

ESTRUCTURAS

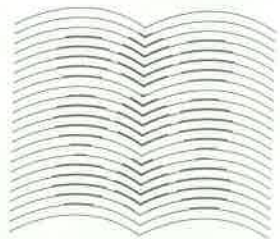
3º

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Biblioteca



1400020194

UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE CATALUNYA



BIBLIOTECA
EX-LIBRIS

TEORIA DEL

PANDEO



ES
DE
RA
CA

BIBLIOTECA

Registro N.° 5921

Cálculo de la estabilidad de barras esbeltas comprimidas

Preliminares.-

El pandeo es un fenómeno de inestabilidad elástica y puede provocar el fallo de una barra cargada axialmente si la esbeltez supera un cierto límite. Para comprender este fenómeno veamos primeramente los tres casos de equilibrio estático.

a) EQUILIBRIO ESTABLE

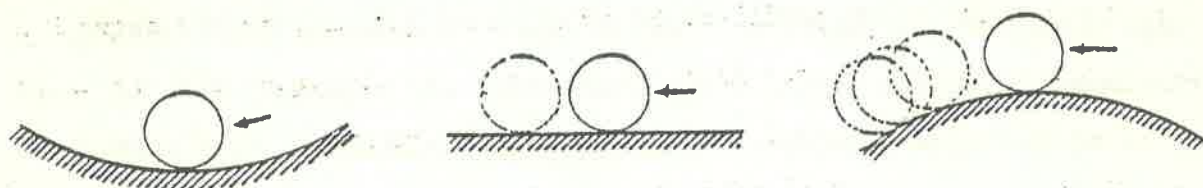
Al cesar cualquier tipo de fuerza que haya desviado la esfera de su posición inicial, ésta vuelve a ella y permanece estable indefinidamente.

b) EQUILIBRIO INDIFERENTE

Al retirar la acción que desviaba la esfera, ésta cesa en su movimiento y adquiere el equilibrio en una nueva posición diferente de la inicial.

c) EQUILIBRIO INESTABLE

El equilibrio es prácticamente imposible ya que, al actuar una fuerza cualquiera, por pequeña que sea, la esfera seguirá su desplazamiento indefinidamente.



Veamos ahora un ejemplo para el equilibrio elástico (en cuerpos deformables).

Para este caso tomamos una barra empotrada en un extremo y libre en el otro, bajo la acción de una carga axial aplicada en el extremo libre.

Supongamos que existe un cierto valor de esta carga, que denominaremos "carga límite o crítica". (P_{cr})

Los tres que se pueden presentar son $P < P_{cr}$ $P = P_{cr}$ $P > P_{cr}$

a) Equilibrio elástico estable.

En este estado la acción es pequeña, menor que la carga límite y si se aplica una pequeña carga transversal, se origina una pequeña flexión lateral, de la que la barra se recupera tan pronto cesa ésta.

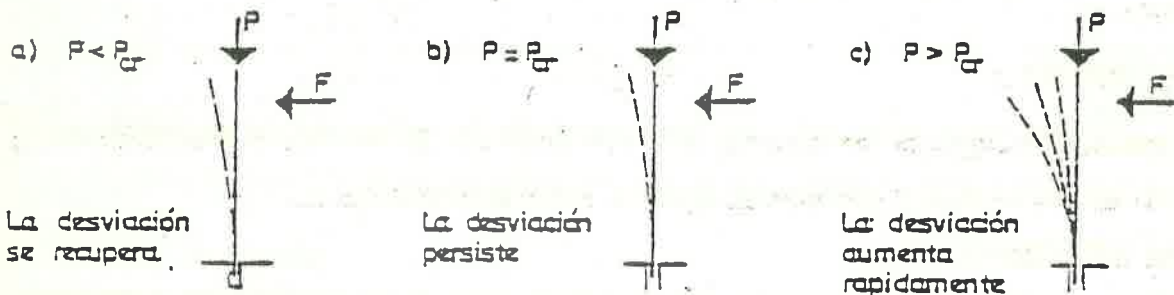
b) Equilibrio elástico indiferente.

La barra se desviará ligeramente al actuar una carga igual a la carga límite y

una pequeña carga transversal mantendrá esta desviación, permaneciendo la barra en equilibrio en la posición desviada. Un aumento, por pequeño que sea, de la carga transversal es suficiente para aumentar las desviaciones (estado frontera).

) Equilibrio elástico inestable.

Si P es mayor que P_{cr} las desviaciones aumentan rápidamente aún con poco incremento de P y sin necesidad de aplicar carga transversal alguna. La barra se destruye por apartarse de la forma recta y va rápidamente al colapso, perdiendo el soporte toda capacidad portante. Estamos pues en un caso de inestabilidad elástica.



Carga crítica.-

A la vista del comportamiento de la barra en las tres situaciones, se puede definir la carga crítica como la que origina un estado elástico de equilibrio indiferente. Es pues un valor de la carga para la cual la forma rectilínea y curvilínea (de poca magnitud) son posibles. Mientras que P se mantiene menor que P_{cr} las desviaciones originadas por la carga transversal son pequeñas, pero al acercarse P a su valor límite o crítico, éstas aumentan rápidamente. Este aumento rápido de la flecha puede ser el criterio de pérdida de estabilidad.

Como no puede ser admitida la existencia del estado indiferente, en el equilibrio de las construcciones, se introduce el coeficiente o factor de seguridad, estableciendo con ello la carga admisible o carga de uso.

Carga admisible o Carga de uso.-

Su valor será la carga crítica dividida por un coeficiente denominado grado de seguridad al pandeo s_e que varía para cada material y también en función de la importancia de la barra dentro de la estructura.

Tendremos pues:

$$P_{uso} = \frac{\text{Carga crítica}}{s_e} = \frac{P_{cr}}{s_e}$$

El valor de s_e es algo mayor que el usado para los demás tipos de solicitaciones por tenerse en cuenta factores de variables, tales como ligeras curvaturas iniciales, pequeñas excentricidades de la carga, defectos de la forma de las barras

y otros cuya evaluación resulta imposible de detreminar y además no es posible preveer los defectos combinados que harían variar en cada caso la carga crítica.

• Pandeo.-

Se puede ampliar la idea de pandeo señalada en los preliminares, diciendo que, cuando el fallo de un soporte sometido a compresión axial se produce por flexión lateral y no por fluencia del material, estamos ante el fenómeno de pandeo, y el fallo de la pieza se produce aun cuando la tensión máxima en la barra sea menor que el límite elástico de la materia, es decir.

$$\sigma_{cr} \text{ debida al pandeo} < \sigma_{elástica} \text{ del material}$$

El fenómeno de pandeo se producirá solamente cuando la longitud del soporte sea demasiado grande con relación con relación a su sección transversal, en caso contrario nos encontramos en el campo de compresión pura. Si la relación del dimensionado del soporte la representamos por el cociente:

$$\frac{l \text{ (Longitud de pandeo)}}{r_{min} \text{ (radio mínimo de inercia de la sección)}}$$

su valor es lo que se conoce como grado de esbeltez mecánica y se designa por λ . Al valor que determina la frontera entre compresión pura y pandeo es aproximadamente $\lambda = 50$ por debajo del cual no se origina pandeo y por consiguiente se está en el campo de la compresión pura.

NOTA Se ha tomado r_{min} . porque logivamente el fenómeno se producirá por el plano de inercia mínima de la sección;

• Determinación de la carga crítica

Esta carga límite para la cual el pilar entra en el campo de la inestabilidad elástica y aparece el pandeo, se determina para el caso de un soporte articulado en ambos extremos, denominado caso fundamental de pandeo. Resulta evidente que esta carga límite variará si cambian los enlaces del soporte, pues la aparición de empotramientos en uno o ambos extremos da mayor rigidez a la barra:

La resolución de este problema se debe a Euler, el cual encontró la expresión de la carga crítica para el caso fundamental y cuyo valor es el siguiente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2}$$

siendo en este caso $l = a$ la longitud real de la barra.

La validez de esta fórmula tiene sus limitaciones, que se verán a continuación. Interesa poco el proceso matemático de su deducción, pero se tratará al final de este capítulo para el que tenga interés sobre el mismo.

Dominio de validez de la fórmula de Euler

Para la deducción de esta fórmula, Euler utilizó la ecuación diferencial de la elástica, la cual se apoya en la Ley de Hooke. Esta ley es válida mientras las tensiones no rebasen el límite elástico del material, por lo tanto la tensión crítica de pandeo originada por la actuación de la carga crítica no podrá ser superior a la tensión de proporcionalidad $\sigma_E = \sigma_{cr} \leq \sigma_e$ siendo pues esta condición la que limita el empleo de la fórmula de Euler.

Para poner de manifiesto la tensión crítica pondremos la fórmula de la siguiente forma:

$$\frac{P_{cr}}{\Omega} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\Omega}$$

Introduzcamos ahora el valor de I_{min} en función del radio de giro mínimo y del área de la sección.

$$\frac{I_{min}}{\Omega} = r_{min}^2 \quad \text{con lo que la fórmula quedará} \quad \frac{P_{cr}}{\Omega} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu l)^2 \Omega}$$

Finalmente, introduciendo la esbeltez, magnitud adimensional cuyo valor es $\frac{\mu l}{r_{min}}$ y que viene determinado por las dimensiones de la barra y del modo de apoyo de los extremos.

Así pues, $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$, relación que liga la tensión crítica en función de la esbeltez. Despejando λ , al introducir el valor $\sigma_{cr} = \sigma_e$ obtenemos:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_e}} \quad \lambda_{em} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_e}} = \lambda_0$$

Se obtendrá el valor correspondiente de λ por debajo del cual no es válida la fórmula de Euler. Como es lógico, se obtendrá un valor diferente para cada material, y el límite superior de validez se fija en 250, ya que para valores mayores se obtiene un bajo rendimiento del material y no es aconsejable su uso en la construcción.

Como resumen se puede decir que cuanto más elevado es el σ_e del material, tanto menor es el grado de esbeltez y por tanto es más amplio el dominio de la fórmula de Euler.

Al límite de la esbeltez para la para la cual empieza a ser válida la fórmula citada se le designa por λ_0 y se le llama esbeltez límite.

Tensiones críticas para menores del grado límite de esbeltez

Cuando por las dimensiones de la pieza se obtenga $\lambda < \lambda_0$ se está en presencia de tensiones por encima del límite elástico y no es válida la fórmula de Euler, puesto que las tensiones y deformaciones están fuera de la Ley de Hooke. Se usa en estos casos la fórmula binómica de Tetmajer, que es una forma empírica que no sirve para el cálculo inmediato de la sección transversal de la barra, sino únicamente para comprobación de la sección propuesta.

La fórmula de Tetmajer tiene la expresión siguiente: $\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2$
 $c = 0$ excepto para la fundición, siendo a y b coeficientes que dependen del material.

El campo de validez de la fórmula anterior es para valores de λ comprendidos entre

$$40 < \lambda < \lambda_{lim}$$

Los coeficientes a y b tienen valores de variables según el material y son los siguientes:

Para el acero A - 37	$a = 3.100$	$b = 11,4$
Para los aceros 50 y 60	$a = 3.350$	$b = 6,2$
Para la madera	$a = 293$	$b = 1,94$
Para los aceros al silicio	$a = 5.000$	$b = 26$
Para la fundición	$a = 7.760$	$b = 0,53$



Influencia del tipo de apoyo en los extremos de las barras

Todo lo dicho referente a la teoría de Euler y su fórmula está basado en el llamado caso fundamental de pandeo, que corresponde a una barra articulada en sus extremos.

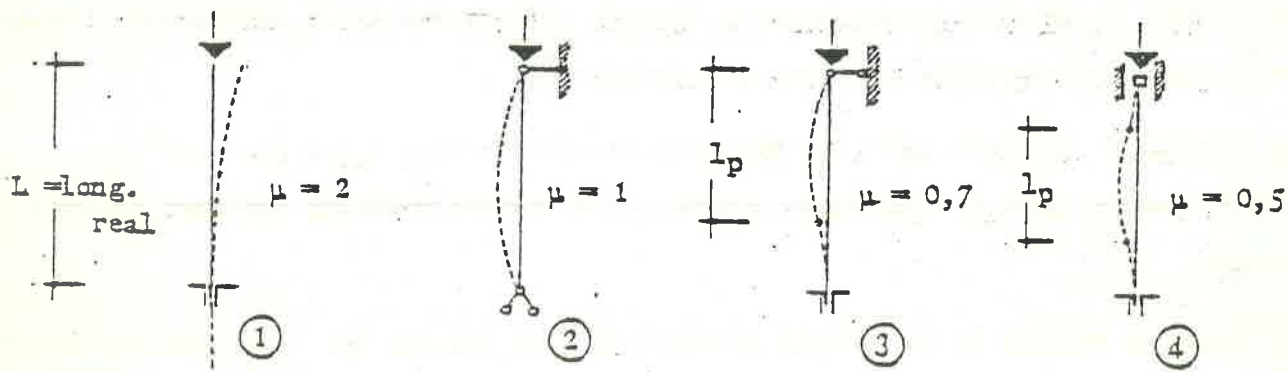
Para este caso la elástica es una semionda de senoide de ecuación:

$$y = B \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{E I_{min}}}$$

cuyo coeficiente B está indeterminado por haberse usado la ecuación diferencial aproximada de la elástica. Pero existen en la práctica otros casos en los que las barras están vinculadas por otro tipo de apoyos. Interesa pues encontrar un coeficiente que permita utilizar la fórmula de Euler para todos los casos, cualquiera que sea el tipo de apoyos.

Este coeficiente se llama coeficiente modificador de la longitud real de la barra para obtener lo que se denomina longitud efectiva, o también longitud de pandeo l_p y que genericamente representa un arco de senoide de la deformada.

Estos coeficientes pueden ser obtenidos directamente, aplicando la teoría de Euler para cada caso en particular, y son los siguientes:



Después de conocer estos coeficientes, la fórmula de Euler se puede expresar por la fórmula generalizada siguiente, teniendo en cuenta que:

- 1) $l_p = 2L$;
- 2) $l_p = L$;
- 3) $l_p = 0,7 L$;
- 4) $l_p = 0,5 L$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(l_p)^2}$$

o bien se pueden emplear las fórmulas particulares siguientes, en función de las longitudes reales de las barras.

- 1) $P_{cr} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2}$;
- 2) $P_{cr} = 1 \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2}$;
- 3) $P_{cr} = 2 \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2}$;
- 4) $P_{cr} = 4 \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2}$

El método \$\Omega\$

Este método consiste en la introducción de un coeficiente especial para reducir el problema de pandeo a una compresión pura.

Si una barra con posibilidad de pandeo se calculase a compresión pura, haciendo trabajar el material a su tensión admisible, el resultado sería erróneo pues podría aparecer una flexión lateral que destruiría a la barra por inestabilidad

elástica. La aplicación del coeficiente ω resuelve el problema, determinando una tensión imaginaria, menor que la admisible, y que por consiguiente reduce la carga axial de uso, que podría soportar la barra si ésta estuviese trabajando a compresión pura.

El coeficiente ω depende del material y de la esbeltez de la barra y es en todo caso mayor que la unidad, para λ mayores que 20.

Las limitaciones de aplicación del método Ω son las siguientes.

- a) Para elementos constitutivos de estructura metálica se admite como valor máximo de la esbeltez $\lambda = 250$ y el valor mínimo citado $\lambda = 20$
- b) Para perfiles aislados formando partes de columnas o piezas compuestas de varios perfiles, el valor mínimo de λ admitido es 50.
- c) Para valores de λ menores de 20, ω es igual a la unidad y no es aplicable el método por ser nula la posibilidad de pandeo.

Aplicación del método (Problema de comprobación)

Dada una barra de características determinadas, hallar el valor de la carga axial admisible: (Carga máxima de uso).

- DATOS: a) Forma de la sección (área, radio mínimo de giro)
- b) Tipo de material (módulo de elasticidad, y tensión admisible).
 - c) Longitud de la barra.

INCÓGNITA: La carga axial de uso P .

Con los datos del problema se puede determinar la esbeltez de la pieza.

Si el problema se calculase como de compresión pura, la fórmula de aplicación sería $P = \text{Area} \cdot \sigma$ admisible; esto sería correcto si λ menor que 20.

En caso contrario la fórmula viene corregida por el coeficiente ω de la siguiente manera:

$$P_{\text{uso}} = \frac{\sigma_{\text{ad}} \cdot \text{Area sección}}{\omega}$$

ya que al existir posibilidad de pandeo, necesariamente se ha de reducir la carga P de uso.

La esbeltez λ que servirá para entrar en las tablas de ω corresponde a la obtenida utilizando la longitud efectiva de la barra (Long. de pandeo), es decir, se utiliza:

$$\lambda_p = \frac{\text{longitud de pandeo}}{\text{radio de inercia mínimo}}$$

La longitud efectiva de la barra ha quedado explicada en el artículo anterior.

Si la fórmula anterior la ordenamos de esta manera:

$$P = \left[\frac{\sigma_{\text{admisible}}}{\omega} \right] \text{Area de la sección};$$

el factor $\frac{\sigma_{\text{ad}}}{\omega}$ resulta ser una tensión reducida ficticia, llamada también tensión omega. σ_{ω}

Así pues, para la obtención de la carga de uso para los casos de las barras esbeltas con $\lambda > 20$, lo que realmente hace el método (con la introducción del coeficiente ω), es usar una tensión reducida, para evitar que la flexión lateral pueda producirse, determinando la carga máxima de uso, que naturalmente será menor que si la barra se calculase a compresión pura, o sea λ menores de 20.

Problema de dimensionado

Este problema se plantea al encontrar las características de la sección de una barra, de longitud y material conocidos, sometida a la acción de una carga de uso conocida, por haber hallado previamente al estado de cargas que actuará sobre la columna.

DATOS: Longitud, tipo de apoyos, material y P_{uso}

INCOGNITA: Forma de la sección.

Para este caso el empleo de la fórmula del método Q no es inmediata, ya que en la expresión:

$$P = \frac{\sigma_{\text{ad}} \text{ Area}}{\omega} \text{ aparecen las incógnitas Área y coef. } \omega$$

Este coeficiente no se conoce a priori, ya que depende de la forma de la sección (incógnita del problema).

Para resolver esta situación habrá que fijar previamente un coeficiente ω_1 y calcular con él la σ_{ad} . Según que la diferencia de este resultado con la σ_{ad} del material sea aceptable o no, habrá que hacer otro tanteo con un nuevo ω_2 y así hasta obtener un $(\sigma_{\text{ad}})_i$ que difiera poco del material.

Para hallar este valor ω_1 inicial nos puede orientar la aplicación de la fórmula de Faust :

$$I_{\text{requerido}} = 2 P l^2$$

Donde l viene en metros, P en toneladas y I en cm^4

Encontrado I con esta fórmula auxiliar, entramos en los prontuarios de perfiles laminados y buscamos el perfil que se adapte a este valor, obteniendo simultáneamente el radio de inercia mínimo. Con este valor y la longitud efectiva de la barra se puede buscar λ , y con él entrar en las tablas de Q. Naturalmente la aplicación de este valor no dará de golpe la solución, pero nos orientará para

Obtenido el radio de giro mínimo, solución del problema, se puede pasar a los prontuarios para hallar el perfil que cumpla este valor y sea más idóneo para la solución constructiva de la columna y también el óptimo en cuanto al gasto del material.

El radio de giro que dé una sección mínima (área), representará la solución con el máximo de aprovechamiento de la materia.

Bases de cálculo para elementos metálicos

Principales prescripciones a tener en cuenta:

) Coeficientes de seguridad.

El criterio de ruina o agotamiento en una estructura metálica está representado por el límite elástico (o tensión de fluencia en los aceros con escalón de relajamiento), y no por la tensión de rotura.

