UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques

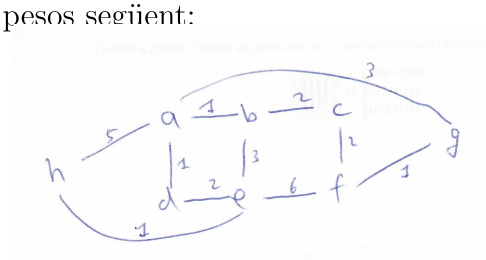
FONAMENTS MATEMÀTIQUES	EPSEM - UPC	8-1-2024

1. **a)** Calcula el màxim comú divisor del nombres 1776 i 1492, i els seus corresponents coeficients de Bézout.

b) Troba totes les solucions enteres de l'equació Diofantina $746x + 888y = 12$. (Indicació: per estalviar càlculs, relaciona-la abans amb l'apartat anterior).

c) Hi ha alguna solució entera de l'equació anterior que, a més, compleixi $x \equiv 1 \pmod{11}$ i $y \equiv -1 \pmod{11}$? En cas afirmatiu, calcula'n una.

2. Considera el graf amb pesos següent:



a) Quin és l'ordre i la mida d'aquest graf? Fes la llista dels seus graus i comprova que compleixen el handshaking lemma.

b) Calcula un camí de pes mínim de g a c passant per h; quin és aquest pes?

c) Sigui G el graf (sense pesos) resultant d'eliminar els vèrtexs c i g, i les arestes incidents a ells. Calcula el polinomi cromàtic i el nombre cromàtic de G. De quantes maneres es pot pintar G disposant de 4 colors?

3. Considera el camp escalar $f(x, y) = e^{2x}(x^2 - y^2 + 2xy - \frac{15}{2})$.

a) Calcula $\nabla f(2, 0)$ i $D_{(1,1)}f(2, 0)$. Hi ha alguna direcció v en què $D_v f(2, 0) = 280$? Raona la resposta.

b) Calcula els punts crítics de f i decideix si són màxims, mínims o punts de sella.

4. Decideix si les afirmacions següents són certes o falses, tot justificant convenientment la resposta amb un argument o un contraexemple segons convingui:

a) $2023^{2023} \equiv 1 \pmod{13}$.

b) El sistema d'equacions $\left.\begin{array}{rcr} 2x + 3y & = & 5 \\ -3x + 6y & = & -4 \end{array}\right\}$ és compatible determinat a $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

c) El coeficient $(3, 4)$ de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ elevada a 7 és $a_{3,4}^{(7)} \geqslant 5$.

d) La recta tangent a la corba de nivell 1 de la funció $f(x, y) = x^2 + \ln(xy)$ en el punt $(1, 1)$ és $y = -3x + 4$.

FONAMENTS MATEMÀTIQUES	EPSEM - UPC	8-1-2024

1. a) Calcula el màxim comú divisor del nombres 1776 i 1492, i els seus corresponents coeficients de Bézout.

Apliquem l'algorisme d'Euclides a aquests dos nombres. Fent les divisions consecutives, obtenim: $1776 = 1492 \cdot 1 + 284$, $1492 = 284 \cdot 5 + 72$, $284 = 72 \cdot 3 + 68$, $72 = 68 \cdot 1 + 4$, i $68 = 4 \cdot 17 + 0$. Per tant, $\mathrm{mcd}(1776, 1492) = \mathrm{mcd}(1492, 284) = \mathrm{mcd}(284, 72) = \mathrm{mcd}(72, 68) = \mathrm{mcd}(68, 4) = \mathrm{mcd}(4, 0) = 4$. Finalment, recolectant i multiplicant les matrius corresponents, obtenim

$$\begin{pmatrix} 1776 & 1492 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1776 & 1492 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1776 & 1492 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -21 \\ -19 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1776 & 1492 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -21 & * \\ 25 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, els coeficients de Bézout són -21 i 25. De fet, $-21 \cdot 1776 + 25 \cdot 1492 = 4$.

b) Troba totes les solucions enteres de l'equació Diofantina $746x + 888y = 12$. (Indicació: per estalviar càlculs, relaciona-la abans amb l'apartat anterior).

