

2 Magnetisme

2.1 Acció del camp magnètic.

2.1.1 Camp magnètic \vec{B} (inducció magnètica)

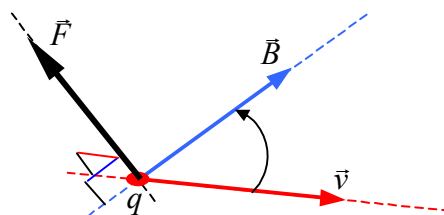
Situació experimental:

Apropem un imant al tub d'imatge d'un televisor. Efecte observat: distorsió de la imatge. Explicació del fenomen: L'imant crea una pertorbació física en l'espai que l'envolta que afecta a les càrregues elèctriques que es mouen dins del tub del televisor.

A aquesta pertorbació l'anomenem *camp magnètic* i el designem per \vec{B} .

2.1.2 Llei de Lorentz. Força sobre càrregues en moviment.

Llei de Lorentz: si una càrrega q es mou amb velocitat \vec{v} dins d'un camp magnètic \vec{B} experimentarà una força



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$[B] = \frac{N}{C \frac{m}{s}} = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} \equiv T \text{ (Tesla)}$$

$$1 T = 10^4 G \text{ (Gauss)}$$

Segons la definició, la força és perpendicular a la velocitat de la càrrega i al camp magnètic;

$$\vec{F} \perp \vec{v} \quad \text{i} \quad \vec{F} \perp \vec{B} \quad \left(\vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{i} \quad \vec{F} \cdot \vec{B} = 0 \right)$$

Ja que \vec{F} és perpendicular a la velocitat de la partícula \vec{v} aquesta força no pot fer treball i per tant no pot modificar el mòdul de la velocitat de la partícula.

Exemple:

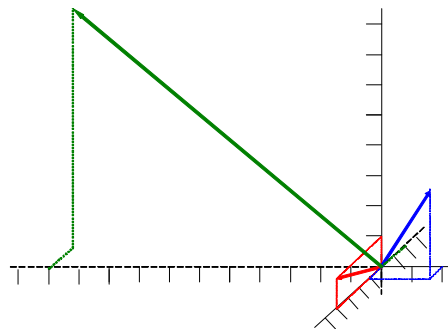
Determineu la força que experimenta una càrrega de $10^{-5} C$ que porta una velocitat $\vec{v} = (4\vec{i} + \vec{k}) \text{ m/s}$ si es

mou dins del camp magnètic $\vec{B} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) T$

$$\vec{F} = 10^{-5} \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 10^{-5} (\vec{i} \cdot 0 \cdot 3 + \vec{j} \cdot 1 \cdot 1 + \vec{k} \cdot 4 \cdot 2 - \vec{k} \cdot 0 \cdot 1 - \vec{j} \cdot 4 \cdot 3 - \vec{i} \cdot 1 \cdot 2)$$

$$= 10^{-5} (-2\vec{i} - 11\vec{j} + 8\vec{k}) N$$



EXERCICI: calculeu el productes escalars següents, $\vec{F} \cdot \vec{v}$ i $\vec{F} \cdot \vec{B}$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = 10^{-5} (-2\vec{i} - 11\vec{j} + 8\vec{k}) \cdot (4\vec{i} + \vec{k}) = 10^{-5} (-8 + 8) = 0$$

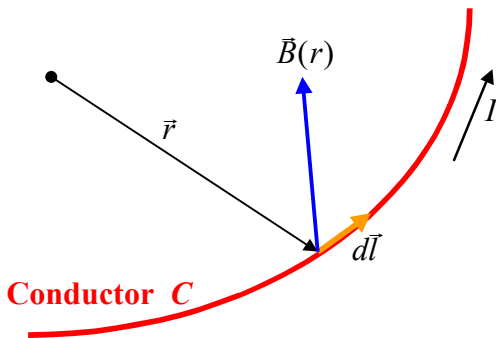
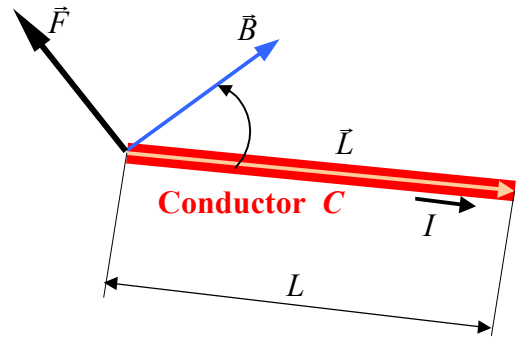
$$\vec{F} \cdot \vec{B} = 10^{-5} (-2\vec{i} - 11\vec{j} + 8\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 10^{-5} (-2 - 22 + 24) = 0$$

2.1.3 Força sobre corrents

Sigui un conductor recte de longitud L , pel que circula una intensitat I , dintre d'un camp magnètic \vec{B} constant. El conductor experimenta una força magnètica:

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

on el vector \vec{L} té per mòdul la longitud del conductor (L) i la direcció i sentit definit per la intensitat de corren que hi circula.



Si el conductor no és recte i/o el camp no és constant, la força que experimenta un element infinitesimal del circuit dl que el podem imaginar recte i on el camp si que és constant serà

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

i la força total que experimenta el conductor serà la suma de totes les forces elementals

$$\vec{F} = \int_{\text{Conductor}} d\vec{F} = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Exemple: moment sobre una espira de corrent

Recordatori de Física 1:

Moment d'una força

Definim el moment $\vec{\tau}_o$ d'una força \vec{F} respecte del punt O com:

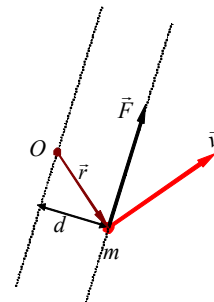
$$\vec{\tau}_o \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

Propietat: $\vec{\tau}_o \equiv \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow |\vec{\tau}_o| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = F \cdot d$

on d és la distància de la recta d'acció del vector al punt O , d'on es dedueix:

el moment d'un vector no canvia si es desplaça el vector al llarg de la seva recta d'acció

(el moment està ben definit per a vectors lliscants)



Parell de vectors:

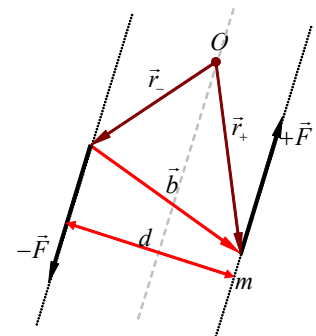
és un sistema de dos vectors iguals però de sentits contraris no alineats, com $+\vec{F}$ i $-\vec{F}$

El moment del parell $\vec{\tau}_\pm$ respecte un punt qualsevol O és

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_\pm &\equiv \vec{r}_+ \times \vec{F} + \vec{r}_- \times (-\vec{F}) = \vec{r}_+ \times \vec{F} - \vec{r}_- \times \vec{F} \\ &= (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F} = \vec{b} \times \vec{F} \end{aligned}$$

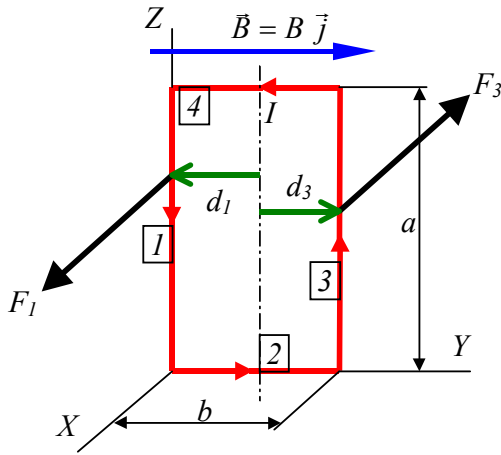
el moment d'un parell és un vector:

- de mòdul igual a $\vec{\tau}_\pm = \vec{b} \times \vec{F} \Rightarrow |\vec{\tau}_\pm| = |\vec{b}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = F \cdot d$; el producte del mòdul d' F per la distància d entre les rectes d'acció de $+\vec{F}$ i $-\vec{F}$
- de direcció perpendicular al pla determinat pel parell
- el sentit el donat pel gir (+ o antihorari o bé - o horari) suggerit pel parell segons la regla del cargol



El moment d'un parell de vectors és una propietat característica del parell, és a dir sempre és el mateix, independentment de l'origen de moments considerat.