Se usan dos coeficientes distintos, según sea el caso de carga:

a) Caso de carga I:

$\gamma = 1,5$ cuando se tiene en cuenta:

- Las cargas permanentes.
- Sobrecargas de explotación.
- Sobrecargas de nieve.
- Asientos de la cimentación.
- Sobrecargas durante la ejecución.

b) Caso de carga II:

$\gamma_1 = 1,33$ cuando, además de las anteriores, se tienen en cuenta:

- Efectos del viento.
- Efectos térmicos.
- Efectos sísmicos.

Aceros españoles.

Están tipificados tres aceros diferentes, cuyos límites elásticos respectivos son:

- A-37. L.E. = 2.400 Kg/cm²
- A-42. L.E. = 2.600 Kg/cm²
- A-52. L.E. = 3.600 Kg/cm²

Actualmente se observa en la construcción una tendencia al uso, cada vez mayor, de los aceros tipo A-42 en sustitución de los aceros tipo A-37.

Tensiones admisibles.

Los cálculos pueden realizarse en tensiones admisibles. En el cuadro siguiente se indican, según el caso y el tipo de acero, los valores de dichas tensiones admisibles:

Tipo de acero	Caso de carga I	Caso de carga II
A-37	1.600 Kg/cm ²	1.800 Kg/cm ²
A-42	1.730 Kg/cm ²	1.950 Kg/cm ²
A-52	2.400 Kg/cm ²	2.700 Kg/cm ²

También pueden hacerse los cálculos mayorando las acciones con los coeficientes de seguridad, y comprobando el agotamiento de la fibra más cargada.

5) Pandeo.

Los soportes y piezas en compresión se calcularán teniendo en cuenta la posibilidad de pandeo. Ello puede hacerse aumentando el esfuerzo de compresión, afectándolo de un coeficiente α , que se obtiene en función de la esbeltez mecánica λ , de la pieza, mediante tablas. La determinación de dicha esbeltez λ , debe hacerse de acuerdo con los principios del capítulo 7 de la instrucción E.M. 62 (edición 1969).

Con el fin de aligerar el cálculo, se han preparado las tablas del Apéndice VI, para cuyo manejo deben tenerse bien presentes las limitaciones que, al respecto, en el anterior citado capítulo se especifican.

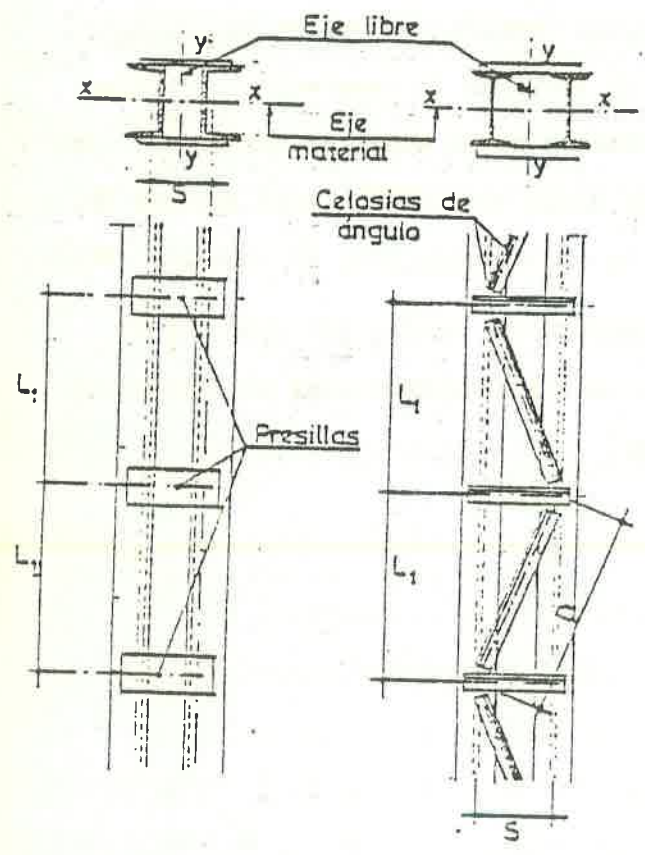


Piezas compuestas comprimidas

Teoría general.

Es práctica general en la construcción metálica construir los pilares o las barras de las vigas de celosía mediante perfiles simples, unidos por presillas, o celosías de llantas o ángulos.

El sistema de unión de estas barras (presillas o celosías) ha de ser lo suficientemente fuerte, para no permitir el pandeo aislado de cada uno de los perfiles que forman parte de la pieza compuesta.



En las piezas compuestas se denomina eje material al de inercia que pasa por el c.d.g. de las secciones de todos los perfiles simples que forman la pieza. Al que no cumple esta condición se le denomina eje libre.

En los cálculos de las piezas compuestas interviene la magnitud \$L_1\$ que corresponde a la esbeltez de los perfiles considerados aisladamente, y que se deduce de la manera siguiente:

a) Para las piezas empresilladas:

$$i_1 = \frac{L_1}{\pi}$$

siendo \$L_1\$ la separación entre ejes

de presillas e \$i_1\$ el radio de giro mínimo de uno de los perfiles.

b) Para las barras unidas por celosía triangular:

$$i_1 = \pi \sqrt{\frac{Q}{n \cdot F_0} \cdot \frac{D^3}{L_1 \cdot S^2}}$$

En donde:

- \$L_1\$, Separación entre montantes de la celosía;
- \$i_1\$, radio de giro mínimo de uno de los perfiles;
- \$Q\$, área de la superficie total de la pieza compuesta;
- \$F_0\$, sección bruta de una diagonal de la celosía; si la celosía es doble, \$F_0\$ es la suma de las áreas de las secciones brutas de las diagonales (dos) que se cruzan.

- D, longitud teórica de una diagonal;
- s, distancia entre ejes de dos perfiles simples consecutivos.
- n, número de diagonales que están enfrente de otra.

Cálculo y disposición de presillas

Las presillas o las celosías que unen los elementos constitutivos de las piezas compuestas, deben proporcionarse con la necesaria fortaleza para resistir el efecto del esfuerzo cortante que se presenta al deformarse solidariamente las piezas simples, de modo que nunca cedan antes de producirse el pandeo.

Con relación a la disposición de las presillas o elementos de celosía, la Instrucción E.M. - 62 aconseja:

Las presillas o elementos de las celosías se dispondrán de tal manera que se cumplan las condiciones siguientes:

- a) $L_1 \leq 50 i_1$.
- b) El número de recuadros en que quede dividida la pieza será siempre igual o mayor que tres, procurándose que la longitud de los recuadros sea constante en toda la barra.
- c) Para la unión de las presillas a las piezas, se emplearán remaches o cordones de soldadura, pero no tornillos.
- d) Tanto en las piezas empresilladas como las que están compuestas por una celosía triangular, se dispondrán presillas en los extremos de la barra, unidas, a cada uno de los perfiles componentes, con un mínimo de tres remaches o la sección de soldadura equivalente. Puede prescindirse de estas presillas cuando la cartela del nudo pueda hacer el mismo oficio, por estar situada en el plano de arriostramiento.
- e) En celosías triangulares, se recomienda que la inclinación de las diagonales sobre el eje de la barra principal está comprendida entre 30° y 60°.

En estructuras no sujetas a cargas dinámicas, las presillas se dimensionarán para un esfuerzo cortante ideal de valor:

$$Q_i = \frac{N \cdot w}{30}$$

En las piezas empresilladas, en las que la separación entre ejes de perfiles, s, sea superior a 20 i_1 , se incrementará el valor de Q_i , multiplicándolo por:

$$\frac{5 \cdot s}{100 \cdot i_1}$$

siendo i_y el radio de giro mínimo de uno de los perfiles.

Las barras de la celosía se dimensionarán para absorber, igual que en las piezas empresilladas, un esfuerzo cortante ideal de valor:

$$Q_i = \frac{N \cdot \omega}{80}$$

El esfuerzo axial provocado por el esfuerzo cortante ideal en la diagonal de una celosía simple, viene dado por la expresión:

$$N_D = \frac{Q_i}{n \cdot \text{sen } \theta}$$

siendo θ el ángulo que forma la diagonal con el eje de la barra principal y n el número de diagonales que ocupan la misma posición en planos paralelos. Las diagonales se calcularán a compresión con aquel esfuerzo N_D y una longitud de pandeo de valor: $0,8 \cdot L_D$

siendo L_D la longitud teórica de la diagonal. Se recomienda que su esbeltez de cálculo no supere el valor 150.

Si la celosía es doble se tomará como valor de N_D la mitad del valor dado por la expresión citada anteriormente.

Cuando el pandeo se efectúa normalmente al eje de las "yy", el cálculo se realiza como si fuesen piezas macizas de mayor longitud, es decir, el coeficiente " ω_{yi} " es el correspondiente a la esbeltez ideal.

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \frac{m}{2} \lambda_1^2}$$

En esta fórmula λ_y es la esbeltez de la pieza compuesta $\lambda_y = L_y / i_y$; "m" es el número de perfiles de igual tipo que se reúnen para formar una sola pieza, o el de grupos de perfiles que pueden ser reemplazados por uno solo;

" λ_1 ", es la esbeltez máxima de un elemento aislado, ya definida anteriormente.

Deberá verificarse que:

$$\omega_{yi} \frac{P}{\Omega} \leq \sigma_{adm.}$$

Ejemplo

Se desea comprobar el pilar formado por dos U PM-20, de tres metros de altura, sometida a una carga axial de 77 Tn.

Tensión admisible: 1.600 Kg/cm^2

Características mecánicas de la sección compuesta:

$$Q = 64,40 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 4.430 \text{ cm}^4$$

$$L_x = 300 \text{ cm.}$$

$$L_y = 300 \text{ cm.}$$

$$I_x = 3.320 \text{ cm}^4$$

$$i_y = 8,29 \text{ cm.}$$

$$i_x = 7,70 \text{ cm.}$$

Esbelteces mecánicas, λ_x y λ_y :

$$\lambda_x = \frac{300}{7,70} = 39 ;$$

$$\lambda_y = \frac{300}{8,29} = 36,3$$

Radio de giro mínimo, i_1 de una U del 20: $i_1 = 2,14 \text{ cm.}$

luego:

$$\lambda_1 = \frac{57,5}{2,14} = 26,80; \quad m = 2$$

Esbeltez ideal con relación al eje de inercia libre:

$$\lambda_{y1} = \sqrt{36,3^2 + 26,8^2} = 45; \quad \omega_{y1} = 1,17$$

Como la esbeltez λ_{y1} es superior a λ_x , se comprobará el pilar para aquella esbeltez:

$$\sigma = 77.000 \frac{1,17}{64,4} = 1.400 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_{adm} = 1.600 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo de las presillas.

Se disponen presillas de 270.125.3 mm.

$$Q_0 = P \frac{\omega}{30} = 77.000 \frac{1,17}{30} = 1.125 \text{ Kg.}$$

$$T = Q_0 \frac{L_1}{3} = 1.125 \frac{57,5}{16} = 4.050 \text{ Kg.}$$

El esfuerzo por presilla es:

$$\frac{T}{2} = \frac{4.050}{2} = 2.025 \text{ Kg.}$$

Módulo resistente de la presilla:

$$W = b \frac{h^2}{6} = 0,3 \frac{12,5^2}{6} = 20,80 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = T \frac{e}{4W} = 4.050 \frac{20,7}{4 \cdot 20,3} = 1.010 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (admisible)}$$

EJERCICIO.-

Calcular la sección doble T de una barra comprimida articulada en sus extremos, si la fuerza de compresión es $P = 50T$. y la longitud $l = 2m$.

Utilizamos un acero del tipo A-37 cuya tensión admisible básica es 1.600 Kg/cm^2
 $\sigma_e = 2.400 \text{ Kg/cm}^2$ y $E = 2.100.000$

SOLUCIÓN.-

Primero utilizaremos el método de Euler.

Tomando el coeficiente de seguridad igual a 5 la carga crítica será $50.000 \text{ Kg} = 250.000 \text{ Kg}$.

$$P_{\text{crit.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{min.}}}{l^2}$$

$$I_{\text{min.}} = \frac{P_{\text{crit.}} \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{250.000 \cdot 200^2}{10 \cdot 2.100.000} = 476,19 \text{ cm}^2$$

Tomamos el perfil de $555 \text{ cm}^2 \Rightarrow$ P N 32 cuyo radio de giro mínimo es $2,67$ y $Q = 77,7 \text{ cm}^2$

La esbeltez de este perfil será: $\lambda = \frac{200}{2,67} = 74,9 \approx 75$

Salte fuera de Euler ya que el valor de $\lambda_c = 3,14 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^6}{2.400}} = 92,88$

por lo que, evidentemente, $74,9 < 92,88$

Buscando el coeficiente omega correspondiente hallamos: para $\lambda = 75 \Rightarrow \omega = 1,37$

$$P_{\text{uso}} = \frac{\sigma \cdot Q}{\omega} = \frac{1.600 \cdot 77,7}{1,37} = 90,744 \text{ T.}$$

Como que la carga de uso es bastante mayor que la necesaria probamos con otro perfil; por ejemplo, el PN 22 $r_{\text{min.}} = 2,02$ $Q = 39,5$

$$\lambda = \frac{200}{2,02} = 99 \Rightarrow \omega = 1,87$$

$$P_{\text{uso}} = \frac{1.600 \cdot 39,5}{1,87} = 33,796 \text{ T.}$$

Ahora la carga de uso resultante es demasiado pequeña. Probamos de nuevo con

otro perfil, por ejemplo PN26 $r_{\text{min.}} = 2,32$ $Q = 53,4$ $\lambda = \frac{200}{2,32} = 86,2$

$$\lambda = 86,2 \Rightarrow \omega = 1,57 \quad P_{\text{uso}} = \frac{1.600 \cdot 53,4}{1,57} = 54,4 \text{ T.}$$

Este perfil lo consideramos aceptable, por ser P_{uso} ligeramente superior a 50 T .

EJERCICIO.-

Una barra de perfil angular 40x20x4 tiene una sección transversal de 2,25 cm² y un momento de inercia mínimo $I_x = 0,6 \text{ cm}^4$, soporta una carga $P = 240 \text{ Kg.}$ y está articulada en ambos extremos, siendo su longitud 60 cm.

- Hallar:
- La esbeltez
 - El coeficiente de seguridad al pandeo.
 - Por el método Q determinar la carga máxima que puede resistir la barra si es de acero A-37.

SOLUCIÓN.-

Por las tablas: $e_x = 4,8 \text{ mm.}$
 $e_y = 14,7 \text{ mm.}$

$$a) \quad r = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,6}{2,25}} = 0,516 \quad l = 60 \text{ cm.} \quad \lambda = \frac{l}{r} = \frac{60}{0,516} = \underline{\underline{116}}$$

b) $\lambda > \lambda_c$ luego vale Euler.

$$P_{\text{crit.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,6}{60^2} = 3450 \text{ Kg.}$$

$$\text{Coeficiente de seguridad } S_p = \frac{3450}{240} = \underline{\underline{14,4}}$$

c) La fatiga admisible del acero A-37 es $\sigma_{ad.} = 1.400 \text{ Kg/cm}^2$

Para $\lambda = 116$ $\omega = 2,3$

$$P_{\text{uso}} = \frac{Q \cdot \sigma_{ad.}}{\omega} = \frac{2,25 \cdot 1.400}{2,3} = \underline{\underline{1370 \text{ Kg.}}}$$



EXERCICIO.-

Dada una barra de duraluminio de secci3n anillo y altura 1,2 m.
tal como indica la figura.

Determinar la carga cr3tica y la fatiga cr3tica.

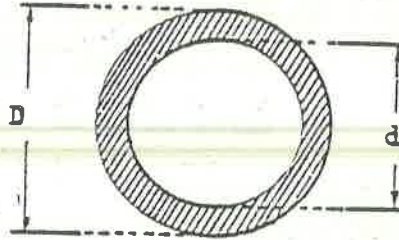
Datos: $E = 0,71 \cdot 10^5$

$$\sigma_e = 180 \text{ Kg/m}^2$$

$$l = 1,2 \text{ m.}$$

$$D = 4 \text{ cm.}$$

$$d = 3 \text{ cm.}$$



SOLUCI3N.-

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (256 - 81) = \frac{175 \pi}{64} \text{ cm}^4$$

$$\text{Area } \Omega = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (16 - 9) = \frac{7 \pi}{4} \text{ cm}^2$$

$$\text{Radio de giro } r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}} = \sqrt{\frac{175,4}{64,7}} = \frac{5}{4} \text{ cm.}$$

$$\text{Longitud de pandeo} = 0,7 \cdot 1,2 = 0,84 \text{ m.}$$

$$\lambda = \frac{0,84}{5/4} = 67,2$$

$$\lambda_e = \pi \sqrt{\frac{E}{180}} = \pi \sqrt{\frac{0,71 \cdot 10^5}{180}} = 62$$

$$67,2 > 62$$

Luego, vale Euler.

$$P_{\text{crit.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(0,7 \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 0,71 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{175 \pi}{64}\right) \cdot 10^{-8}}{64 (0,7 \cdot 1,2)^2} = \underline{\underline{85,3 \text{ T.}}}$$

$$\sigma_{\text{crit.}} = \frac{85,3 \text{ T.}}{\Omega} = \frac{85,3 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{7\pi/4} = \underline{\underline{155 \text{ Kg/cm}^2}}$$

EJERCICIO.-

UN Perfil metálico de acero A-37, de 2 m. de longitud y articulado en sus extremos, está cargado con 20 t.

Determinar el grado de seguridad sabiendo que las características del perfil son las siguientes:

$$Q = 29,6 \text{ cm}^2; \quad I_{\min.} = 178 \text{ cm}^4; \quad r_{\min.} = 2,45 \text{ cm.}$$

SOLUCIÓN .-

Hallaremos primero la esbeltez. $\lambda = \frac{200}{2,45} = 81,6$

Por ser el acero del tipo A-37 su esbeltez límite será la siguiente:

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{2.100.000}{2.400}} = 93$$

Teniendo que $\lambda > \lambda_c$ la ecuación de Euler no será válida.

Usaremos el método de Tetmayer:

$$\sigma_{\text{crit.}} = 3.100 - (11,4 \cdot 81,6) = 2.186$$

$$P_{\text{crit.}} = \sigma_{\text{crit.}} \cdot Q = 2.186 \cdot 29,6 = 64.700$$

La relación $\frac{\text{Carga crítica}}{\text{Carga de uso}}$ nos da el grado de seguridad:

$$\frac{64.700}{20.000} = \underline{\underline{3,23}} = \text{Grado de Seguridad.}$$

EJERCICIO.-

Calcular la carga de uso para un perfil metálico de acero A-37, de 2 m. de longitud y cuyas características son las siguientes:

$$Q = 29,6 \text{ cm}^2; \quad I_{\min.} = 178 \text{ cm}^4; \quad r_{\min.} = 2,45 \text{ cm.}$$

teniendo en cuenta que queremos que el grado de seguridad sea 3, y en los casos:

- 1) el pilar está articulado en ambos extremos
- 2) el pilar tiene el extremo superior libre y el extremo de la base empotrado.

SOLUCIÓN.-

En el caso 1) la esbeltez será: $\lambda = \frac{200}{2,45} = 81,6$

En el caso 2) la esbeltez será: $\lambda = \frac{2 \cdot 200}{2,45} = 163,2$

Podemos observar que para el primer caso no será válida la fórmula de Euler, mientras que para el segundo caso sí lo será.