Per resoldre aquesta equació necessitem calcular $\mathrm{mcd}(746, 888)$. Però aquests dos nombres són la meitat dels de l'exercici anterior (en ordre contrari); com que ja sabem que $\mathrm{mcd}(1776, 1492) = 4$, simplificant un 2 obtenim que $\mathrm{mcd}(746, 888) = 2$. A més, podem aprofitar també els coeficients de Bézout: com que, de l'apartat anterior, $-21 \cdot 1776 + 25 \cdot 1492 = 4$ deduïm que $25 \cdot 746 - 21 \cdot 888 = 2$.

Com que el terme independent, 12, és múltiple de 2 l'equació tindrà solucions enteres. Una d'elles l'obtenim multiplicant per $12/2 = 6$ la igualtat anterior: $6 \cdot 25 \cdot 746 - 6 \cdot 21 \cdot 888 = 6 \cdot 2$ és a dir $150 \cdot 746 - 126 \cdot 888 = 12$, $x = 150$, $y = -126$. A més, per teoria, sabem que totes les altres solucions seran de la forma

$$\left.\begin{array}{l} x = 150 + \frac{888}{2}\lambda = 150 + 444\lambda \\ y = -126 - \frac{746}{2}\lambda = -126 - 373\lambda \end{array}\right\}, \ \lambda \in \mathbb{Z}.$$

c) Hi ha alguna solució entera de l'equació anterior que, a més, compleixi $x \equiv 1 \pmod{11}$ i $y \equiv -1 \pmod{11}$? En cas afirmatiu, calcula'n una.

Hem de mirar si hi ha alguna $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} x = 150 + 444\lambda \equiv 1 \pmod{11} \\ y = -126 - 373\lambda \equiv -1 \pmod{11} \end{array}\right\}$$

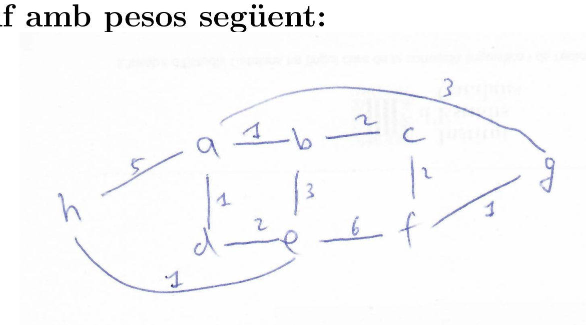
Rebaixant les equacions mòdul 11 tenim

$$\left.\begin{array}{l} 7 + 4\lambda \equiv 1 \pmod{11} \\ 6 + 1\lambda \equiv -1 \pmod{11} \end{array}\right\}$$

De la segona equació, $\lambda \equiv -7 \equiv 4 \pmod{11}$, que satisfà també la primera, $7+4\cdot 4 \equiv 7+16 \equiv 23 \equiv 1 \pmod{11}$. Per tant, la solució demanada és

$$\left.\begin{array}{l} x = 150 + 444\cdot 4 = 1926 \equiv 1 \pmod{11} \\ y = -126 - 373\cdot 4 = -1618 \equiv -1 \pmod{11} \end{array}\right\}$$

2. Considera el graf amb pesos següent:



a) Quin és l'ordre i la mida d'aquest graf? Fes la llista dels seus graus i comprova que compleixen el handshaking lemma.

Aquest graf té ordre 8 (els 8 vèrtexs són $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$) i mida 11 (les 11 arestes són $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{a, g\}, \{f, g\}, \{a, h\}, \{e, h\}\}$). La llista de graus és $\mathrm{gr}(a) = 4$, $\mathrm{gr}(b) = 3$, $\mathrm{gr}(c) = 2$, $\mathrm{gr}(d) = 2$, $\mathrm{gr}(e) = 4$, $\mathrm{gr}(f) = 3$, $\mathrm{gr}(g) = 2$, i $\mathrm{gr}(h) = 2$. Efectivament es compleix el handshaking lemma:

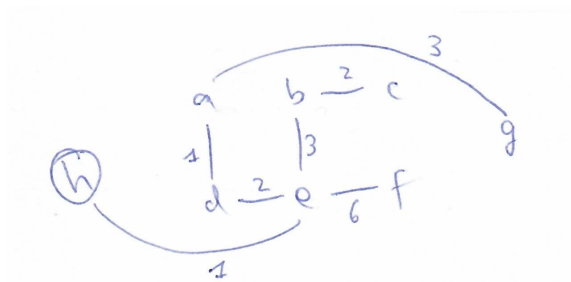
$$22 = 4 + 3 + 2 + 2 + 4 + 3 + 2 + 2 = \sum_{v\in V} \mathrm{gr}(v) = 2 \cdot |E| = 2 \cdot 11 = 22.$$

b) Calcula un camí de pes mínim de g a c passant per h; quin és aquest pes?