Càlcul de les forces que actuen sobre cada costat. $\vec{F}_i = I \vec{L}_i \times \vec{B}$



Costat 1:

$$\vec{L}_1 = a (-\vec{k}); \vec{F}_1 = I \vec{L}_1 \times \vec{B} = I \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I(a B \vec{i})$$

Costat 2: $\vec{L}_2 = b (\vec{j}); \vec{L}_2 \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_2 = 0$

Costat 3: $\vec{L}_3 = a (\vec{k}); \vec{F}_3 = I \vec{L}_3 \times \vec{B} = I \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} = -I(a B \vec{i})$

Costat 4: $\vec{L}_4 = b (-\vec{j}); \vec{L}_4 \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_4 = 0$

La força total que actua sobre l'espira serà la suma de les forces que actuen sobre cada un dels costats: $\vec{F}_{Total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = I(a B \vec{i}) - I(a B \vec{i}) = 0$, per tant aquesta força és incapaç de desplaçar l'espira,

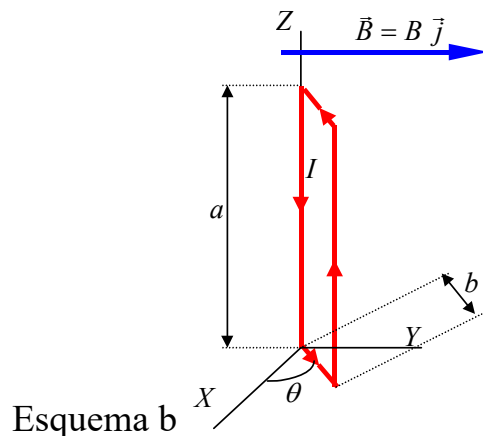
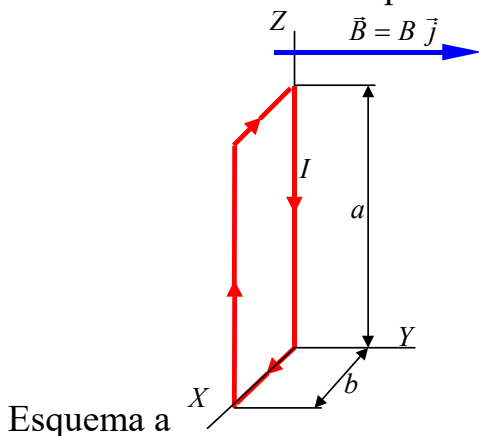
$$\vec{F}_{Total} = m \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_o (= 0) \text{ però si que pot fer que tombi. El}$$

valor del moment de les forces $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = I \vec{\alpha}$ dona el valor de l'acceleració angular del sistema.

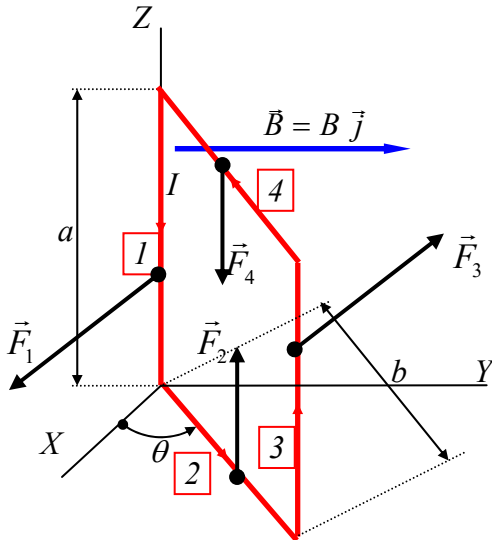
$$I \vec{\alpha} = \vec{M} = \vec{d}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{d}_3 \times \vec{F}_3 = d_1 F_1 \vec{k} + d_3 F_3 \vec{k} = \frac{b}{2} I a B \vec{k} + \frac{b}{2} I a B \vec{k} = I a b B \vec{k}$$

Exercicis:

Calculeu el moment sobre l'espira dels dibuixos.



ESQUEMA B



Càlcul de les forces que actuen sobre cada costat $\vec{F}_i = I \vec{L}_i \times \vec{B}$

Costat 1: $\vec{L}_1 = a (-\vec{k})$; $\vec{F}_1 = I \vec{L}_1 \times \vec{B} = I \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} = I(a B \vec{i})$

Costat 3:

$\vec{L}_3 = a (\vec{k})$; $\vec{F}_3 = I \vec{L}_3 \times \vec{B} = I \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} = -I(a B \vec{i})$ $[\vec{L}_3 = -\vec{L}_1 \Rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{F}_1]$

Costat 2:

$\vec{L}_2 = b (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$; $\vec{F}_2 = I \vec{L}_2 \times \vec{B} = I b \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} = I b B \cos \theta \vec{k}$

Costat 4: $\vec{L}_4 = -\vec{L}_2 \Rightarrow \vec{F}_4 = -\vec{F}_2 = -I b B \cos \theta \vec{k}$

La força total que actua sobre l'espira serà la suma de les forces que actuen sobre cada un dels costats: $\vec{F}_{Total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$, per tant aquesta força és incapaç de desplaçar l'espira.

El valor del moment \vec{M} de les forces $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = I \vec{\alpha}$ dona el valor de l'acceleració angular del sistema i com que és el producte per un parell de forces, serà el producte del mòdul de la força per la distància de les línies d'acció d'aquestes.

$$M = F_1 \cdot b \sin \theta = I a b B \sin \theta$$

2.1.4 Moviment de càrregues puntuals a l'interior d'un camp magnètic

Ja que \vec{F} és perpendicular a la velocitat de la partícula \vec{v} aquesta força no pot fer treball i per tant no pot modificar el valor del mòdul de la velocitat $|\vec{v}| = \text{Const.}$

Si la velocitat de la càrrega és perpendicular al camp magnètic:

$$|\vec{F}| = q |\vec{v} \times \vec{B}| \Rightarrow F = q v B$$

que és perpendicular a la velocitat i per tant implica un moviment circular.

$$F = m \frac{v^2}{r} = q v B \Rightarrow r = \frac{m v}{q B}$$

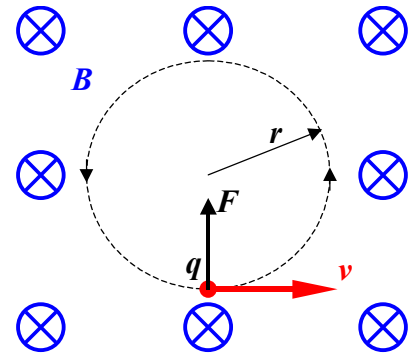
El temps T que la càrrega trigarà en fer una volta completa (període) val

$$v = \frac{e}{T} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{q B}$$

la freqüència ν (nº de voltes completes per unitat de temps) del moviment i la velocitat angular ω seran

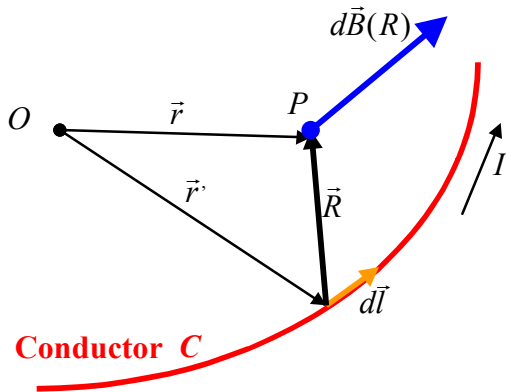
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{q B}{2\pi m} \qquad \omega = \frac{v}{r} = \frac{q B}{m}$$

on es veu que $\omega = 2\pi\nu$.