1) $\sigma_{\text{crit.}} = 3.100 - (11,4 \cdot 81,6) = 2.186 \text{ Kg./cm}^2$

$$P_{\text{crit.}} = 2.186 \cdot 29,6 = 64.700 \text{ Kg.}$$

$$P_{\text{uso}} = \frac{P_{\text{crit.}}}{S_r} = \frac{64.700}{3} = \underline{\underline{21.566 \text{ Kg.}}}$$

2) $P_{\text{crit.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min.}}{l_p^2} = \frac{10 \cdot 2.100.000 \cdot 178}{(2 \cdot 200)^2} = 23.362 \text{ Kg.}$

$$P_{\text{uso}} = \frac{23.362}{3} = \underline{\underline{7.787 \text{ Kg.}}}$$

EJERCICIO.-

Una barra soporta una presión axial de 5T. y tiene una longitud de 1,50 m.
Hallar el perfil requerido, angular, de acero A-37 con $\sigma_{ad.} = 1.400$

SOLUCIÓN.-

Empleamos la fórmula de Faust: $I = 2 \cdot P \cdot l^2$

$$I = 2 \cdot 5 \cdot 1,5^2 = 22,5 \text{ cm}^3$$

Elegimos un angular de 75x75x8 con $I_{min.} = 24,4 \text{ cm}^3$; $r_{min.} = 1,46 \text{ cm.}$; $\Omega = 11,5$

$$\lambda = \frac{150 \text{ cm.}}{1,46} = 103 \quad \text{Para } \lambda = 103 \quad \omega = 1,96$$

de la fórmula $P_{uso} = \frac{\Omega \cdot \sigma_{ad.}}{\omega}$ despejamos $\sigma_{ad.} = \frac{P \cdot \omega}{\Omega}$

$$\sigma_{trabajo} = \frac{5000 \cdot 1,96}{11,5} = 852 \text{ Kg/cm}^2$$

Pero $852 < 1.400$ por bastante diferencia, por lo tanto elegiremos otro perfil menor para conseguir mayor rendimiento; elegimos 65x65x7

$$r_{min.} = 1,26 \text{ cm.}; \quad \Omega = 8,70 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = \frac{150}{1,26} = 119 \quad \omega = 2,39$$

$$\sigma = \frac{P \cdot \omega}{\Omega} = \frac{5000 \cdot 2,39}{8,70} = 1.372 \quad \text{válido } < 1.400$$

TABLA III.J

COEFICIENTES α PARA ACEROS A-52

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	20
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	30
40	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	40
50	1,20	1,22	1,23	1,24	1,25	1,27	1,28	1,30	1,31	1,33	50
60	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,54	60
70	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66	1,69	1,72	1,75	1,78	1,81	70
80	1,84	1,87	1,90	1,94	1,97	2,01	2,04	2,08	2,11	2,15	80
90	2,18	2,22	2,26	2,30	2,34	2,38	2,42	2,46	2,50	2,54	90
100	2,59	2,63	2,67	2,72	2,76	2,81	2,85	2,90	2,95	2,99	100
110	3,04	3,09	3,14	3,19	3,24	3,29	3,34	3,39	3,44	3,49	110
120	3,55	3,60	3,65	3,71	3,76	3,82	3,87	3,93	3,98	4,04	120
130	4,10	4,16	4,22	4,27	4,33	4,39	4,45	4,52	4,58	4,64	130
140	4,70	4,76	4,83	4,89	4,95	5,02	5,08	5,15	5,22	5,28	140
150	5,35	5,42	5,48	5,55	5,62	5,69	5,76	5,83	5,90	5,97	150
160	6,04	6,12	6,19	6,26	6,34	6,41	6,48	6,56	6,63	6,71	160
170	6,79	6,86	6,94	7,02	7,09	7,17	7,25	7,33	7,41	7,49	170
180	7,57	7,65	7,73	7,82	7,90	7,98	8,07	8,15	8,24	8,32	180
190	8,40	8,49	8,58	8,66	8,75	8,84	8,93	9,02	9,10	9,19	190
200	9,28	9,37	9,47	9,56	9,65	9,74	9,83	9,92	10,02	10,11	200
210	10,21	10,30	10,40	10,49	10,59	10,69	10,78	10,88	10,98	11,08	210
220	11,18	11,27	11,38	11,48	11,57	11,68	11,78	11,88	11,98	12,09	220
230	12,19	12,29	12,40	12,50	12,61	12,72	12,82	12,93	13,03	13,14	230
240	13,25	13,36	13,47	13,58	13,69	13,80	13,91	14,02	14,13	14,25	240
250	14,36										



CÁTEDRA DE ESTRUCTURAS ARQUITECTÓNICAS

Catedrático JOSE M^a PUJADAS PORTA

MONOGRAFIAS DE CÁLCULO

FLEXIÓN DESVIADA

FLEXION COMPUESTA

Y

NUCLEO CENTRAL

José M^a Durbán Fl

Prof. E. C. de la Asignatur

En el estudio de la flexión pura se observa que si el momento de flexión exterior está contenido en un plano que pase por un eje principal de la sección, ésta gira alrededor del otro eje principal, ortogonal al primero y que contiene al vector momento. El eje de la viga se deforma en el plano de flexión, y a ésta se le llama simétrica.

$$\vec{M} = \vec{M}_z = \vec{P} \cdot d$$

Pero si el plano de fuerzas no coincide con ninguno de los ejes principales de inercia, el momento estará contenido en este plano, y su vector representativo estará contenido en otro plano perpendicular a él. En este caso el eje de giro de la sección (Línea Neutra) no será coincidente con el eje del momento.

El momento M se puede descomponer según los ejes Y, Z , que pueden ser principales de inercia o ejes cualesquiera ortogonales.

En el primer caso, aplicando el principio de superposición se tendrá: $M = M_z + M_y$ y en la fórmula de las tensiones:

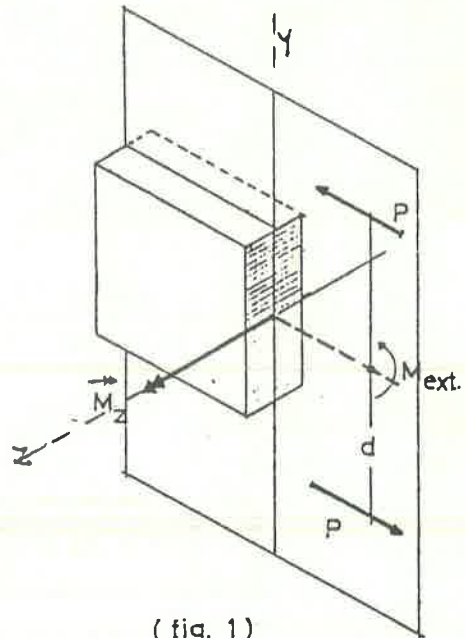
$\sigma_{yz} = \sigma'_{yz}$ debida a $M_z + \sigma''_{yz}$ debida a M_y y colocando las expresiones de la Ley de Bernoulli-Navier, se tiene:

$$\sigma_{yz} = \frac{M_z \cdot y}{I_{z_0}} + \frac{M_y \cdot z}{I_{y_0}} \quad (1)$$

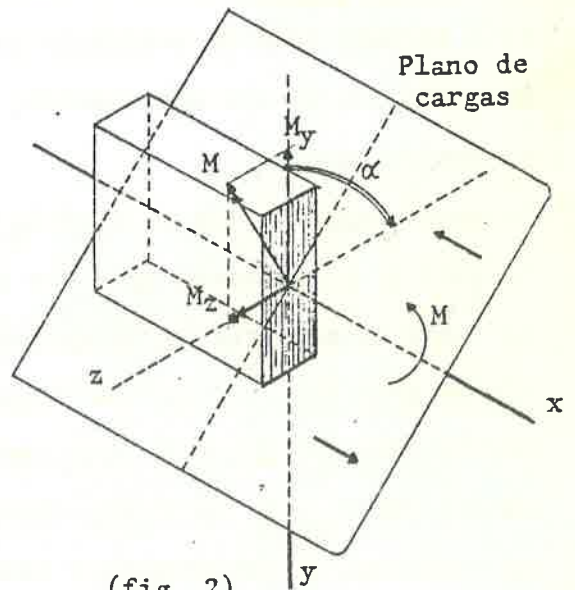
y sustituyendo los valores $M_z = M \cdot \cos \alpha$

$M_y = M \cdot \sin \alpha$, quedará finalmente:

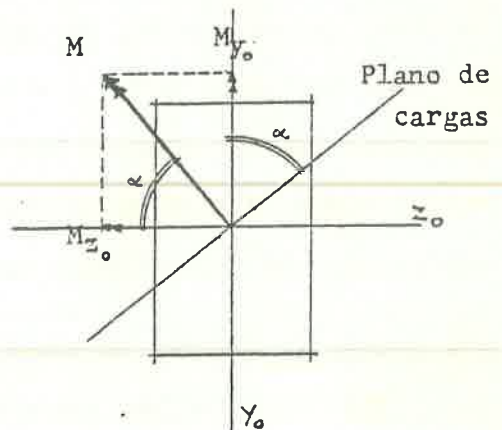
$$\sigma_{yz} = M \left(\frac{\cos \alpha \cdot y}{I_{z_0}} + \frac{\sin \alpha \cdot z}{I_{y_0}} \right) \quad (2)$$



(fig. 1)



(fig. 2)



(fig. 2 a)

En esta fórmula, haciendo $\sigma_{yz} = 0$ obtendremos la ecuación de la Línea Neutra,

o sea

$$0 = M \left(\frac{\cos \alpha \cdot y}{I_{z_o}} + \frac{\text{sen } \alpha \cdot z}{I_{y_o}} \right) \quad \text{y como } M \neq 0$$

deberá ser nulo el paréntesis, y se obtendrá:

$$\frac{\cos \alpha \cdot y}{I_{z_o}} + \frac{\text{sen } \alpha \cdot z}{I_{y_o}} = 0 \quad \text{y haciendo operaciones}$$

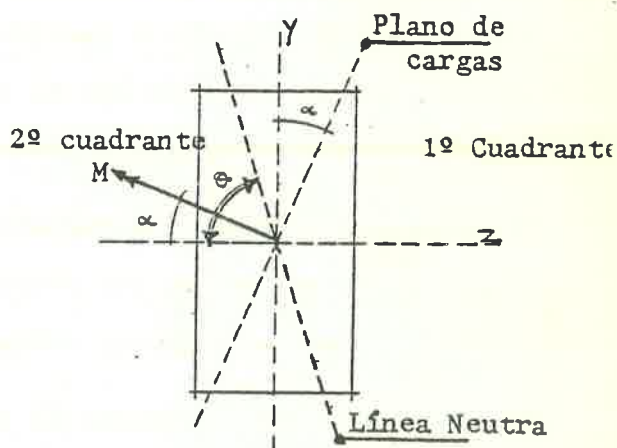
$$\frac{\cos \alpha \cdot y}{I_{z_o}} = - \frac{\text{sen } \alpha \cdot z}{I_{y_o}} \quad \frac{y}{z} = - \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \frac{I_{z_o}}{I_{y_o}} \quad \text{y finalmente,}$$

$$\boxed{\frac{y}{z} = - \text{tg } \alpha \frac{I_{z_o}}{I_{y_o}} \quad (3)}$$

La razón $\frac{y}{z}$ es la tangente del ángulo θ que la línea neutra forma con el eje Z, y el signo (-) indica que la Línea Neutra pasará por los cuadrantes opuestos en que pasa el plano de cargas (fig 3).

Esta fórmula pone en evidencia que $\theta \neq \alpha$, y por lo tanto, la Línea Neutra no coincide con el eje del momento, tal como se había avanzado.

Se puede observar que si $I_{z_o} = I_{y_o}$ el cociente $\frac{I_{z_o}}{I_{y_o}} = 1$ y por tanto $\text{tg } \theta = - \text{tg } \alpha$, y por lo tanto coincidiría la Línea Neutra con el eje de momentos, (plano de cargas y Línea Neutra perpendiculares); esto será debido a que al ser $I_{z_o} = I_{y_o}$ la elipse central de inercia será una circunferencia y ello corresponde a una sección con infinitos pares de ejes



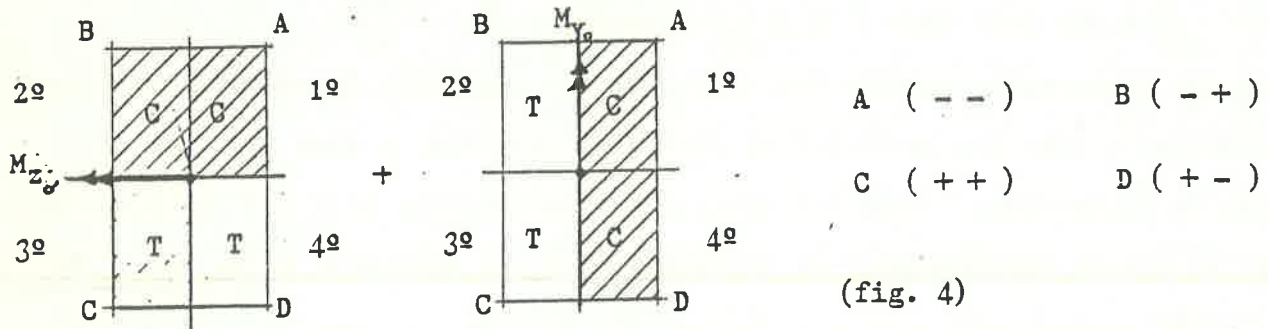
(fig. 3)

principales, y por tanto es indistinta la dirección del plano de cargas, ya que se trata de una sección de módulo resistente constante.

Se puede observar que si $\alpha = 0$ y $\alpha = 90^\circ$ las Líneas Neutras correspondientes coinciden con los ejes de los momentos, ya que si $\alpha = 0$ M está en el eje Z y si $\alpha = 90^\circ$ M está en el eje Y, por lo tanto, mientras α se mueve en el 1º cuadrante, la Línea Neutra definida por θ se moverá en el 2º cuadrante.

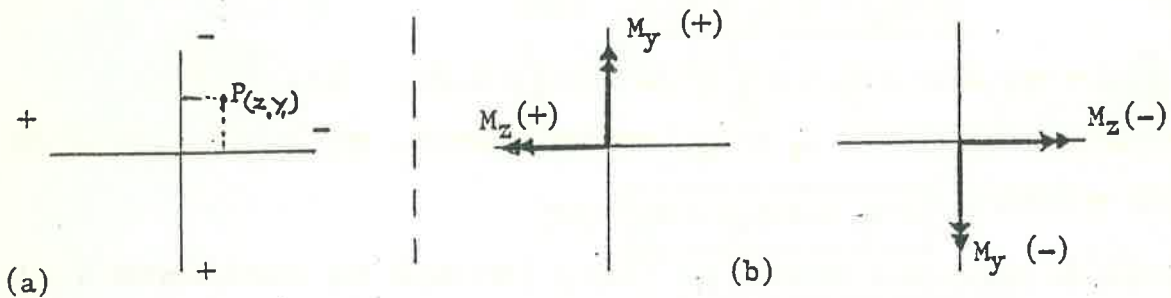
Los signos de los dos términos de la ecuación $\sigma_{yz} = \frac{M_{z_o} y}{I_{z_o}} + \frac{M_{y_o} z}{I_{y_o}}$ se deducen considerando los efectos de M_{z_o} y M_{y_o} , que en el caso de la fig. 4, si M es positivo se obtiene DOS compresiones en el primer cuadrante, DOS tracciones en el tercer cuadrante, UNA compresión y UNA tracción en el segundo

cuadrante, y UNA tracción y UNA compresión en el cuarto cuadrante.



Tambien se obtiene el resultado con su signo mediante el siguiente convenio

(a) para las ordenadas y (b) para los momentos.



En cuanto al convenio (a) para las coordenadas de un punto P cualquiera, se observa que es contrario al convenio matemático, y en cuanto al convenio (b) se deduce que M_z es positivo si produce compresiones en la parte superior de la viga (1º y 2º cuadrantes) y M_y es positivo si produce compresiones en el lado derecho de la sección (fig.4)

Para un desarrollo general de la teoría de la flexión desviada, es decir, tomando como eje de referencia ejes no principales de inercia, pasando por el centro de gravedad de la sección y actuando las fuerzas que originan el momento flector, en un plano cualquiera definido por el ángulo α que forma con el eje Y (fig.5).

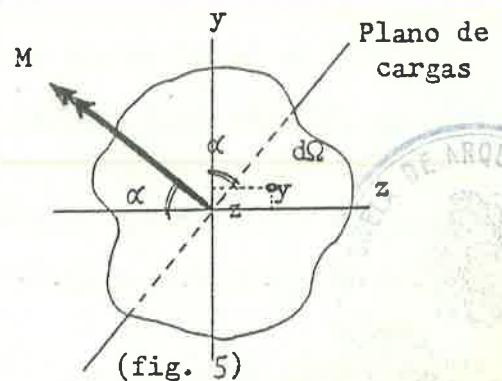
Se plantean la ecuaciones de equilibrio de las tensiones internas con las fuerzas de corte de la sección.

$$\int_D \sigma_x \cdot d\Omega - N = 0 \quad (4) \quad \int_D \sigma_x \cdot d\Omega \cdot y - M_z = 0 \quad (5) \quad \int_D \sigma_x \cdot d\Omega \cdot z - M_y = 0 \quad (6)$$

En el caso que nos ocupa, $N = 0 \quad M_z \neq 0 \quad M_y \neq 0$

Como los vectores tensión tienen la dirección del eje X y además sus extremos están contenidos en un plano (hipótesis de Bernoulli-Navier), la ecuación de este plano responde a la fórmula:

$$\sigma_x = A z + B y + C \quad (7)$$



Introduciendo la función σ_x en las ecuaciones (4) (5) y (6) se obtiene:

$$1^{\circ} \int_{\Omega} (Az + By + C) \cdot d\Omega = 0 = A \cdot \int_{\Omega} z \cdot d\Omega + B \cdot \int_{\Omega} y \cdot d\Omega + C \int_{\Omega} d\Omega$$

Las dos primeras integrales son nulas por ser expresión de momentos estáticos referidos a ejes que pasan por el centro de gravedad, y como $\int_{\Omega} d\Omega$ es el área de la sección, C debe ser nulo, y en consecuencia si $C = 0$ el plano pasa por el eje de coordenadas y la expresión de σ_x se convierte en $\sigma_x = Az + By$ (8)

$$2^{\circ} \int_{\Omega} (Az + By) \cdot d\Omega y = M_z = A \cdot \int_{\Omega} zy \cdot d\Omega + B \cdot \int_{\Omega} y^2 \cdot d\Omega \quad (9)$$

Las integrales representan I_{zy} y I_z respectivamente, por lo que se puede escribir.

$$\boxed{A \cdot I_{zy} + B \cdot I_z = M_z} \quad (10)$$

$$3^{\circ} \int_{\Omega} (Az + By) \cdot d\Omega z = M_y = A \cdot \int_{\Omega} z^2 \cdot d\Omega + B \cdot \int_{\Omega} y \cdot z \cdot d\Omega \quad (11)$$

Las integrales representan I_y e I_{zy} respectivamente, por lo que la ecuación se puede escribir.

$$\boxed{A \cdot I_y + B \cdot I_{zy} = M_y} \quad (12)$$

El sistema de ecuaciones formado por (10) y (12) dará los coeficientes A y B

$$\boxed{\begin{matrix} A I_{zy} + B I_z = M_z \\ A I_y + B I_{zy} = M_y \end{matrix}}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} M_z & I_y \\ M_y & I_{zy} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{zy} & I_z \\ I_y & I_{zy} \end{vmatrix}} = \frac{M_z \cdot I_{zy} - M_y \cdot I_z}{I_{zy}^2 - I_z \cdot I_y} \quad B = \frac{\begin{vmatrix} I_{zy} & M_z \\ I_y & M_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{zy} & I_z \\ I_y & I_{zy} \end{vmatrix}} = \frac{M_y \cdot I_{zy} - M_z \cdot I_y}{I_{zy}^2 - I_z \cdot I_y}$$

por lo tanto, $\sigma_x = Az + By$ se puede escribir:

$$\sigma_x(yz) = \frac{M_z \cdot I_{zy} - M_y \cdot I_z}{I_{zy}^2 - I_z \cdot I_y} \cdot z + \frac{M_y \cdot I_{zy} - M_z \cdot I_y}{I_{zy}^2 - I_z \cdot I_y} \cdot y \quad ($$

(tensión en la dirección X en el punto de coordenadas y z)

operando obtenemos:

$$\boxed{\sigma_x(YZ) = \frac{(M_y \cdot I_z - M_z \cdot I_{zy}) \cdot z + (M_z \cdot I_y - M_y \cdot I_{zy}) \cdot y}{I_z \cdot I_y - I_{zy}^2}} \quad (13)$$

Unos pocos casos de flexión pueden reconocerse ahora:

1º Sea M en la dirección de M_z

$$M_y = 0$$

La ecuación (13) quedará

$$\boxed{\sigma_x(yz) = \frac{M_z (-I_{zy} \cdot z + I_y \cdot y)}{I_y \cdot I_z - I_{zy}^2}} \quad (14)$$

2º Que los ejes elegidos sean principales de inercia, (entonces $I_{zy} = 0$)

La ecuación (13) quedará

$$\sigma_x(yz) = \frac{M_y \cdot I_z \cdot z + M_z \cdot I_y \cdot y}{I_z \cdot I_y}$$

y efectuando operaciones:

$$\sigma_{yz} = \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad \text{o bien} \quad \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \sigma_{yz} \quad (15)$$

ecuación que coincide con la (1), o sea, la suma de las flexiones simétricas.