Apliquem l'algorisme de Dijkstra centrat al vèrtex h:

a	b	c	d	e	f	g	$\underline{h}$	
5	∞	∞	∞	$\underline{1}$	∞	∞		$h-e$
5	4	∞	$\underline{3}$		7	∞		$e-d$
$\underline{4}$	4	∞			7	∞		$d-a$
	$\underline{4}$	∞			7	7		$e-b$
		$\underline{6}$			7	7		$b-c$
					$\underline{7}$	7		$e-f$
						$\underline{7}$		$a-g$

Això significa que l'arbre de camins de pes mínim del vèrtex h a tots els altres vèrtex és



Per tant, un camí de pes mínim de g a c passant per h serà l'empalme d'un camí de pes mínim de g a h seguit d'un camí de pes mínim de h a g:

$$g \overset{3}{--} a \overset{1}{--} d \overset{2}{--} e \overset{1}{--} h \overset{1}{--} e \overset{3}{--} b \overset{2}{--} c.$$

Aquest pes mínim val 13.

c) Sigui G el graf (sense pesos) resultant d'eliminar els vèrtexs c i g, i les arestes incidents a ells. Calcula el polinomi cromàtic i el nombre cromàtic de G. De quantes maneres es pot pintar G disposant de 4 colors?

Aplicant la fórmula d'eliminar/contreure arestes a l'aresta $\{a,h\}$, obtenim $P_G(n) = P_{G^{\{a,h\}}}(n) - P_{G_{\{a,h\}}}(n)$. Ara bé, $G^{\{a,h\}}$ consisteix en un graf C_4 (format pels vèrtexs $\{a,b,d,e\}$) més dues arestes noves unint e amb dos vèrtex de grau 1, f i h; per tant, el seu polinomi cromàtic és el de C_4 multiplicat per $(n-1)^2$:

$$P_{G^{\{a,h\}}}(n) = P_{C_4}(n)(n-1)^2 = n(n-1)(n^2-3n+3)(n-1)^2 = n(n-1)^3(n^2-3n+3).$$

Per altra banda, podem calcular el polinomi cromàtic de $G_{\{a,h\}}$ directament: n possibilitats pel vèrtex a, $n-1$ pel b, $n-2$ per l'e, $n-2$ pel d, i finalment $n-1$ possibilitats per l'f; això fa un total de $P_{G_{\{a,h\}}}(n) = n(n-1)(n-2)^2(n-1) = n(n-1)^2(n-2)^2$. Concloem que

$$P_G(n) = P_{G^{\{a,h\}}}(n) - P_{G_{\{a,h\}}}(n) = n(n-1)^3(n^2-3n+3) - n(n-1)^2(n-2)^2 =$$

$$= n(n-1)^2\big(n^3 - 3n^2 + 3n - n^2 + 3n - 3 - n^2 + 4n - 4\big) =$$
$$= n(n-1)^2(n^3 - 5n^2 + 10n - 7).$$

Com que $P_G(0) = 0$, $P_G(1) = 0$ i $P_G(2) = 2 \cdot 1^2 \cdot (8 - 20 + 20 - 7) = 2 \neq 0$, el nombre cromàtic de G és $\chi(G) = 2$ (cosa que es veu a simple vista pintant, per exemple, els vèrtexs a, e blancs i els vèrtexs d, h, b, f negres). Finalment, disposant de $n = 4$ colors hi ha $P_G(4) = 4 \cdot 3^2 \cdot (64 - 80 + 40 - 7) = 612$ maneres diferents de pintar G.