2.2 Generació de camp magnètic.

2.2.1 Llei de Biot-Savart



Un element de corrent $I d\vec{l}$ produeix un camp magnètic $d\vec{B}$ al punt P :

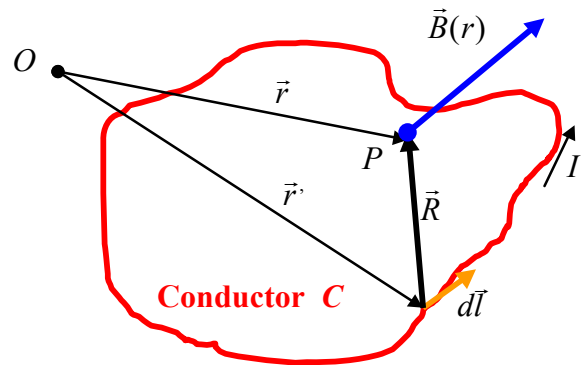
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^2};$$

on $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$

μ_0 rep el nom de *permeabilitat magnètica del buit*.

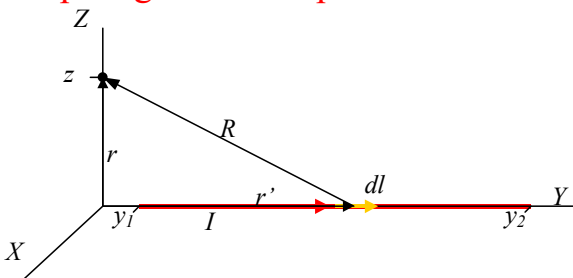
La inducció magnètica total al punt P creada per un circuit **tancat** C serà

$$\vec{B}(r) = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C(\text{sobre } r')} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$



Exemple:

Camp magnètic creat per un corrent rectilini.



$$\vec{r} = z \vec{k}; \quad \vec{r}' = y \vec{j}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z \vec{k} - y \vec{j}; \quad R = \sqrt{y^2 + z^2}$$

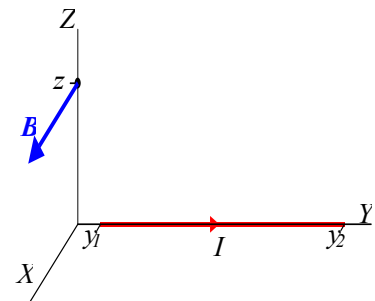
$$d\vec{l} = dy \vec{j}$$

$$d\vec{l} \times \vec{R} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & -y & z \end{pmatrix} = z dy \vec{i}$$

$$\vec{B}(r) = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C(\text{sobre } r')} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{z dy \vec{i}}{(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{z^2} \left[\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 + z^2}} - \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + z^2}} \right)$$

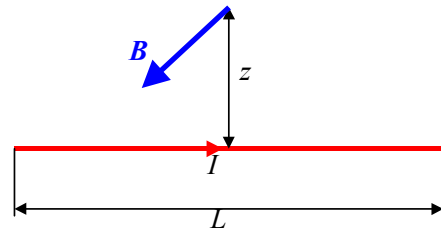
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{z dy \vec{i}}{(y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 + z^2}} - \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + z^2}} \right) \vec{i}$$



Casos particulars:

i) $y_1 = -L/2; y_2 = L/2$

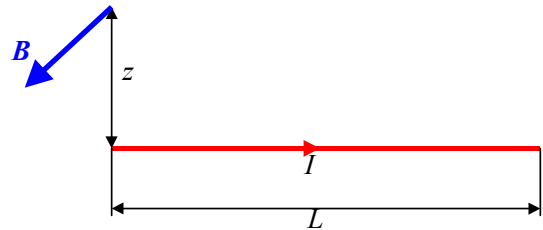
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \frac{L}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4z^2}}$$



i') $L = \infty$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}$

ii) $y_1 = 0; y_2 = L$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}}$$

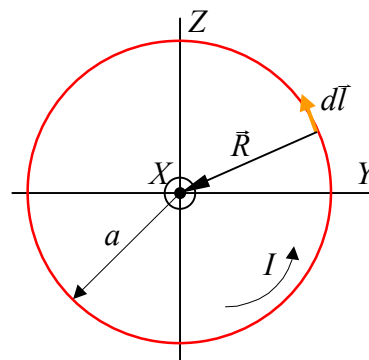


ii') $L = \infty$ $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}$

Exemple: Camp magnètic creat per una espira:

Al seu centre Situem l'espira, de radi a , al pla Y-Z. Per qualsevol punt de l'espira els vectors $d\vec{l}$ i \vec{R} són perpendiculars i el seu producte vectorial té la direcció positiva de l'eix X, per tant

$$d\vec{l} \times \vec{R} = |d\vec{l} \times \vec{R}| \vec{i} = dl a \vec{i}$$

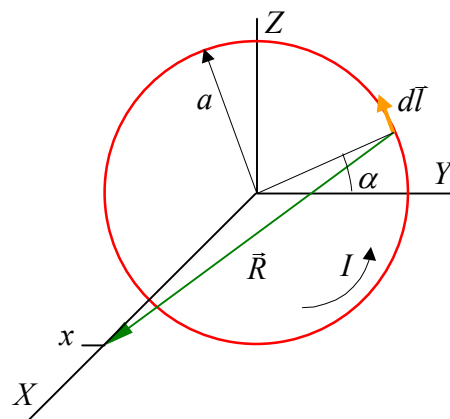


i el camp serà:

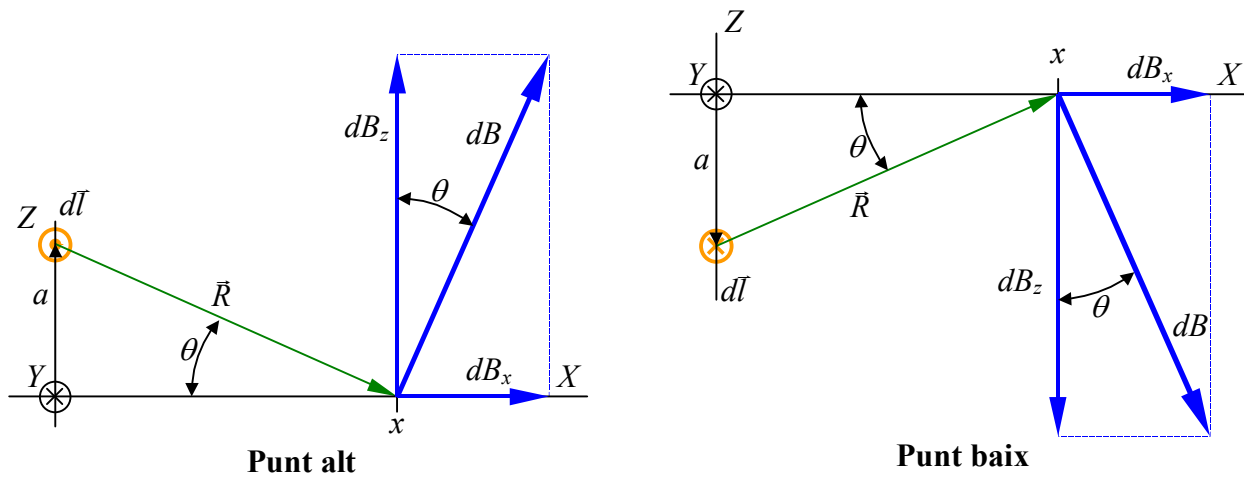
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_c d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{|d\vec{l} \times \vec{R}| \vec{i}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{dl a \vec{i}}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int_c dl \vec{i} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} 2\pi a \vec{i} = \frac{\mu_0 I}{2 a} \vec{i} \end{aligned}$$