3º Si los ejes son principales de inercia y el momento coincide con el eje Z entonces:

$$\sigma_{yz} = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

que es la fórmula de la flexión simple simétrica.

Con el convenio de signos adoptado, si y está sobre el eje Z será (-y) y para un momento positivo $\sigma_{yz} = -\frac{M_z \cdot y}{I_z}$ (tensiones de compresión sobre la Línea Neutra).

Ecuación de la línea Neutra para el caso general (13)

haciendo $\sigma = 0$ y $M_z = M \cdot \cos \alpha$ $M_y = M \cdot \sin \alpha$ se obtiene:

$$\frac{y}{z} = -\frac{\sin \alpha \cdot I_z - \cos \alpha \cdot I_{zy}}{\cos \alpha \cdot I_y - \sin \alpha \cdot I_{zy}} = \operatorname{tg} \theta \quad (16)$$

Ecuación que en el caso de ser los ejes Y y Z principales de Inercia, se convierte en la ecuación (3):

$$\frac{y}{z} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_{z_0}}{I_{y_0}}$$

RESUMEN

No es posible dimensionar directamente una sección a flexión desviada, mediante las fórmulas obtenidas; lo que si puede hacerse es comprobar una sección, buscando sus tensiones máximas y comparandola con las tensiones admisibles del material; Según el resultado se "ensayará" otro perfil mayor o menor, si la tensión obtenida ha sido mayor o menor que la admisible. A medida que aumenta el ángulo α del plano de carga con el eje principal "y", aumenta el valor de la tensión máxima y en general, si $\alpha = 0$ se obtiene la tensión máxima más favorable y si $\alpha = 90^\circ$ se obtiene la tensión máxima menos favorable, siempre que I_{z_0} sea mayor que I_y . No obstante, estudios más completos han demostrado que no siempre la posición $\alpha = 90^\circ$ (o sea plano de cargas coincidente con el eje Z) (I_y mínimo) es la más desfavorable.

La marcha a seguir para la comprobación de cualquier perfil es la siguiente:

- 1º Hallar la ecuación del eje neutro (ecuaciones (3) ó (16))
- 2º Ver qué puntos de la sección son los más alejados del eje neutro.
- 3º Aplicar la ecuación (1) ó (13) colocándole las coordenadas (y z) del punto

más alejado.

Es más adecuado trabajar con las ecuaciones (3) y (1), ya que si no se conocen los ejes principales y los valores I_z , I_y , éstos se pueden hallar gráfica o analíticamente, y lo mismo puede hacerse con la Línea Neutra.

Los ejemplos que siguen ilustran la marcha a seguir en los diferentes casos de flexión desviada.

Un procedimiento gráfico para hallar la tensión en un punto cualquiera de la sección y colocar la posición de la Línea Neutra es el siguiente:

Conocido I_z , I_y y las distancias máximas a los bordes, se puede calcular:

$$W_{y_0} = \frac{I_{y_0}}{z_{\max}} = \frac{I_{y_0}}{b/2} \quad W_{z_0} = \frac{I_{z_0}}{y_{\max}} = \frac{I_{z_0}}{h/2}$$

y aplicando la ley de Navier:

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_{z_0}}{W_{z_0}} ; \quad \sigma''_{\max} = \frac{M_{y_0}}{W_{y_0}}$$

con lo que se puede construir los diagramas lineales de σ' y σ''

Para cualquier punto E de la sección se tiene $\sigma_E = \sigma'_E + \sigma''_E = \overline{mn} + \overline{rs}$ con sus signos correspondientes.

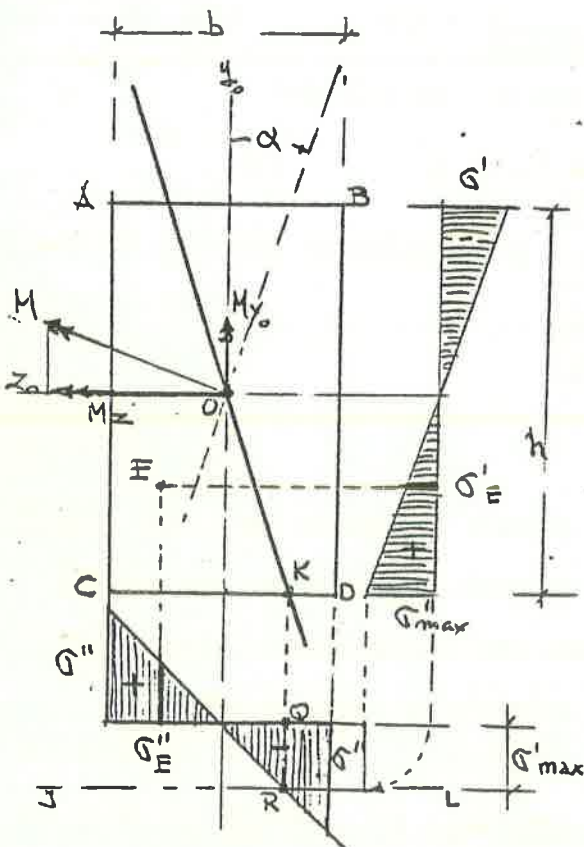
Para hallar un punto de la Línea Neutra, o sea con $\sigma = 0$, trazaremos la recta JL a la separación de σ'_{\max} , obteniendo el punto R.

Levantando vertical desde R se tiene $RQ = \sigma'_K = \sigma'_{\max}$ por lo tanto, para el punto K se tiene:

$$\sigma_k = -RQ + \sigma'_k = -\sigma'_k + \sigma'_{\max} = 0$$

por ser $|\sigma'_k| = |\sigma'_{\max}|$ por construcción.

Por tanto, \overline{KO} es la posición de la Línea Neutra.



$$\sigma_A = \sigma'_A + \sigma''_A \quad \sigma_B = \sigma'_B + \sigma''_B$$

$$\sigma_E = \sigma'_E + \sigma''_E$$

$$\sigma_R = -RQ + \sigma'_{\max} = 0$$

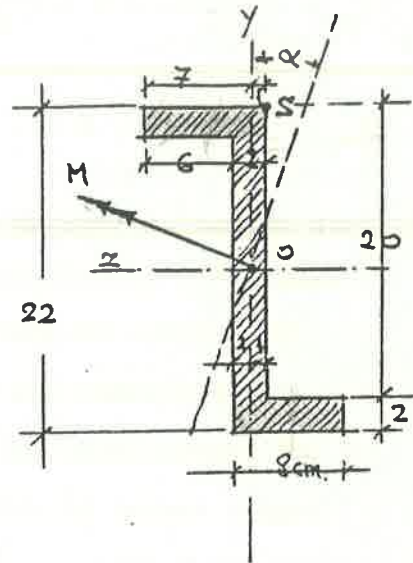
PROBLEMA Nº 1

Una barra prismática de sección Z, está sometida a un momento flector máximo M , que actúa en un plano de cargas inclinado un ángulo α con el plano vertical YY .

Hallar: 1º) La posición de la Línea Neutra. (conjugado de inercia) (gráfica y analíticamente).

2º) Determinar el valor de la tensión máxima:

- Usando la fórmula general de la flexión (Hores)
- Usando la fórmula simplificada después de determinar gráfica o analíticamente I_{z_0} , I_{y_0} y la posición de los ejes principales.



Datos: Cotas de la sección en cm.

$$M = 40.000 \text{ cm.Kg.}$$

$$\text{tg } \alpha = 0,2$$

Solución.-

Primeramente se procederá al estudio mecánico-geométrico de la sección, calculando los momentos de inercia I_z , I_y , I_{zy} . Por el método del círculo de Land se determinará I_{z_0} , I_{y_0} , y las direcciones de los ejes principales Z_0 e Y_0 (esto también se puede hallar usando fórmulas analíticas).

Aplicando la ecuación
$$\frac{y_0}{z_0} = - \text{tg } \alpha \frac{I_{z_0}}{I_{y_0}}$$

se halla la posición de la Línea Neutra, la cual también se puede determinar utilizando la elipse central de inercia, trazando las tangentes paralelas a la dirección del plano de cargas. La línea que une los puntos de contacto es la L.N.

Para el cálculo de σ_s (el punto s resulta ser el más alejado de la Línea Neutra), se puede usar la fórmula general de la flexión o bien, una vez conocidos I_{z_0} , I_{y_0} , aplicando la fórmula simplificada siguiente.

$$\sigma_s = \frac{M_{z_0} y_s}{I_{z_0}} + \frac{M_{y_0} z_s}{I_{y_0}}$$

1º) Hallamos primeramente los momentos de inercia respecto a los ejes paralelos a los lados, y que pasan por el centro de gravedad de la sección.

$$I_z = \frac{22^3 \cdot 2}{12} + 2 \left(\frac{6 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 10^2 \right) = 4.182,66 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{22 \cdot 2^3}{12} + 2 \left(\frac{6^3 \cdot 2}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 4^2 \right) = 470,66 \text{ cm}^4$$

$$I_{zy} = -2 (2 \cdot 6) \cdot 4 \cdot 10 = -960 \text{ cm}^4$$

2º) Para hallar la tensión en el punto s emplearemos la fórmula general de la flexión (13) introduciendo:

a) Los momentos de inercia calculados I_z I_y I_{zy}

b) Las coordenadas del punto s ($y = -11$ $z = -1$)

c) Las proyecciones del momento M. $M_z = M \cdot \cos \alpha$ $M_y = M \cdot \sin \alpha$

Seno y coseno se obtienen de la tangente $\alpha = 0,2$ siendo

$$\sin \alpha = 0,196 \quad \cos \alpha = 0,98 \quad \text{con lo que:}$$

$$M_z = 40.000 \cdot 0,98 = 39.200 \text{ cm.Kg.} \quad M_y = 40.000 \cdot 0,196 = 7.840 \text{ cm.Kg.}$$

Por lo tanto, según el convenio de signos adoptado.

$$\sigma_B = \frac{(M_y I_z - M_z I_{zy}) z_s + (M_z I_y - M_y I_{zy}) y_s}{I_z I_y - I_{zy}^2} \quad \text{valdrá}$$

$$\sigma_B = \frac{[7.840 \times 4.182,66 - 39.200 \cdot (-960)](-1) + [39.200 \cdot 470,6 - 7.840 \cdot (-960)](-11)}{470,6 \times 4.182,66 - (-960)^2}$$

$$\sigma_s = -340,24 \text{ Kg/cm}^2$$

3º) La ecuación del eje neutro se obtendrá de la fórmula (16)

$$\frac{y_s}{z_s} = - \frac{\sin \alpha I_z - \cos \alpha I_{zy}}{\cos \alpha I_y - \sin \alpha I_{zy}}$$

$$\frac{y_s}{z_s} = - \frac{0,196 \cdot 4.182,6 - 0,98 \cdot (-960)}{0,98 \cdot 470,66 - 0,196 \cdot (-960)} = -2,7$$

Por lo tanto, la ecuación de la Línea Neutra será

$$y_s = -2,7 z_s$$

y pasará, según el convenio de signos adoptado, por los cuadrantes 2º y 4º y por tanto se ve que el punto s elegido es el más alejado de la Línea Neutra y por lo tanto será el de tensión máxima. (Su simétrico s_1 ten-

drá la tensión de igual valor y signo contrario).

$$\sigma_{s1} = + 340,24 \text{ Kg/cm}^2$$

Si queremos aplicar la fórmula simplificada:

$$\sigma = \frac{M_{z_0} y_0}{I_{z_0}} + \frac{M_{y_0} z_0}{I_{y_0}}$$

tendremos que hallar los valores de los momentos flectores, los momentos de inercia y las coordenadas del punto s, referidos a los ejes principales de la sección.

a) I_{z_0} e I_{y_0} se obtienen con las fórmulas:

$$I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 I_{zy}}$$

$$I_{y_0} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 I_{zy}}$$

y los ángulos con los ejes de referencia, por la fórmula

$$\text{tg } 2\alpha' = - \frac{2 I_{zy}}{I_z - I_y}$$

Colocando valores en las fórmulas anteriores se obtiene:

$$I_{z_0} = 4.416,2 \quad I_{y_0} = 237$$

$$\text{tg } \alpha' = 0,246$$

$$\text{tg } 2\alpha' = 0,517 \quad 2\alpha' = 27^{\circ}20' \quad \alpha' = 13^{\circ}50'$$

Ahora el ángulo que forma el plano de cargas con el eje Y_0 es $\alpha + \alpha'$

$$\alpha + \alpha' = 11^{\circ}20' + 13^{\circ}50' = 25^{\circ}10' \quad \text{tg}(\alpha + \alpha') = 0,4698$$

Los momentos proyección sobre los ejes principales valen:

$$M_z = M \cdot \cos(\alpha + \alpha') = M \cdot 0,90507$$

$$M_y = M \cdot \text{sen}(\alpha + \alpha') = M \cdot 0,42525$$

Las coordenadas del punto s, referidas a los ejes principales se pueden obtener por las fórmulas del giro de ejes, o bien graficamente.

Graficamente se tiene $s (y_0 = - 10,3 \quad z_0 = - 3,6)$

Introduciendo los valores de todos los elementos referidos a los ejes principales se obtiene:

$$\sigma_s = \frac{40.000 \cdot 0,90507 \cdot (-10,3)}{4.416,23} + \frac{40.000 \cdot 0,42525 \cdot (-3,6)}{237}$$

$$\sigma_s = - 342,8 \text{ Kg/cm}^2$$

Valor que difiere muy poco del σ hallado anteriormente por la aplicación de la

fórmula general. (Esta diferencia proviene de usar la coordenada de s tomada graficamente).

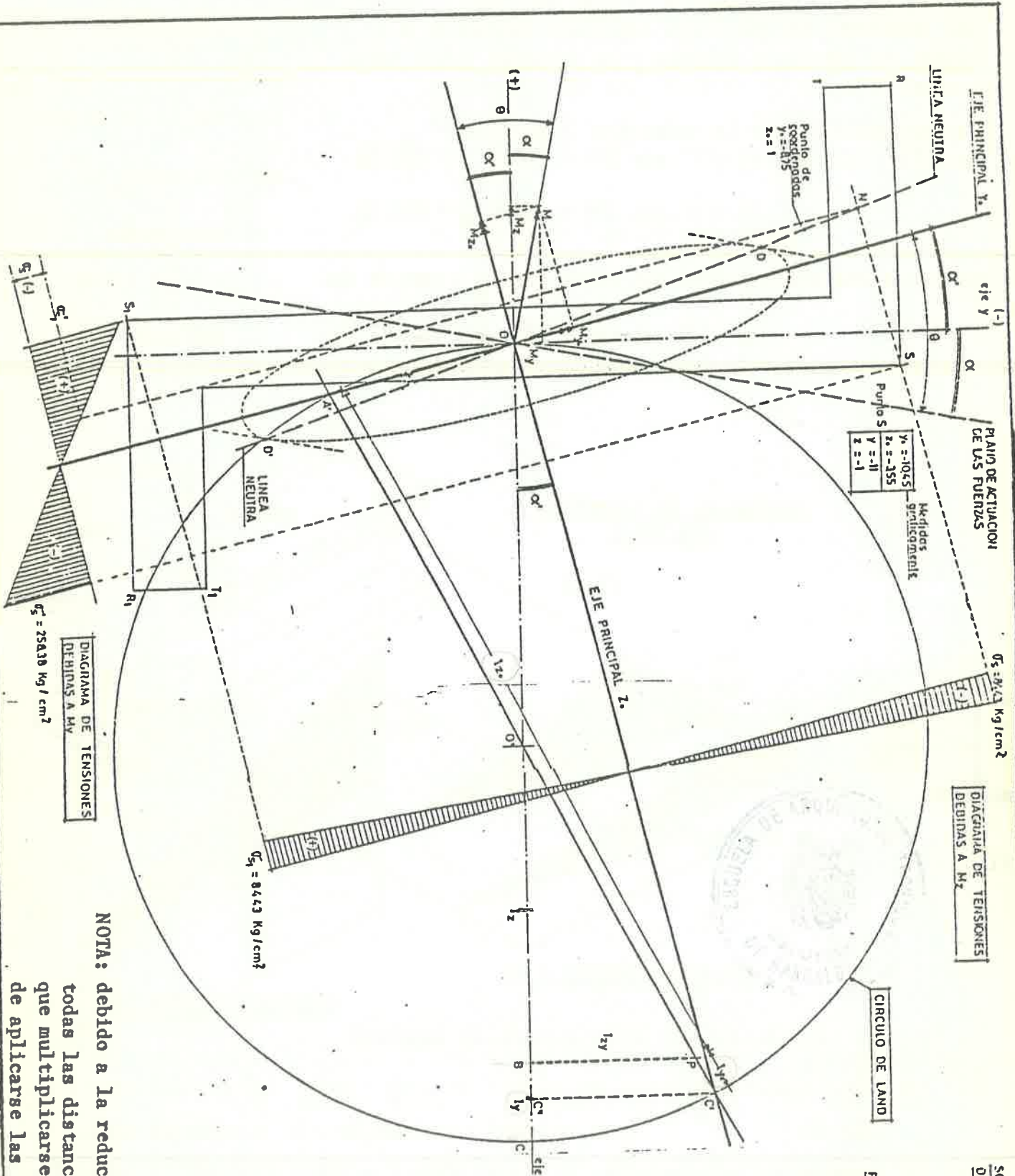
La ecuación de la Línea Neutra es ahora:

$$\frac{y_0}{z_0} = - \operatorname{tg} (\alpha + \alpha') \cdot \frac{I_{z_0}}{I_{y_0}} \quad \text{y aplicando valores}$$

$$\frac{y_0}{z_0} = - 0,4698 \cdot \frac{4.416,23}{237} = - 8,75 \quad \text{o sea}$$

$$\boxed{y_0 = - 8,75 z_0}$$

que forzosamente tiene que coincidir con la Línea Neutra hallada anteriormente.



