

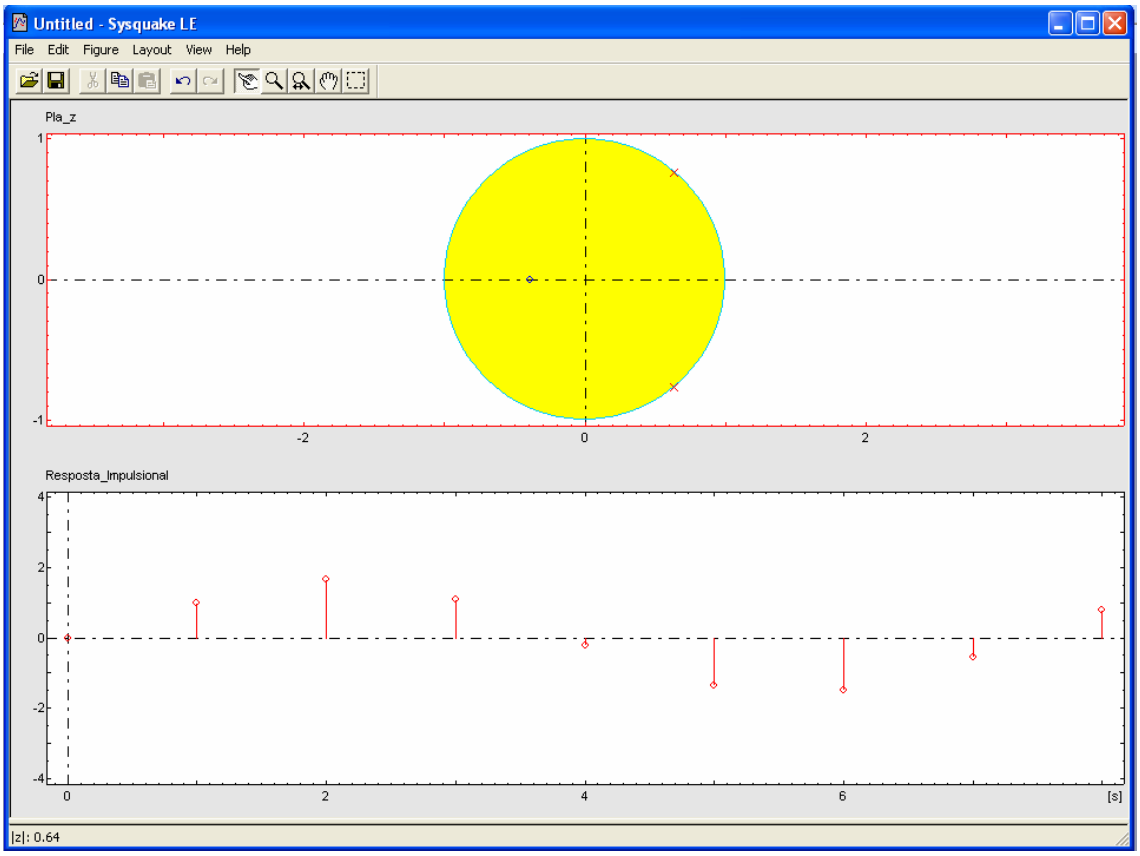


Figura Pla_z

- Apareix 1 pol real.

(fitxa6_1p_real.sq)

- Apareixen 2 pols complexes conjugats.

(fitxa6_2p_conj.sq)

- Apareixen 1 zero i 1 pol reals.

(fitxa6_1p_1z_reals.sq)

- Apareixen 2 pols complexes conjugats i 1 zero real.

(fitxa6_2p_conj_1z_real.sq)

- Apareixen 2 pols i 2 zeros complexes conjugats.

(fitxa6_2p_2z_conj.sq)

La zona estable del pla z (interior de la circumferència de radi la unitat) està pintada de color groc.
Quan s'està damunt de qualsevol dels pols o dels zeros, a la barra inferior que apareix per pantalla es pot consultar el mòdul d'aquests elements.

Figura Resposta_Impulsional

- Apareix la resposta del sistema de temps discret a una entrada impuls unitari.

Figura Resposta_Graó

- Apareix la resposta del sistema de temps discret a una entrada graó unitari.