A un punt qualsevol del seu eix

Situem l'espira, de radi a , al pla Y-Z. Per qualsevol punt de l'espira els vectors $d\vec{l}$ i \vec{R} són perpendiculars. Es deixa com exercici el comprovar que: $d\vec{l} = dl(-\sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k})$ i $\vec{R} = x \vec{i} - a(\cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k})$ i per tant $d\vec{l} \cdot \vec{R} = 0$.



Per tal de veure les possibles simetries que presenta el problema, estudiarem els punts més alt i més baix de la circumferència



les components verticals del camp s'anul·len, per tant només ens caldrà sumar les components horitzontals, que en funció de l'angle θ ens dona $dB_x = dB \sin \theta = dB a/R$

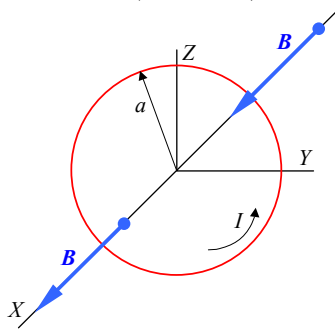
$$dB = |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{l} \times \vec{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl R}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{a^2 + x^2}$$

$$dB_x = dB \frac{a}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{a^2 + x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} dl$$

i pel camp total, que només tindrà component horitzontal, tindrem

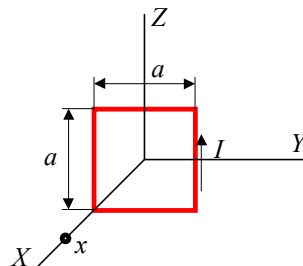
$$B = B_x = \int_C dB_x = \int_C \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \int_C dl = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} 2\pi a$$

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

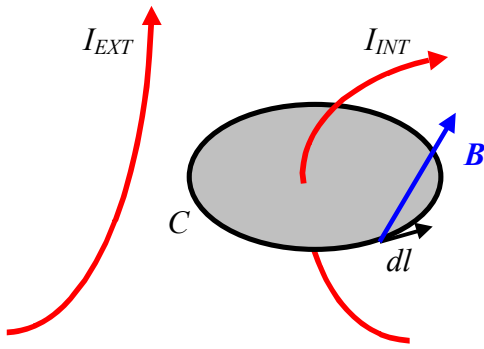


Exercici:

Calculeu el camp que crea una espira quadrada, de costat a , a un punt qualsevol d'una línia que passi pel seu centre i sigui perpendicular al pla de l'espira.



2.2.2 La llei d'Ampère



L'integral del camp magnètic B al llarg del camí C és igual a μ_0 vegades el corrent que traspasa qualsevol superfície limitada per C .

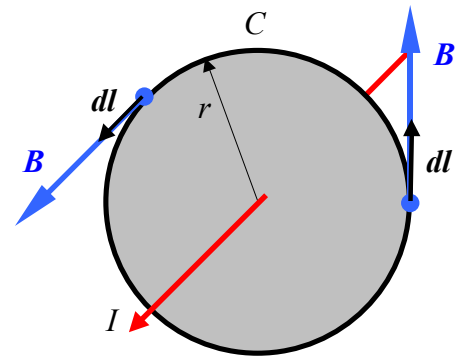
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

Exemples:

1.- Camp d'un fil rectilini

Ja que el camp que crea un fil rectilini es funció de la distància entre el punt on volem calcular el camp i el fil, proposem una corba d'integració que sigui una circumferència concèntrica al fil. Ja que el camp és perpendicular al radi de C i $d\vec{l}$ també ho és, tindrem:

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_C B \cdot dl = B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r \\ \mu_0 I_{INT} &= \mu_0 I \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



2.- Camp al centre d'una bobina

La densitat de corrent

La densitat de corrent elèctric \vec{J} , es defineix com un vector que té com a magnitud el corrent elèctric per unitat de superfície (àrea de la secció transversal) $|\vec{J}| \equiv J = \frac{I}{S}$

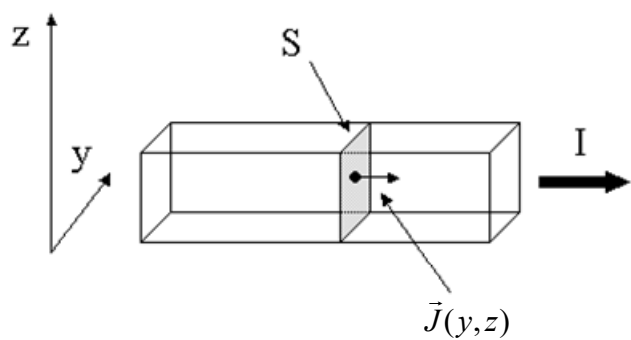
En el Sistema Internacional d'Unitats es mesura en *amperes per metre quadrat* $[J] = \frac{[I]}{[S]} = \frac{A}{m^2}$.

$$[J] = \frac{[I]}{[S]} = \frac{A}{m^2}$$

Matemàticament, el corrent que flueix a través d'una superfície i la densitat tenen la següent relació:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

on: I és el corrent elèctric (A). La integral del producte escalar del vector de la densitat de corrent amb el diferencial de cada element de superfície $d\vec{s}$; $\vec{J}(y,z)$ és la densitat de corrent al punt de coordenades (y,z) i S és la secció.



Si la densitat de corrent és homogènia, és a dir si $\vec{J}(y,z)$ és una constant independent de la posició (y,z) , llavors la relació se simplifica i esdevé:

$$I = J \cdot S$$

La densitat de corrent està relacionada amb els portadors de càrregues (electrons, forats, ions en cas d'un electròlit):