SOLUCION GRAFICA
 Datos: $I_x = 4181,66 = OB > 208 \text{ mm}$
 $I_y = 470,66 = BC > 235 \text{ mm}$
 $I_{yz} = -960 = BP > -43 \text{ mm}$
 Escala utilizada: 1 mm = 200 cm⁴
 Perfil: E-1:1

Resultados:
 $P_C = I_y = 115 \times 200 = 230 \text{ cm}^4$
 $|P_A| = I_x = 220 \times 200 = 4400 \text{ cm}^4$
 $I_g \alpha' = \frac{CT^2}{C^2} = \frac{53}{219} = 0,10502$
 $\alpha' = 13,5^\circ$

α' = Angulo de los ejes principales con los ejes de referencia
 α = Angulo del plano de cargas con el eje y
 θ = Angulo del plano de cargas con el eje y₀

SOLUCION ANALITICA
 $I_{z_0} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{yz}^2}$
 $I_{y_0} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{yz}^2}$
 y colocando valores se obtiene:
 $I_{z_0} = 4416,23 \text{ cm}^4$
 $I_{y_0} = 237,00 \text{ cm}^4$

$I_g \alpha = \frac{-I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{-24-960}{4182,66 - 470,66} = 0,517$
 $2 \alpha = 27^\circ 20'$
 $\alpha = 13^\circ 50'$
 $I_z = 22 \times 2 \cdot 6 \times 2 \cdot 6 \times 2 = 56 \text{ cm}^4$
 $r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 8,06$
 $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 1,86$

NOTA: debido a la reducción del vegetal original, todas las distancias de este dibujo tienen que multiplicarse por el factor 1,58 antes de aplicarse las escalas *

Un perfil de ala ancha, tipo Grey 20, se utiliza como ménsula de 2 m. de longitud, y está sometida a las cargas inclinadas P' y P'' que señala la figura (a y b). Hallar las tensiones máximas y la ecuación de la línea neutra.

La descomposición de la carga da: fig. (2)a
 Para P' = 1000 Kg. $P'_y = P' \cdot \text{sen } 30^\circ = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ Kg.}$
 $P'_z = P' \cdot \text{cos } 30^\circ = 1000 \cdot \frac{3}{2} = 866 \text{ Kg.}$
 Para P'' = 707 Kg. $P''_y = P'' \cdot \text{sen } 45^\circ = 707 \cdot \frac{2}{2} = 499,92 \text{ Kg.}$
 $P''_z = P'' \cdot \text{cos } 45^\circ = 707 \cdot \frac{2}{2} = 499,92 \text{ Kg.}$

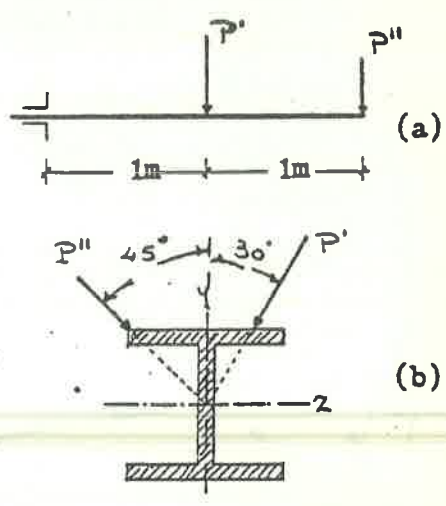


fig. 1

DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES

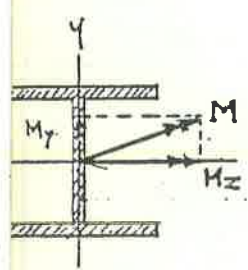
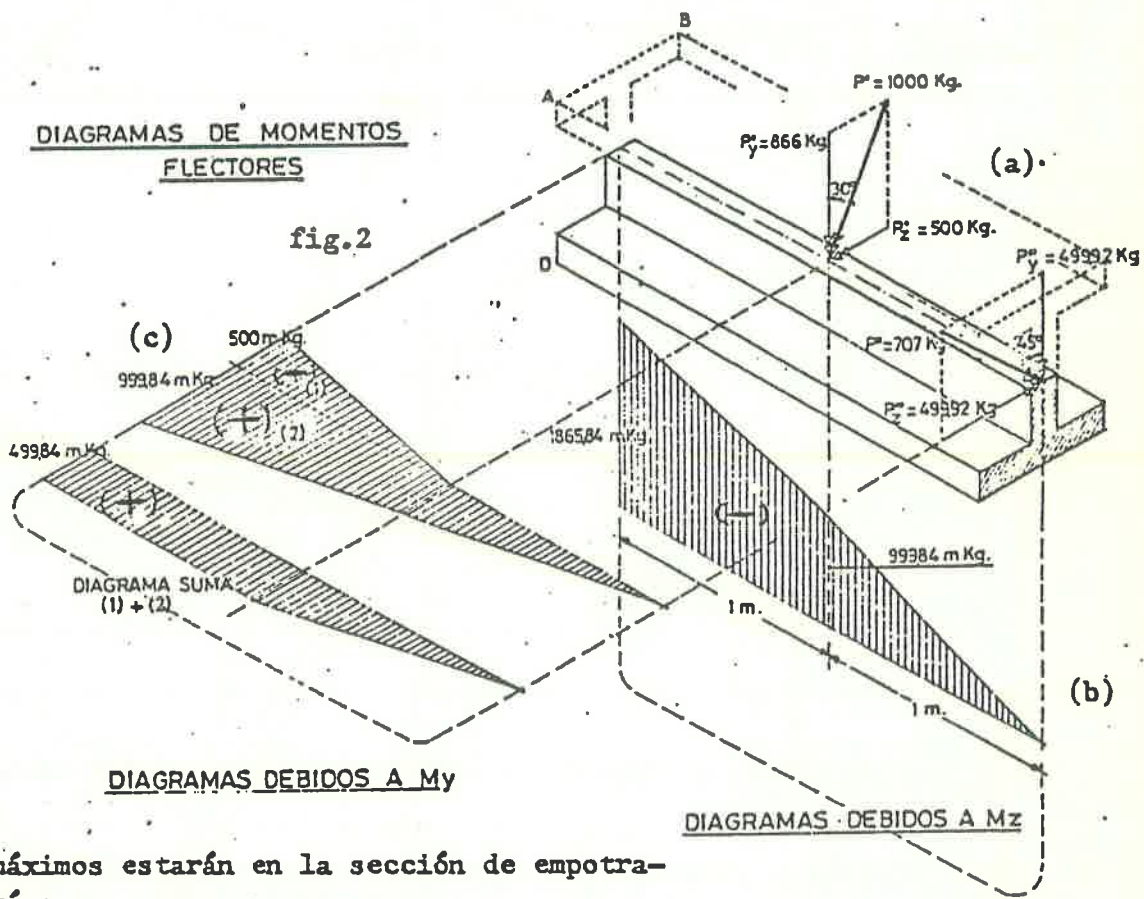


fig. 3

DIAGRAMAS DEBIDOS A My

DIAGRAMAS DEBIDOS A Mz

Los momentos máximos estarán en la sección de empotramiento y valdrán:

Para las componentes verticales: $M_z = -P'_y \cdot x' - P''_y \cdot x'' \quad x' = 1 \text{ m. } x'' = 2 \text{ m.}$
 fig. 2b $M_z = -500 \cdot 1 - 499,92 \cdot 2 = -1865,84 \text{ m.Kg.}$

Para las componentes horizontales: $M_y = +499,92 \cdot 2 - 500 \cdot 1 = +499,92 \text{ m.Kg.}$ fig. 2c

Por lo tanto para la sección de empotramiento tendremos: (fig. 3)

tensión máxima en el punto A $\sigma_A = \frac{(-1865,84) \cdot (-10)}{I_z} + \frac{(+499,84) \cdot (+10)}{I_y}$

$$\sigma_A = + \frac{1865840}{5690} + \frac{499840}{2070} = + 327,91 + 241,46 = + 569,37$$

Para el punto B (y = -10; z = -10) $\sigma_B = + 327,91 - 241,46 = + 86,45$

en los puntos esquina C y D inferiores se tendrán valores iguales, pero con signo opuesto.

TRAZADO DE TANGENTES A LA ELIPSE PARALELAS A UNA DIRECCION DADA

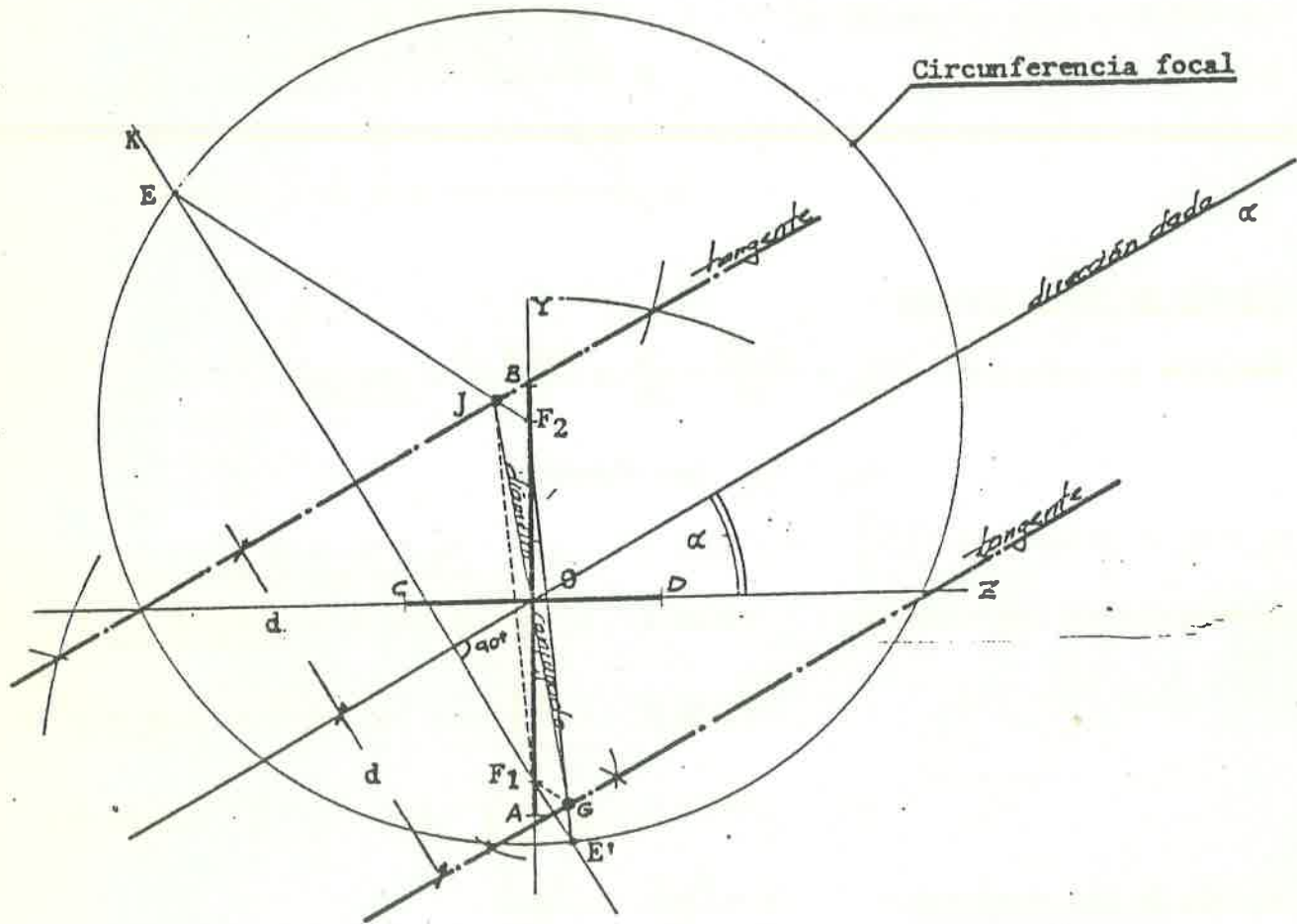
La construcción gráfica siguiente, permite el trazado de las tangentes, sin construir la elipse.

La elipse viene determinada como dato por sus diámetros, $2a$ y $2b$, y la dirección dada es una recta que pasa por el centro.

1º.- Se determinan los focos F_1 y F_2

2º.- Se traza la circunferencia focal con centro en F_2 y radio = $2a$ (long. eje mayor).

3º.- Por el otro foco F_1 se traza perpendicular a la dirección dada (recta F_1K) la cual corta en los puntos E y E' a la circunferencia focal.



4º.- Las mediatrices de los segmentos F_1E y F_1E' son las tangentes pedidas.

5º.- Los puntos de contacto se obtienen trazando las rectas F_2E y F_2E' que cortan a las tangentes trazadas en los puntos J y G respectivamente.

Demostración: Por construcción: $EF_2 = 2a$ y $F_1J + JF_2 = 2a$

Ya que $\overline{F_1J} = \overline{EJ}$ por ser J un punto situado en la mediatriz de F_1E .

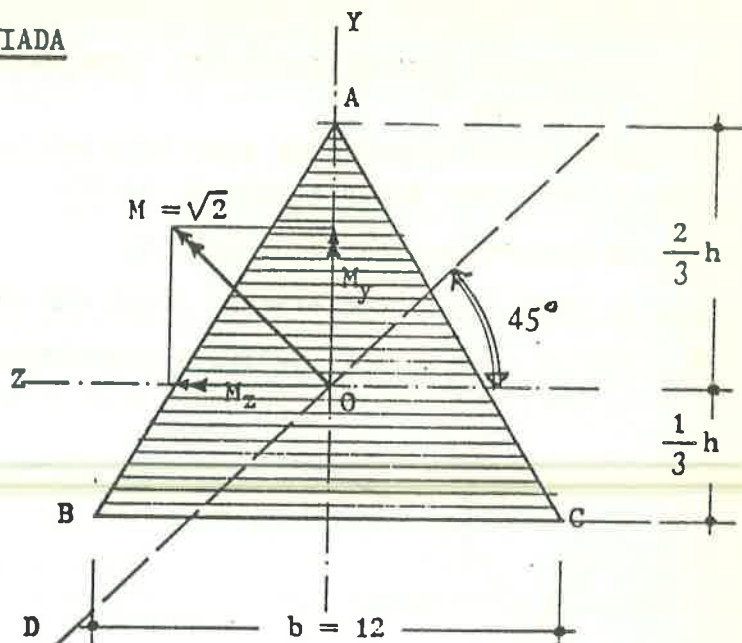
6º.- \overline{JG} resulta ser la dirección conjugada respecto a la dirección dada.

Si la elipse está construida con los radios de giro de los momentos de inercia correspondientes a los ejes principales ($CD = \text{eje } Z_0$ $AB = \text{eje } Y_0$), entonces la distancia d entre la alineación dada y la tangente resulta ser $d = r_\alpha$ (habiendo tomado los semiejes $OA = OB = r_z$, y $OC = OD = r_y$).

PROBLEMA DE FLEXION DESVIADA

Dado un prisma de sección triangular sometido a un momento flector máximo de $\sqrt{2}$ m.T. debido a fuerzas que actúan en el plano OD.

Determinar las tensiones en los vértices y la situación de la Línea Neutra.



Cálculo de datos previos.-

Momentos de inercia:
$$\underline{I_z} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{b}{36} \cdot \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \underline{374 \text{ cm}^4}$$

$$I_{z_0} = I_{y_0} \text{ por simetría.}$$

$$M_z = M_y = M \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ m.T.}$$

$$\underline{M_z = M_y = 1 \text{ m.T.}}$$

Coordenadas de los vértices: Punto A $z = 0$ $y = \frac{2}{3}h = \underline{-6,928 = y}$

Punto B $z = \frac{b}{2} = 6$ $y = \frac{1}{3}h = \underline{3,46 = y}$

Punto C $z = -\frac{b}{2} = -6$ $y = \frac{1}{3}h = \underline{3,46 = y}$

Cálculo de las tensiones.-

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_A = \frac{100.000 \times (-6,928)}{374} + \frac{100.000 \times 0}{374} = \boxed{-1852 \text{ Kg/cm}^2 = \sigma_A}$$

$$\sigma_B = \frac{100.000 \times (3,46)}{374} + \frac{100.000 \times (6)}{374} = \boxed{+2529,4 \text{ Kg/cm}^2 = \sigma_B}$$

$$\sigma_C = \frac{100.000 \times (3,46)}{374} + \frac{100.000 \times (-6)}{374} = \boxed{-679,14 \text{ Kg/cm}^2 = \sigma_C}$$

Cálculo de la situación de la Línea Neutra.-

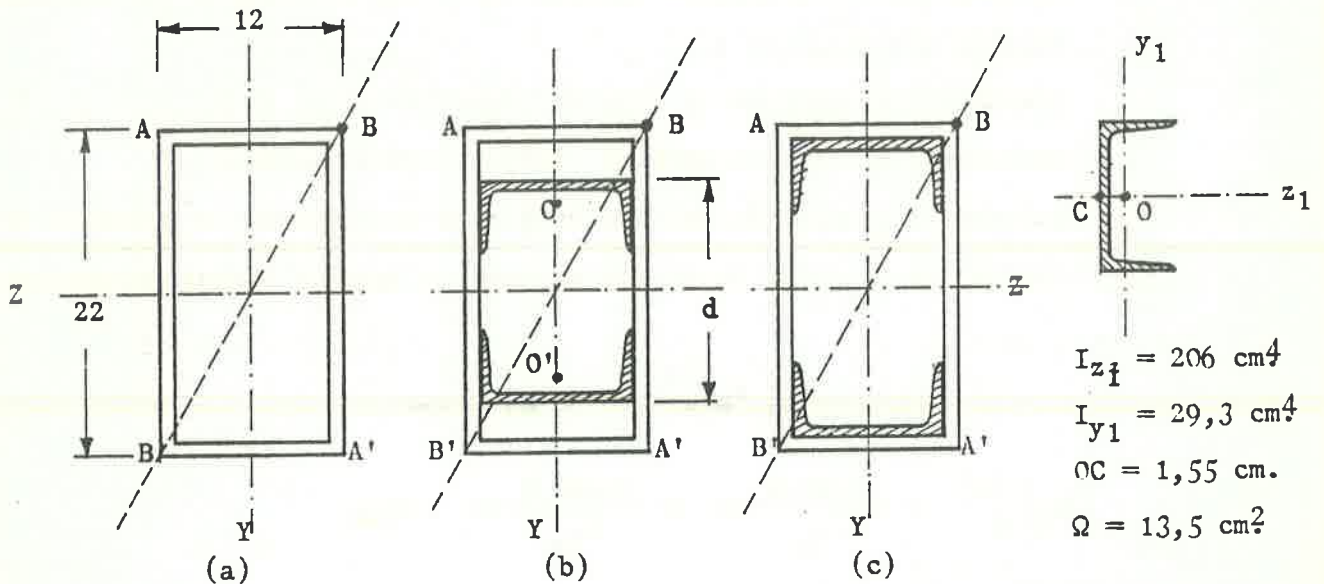
$$\frac{y}{z} = -1 \frac{I_{z_0}}{I_{y_0}}$$

Sustituyendo los valores de las inercias, como $I_{z_0} = I_{y_0}$ obtenemos: $\frac{y}{z} = -1$

lo que nos indica que la Línea Neutra coincide con el eje del momento M.

Esto ocurre porque se trata de una flexión NO desviada, ya que el triángulo equilátero tiene infinitos ejes de simetría mecánica.

PROBLEMA DE FLEXION DESVIADA.-



- La sección tubular de la figura (a) está sometida a una sollicitación de un momento flector M situado en un plano de cargas que pasa por la esquina B del perfil.
- Bajo esta sollicitación, el perfil alcanza la tensión admisible en el punto B y B' .

DETERMINAR: 1º) La situación donde deban soldarse dos perfiles U simétricamente respecto al eje Z (figura b), para que la pieza compuesta pueda resistir un incremento de momento en un 25% (resultado $d = ?$)

2º) Cuánto aumentará la capacidad resistente del conjunto si las dos U se soldan en contacto con las caras superior e inferior del perfil tubular (figura c).

3º) Posición de la línea neutra en los casos (b) y (c).

NOTAS: 1.- Tomar el valor del seno y cosen de α con 4 decimales.

2.- Despreciar los decimales de los momentos I_z y I_y del perfil tubular.

3.- El espesor del tubo es constante e igual a 1 cm.

Planteamiento del problema:

Sabemos que en la sección tubular (a), con un momento M alcanzamos la tensión admisible en B.

Igualmente se alcanza la tensión admisible en el punto B en la sección compuesta (b), con un momento 1,25 M (25% de aumento).