3. Considera el camp escalar $\boldsymbol{f(x,y) = e^{2x}(x^2 - y^2 + 2xy - \frac{15}{2})}$.

a) Calcula $\boldsymbol{\nabla f(2,0)}$ i $\boldsymbol{D_{(1,1)} f(2,0)}$. Hi ha alguna direcció $\boldsymbol{v}$ en què $\boldsymbol{D_v f(2,0) = 280}$? raona la resposta.

Primer calculem les derivades pacials:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}(x^2 - y^2 + 2xy - \frac{15}{2}) + e^{2x}(2x + 2y) = 2e^{2x}(x^2 - y^2 + 2xy + x + y - \frac{15}{2}),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}(-2y + 2x).$$

Llavors, $\nabla f(2,0) = \big(2e^4(4+2-\frac{15}{2}),\, 4e^4\big) = (-3e^4,\, 4e^4)$. Per tant, com que $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$, tenim que

$$D_{(1,1)} f(2,0) = \nabla f(2,0) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = (-3e^4,\, 4e^4) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{e^4}{\sqrt{2}}.$$

Com que la derivada direccional és sempre màxima en la direcció del gradient, i com que $\|(-3e^4, 4e^4)\| = e^4\sqrt{9 + 16} = 5e^4$, tenim que aquest valor màxim en el punt $(2,0)$ és

$$D_{(-3e^4,4e^4)} f(2,0) = \nabla f(2,0) \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = (-3e^4,\, 4e^4) \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 5e^4 \sim 272.99.$$

Per tant, no hi ha cap direcció v en què $D_v f(2,0) = 280$.

b) Calcula els punts crítics de $\boldsymbol{f}$ i decideix si són màxims, mínims o punts de sella.

Els punts crítics són els que anul·len el gradient:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= 2e^{2x}(x^2 - y^2 + 2xy + x + y - \tfrac{15}{2}) = 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= e^{2x}(-2y + 2x) = 0 \end{aligned}\right\}$$

De la segona equació deduïm $y = x$ i, substituint a la primera, $x^2 - x^2 + 2x^2 + x + x - \frac{15}{2} = 0$, és a dir, $4x^2 + 4x - 15 = 0$. Resolent aquesta equació de segon grau obtenim

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-15)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 16}{8} = \begin{cases} 3/2, \\ -5/2. \end{cases}$$

Per tant, f té dos punts crítics, $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ i $(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$. Per estudiar si són màxims, mínims o punts de sella, necessitem les derivades segones i el Hessià:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 4e^{2x}\big(x^2 - y^2 + 2xy + x + y - \frac{15}{2}\big) + 2e^{2x}(2x + 2y + 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{2x}(-2y + 2x + 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = e^{2x}(-2).$$

Així,

$$Hf\Big(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 4e^3\big(\frac{9}{2} + 3 - \frac{15}{2} + 3 + \frac{1}{2}\big) & 2e^3 \\ 2e^3 & -2e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14e^3 & 2e^3 \\ 2e^3 & -2e^3 \end{pmatrix},$$

$$Hf\Big(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 4e^{-5}\big(\frac{25}{2} - 5 - \frac{15}{2} - 5 + \frac{1}{2}\big) & 2e^{-5} \\ 2e^{-5} & -2e^{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18e^{-5} & 2e^{-5} \\ 2e^{-5} & -2e^{-5} \end{pmatrix}.$$

La primera matriu té un nombre positiu i un negatiu a la diagonal per tant, és indefinida ($\odot$) i el punt $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ és un punt de sella de f. La segona matriu té la primera entrada negativa i el determinant $36e^{-10} - 4e^{-10} = 32e^{-10}$ positiu per tant és definida negativa ($\ominus$) i el punt $(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ és un màxim relatiu.

4. Decideix si les afirmacions següents són certes o falses, tot justificant convenientment la resposta amb un argument o un contraexemple segons convingui:

a) $\mathbf{2023^{2023} \equiv 1 \pmod{13}}$.