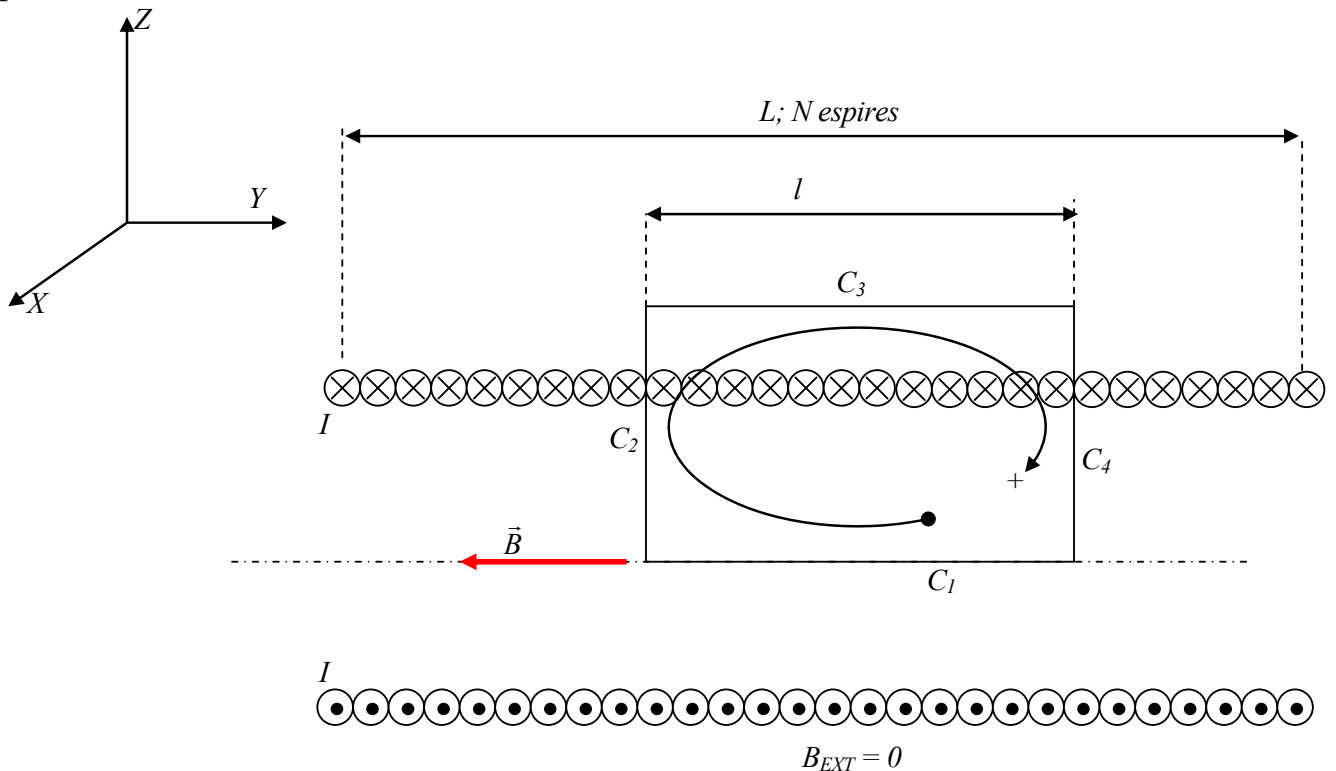
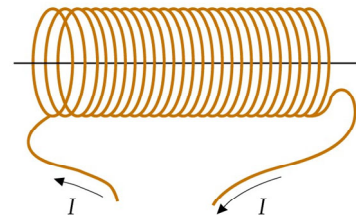
$$J = \sum_i n_i x_i v_i$$

- n_i és el nombre de portadors per unitat de volum
- x_i és la càrrega elèctrica del portador i
- v_i és la velocitat de deriva mitja del portador al volum

Camp al centre d'una bobina amb una gran densitat d'espises.

Sigui una bobina de longitud L i amb N espises. El camp creat per aquesta bobina és $B = \mu_0 n I$ on $n = N/L$ és la "densitat" d'espises o el nombre d'espises per unitat de longitud

Calcularem \vec{B} dins d'una bobina (o solenoide) de gran longitud. Utilitzarem la hipòtesi que el camp a l'exterior és nul (veure **La bobina allargada**) Triem una regió molt distant dels límits de la bobina, de manera que seran menyspreables els efectes a causa dels extrems del solenoide. També suposarem que la separació entre les espises del solenoide és petita.



$$\vec{B} = -B \vec{j}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{l}_3 + \int_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{l}_4;$$

$$d\vec{l}_1 = -dy \vec{j}; \quad \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = B \cdot dy; \quad d\vec{l}_2 = dz \vec{k}; \quad \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = 0;$$

$$d\vec{l}_3 = dy \vec{j}; \quad \vec{B} \cdot d\vec{l}_3 = \vec{0} \cdot d\vec{l}_3 = 0; \quad d\vec{l}_4 = -dz \vec{k}; \quad \vec{B} \cdot d\vec{l}_4 = 0;$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{C_1} B \cdot dy = B \cdot l$$

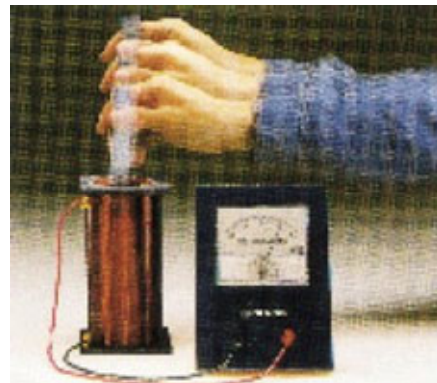
$$\mu_o I_{INT} = \mu_o l I \frac{N}{L} = \mu_o l I n; \quad \left(n \equiv \frac{N}{L} \right) \quad B l = \mu_o l I n \Rightarrow B = \mu_o n I$$

2.3 Inducció magnètica

En el tema anterior vam aprendre que el pas d'un corrent per un conductor crea un camp magnètic. A principis de la dècada de 1830, Michael Faraday a Anglaterra i Joseph Henry a Amèrica del Nord van descobrir independentment que un camp magnètic induïx un corrent en un conductor, sempre que el camp magnètic sigui variable. De vegades, en extreure la clavilla de l'endoll d'un circuit elèctric observem la producció d'una petita espurna. Abans de la desconexió, el cordó elèctric transporta un corrent, que com sabem genera un camp magnètic al voltant del corrent. En desconectar, el corrent cessa bruscament i el camp magnètic que li envolta es col·lapsa. El camp magnètic variable produeix una f.e.m. que tendeix a mantenir el corrent original engendrant així una espurna a través de l'endoll. Una vegada el camp magnètic s'ha anul·lat i, per tant, deixa de ser variable, la f.e.m. és zero. Les forces electromotrius i els corrents causats pels camps magnètics variables es denominen corrents induïts. En si mateix, el procés es denomina inducció magnètica.

En el cas del cordó elèctric que es desconnecta de la seva font de potència, el camp magnètic variable està causat per un canvi del corrent elèctric. No obstant això, un camp magnètic variable pot també produir-se desplaçant un imant. (demostració de classe sobre els corrents induïts)

Els extrems del fil d'una bobina es connecten a un galvanòmetre i un imant intens s'indueix o s'extreu de la bobina. La desviació momentània de l'agulla del galvanòmetre durant el moviment indica l'existència d'un corrent elèctric induït en el circuit galvanòmetre–bobina

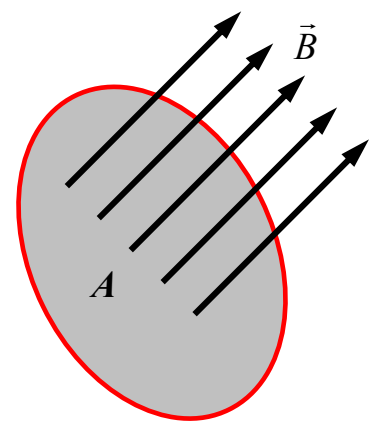


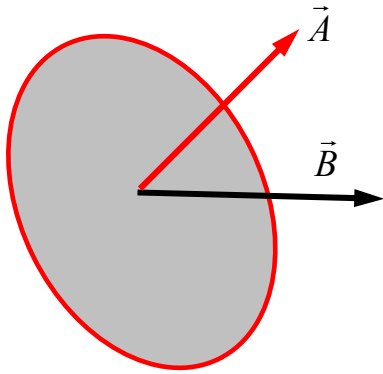
2.3.1 Flux magnètic Φ_m

El flux magnètic és l'anàleg magnètic al flux elèctric, que hem vist anteriorment. Està relacionat amb el nombre de línies de camp magnètic que passen a través d'un àrea determinada. En la figura, el camp magnètic és perpendicular a l'àrea limitada per un circuit simple format per una volta de conductor. En aquest cas, el flux magnètic ϕ_m es defineix com el producte del camp magnètic B i l'àrea A limitada pel circuit:

$$\phi_m = B \cdot A$$

La unitat de flux magnètic és la del camp magnètic multiplicat per la unitat de l'àrea, tesla–metre quadrat, i es denomina *weber* (Wb): $1Wb = 1T \cdot 1m^2$