Así pues, la solución del problema está en plantear la ecuación de la tensión en el punto B, en ambos casos, e igualar dichas ecuaciones:

$$[\sigma_B]_M^{(a)} = [\sigma_B]_{1,25M}^{(b)}$$

$$[\sigma_B]_M^{(a)} = \frac{M \cdot \cos \alpha}{I_{z_a}} \cdot y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{I_{y_a}} \cdot z = \sigma_{adm}$$

$$[\sigma_B]_{1,25M}^{(b)} = \frac{1,25 \cdot M \cdot \cos \alpha}{I_{z_b}} \cdot y + \frac{1,25 \cdot M \cdot \sin \alpha}{I_{y_b}} \cdot z = \sigma_{adm}.$$

Igualemos: y dividiendo por M obtenemos:

$$\frac{M \cdot \cos \alpha}{I_{z_a}} y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{I_{y_a}} z = \frac{1,25 \cdot M \cdot \cos \alpha}{I_{z_b}} y + \frac{1,25 \cdot M \cdot \sin \alpha}{I_{y_b}} z \quad (1)$$

CALCULOS PREVIOS.-

Cálculo del seno y coseno de α .-

$$d = \sqrt{36 + 11^2} = \sqrt{157} = 12,53 \text{ cm.}$$

$$\sin \alpha = \frac{6}{12,53} = 0,4788 = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{12,53} = 0,8778 = \cos \alpha$$

Cálculo de inercias.-

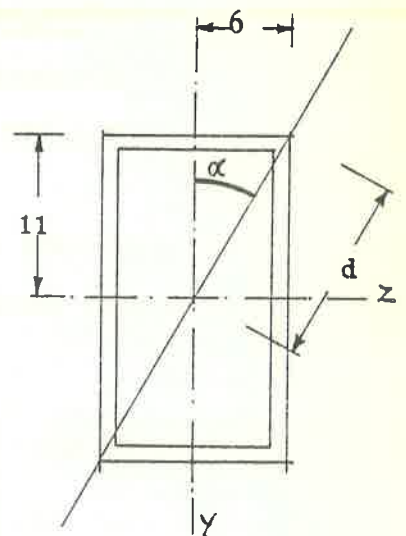
$$I_{z_a} = \frac{12 \cdot 22^3}{12} - \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 3981,33 \quad \underline{I_{z_a} = 3981 \text{ cm}^4}$$

$$I_{y_a} = \frac{22 \cdot 12^3}{12} - \frac{20 \cdot 10^3}{12} = 1501,33 \quad \underline{I_{y_a} = 1501 \text{ cm}^4}$$

$$I_{z_b} = I_{z_a} + 2 \cdot [I_{y_1} + \Omega \cdot \delta^2] \quad (\delta \text{ es incógnita})$$

$$I_{z_b} = 3981 + 2 \cdot [29,3 + 13,5 \cdot \delta^2] = 4039,6 + 27 \delta^2 = I_{z_b}$$

$$I_{y_b} = I_{y_a} + 2 \cdot I_{z_1} = 1501 + (2 \cdot 206) = 1913 \quad \underline{I_{y_b} = 1913 \text{ cm}^4}$$



Cálculo de las coordenadas del punto B.-

$$B \quad (z = -6; \quad y = -11;)$$

Una vez hallados estos valores, sustituyéndolos en la expresión (1) obtenemos:

$$\frac{0,8778 \cdot (-11)}{3981} + \frac{0,4788 \cdot (-6)}{1501} = \frac{1,25 \cdot 0,8778 \cdot (-11)}{4039,6 + 27 \delta^2} + \frac{1,25 \cdot 0,4788 \cdot (-6)}{1913}$$

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad por 10^4 y operamos:

$$-24,25 - 19,14 = - \frac{120697,5}{4039,6 + 27 \delta^2} - 18,77$$

$$24,25 + 19,14 - 18,77 = \frac{120697,5}{4039,6 + 27 \delta^2} = 24,62$$

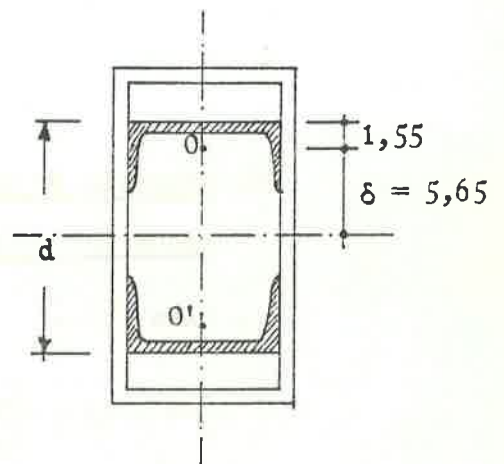
$$120697,5 = 99455 + 664,74 \delta^2 \quad \delta^2 = \frac{21242,5}{664,74} = 31,95$$

$$\delta = 5,65 \text{ cm.}$$

Como la incógnita es d:

$$d = (1,55 + 5,65) \cdot 2 = 14,4 \text{ cm.}$$

$$d = 14,4 \text{ cm.}$$



2º) El planteamiento será el mismo que en el caso anterior.

En este caso, la tensión máxima deberá ser alcanzada en el punto B en la sección compuesta (c) con un momento kM . El coeficiente k nos dará el porcentaje de aumento de momento resistido, con respecto al resistido en el caso (a).

$$[\sigma_B]_M^{(a)} = [\sigma_B]_{kM}^{(c)}$$

$$\frac{M \cdot \cos \alpha}{I_{z_a}} \cdot y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{I_{y_a}} \cdot z = \frac{k \cdot M \cdot \cos \alpha}{I_{z_c}} \cdot y + \frac{k \cdot M \cdot \sin \alpha}{I_{y_c}} \cdot z \quad (2)$$

Cálculo de las inercias.-

$$I_{z_c} = I_{z_a} + 2 \cdot [I_{y_1} + \Omega \cdot (10 - 1,55)^2]$$

$$I_{z_c} = 3981 + 2 \cdot [29,3 + (13,5 \cdot 8,45^2)] = 5967,46 \quad \underline{\underline{I_{z_c} = 5967 \text{ cm}^4}}$$

$$I_{y_c} = I_{y_a} + 2 \cdot I_{z_1} = 1501 + 2 \cdot 206 = 1913 \quad \underline{\underline{I_{y_c} = 1913 \text{ cm}^4}}$$

Sustituimos los valores en la expresión (2):

$$\frac{0,8778 \cdot (-11)}{3981} + \frac{0,4788 \cdot (-6)}{1501} = \frac{k \cdot 0,8778 \cdot (-11)}{5967} + \frac{k \cdot 0,4788 \cdot (-6)}{1913}$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por 10^4 y operando:

$$24,25 + 19,14 = 16,18 \cdot k + 15,02 \cdot k \quad 43,39 = 31,2 \cdot k$$

$$k = \frac{43,39}{31,2} = 1,39$$

$$\underline{\underline{k = 1,39}}$$

Así pues, la capacidad resistente del conjunto, en el caso (c) aumenta un 39% con respecto a la sección (a).

3º) Posición de la L.N. en los casos (b) y (c).

- Caso (b).-

$$\frac{y}{z} = - \operatorname{tg} \alpha = - \frac{I_{z_b}}{I_{y_b}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{11} = 0,5454$$

$$I_{z_b} = 4039,6 + 27 \delta^2 = 4902,25$$

$$\frac{y}{z} = - 0,5454 \cdot \frac{4902,25}{1913} = - 1,397$$

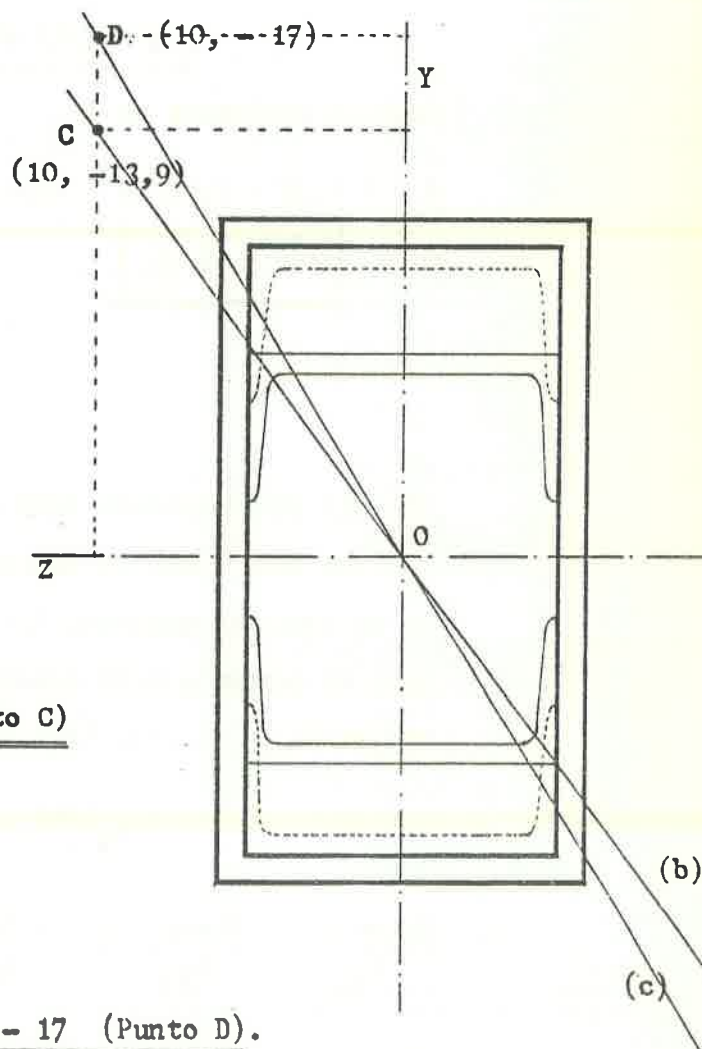
$$\underline{\underline{\text{Para } z = 10 \quad y = - 13,97 \text{ (punto C)}}}$$

- Caso (c).-

$$\frac{y}{z} = 0,5454 \cdot \frac{I_{z_c}}{I_{y_c}} = 0,5454 \cdot \frac{5967}{1913}$$

$$\frac{y}{z} = - 1,70$$

$$\underline{\underline{\text{Para } z = 10 \quad y = - 17 \text{ (Punto D)}}}$$



FLEXION COMPUESTA



FLEXION COMPUESTA

Condiciones generales.- Se dice que hay flexión compuesta para una sección recta de una viga cuando simultáneamente está sometida a flexión, cortadura y solicitación axil (tracción o compresión).

Se puede expresar analíticamente así:

$$M_f \neq 0 \quad T \neq 0 \quad N \neq 0 \quad M_t = 0$$

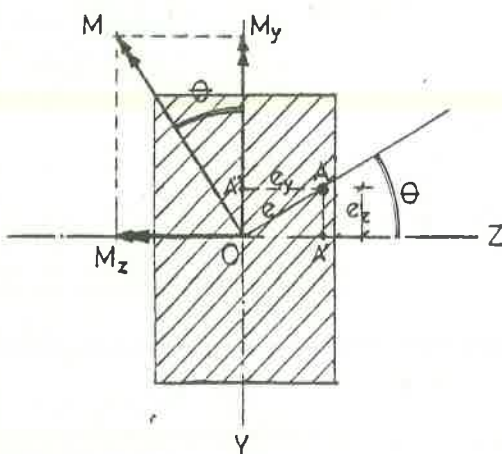
Este tipo de sollicitación se origina preferentemente cuando una barra está sometida a fuerzas paralelas a su eje geométrico.- Frecuentemente se produce en los pilares cuando actúa en su extremo una carga excentrica, o bien cuando su extremo está ligado a otra estructura que le transmite una carga centrada y un momento.

El punto donde actúa la fuerza excéntrica en la sección se le denomina centro de presión y puede estar situado sobre uno de los ejes principales de la sección o fuera de ellos.- En el primer caso la flexión compuesta se la denomina simétrica y en el segundo asimétrica o desviada.

Para el estudio de la distribución de tensiones en una sección sometida a flexión compuesta se toman los ejes de referencia coincidentes con los ejes principales de inercia.

Caso general: Flexión compuesta asimétrica.

Actuación de la fuerza excéntrica en un punto de coordenadas e_z e_y .



$$\begin{aligned} M_y &= M \cos \theta \\ M_z &= M \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (1)$$

pero en las magnitudes de la figura hay las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} M &= N \cdot e \\ e_z &= e \operatorname{sen} \theta \\ e_y &= e \cos \theta \end{aligned}$$

..//..

Por lo que la (1) se convierte en

$$\begin{aligned}
 M_y &= M \cos \theta = N \cdot e \cos \theta ; & M_y &= N e_y \\
 M_z &= M \sen \theta = N \cdot e \sen \theta ; & M_z &= N e_z
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

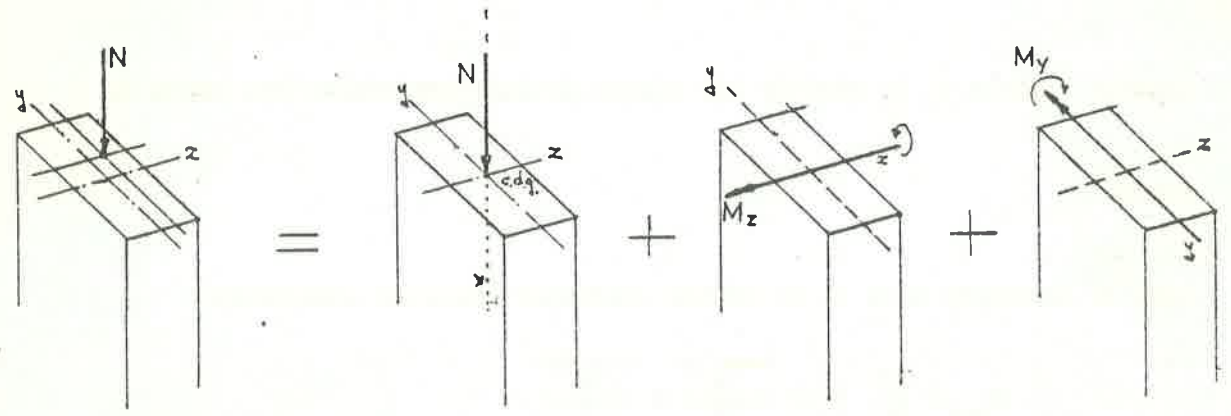
En los que se observará que los momentos M_y y M_z pueden ser considerados como consecuencia de la actuación de la fuerza N en los puntos A' y A'' proyecciones de A sobre los ejes z e y .- Es decir, la flexión asimétrica o desviada en el plano de traza puede ser descompuesta por dos flexiones simétricas.

Esto sentado, el resultado final de una flexión compuesta consta de tres acciones

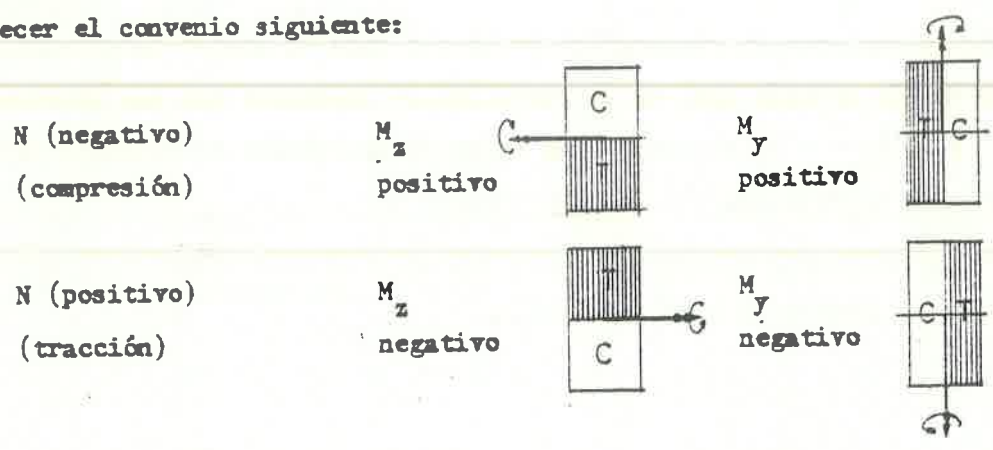
- a) Una acción axial de módulo N
- b) un momento flector M_z actuando en el plano XOY de módulo $N e_z$
- c) Un momento flector M_y actuando en el plano XOZ de módulo $N e_y$

Por lo tanto, la tensión en un punto de coordenadas z,y vendrá como suma de las tensiones parciales.

$$\sigma_{zy} = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}
 \tag{4}$$

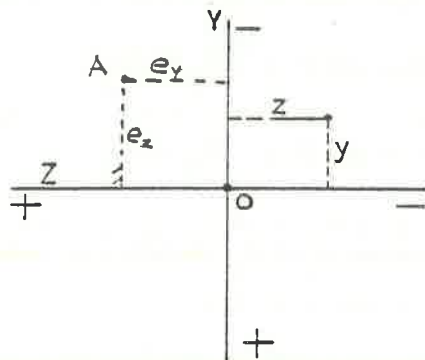


A fin de que la fórmula (3) dé la tensión con su signo correspondiente habrá que establecer el convenio siguiente:



..//..

y las coordenadas de un punto cualquiera (de signos contrarios al convenio matemático)



A la fórmula (4) empleando los radios de giro

$$I_z = r_z^2 \cdot \Omega$$

$$I_y = r_y^2 \cdot \Omega$$

y sustituyendo M_z e M_y por sus valores, queda

$$\sigma_{xy} = \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{N e_z \cdot y}{r_z^2 \cdot \Omega} + \frac{N e_y \cdot z}{r_y^2 \cdot \Omega} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{N}{\Omega} \left(1 + \frac{e_z \cdot y}{r_z^2} + \frac{e_y \cdot z}{r_y^2} \right) \quad (5 \text{ bis})$$

En esta fórmula e_z e e_y tendrán los signos de las coordenadas del punto A.

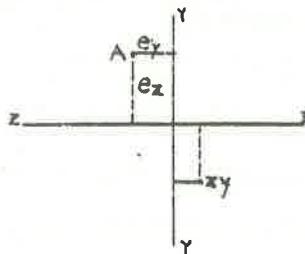
Ejemplo:

Para la actuación de N en el primer cuadrante (caso de compresión)

$$\sigma_{xy} = \frac{-N}{\Omega} \left(1 + \frac{(-e_z) \cdot y}{r_z^2} + \frac{(-e_y) \cdot z}{r_y^2} \right)$$

Aplicamos a una sección rectangular de 12 x 8 bajo la acción compresora exéntrica cuyo centro de presión está en un punto del 2º cuadrante con las coordenadas — A ($e_y = + 3$, $e_z = - 5$) y queremos el valor de la tensión en un punto del cuarto cuadrante de coordenadas $z = (-2)$ y $y = (+4)$

Determinación previa de Ω , r_z^2 , r_y^2 ,



$$\Omega = 12.8 \quad r_z^2 = \frac{I_z}{\Omega} = \frac{8 \cdot 12^3}{12 \cdot (12.8)} = 12$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{\Omega} = \frac{12.8^3}{12(12.8)} = \frac{16}{3}$$

$$\sigma_{zy} = \frac{-12.000}{12.8} \left(1 + \frac{(-5) \cdot (+4)}{12} + \frac{(+3) \cdot (-2)}{16/3} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{1.000}{8} \left(1 + \frac{-20}{12} + \frac{-18}{16} \right) = -125 \left(\frac{24-40-27}{24} \right)$$

En la fórmula (5) o (5 bis) σ es una función de dos variables por lo que para encontrar su máximo deberá conocerse la función $y = \varphi(z)$ del contorno.

A veces la sección es poligonal y por lo tanto son varias las funciones que delimitan el contorno.

En ambos casos, la solución es un problema puramente matemático de mas o menos laboriosa solución.

Podemos enfocar el problema determinando el lugar geométrico de los puntos en que σ se anula, y como la función σ es un plano, el lugar geométrico en cuestión será su intersección con el plano de la sección y, por tanto, una recta.