FALS. Com que 2023 dividit entre 13 dóna 155 de quocient i 8 de residu, tenim que

$$2023^{2023} = 8^{2023} = (2^3)^{2023} = 2^{6069} \pmod{13}.$$

Com que 13 és primer, pel petit Teorema de Fermat $2^{12} = 1 \pmod{13}$ deduïm que

$$2^{6069} = 2^{12\cdot 505+9} \equiv 2^9 = 512 \equiv 5 \not\equiv 1 \pmod{13}.$$

b) El sistema d'equacions $\left.\begin{array}{rcr} \boldsymbol{2x+3y} & = & \mathbf{5} \\ \boldsymbol{-3x+6y} & = & \mathbf{-4} \end{array}\right\}$ és compatible determinat a $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

FALS. La segona equació és el doble de la primera mòdul 7: $2(2x - 4y) = 4x - 8y = -3x - y = -3x + 6y \pmod 7$ i $2 \cdot 5 = 10 = 3 = -4 \pmod 7$. Per tant, el sistema és equivalent a la segona equació sola $-3x - y = -4$, que té per solució $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $y = -3x + 4$. Per tant, és compatible indeterminat. També es pot veure ensenyant directament dues solucions: $x = 0$, $y = 4$, i $x = 1$, $y = 1$, per exemple.

Alternativament, el determinant de coeficients és zero mòdul 7,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 9 = 21 = 0 \pmod 7,$$

per tant la matriu de coeficients té rang 1. I l'ampliada també té rang 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -8+15 = 7 = 0 \pmod 7, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -12-30 = -42 = 0 \pmod 7,$$

per tant el sistema és compatible indeterminat.

c) El coeficient $(3,4)$ de la matriu $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&1&0 \\ 1&0&1&0 \\ 1&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$ elevada a 7 és $a_{3,4}^{(7)} \geqslant 5$.

CERT. Aquesta matriu és la matriu d'incidència del graf G de quatre vèrtexs $V = \{1,2,3,4\}$ i arestes $E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{3,4\}\}$, que és un triangle de vèrtexs $\{1,2,3\}$ amb una aresta sortint cap al vèrtex 4 (de grau 1). Si l'elevem a 7, el coeficient $(3,4)$ indicarà la quantitat de camins en G que van del vèrtex 3 al 4 i que tenen longitud 7. Com que a simple vista ja en veiem cinc de diferents,

$$3 - -1 - -2 - -3 - -1 - -2 - -3 - -4,$$

$$3 - -1 - -2 - -3 - -2 - -1 - -3 - -4,$$
$$3 - -2 - -1 - -3 - -1 - -2 - -3 - -4,$$
$$3 - -2 - -1 - -3 - -2 - -1 - -3 - -4,$$
$$3 - -1 - -2 - -1 - -3 - -2 - -3 - -4,$$

(i se'n poden fer molts més!) deduïm que $a_{3,4}^{(7)} \geqslant 5$.

d) La recta tangent a la corba de nivell 1 de la funció $f(x,y) = x^2 + \ln(xy)$ en el punt $(1,1)$ és $y = -3x + 4$.

CERT. Les derivades parcials de f són

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{y}{xy} = 2x + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y},$$

i el vector gradient de f en el punt $(1,1)$ és $\nabla f(1,1) = (2+1,\ 1) = (3,1)$. Sabem que aquest vector és sempre perpendicular a la corba de nivell que passa pel punt $(1,1)$

(que efectivament és la corba de nivell $f(1,1) = 1 + \ln(1) = 1$); llavors, un vector tangent serà $(1,-3)$ i el pendent d'aquesta recta tangent -3. Per tant, es tracta de la recta $y - 1 = -3(x-1)$, és a dir, $y = -3x + 4$.

Alternativament, es pot fer aquest problema directament, sense usar res de càlcul en varies variables: la corba de nivell 1 de f té per equació $f(x,y) = x^2 + \ln(xy) = 1$ d'on, aïllant la y, obtenim $xy = e^{1-x^2}$ i $y = \frac{e^{1-x^2}}{x}$. Ara simplement hen de calcular l'equació de la recta tangent a aquesta corba en el punt $x = 1$ (i $y = \frac{e^{1-1^2}}{1} = 1$). Com que

$$y' = \frac{-2xe^{1-x^2}x - e^{1-x^2}}{x^2} = -\frac{2x^2+1}{x^2}e^{1-x^2},$$

el pendent al punt $x = 1$ és $y'(1) = -3$ i la recta tangent $y - 1 = -3(x-1)$, és a dir, $y = -3x + 4$.