3) Interactivitat:

L'estudiant pot interaccionar amb el programa modificant la posició dels pols i els zeros situats en el pla z amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del submenú que apareix en pantalla).

Per tal de poder visualitzar una entrada o l'altra (entrada impulsional/entrada indicial), només cal clickar amb el botó dret del mouse sobre qualsevol de les figures. Llavors apareixerà un menú, seleccionem ***Plots***> i la figura que vulguem veure per pantalla.

Figura Pla_z

- Pols discrets (cercles de color blau)

- Zeros discrets (creus de color vermell)

1) Breu explicació teòrica:

La resposta d'un sistema LTI a un senyal sinusoïdal d'entrada és una sinusoide de la mateixa freqüència però de diferent fase i amplitud,

Senyal d'entrada: $y_e = A_e \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_e)$

Senyal de sortida: $y_s = A_s \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_s)$

on l'amplitud i la fase del senyal de sortida es corresponen amb:

$$A_s = A_e \cdot |G(\exp(j \cdot \omega \cdot T_s))|$$
$$\phi_s = \phi_e + |\underline{G(\exp(j \cdot \omega \cdot T_s))}$$

Diagrama de Nyquist (diagrama polar)

El diagrama de Nyquist d'una funció de transferència, usualment la funció de transferència de llaç obert $G \cdot H(z)$ és un mapejat de la trajectòria de Nyquist en el pla z sobre el pla $G \cdot H(z)$ en coordenades polars.

La gràfica polar de $G \cdot H(z)$ s'obté fent el canvi $z = \exp(j \cdot \omega \cdot T_s)$ i variant ω des de 0 fins a l'infinit.

Diagrama de Bode

El diagrama de Bode és el gràfic de l'amplitud ($|G(\exp(j \cdot \omega \cdot T_s))|$) i de l'angle de fase ($|\underline{G(\exp(j \cdot \omega \cdot T_s))}$) contra la freqüència ω d'una funció de transferència, en general la funció de transferència de llaç obert $G(z)$.