Para ello hagamos $\sigma_{zy} = 0$ en la ecuación 5 bis.

$$\sigma_{zy} = \frac{N}{\Omega} \left(1 + \frac{e_z \cdot y}{r_z^2} + \frac{e_y \cdot z}{r_y^2} \right) = 0 ; \quad \frac{N}{\Omega} \text{ no puede ser cero, deberá}$$

serlo el paréntesis con lo que se tendrá:

$$\frac{e_z \cdot y}{r_z^2} + \frac{e_y \cdot z}{r_y^2} + 1 = 0 \quad \text{que evidentemente es una ecuación de una}$$

recta con los coeficientes

$$A = \frac{e_z}{r_z^2} \quad B = \frac{e_y}{r_y^2} \quad C = 1; \text{ recta que tiene la propiedad de}$$

tener $\sigma = 0$ y por lo tanto es el eje neutro que en estas circunstancias no es baricéntrico.

Haciendo $y = 0$ y $z = 0$ se obtienen los puntos de corte del eje neutro con los ejes

$$\left(y = 0, z = \frac{-r_y^2}{e_y} \right) \quad \left(y = \frac{-r_z^2}{e_z}, z = 0 \right) \quad (7)$$

La pendiente angular vale $m = \frac{\frac{r_y^2}{e_y}}{\frac{r_z^2}{e_z}} = \frac{r_y^2 \cdot e_z}{r_z^2 \cdot e_y}$

Por el signo de las coordenadas de los puntos de paso del eje neutro con los ejes coordenados se puede observar que el eje neutro pasa por el cuadrante opuesto al que está situado al centro de presión y como para una misma sección r_y^2 y r_z^2 — permaneces invariables, se deduce (7) que cuando mas cerca está el centro de presión del centro de gravedad, tanto mas grande serán las coordenadas de los puntos de paso del eje neutro y por consiguiente este puede incluso no cortar a la sección en cuyo caso toda ella estará sometida a tensiones del mismo signo que la fuerza excéntrica.

Cuando el centro de presión se va acercando al c.d.g. la línea neutra se va alejando y en el límite cuando A coincida con O se anularán el 2º y 3er. sumandos de ecuación (5) y éste pasará a ser $\sigma_{xy} = \frac{N}{Q}$ que corresponde a una sollicitación axial pura y la línea neutra estará en el infinito.

Esta variación en la situación de la línea neutra al cambiar el centro de presión A origina tres casos distintos que vamos a analizar.

1º.- La L.N. corta a la sección.

Existen tensiones de distinto signo

Zona de tensiones (+) a un lado de la LN y zona de tensiones (-) al lado opuesto.

En este caso, predomina la flexión y se la denomina Flexión compuesta.

2º.- La L.N. es tangente a la sección.

Toda la sección tiene tensiones del mismo signo, pero por lo menos el punto de contacto tiene tensión nula.— Es un caso límite.

3º.- La L.N. no corta la sección.

Toda la sección tiene tensiones del mismo signo distintos de cero.

Aquí predomina la sollicitación axial sobre el momento y este caso se denomina Compresión compuesta aunque puede ser tracción compuesta si N es de tracción (Línea neutra virtual)

NUCLEO CENTRAL



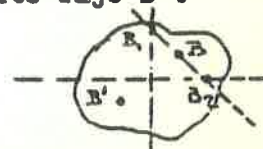
NUCLEO CENTRAL DE UNA SECCION .-

Cuando la fuerza P actúa con pequeña excentricidad, la tensión normal conserva el mismo signo sobre toda la sección de una pieza cargada excentricamente. Para mayores excentricidades, la Línea Neutra corta a la sección y hay un cambio de signo de la tensión.

En el caso de materiales que tienen una débil resistencia a tracción (hormigón sin armar, etc.) la cuestión se reduce a determinar la región en la que la fuerza de compresión puede ser aplicada sin producir tensión de tracción alguna en la sección. A esta región se la denomina Núcleo Central de la sección.

El método para determinar el núcleo central se basa en la propiedad siguiente: Si el centro de presión B se desplaza a lo largo de una recta B_1B_2 , la línea neutra correspondiente gira alrededor de cierto punto fijo B' .

Veamos los ejemplos siguientes.-



a) Caso de una sección circular de radio R .-

Podemos afirmar que debido a la simetría múltiple de la figura, el núcleo central es un círculo. Hallaremos su radio a escribiendo que, dado que el punto de aplicación de la carga está sobre el contorno del núcleo central, la línea de tensión nula correspondiente debe ser tangente al contorno de la sección.

Sabiendo que el momento de inercia del círculo es $I = \frac{\pi R^4}{4}$, el radio de giro valdrá:

$$i = \sqrt{\frac{I}{\Omega}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4 \pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

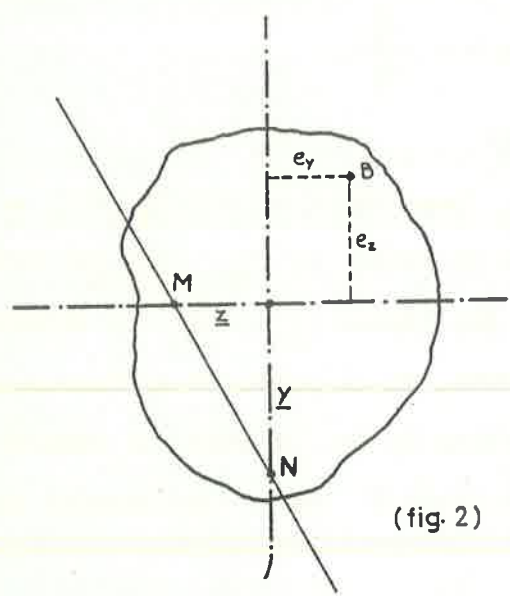
Aplicando la ecuación $y = -\frac{i^2}{e}$ y sustituyendo e por a y $-y$ por R , obtenemos:

$$a = \frac{i^2}{R} = \frac{R}{4}$$

Es decir, que el Núcleo Central es un círculo cuyo radio es igual a $\frac{1}{4}$ del radio de la sección.

b) Caso de una sección en forma de anillo circular de radios exterior e interior R y r .

Sabemos: $I = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ $i^2 = \frac{I}{\Omega} = \frac{R^2 + r^2}{4}$



(fig. 2)

Si $y = 0$

$$\frac{e_y z}{r_y^2} = -1$$

$$z = -\frac{r_y^2}{e_y}$$

PUNTO M (fig. 2)

Se puede observar que si el centro de presión B está próximo al centro de gravedad, e_z y e_y son pequeños, y por contra, las distancias z e y son grandes. De ello se desprende que la línea neutra estará fuera de la sección, y las tensiones serán todas del mismo signo.

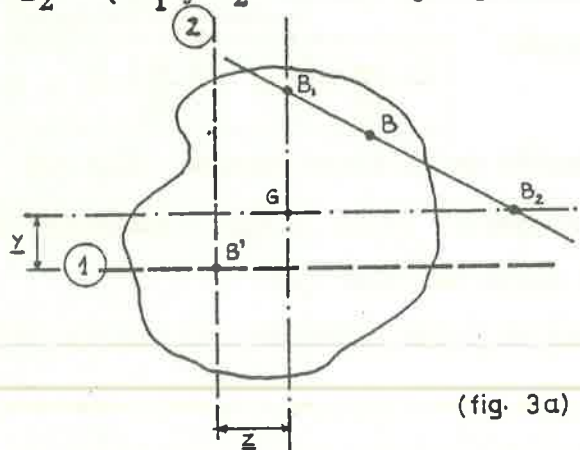
Por el contrario, si B está alejado, entonces z e y estarán cerca del c.d.g. y por lo tanto la línea neutra originará en la sección una zona con $\sigma (+)$ y otra con $\sigma (-)$

La posición relativa del centro de presión B y de la Línea Neutra están ligados por la propiedad siguiente.

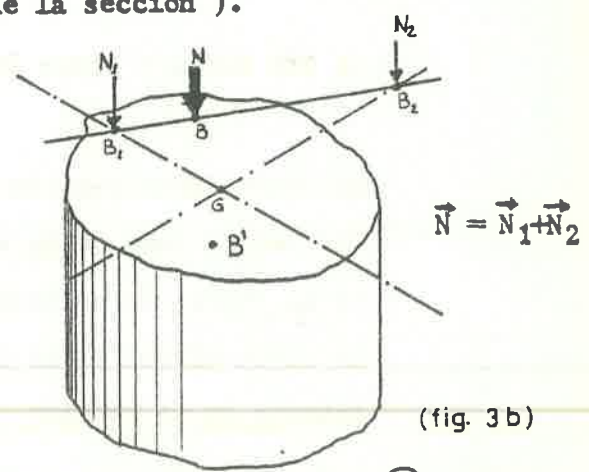
SI EL CENTRO DE PRESION B SE DESPLAZA A LO LARGO DE UNA RECTA ($B_1 B_2$) (fig. 3) LA LINEA DE TENSION NULA (línea neutra) CORRESPONDIENTE GIRA ALREDEDOR DE UN CIERTO PUNTO FIJO B'

Demostración de esta propiedad.

Para ello descompongamos la fuerza N en B en dos componentes paralelas N_1 y N_2 estaticamente equivalentes a N y coincidiendo una en B_1 y la otra en B_2 (B_1 y B_2 en los ejes principales de la sección).



(fig. 3a)



(fig. 3b)

La línea de tensión nula para la componente en B_1 será la recta ① paralela al eje Z y trazada a la distancia y deducida anteriormente, o sea

$$y = -\frac{r_z^2}{e_z}$$

La línea de tensión nula para la componente en B_2 será la recta ② paralela

añ eje Y trazado a la distancia $z = -\frac{r_y^2}{e_y}$

Ambas rectas se cortan en el punto B'.

Superponiendo los efectos a N_1 y N_2 para tener el efecto de N , se ve que para toda posición de la carga sobre la recta $B_1 B_2$ HAY UNA TENSION NULA en B', punto de intersección de las dos líneas (1) y (2) de tensión nula para cada componente. Por consiguiente, si el punto de aplicación de la carga se desplaza a lo largo de la recta $B_1 B_2$, la línea de tensión nula correspondiente girará alrededor del punto B' cuyas coordenadas están determinadas por las fórmulas:

$$y = -\frac{r_z^2}{e_z} \quad z = -\frac{r_y^2}{e_y}$$

Se puede observar que para otra descomposición $N_1' N_2'$ de la fuerza N , utilizando otra recta $B_1' B_2'$ SE OBTENDRAN LAS MISMAS COORDENADAS y y z del punto B' ya que éstas no vienen determinadas por los valores de N_1 y N_2 y por tanto, tampoco de N_1' y N_2' y sí solamente son función de los radios de giro de la sección y de las coordenadas del centro de presión (excentricidades).

OBSERVACION

Sabemos que la polar de un punto (-B) con relación a la elipse central de inercia de la sección:
$$\frac{z^2}{r_z^2} + \frac{y^2}{r_y^2} = 1$$
 ecuación de la elipse

es una recta y tiene por ecuación:

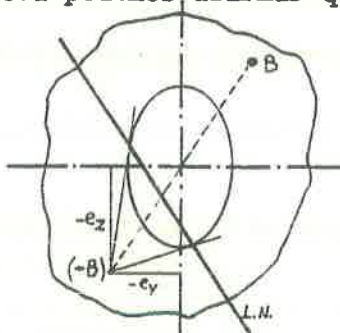
$$\frac{(-e_z)y}{r_y^2} + \frac{(-e_y)z}{r_z^2} - 1 = 0$$

es decir, precisamente la ecuación de la línea neutra. (fig. 4)

Por tanto, como se ha tomado el punto $(-e_z -e_y)$ simétrico de B (respecto al centro de gravedad), se puede enunciar que:

LA LINEA NEUTRA ES LA ANTIPOLAR DE B CON RESPECTO A LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA DE LA SECCION

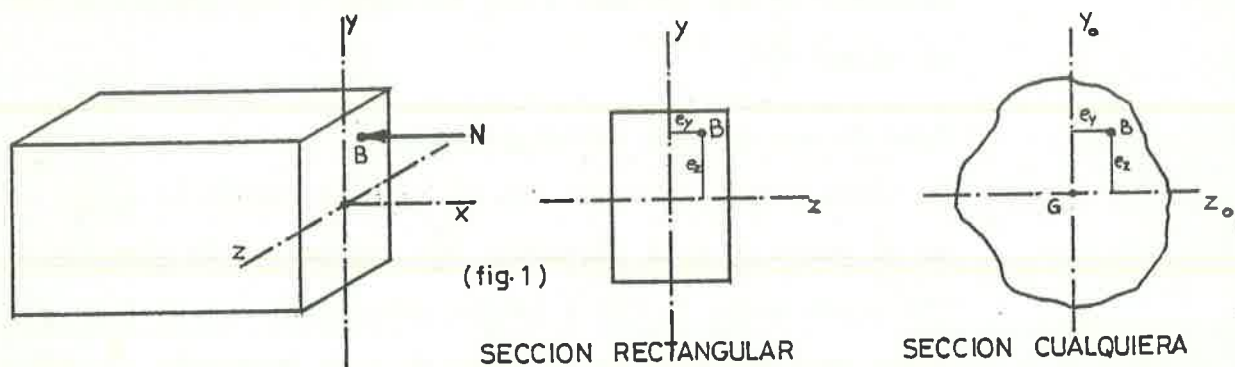
Ahora podemos afirmar que B' es el antipolo de la recta $B_1 B_2$ (fig. 3)



(fig. 4)

RELACION ENTRE EL CENTRO DE PRESION Y LA LINEA NEUTRA.-

Consideremos el caso más general de flexión compuesta en que el punto B de aplicación de la resultante \vec{N} de las fuerzas exteriores a un lado de la sección considerada, no coincide con ningún eje principal de esta sección. (fig. 1)



Llamemos e_y e_z a las coordenadas del punto B, denominado CENTRO DE PRESION.

Admitamos que la resultante \vec{N} es perpendicular al plano de la sección.

Los momentos de \vec{N} con relación a los ejes de la sección Z e Y serán:

$$N \cdot e_z = M_z \quad N \cdot e_y = M_y \quad \text{y por superposición, la tensión}$$

en un punto cualquiera de la sección será:

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

El primer término representa la tensión de compresión (ó tracción) y los otros términos son las tensiones de flexión producidas por los momentos M_z y M_y respectivamente. Esta fórmula se puede poner en la forma:

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \left(\frac{e_z y}{r_z^2} + \frac{e_y z}{r_y^2} + 1 \right)$$

y si imponemos la condición de que $\sigma = 0$ tendremos la ecuación de la Línea Neutra.

$$\frac{e_z y}{r_z^2} + \frac{e_y z}{r_y^2} + 1 = 0$$

Si en esta ecuación hacemos primero $z = 0$ y después $y = 0$ se obtendrán los puntos de corte de la Línea Neutra con los ejes Y y Z respectivamente.

Veámoslo:

$$\text{Si } \underline{z} = 0 \quad \frac{e_z y}{r_z^2} = -1 \quad Y = -\frac{r_z^2}{e_z} \quad \text{PUNTO N}$$

y sustituyendo en la ecuación $y = -\frac{i^2}{e}$ el radio del Núcleo Central vale:

$$a = \frac{i^2}{R} = \frac{R^2 + r^2}{4R}$$

Para $r = 0$, la ecuación (1) coincide con la (2). Para un anillo muy delgado, (r muy cercano a R), el radio a del núcleo central se acerca al valor $\frac{R}{2}$.

c) Caso de una sección rectangular.

La línea neutra coincide con el lado eg cuando la carga está aplicada en el punto A , a la distancia $\frac{b}{6}$ del centro de gravedad G (fig.) Del mismo modo, la línea neutra coincidirá con el lado gf cuando la carga esté aplicada en el punto B , a la distancia $\frac{h}{6}$ del centro G .

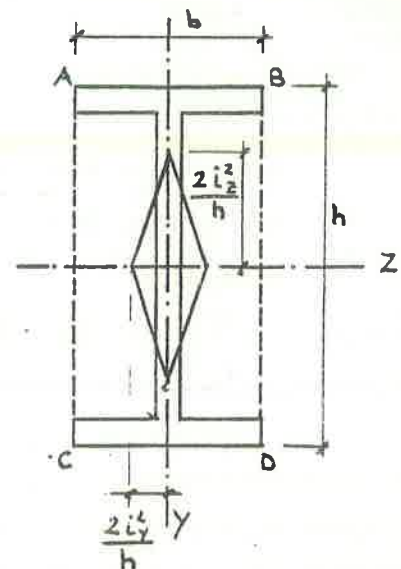
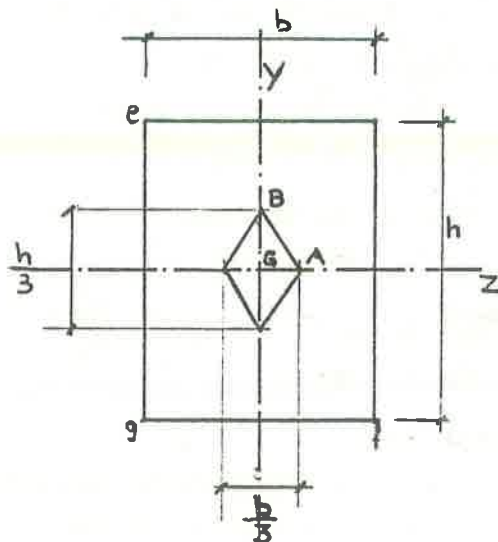
En virtud de la propiedad de que cuando la carga se desplaza a lo largo de la recta AB , la línea neutra gira alrededor del punto g sin cortar la sección, podemos decir que la recta AB es uno de los lados del núcleo central. Los otros lados se deducen por simetría.

El núcleo central es pues un rombo cuyas diagonales miden $\frac{h}{3}$ y $\frac{b}{3}$.

Siempre que el punto de aplicación de la carga esté en el interior de este recinto, la línea neutra no cortará a la sección y no existirá cambio de signo de la tensión.

d) Caso de una sección en doble T.

Las posiciones límite de las líneas de tensión nula, para que no corten a la sección, vienen dadas por los lados AB y CD y por las líneas discontinuas AC y BD (fig.). Las posiciones correspondientes del punto de aplicación de la carga pueden ser determinadas mediante la aplicación



$$\text{de la ecuación: } y = -\frac{i^2}{e} : \quad a = \frac{i^2}{v}$$

Se deduce por simetría que estos puntos serán los vértices de un rombo, dibujado sobre la fig. .

De modo general, se ve que el contorno del núcleo central es el lugar de los centros de presión correspondientes a una línea neutra resbalando sobre el contorno de la sección, sin cortarla.

Matemáticamente se puede también definir de la siguiente forma:

El contorno del núcleo central es el lugar del antipolo, con relación a la elipse central de inercia, de una recta resbalando sobre el contorno de la sección (rectas límites); estas rectas no pudiendo cortar la sección, definen una figura convexa; resulta por ello que el núcleo central es siempre una figura convexa. Muy a menudo la sección se inscribe en un polígono convexo de n lados. En este caso, el contorno del núcleo central es un polígono de n lados en que los vértices son los antipolos de los lados del primer polígono con relación a la elipse central de inercia de la sección. Esta propiedad demuestra que el núcleo central de un angular es un triángulo, y el de un perfil Z, un paralelogramo.