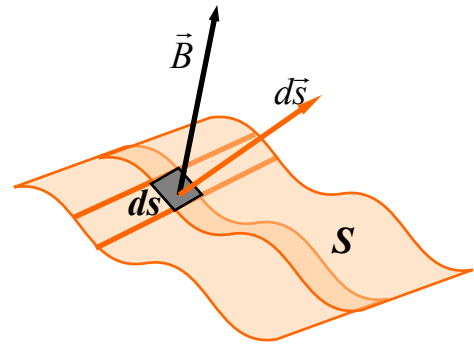


Si el camp (constant) no és perpendicular a la superfície (plana) es defineix el flux com el producte escalar

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

on \vec{A} és un vector perpendicular a la superfície i de mòdul l'àrea de la mateixa.

Podem generalitzar la nostra definició de flux magnètic ϕ_m a superfícies corbes en les quals el camp magnètic pot variar en magnitud o direcció (o ambdues coses), dividint la superfície en un gran nombre d'elements d'àrea molt petits: ds . Si cada element és suficientment petit, pot considerar-se com una superfície plana i la variació del camp magnètic a través de l'element pot menysprear-se.



Sigui $d\vec{s}$, un vector perpendicular a tal element i de mòdul ds (la seva àrea). El flux del camp magnètic a través d'aquest element és, per tant, $d\phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{s}$ i el flux total

$$\phi_m = \int_S d\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Si es tracta d'una bobina de N voltes amb el mateix camp a totes les voltes, el flux al seu través és igual al producte de N pel flux que travessa una sola volta

Exemple

1.- Un camp magnètic uniforme de magnitud 2000 G forma un angle de 30° amb l'eix d'una bobina circular de 300 voltes i un radi de 4 cm . Determineu el flux magnètic a través de la bobina.

Pel camp, tenim: $B = 2000\text{ G} \times \frac{1\text{ T}}{10^4\text{ G}} = 0.2\text{ T}$;

per l'àrea $A_1 = \pi r^2 = \pi \cdot (4 \times 10^{-2})^2 = 5.0265 \times 10^{-3}\text{ m}^2$; $A = 300 A_1 = 1.5080\text{ m}^2$

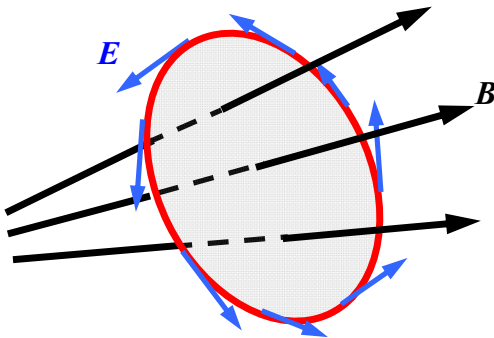
per tant $\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos 30^\circ = 0.2 \cdot 1.5080 \cdot 0.866 = 0.2612\text{ Wb}$

Exercici

Determineu el flux magnètic a través d'un solenoide de 40 cm de longitud, el radi del qual és 2.5 cm , posseeix 600 voltes i transporta un corrent de 7.5 A . Preneu com a camp el que crea el propi solenoide. (0.0166 Wb)

2.3.2 Força electromotriu induïda ε i la llei de Faraday

Els experiments de Faraday, Henry i uns altres, van demostrar que si el flux magnètic a través d'un circuit varia per qualsevol mitjà, s'indueix una fem que és igual en magnitud a la variació per unitat de temps del flux induït al circuit. La fem es detecta usualment observant un corrent en el circuit, però apareix fins i tot encara que el circuit sigui incomplet (obert), de manera que no existeix corrent. En les nostres discussions prèvies, la fem en un circuit es va localitzar en una regió específica del mateix, per exemple, entre els terminals de la bateria. No obstant això, la fem induïda per un flux magnètic variable es pot considerar distribuïda a través del circuit.



Considerem una sola espira d'un conductor en un camp magnètic, com s'indica en la figura. Si el flux a través de l'espira és variable, s'indueix en la mateixa una fem. Com aquesta fem és el treball realitzat per unitat de càrrega, ha d'existir una força exercida sobre la càrrega associada amb la fem.

La força per unitat de càrrega és el camp elèctric, induït en aquest cas pel flux variable. La integral de línia del camp elèctric al voltant d'un circuit complet és igual al treball realitzat per unitat de càrrega, el qual, per definició, és la fem del circuit:

$$\text{Definició de força electromotriu: } \varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Els camps elèctrics que hem estudiat prèviament eren el resultat de càrregues elèctriques estàtiques. Aquests camps són conservatius, la qual cosa significa que la integral de línia del camp electrostàtic al voltant d'una corba tancada és zero. No obstant això, el camp elèctric resultant d'un flux magnètic variable **no és conservatiu**. La integral de línia al voltant d'una corba tancada és igual a la fem induïda, la qual és igual a la variació amb el temps del flux magnètic:

$$\text{Llei de Faraday: } \varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \right)$$

Aquest resultat es coneix amb el nom de llei de Faraday. El signe negatiu de la llei de Faraday està relacionat amb la direcció de la fem induïda, la qual cosa discutirem més endavant.

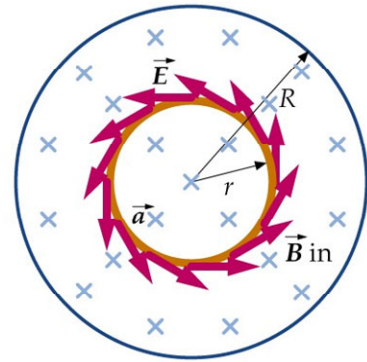
El flux magnètic a través d'un circuit pot variar-se de moltes maneres diferents:

- el corrent que produeix el flux pot augmentar-se o fer-se disminuir;
- poden moure's uns imants permanents allunyant-los o apropant-los al circuit;
- el propi circuit pot moure's allunyant-se o apropant-se a la font de flux;
- pot augmentar-se o disminuir-se l'àrea del circuit a l'interior d'un camp magnètic fix.

En tots els casos, s'indueix una fem en el circuit el valor del qual és igual a la variació del flux magnètic per unitat de temps.

Exemples

- Un camp magnètic B és perpendicular al pla de la pàgina i és uniforme en una regió circular de radi R com s'indica en la figura. Fora de la regió circular, $B = 0$. La variació per unitat de temps de la magnitud de B és dB/dt . Quin és la magnitud del camp elèctric induït en el pla de la pàgina a una distància r del centre de la regió circular?