2) <u>Pantalla:</u>

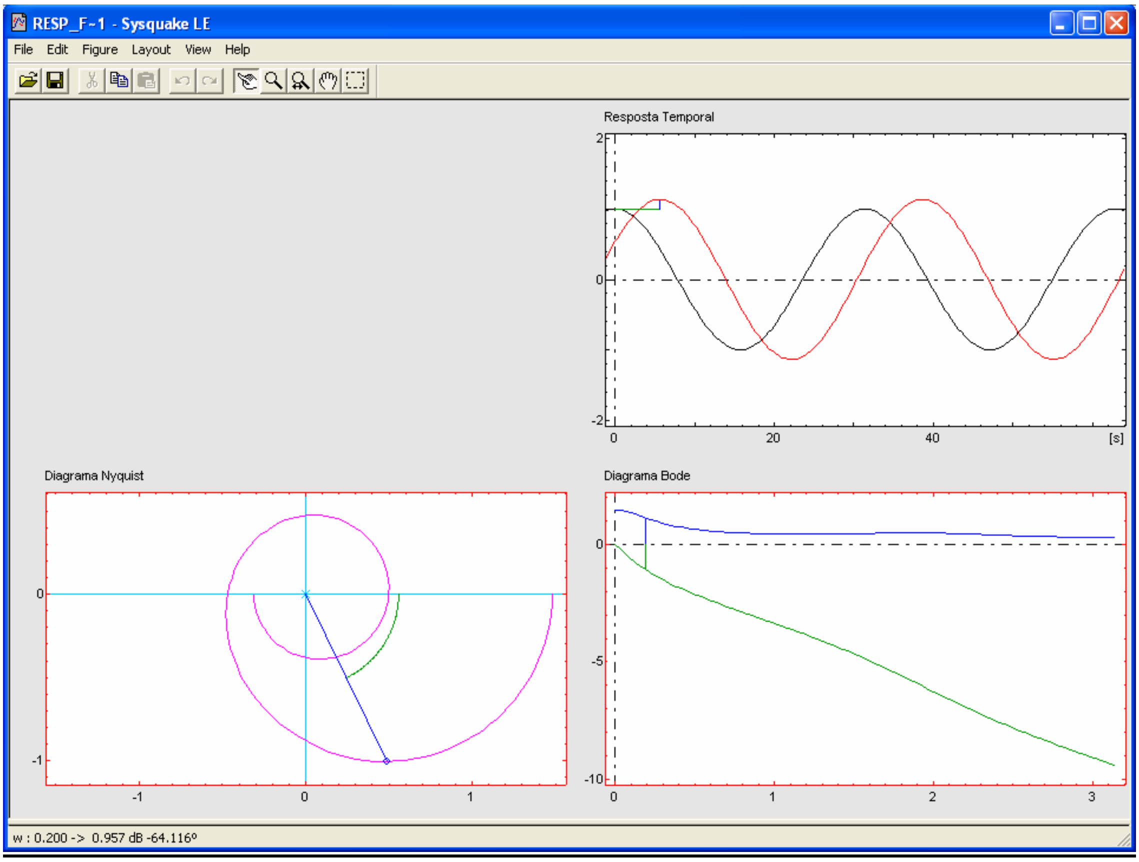


Figura Imatge

Figura Resposta Temporal

- Senyal cosinus d'entrada (color negre).
- Senyal cosinus de sortida (color vermell).
- Barra vertical indicadora del guany (color blau).
- Barra horitzontal indicadora de la fase (color verd).

Figura Diagrama Nyquist

- Diagrama de Nyquist del sistema de temps discret (color magenta)
- Vector de guany i de fase del sistema de temps discret (color blau)
- Arc indicador de la fase (color verd)

Figura Diagrama Bode

- Corba de guany del sistema de temps discret (color blau)
- Corba de fase del sistema de temps discret (color verd)
- Barres verticals indicadores del guany i la fase (color blau/verd)

3) Interactivitat:

L'estudiant pot interaccionar amb el programa modificant el guany i la fase amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del submenú que apareix en pantalla).

Figura Diagrama Nyquist

- Vector de guany i de fase del sistema de temps discret (barra de color blau).

Figura Diagrama Bode

- Barres verticals indicadores del guany i la fase a una freqüència ω [rad/s] (color blau/verd).

1) Breu explicació teòrica:

Un dels avantatges dels diagrames de Bode és que, en el domini s, la corba de guany pot aproximar-se a línies rectes (asímptotes). No obstant, aquesta característica es perd en el domini z, ja que z està relacionada amb $j\cdot\omega$ a través del canvi $z = \exp(j\cdot\omega\cdot T_s)$.

D'aquí la utilitat de la Transformació bilineal , que converteix l'interior de la circumferència de radi 1 en el semiplà esquerre del pla complexe del domini s. Així la variable z es transforma en la variable w, de manera que l'eix imaginari del pla w sigui similar a l'eix $j\cdot\omega$ del pla s.

<u>Transformació bilineal/Transformació bilineal inversa:</u>

$$z = \frac{1 + \frac{T_s}{2}\cdot w}{1 - \frac{T_s}{2}\cdot w}$$

$$w = \frac{2}{T_s}\cdot\frac{z-1}{z+1} (1)$$

La substitució de $z = \exp(j\cdot\omega\cdot T_s) = \cos(\omega\cdot T_s) + j\cdot\sin(\omega\cdot T_s)$ a (1), condueix al resultat:

$w = j\cdot\frac{2}{T_s}\cdot tag\frac{\omega\cdot T_s}{2}$. Per tant, quan z pren valors sobre el cercle unitari, w és imaginària i pot escriure's com $w = j\cdot\omega_w$, on $\omega \in [0, \frac{\omega_s}{2}]$ i $\omega_w \in [0, \infty)$.

2) <u>Pantalla:</u>

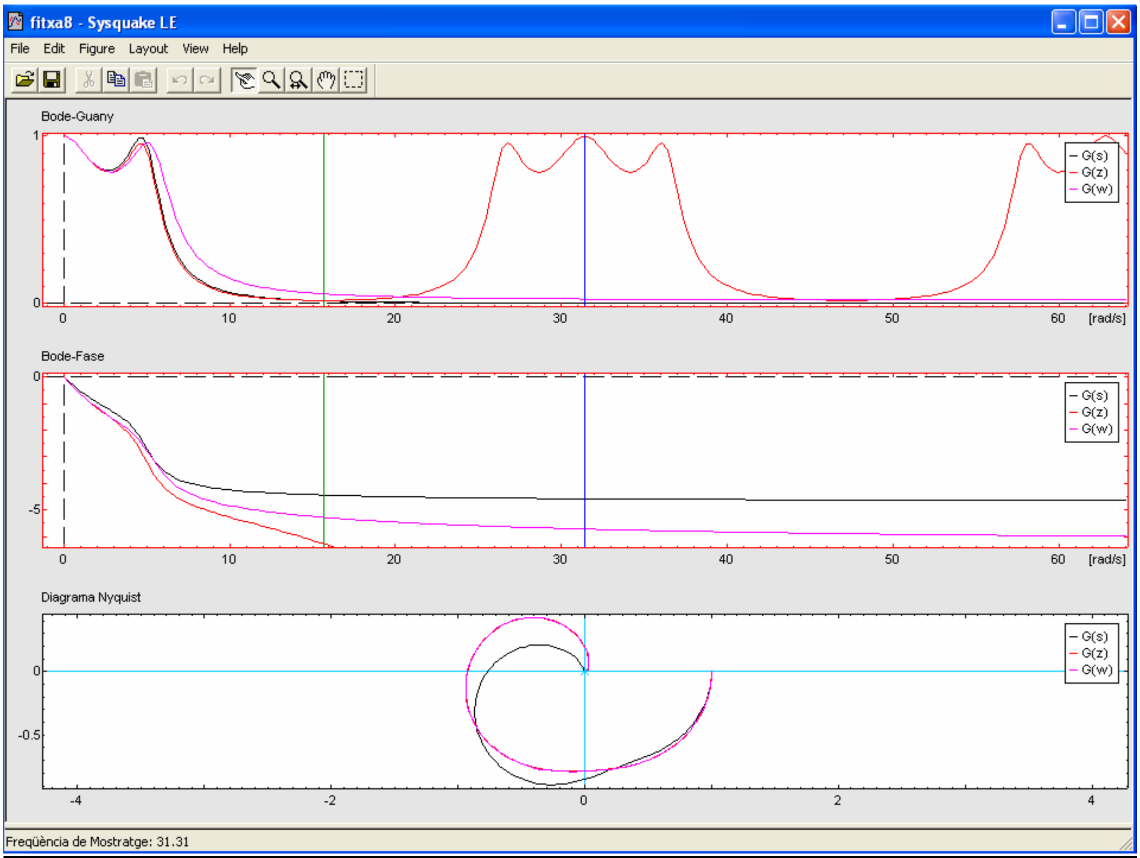


Figura Bode-Guany

- Corba de guany del sistema de temps continu $G(s)$ (color negre)
- Corba de guany del sistema de temps discret $G(z)$ (color vermell)
- Corba de guany de la transformació bilineal $G(w)$ (color magenta)
- Barra vertical indicadora de la freqüència de Nyquist $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}[rad/s]$ (color verd)
- Barra vertical indicadora de la freqüència de mostratge $\omega_s = \frac{2\cdot\pi}{T_s}[rad/s]$ (color blau)

Figura Bode-Fase

- Corba de fase del sistema de temps continu $G(s)$ (color negre)
- Corba de fase del sistema de temps discret $G(z)$ (color vermell)
- Corba de fase de la transformació bilineal $G(w)$ (color magenta)

- Barra vertical indicadora de la freqüència de Nyquist $\frac{\omega_s}{2}$ (color verd)

- Barra vertical indicadora de la freqüència de mostratge ω_s (color blau)

Figura Diagrama Nyquist

- Diagrama polar del sistema de temps continu $G(s)$ (color negre)
- Diagrama polar del sistema de temps discret $G(z)$ (color vermell)
- Diagrama polar de la transformació bilineal $G(w)$ (color magenta)

3) <u>Interactivitat:</u>

L'estudiant pot interaccionar amb el programa modificant la freqüència de mostratge (ω_s) i la freqüència de Nyquist ($\frac{\omega_s}{2}$) amb l'opció ***Manipulate*** (icona amb forma de dit del submenú que apareix en pantalla).

Figura Bode-Guany/Figura Bode-Fase

- Freqüència de Nyquist (barra vertical de color verd)

- Freqüència de mostratge (barra vertical de color blau)