Cas $r < R$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \right)$$

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B \cdot ds = B \int_S ds = B\pi r^2 \Rightarrow -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{dB}{dt} \pi r^2$$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C E \cdot dl = E \oint_C dl = E2\pi r \Rightarrow$$

$$E2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi r^2 \Rightarrow E = -\frac{dB}{dt} \frac{r}{2}$$

Cas $r > R$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \right)$$

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B \cdot ds = B \int_S ds = B\pi R^2 \Rightarrow -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C E \cdot dl = E \oint_C dl = E2\pi r \Rightarrow$$

$$E2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi R^2 \Rightarrow E = -\frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2r}$$

- Una bobina de 80 voltes té un radi de 5.0 cm i una resistència de 30 Ω . Determineu la variació del camp magnètic perpendicular al pla de la bobina per induir en aquesta un corrent de 4.0 A.

La fem en la bobina ha de ser igual a la caiguda de potencial a través de la seva resistència: $\varepsilon = R \cdot I = 30 \cdot 4 = 120V$

Com el pla de la bobina és perpendicular al camp, el flux és

$$\Phi_m = NBA = NB\pi r^2$$

Segons la llei de Faraday, la magnitud de la fem induïda és igual a la variació temporal d'aquest flux. Per tant,

$$\varepsilon = 120V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(NB\pi r^2)}{dt} = -N\pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow$$

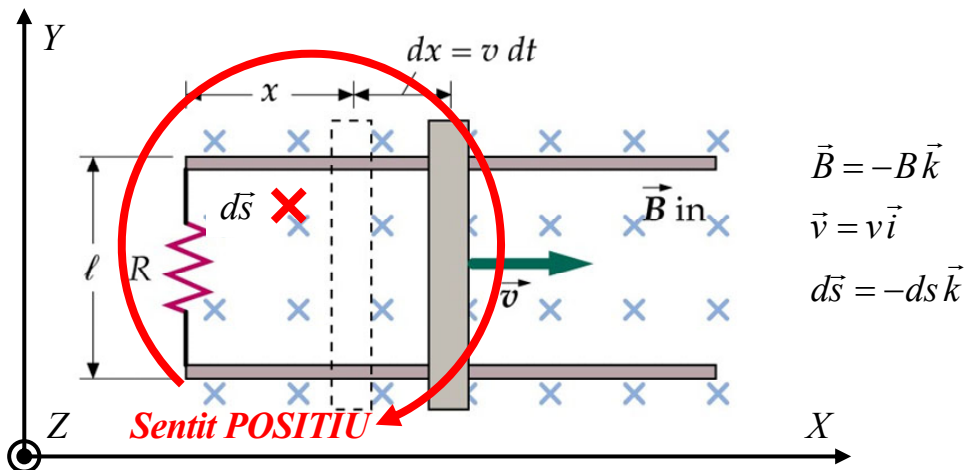
$$\frac{dB}{dt} = -\frac{\varepsilon}{N\pi r^2} = -\frac{120}{80\pi(0.05)^2} = -190.9859 T/s$$

2.3.3 Llei de Lenz

El signe negatiu de la llei de Faraday està relacionat amb la direcció de la fem induïda. La direcció i sentit de la fem i del corrent induïdes poden determinar-se mitjançant un principi general físic anomenat llei de Lenz:

La fem i el corrent induïdes posseeixen una direcció i sentit tal que tendeixen a oposar-se a la variació que les produeix.

2.3.4 Fem de moviment



La figura mostra una vareta conductora que es llisca al llarg de dos conductors que estan units a una resistència. Existeix també un camp magnètic B uniforme dirigit cap al paper. Com el flux magnètic al llarg del circuit és variable (l'àrea del circuit s'incrementa mentre es desplaça la vareta), s'indueix una fem en el circuit.

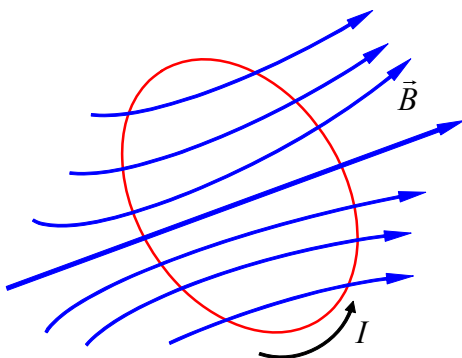
Anomenem l , a la distància que separa als conductors que serveixen de rails i x a la distància des de l'extrem esquerre dels rails a la vareta en un instant donat, l'àrea tancada pel circuit és lx , i el flux magnètic en aquest instant és

$$\Phi_m = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s B \cdot ds = B \int_s ds = BA = Blx \Rightarrow \frac{d\Phi_m}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Blv \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{Blv}{R}$$

4.3.3 Inductància

Autoinductància



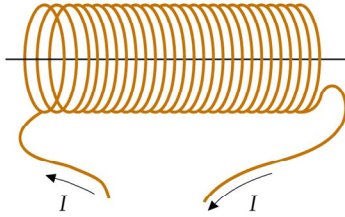
Considerem un circuit pel que circula una intensitat I . El camp magnètic creat per aquest circuit és proporcional a I . Podem calcular el flux de camp magnètic creat pel propi circuit, que també serà proporcional a I .

$$\Phi_m = L \cdot I$$

on L és una constant anomenada *autoinductància* del circuit.

$$[L] = \frac{W}{A} = \frac{T \cdot m^2}{A} \equiv H(\text{enry})$$

Exemple: autoinductància d'una bobina amb una gran densitat d'espises



Sigui una bobina amb \$N\$ espises de longitud \$l\$, secció transversal d'àrea \$A\$. El camp creat per aquesta bobina és \$B = \mu_0 n I\$ on \$n = N/l\$ és la "densitat" d'espises o el nombre d'espises per unitat de longitud.

El flux per les \$N\$ espises de la bobina és:

$$\Phi_m \equiv \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = N B A = n l B A = n l \mu_0 n I A = \mu_0 n^2 A l I$$

per tant

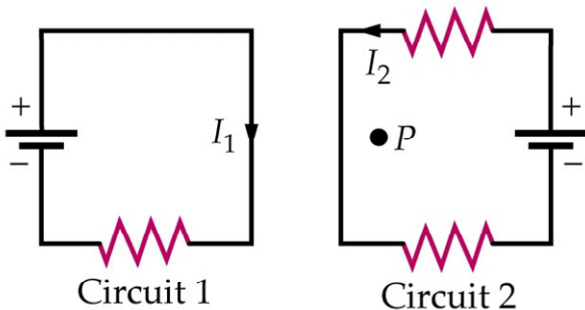
$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 n^2 A l I}{I} = \mu_0 n^2 A l$$

Si la intensitat al circuit canvia, el flux també canvia, per tant s'hi indueix una f.e.m. D'acord amb la llei de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Exemple: Determineu l'autoinductància d'una bobina de 10 cm de longitud, 5 cm² d'àrea i 100 voltes. Amb quin ritme ha de variar el corrent per tal d'induir una fem de 20 V. (6.28×10^{-5} H; 3.18×10^5 A/s)

Inductància mútua



$$\vec{B}(P) = \vec{f}(I_1, I_2)$$

El flux al circuit 2, tindrà dos contribucions, la del circuit 1 i la del 2:

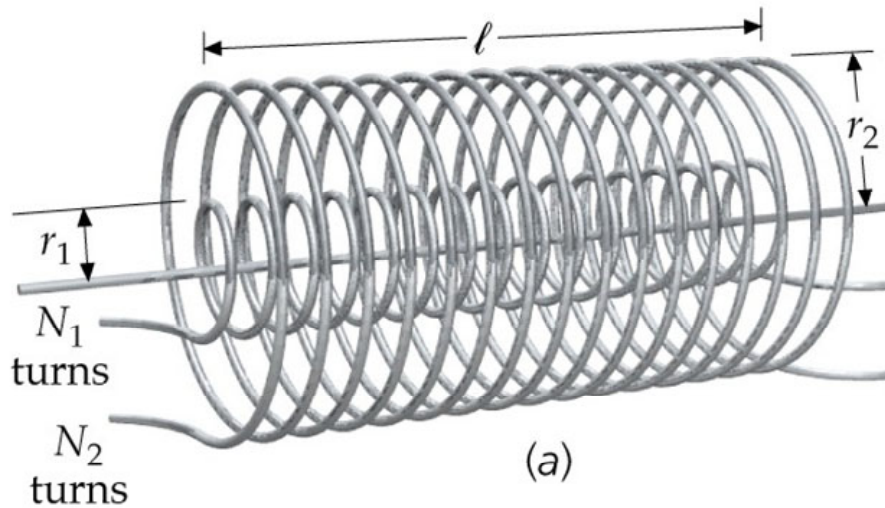
$$\Phi_{m2} = L_2 I_2 + M_{12} I_1$$

on \$L_2\$ és la autoinductància del circuit 2 i \$M_{12}\$ s'anomena *inductància mútua* dels dos circuits.

$$[M] = [L] = \frac{W}{A} = \frac{T \cdot m^2}{A} \equiv H(\text{enry})$$

De la mateixa forma tindrem: $\Phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{21} I_2$ ($M_{21} \equiv M_{12}$)

Exemple



$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{m2} = L_2 I_2 + M_{12} I_1 \\ I_1 \neq 0 \\ I_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_{m2} = M_{12} I_1$$

$$B_1 = \mu_o n_1 I_1$$

$$\Phi_{m2} = N_2 B_1 A = (n_2 l) (\mu_o n_1 I_1) (\pi r_1^2) = \mu_o n_1 n_2 l (\pi r_1^2) I_1$$

$$\Phi_{m2} = M_{12} I_1 \Rightarrow M_{12} = \frac{\Phi_{m2}}{I_1} = \frac{\mu_o n_1 n_2 l (\pi r_1^2) I_1}{I_1} = \mu_o n_1 n_2 l \pi r_1^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{21} I_2 \\ I_1 = 0 \\ I_2 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_{m1} = M_{21} I_2$$

$$B_2 = \mu_o n_2 I_2$$

$$\Phi_{m1} = N_1 B_2 A = (n_1 l) (\mu_o n_2 I_2) (\pi r_1^2) = \mu_o n_1 n_2 l (\pi r_1^2) I_2$$

$$\Phi_{m1} = M_{21} I_2 \Rightarrow M_{21} = \frac{\Phi_{m1}}{I_2} = \frac{\mu_o n_1 n_2 l (\pi r_1^2) I_2}{I_2} = \mu_o n_1 n_2 l \pi r_1^2 \quad [M_{12} = M_{21}]$$

Annex

La bobina allargada

(P. Lorrain y D.L. Corson. Campos y ondas electromagnéticos)

Calcularem \vec{B} dins i fora d'una bobina (o solenoide) de gran longitud. Utilitzarem coordenades cilíndriques amb el eix z coincidint amb l'eix de simetria del solenoide. Triem una regió molt distant dels límits, de manera que seran menyspreables els efectes a causa dels extrems del solenoide. També suposarem que la separació entre les espirals del solenoide és petita.

1. Primerament cal destacar que B té les següents característiques, tant dins com fora del solenoide.

- a) Per simetria, \vec{B} no és funció de z ni de φ
- b) A més, $B_\rho = 0$. En efecte, considerem un cilindre coaxial de longitud l i radi ρ , que pot ser major o menor que el radi del cilindre, com s'indica a la figura. La integral de $\vec{B} \cdot d\vec{a}$ sobre la seva superfície és, senzillament $2\pi\rho l B_\rho$, ja que les integrals sobre les dues bases s'anul·len entre si. Però, segons la equació $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$, la integral de $\vec{B} \cdot d\vec{a}$ sobre qualsevol superfície tancada és zero. Llavors, $B_\rho = 0$.

- c) Finalment, el rotacional de \vec{B} ha de ser zero en tots els punts excepte en el fil i , per tant: $\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = 0$

2. A l'exterior del solenoide.

- a) Podem demostrar que $B_z = 0$ considerant el recorregut a de la figura.

El corrent net que travessa el circuit és zero i, en conseqüència, la integral curvilínia de $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ sobre aquest recorregut és nul·la. Ara bé, com les integrals curvilínies al llarg dels costats 1 i 2 són zero ($B_\rho = 0$), les corresponents als costats 3 i 4 s'han de cancel·lar entre si. Atès que aquests costats poden estar a qualsevol distància de l'eix del solenoide, B_z ha de ser zero o constant en els mateixos.

Atès que el flux total en l'espai infinit exterior ha de ser igual al flux finit a l'interior del solenoide, B_z ha d'anul·lar-se a l'exterior. $B_z = 0$

- b) Per a un recorregut com el b , que està travessat una vegada per el corrent, i fora del solenoide,

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

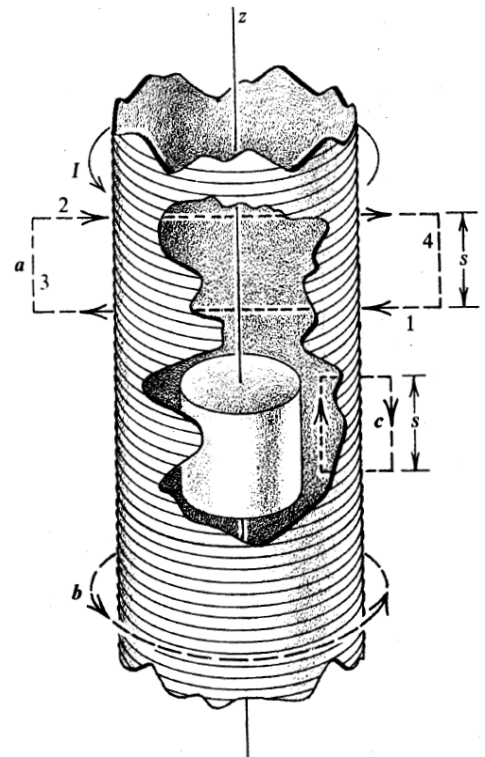
3. A l'interior del solenoide.

- a) A l'interior $B_\rho = 0$, perquè la integral curvilínia de $B_\varphi \cdot dl$ sobre una circumferència de radi ρ , com l'aresta superior del cilindre petit de la figura, és $2\pi\rho B_\varphi$ i aquest valor ha de anul·lar segons l'equació $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f$ per no existir cap corrent tancada pel recorregut.

- b) Considerem ara el recorregut c i recordant que, tant dins com fora, $B_\rho = 0$ i a l'exterior $B_z = 0$, veiem que $B_z s = \mu_0 n I s$, i

$$B_z = \mu_0 n I$$

Si el solenoide no té secció circular pot considerar-se format per la superposició de solenoides circulars de diferents mides de manera que encara és aplicable l'equació anterior. La inducció magnètica a l'interior d'un solenoide allargat de secció arbitrària, en una regió allunyada de les seves terminacions, és igual a μ_0 vegades el nombre de Ampere-voltes / metre.



Solenoide allargat pel qual circula un corrent I . Les línies de traç discontinu són els camins de integració per a B . S'utilitzen coordenades cilíndriques amb el eix z coincidint amb l'eix de simetria del solenoide.