El núcleo central juega un papel importante en las construcciones con hormigón pretensado, ya que define la zona del eje de simetría en que debe pasar la línea de presiones para que no se produzca ninguna tracción en el hormigón (fig.). Permite también medir la economía realizada con una sección de forma determinada. En efecto, para una sección de altura h y área Ω dadas, la resistencia a la flexión en los dos sentidos se mide con los módulos de flexión $\frac{I}{v_1}$ y $\frac{I}{v_2}$ que deben ser los máximos. Vemos así que la resistencia a la flexión será máxima con la cantidad sin dimensiones

$$R = \frac{I/v_1 + I/v_2}{\Omega h}$$

llamada "rendimiento de la viga"

Como $I/\Omega v_1 = r_2$ y $I/\Omega v_2 = r_1$ sustituyendo estos valores en la fórmula $y = -\frac{i^2}{e}$

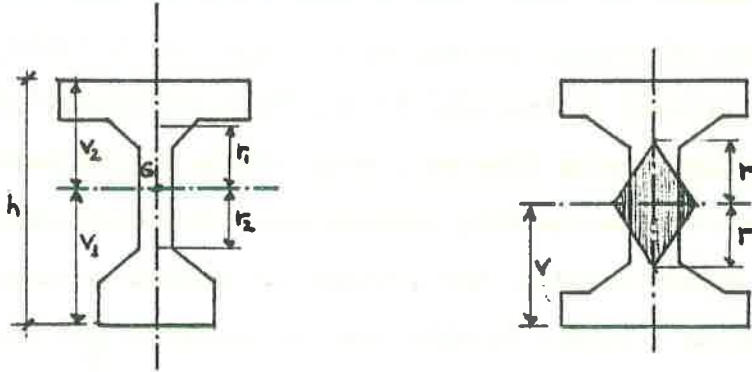
la expresión del rendimiento de la viga puede aún escribirse del siguiente modo:

$$R = \frac{r_1 + r_2}{h}$$



lo que muestra que el rendimiento es la altura relativa del núcleo central. Se puede verificar fácilmente que está comprendido entre los valores extremos $1/3$ (sección rectangular) y 1 (sección de alas delgadas y alma insignificante).

En el caso de una sección doblemente simétrica, el núcleo central es también doblemente simétrico y su radio vale $r = i^2/v$ (fig.).



Aplicación del Núcleo Central al cálculo de las tensiones máximas de flexión simple desviada.-

Utilizando el Núcleo Central se puede simplificar considerablemente el cálculo de las tensiones máximas de una viga sometida a un momento flector M tal que la flexión no se produce en un plano principal de flexión (flexión desviada).

Nos proponemos encontrar, como en flexión plana, un módulo de flexión, es decir, una cantidad W tal que la tensión máxima a flexión simple venga dada por la expresión siguiente:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \quad (a)$$

Para resolver este problema, vamos primero a tratar un problema de flexión compuesta:

Consideremos, para fijar el problema, el caso de una sección rectangular (fig.

La traza del plano de cargas ss corta al núcleo central en un punto K , distante del centro de gravedad una longitud r . Apliquemos en K una fuerza N tal que $N \cdot r = M$. Esta fuerza es equivalente a un esfuerzo de compresión N más un momento $M = N \cdot r$

Dado que el punto K está sobre la línea de contorno del núcleo central, la línea neutra es tangente en C al contorno de la sección, y la tensión de flexión compuesta es nula en este punto; esta tensión

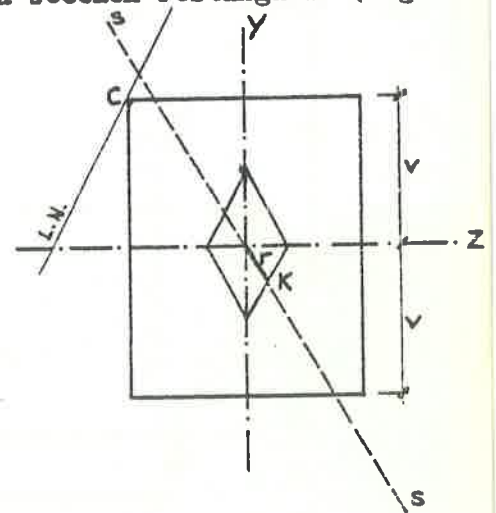
se compone de una tensión de compresión $-\frac{N}{\Omega}$ y de una tensión de flexión cuya expresión, en virtud de la fórmula (a) es $\frac{M}{W} = \frac{N \cdot r}{W}$

Tenemos pues:
$$\sigma_c = \sigma^N + \sigma^{N \cdot r} = -\frac{N}{\Omega} + \frac{N \cdot r}{W} = 0$$

de donde, despejando obtenemos: $W = \Omega \cdot r$

En general, el núcleo central determinará, sobre la traza del plano de cargas, dos segmentos r_1 y r_2 desiguales. Para seguridad, deberemos tomar el que nos de al módulo de flexión W más pequeño, es decir, tomaremos el el más pequeño de los dos valores de r . Para acabar, podemos definir:

EL MODULO DE FLEXION DE UNA SECCION PARA UN PLANO DE FLEXION CUALQUIERA DE TRAZA ss ES EL PRODUCTO DEL AREA DE ESTA SECCION POR EL MAS PEQUEÑO DE LOS DOS RADIOS INTERCEPTADOS POR EL CONTORNO DEL NUCLEO CENTRAL SOBRE LA TRAZA ss .

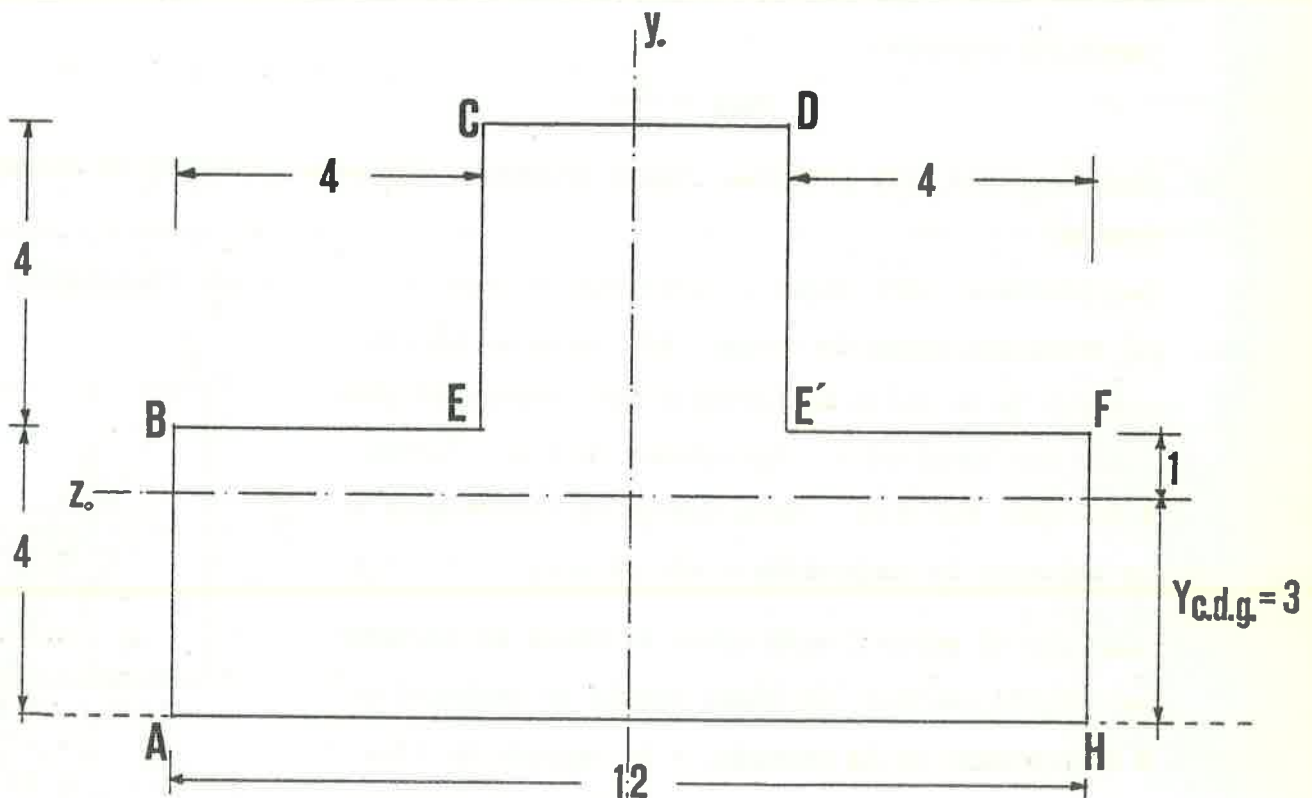


En el caso particular de que la flexión sea plana, W se reduce evidentemente al valor $\frac{I}{v}$.

En efecto, en este caso: $r = \frac{i^2}{v} = \frac{I}{\Omega \cdot v}$ de donde $\Omega \cdot r = \frac{I}{v} = W$

EJEMPLO DE APLICACION

Hallar graficamente el Núcleo Central de la sección grafiada.



1ª parte; Cálculos previos numéricos.-

a) Situación del c.d.g.

$$\Omega = 64 \text{ cm}^2$$

Tomando momentos respecto a un eje que pasa por los puntos AH:

$$Y_{c.d.g.} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 2}{64} = 3$$

b) Cálculo de los momentos de inercia respecto a los ejes principales:

$$I_{z.} = \frac{5^3 \cdot 4}{3} + \frac{1^3 \cdot 8}{3} + \frac{3^3 \cdot 12}{3} = 277,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{y.} = \frac{12^3 \cdot 4}{12} + \frac{4^4}{12} = 597,3 \text{ cm}^4$$

c) Cálculo de los radios de giro r_z r_y

$$r_z^2 = \frac{277,33}{64} = 4,33 \quad r_z = 2,08 \text{ cm.}$$

$$r_y^2 = \frac{597,33}{64} = 9,33 \quad r_y = 3,05 \text{ cm.}$$

2ª parte; Trabajo gráfico.- (fig. 2)

- d) Construir la elipse central de inercia. .
- e) Graficar los simétricos de los puntos A B y C (A' B' C')
- f) Trazar las tangentes a la elipse desde A' B' y C' y unir los puntos de tangencia $\overline{a_1 a_2}$ $\overline{b_1 b_2}$ $\overline{c_1 c_2}$.

Estas rectas limitarán la mitad derecha del núcleo. Por simetría se puede dibujar la otra mitad. Por tanto, el Núcleo Central tendrá 6 vértices, puesto que a la figura se le puede trazar 6 rectas límites AB BC CD DF FH y HA. Por AE y E' no pueden pasar rectas límites ya que cortarían a la figura.

PROCEDIMIENTO ANALITICO.-

Ecuación de la Línea Neutra

$$\frac{e_z}{r_z^2} \cdot y + \frac{e_y}{r_y^2} \cdot z + 1 = 0 \quad (1)$$

Ecuación de las rectas límites (sólo la mitad)

1ª) Recta AH (1) ecuación $y = +3$ $y + 0z - 3 = 0$

$$-\frac{1}{3}y - 0z + 1 = 0$$

2ª) Recta AB (2) ecuación $z = +6$ $0y + z - 6 = 0$

$$0y - \frac{1}{6}z + 1 = 0$$

3ª) Recta BC (3) ecuación $y = z - 7$ $y - z + 7 = 0$

$$\frac{1}{7}y - \frac{1}{7}z + 1 = 0$$

4ª) Recta CD (4) ecuación $y = -5$ $y + 0z + 5 = 0$

$$\frac{1}{5}y + 0z + 1 = 0$$

Igualando coeficientes entra la ecuación (1) y cada una de las rectas límites usadas como línea neutra, se obtendrán las coordenadas de los puntos 1, 2, 3 y 4.

Para la recta AH se obtiene $\frac{e_z}{r_z^2} = -\frac{1}{3}$ $e_z = -\frac{4,33}{3} = -1,44 = e_z$

Para la recta AB se obtiene $\frac{e_y}{r_y^2} = -\frac{1}{6}$ $e_y = -\frac{9,33}{6} = -1,55 = e_y$

Para la recta BC se obtiene $\frac{e_z}{r_z^2} = \frac{1}{7}$ $e_z = \frac{4,33}{7} = 0,618 = e_z$

$\frac{e_y}{r_y^2} = -\frac{1}{7}$ $e_y = -\frac{9,33}{7} = -1,33 = e_y$

y finalmente:

para la recta CD

$$\frac{e_z}{r_z} = \frac{1}{5}$$

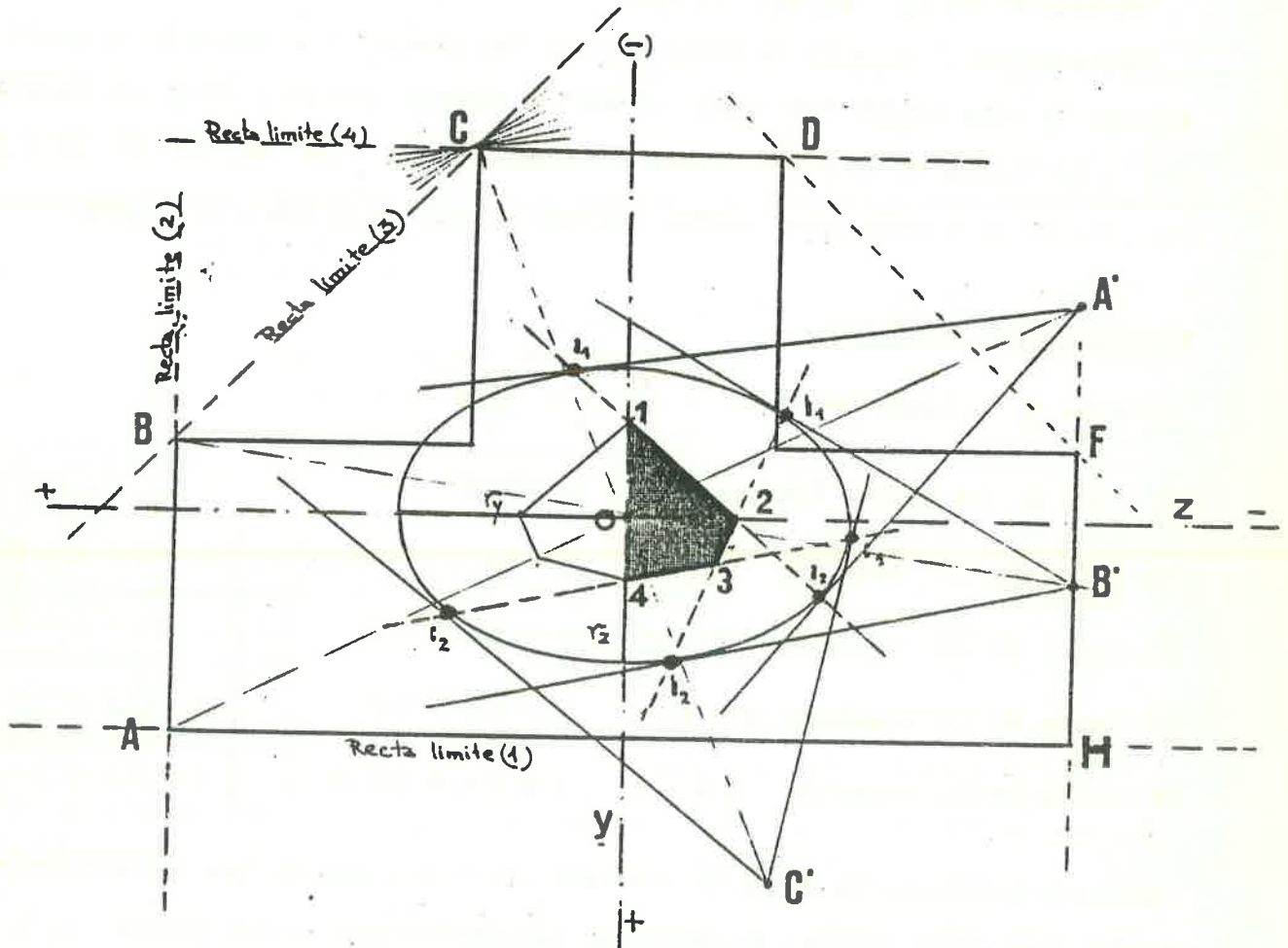
$$e_z = \frac{4,33}{5} = \boxed{0,866 = e_z}$$

$$\boxed{e_y = 0}$$

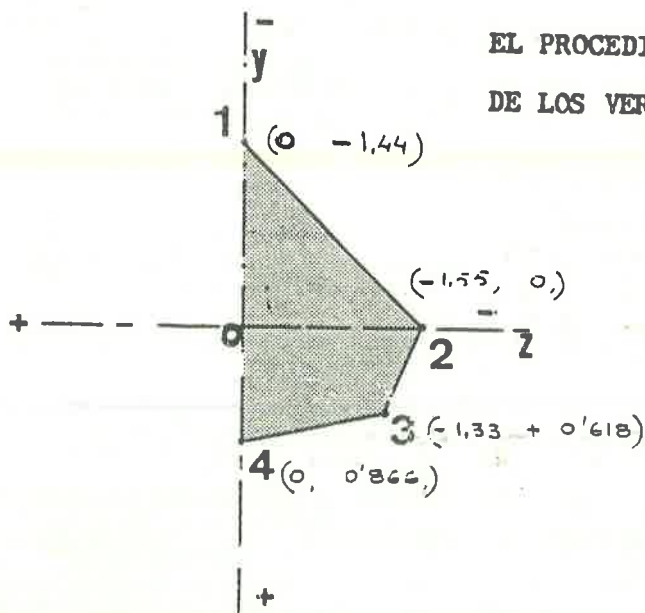
e_y = distancia del punto al eje y

e_z = distancia del punto al eje z

PROCEDIMIENTO GRAFICO EMPLEANDO LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA



EL PROCEDIMIENTO ANALITICO OBTIENE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES DEL NUCLEO CENTRAL



PROBLEMA DE FLEXION COMPUESTA

Dada la figura rayada, hallar:

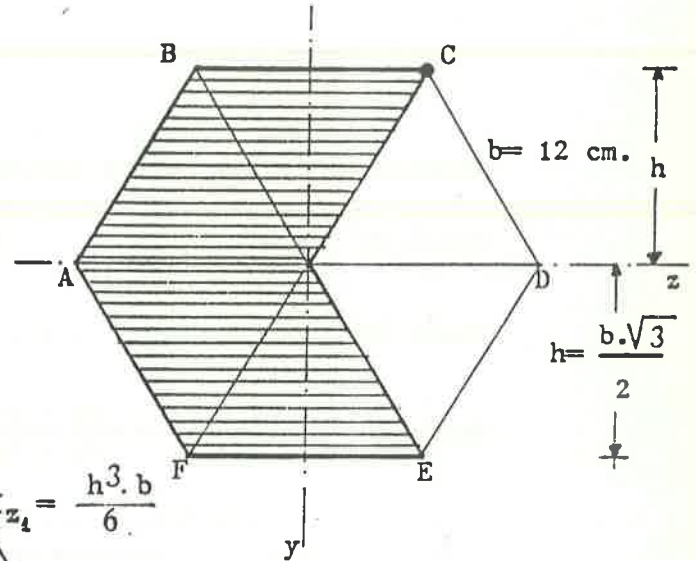
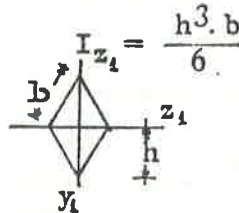
- Analíticamente, el Núcleo Central, y dibujarlo a escala 1:1
- Determinar la ecuación de la Línea Neutra para cuando la fuerza normal actúa en el vértice C de la sección.
- Hallar el valor de dicha fuerza para que la tensión no supere el valor de la $\sigma_{adm} = 1200 \text{ Kg/cm}^2$

Lado del exágono $b = 12 \text{ cm.}$

Fórmulas de uso previo:

Inercia del rombo $I_{y_1} = \frac{h \cdot b^3}{24}$

Area del rombo = $\frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$



- Cálculo del centro de gravedad

$$(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) z_{cdg} = \omega_1 \cdot 0 + \omega_2 \cdot 0 + \omega_3 \cdot \frac{b}{2} + \omega_4 \cdot \frac{b}{2}$$

$$4\omega \cdot z_{cdg} = \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) \quad \boxed{z_{cdg} = \frac{b}{4}}$$

- Cálculo de las inercias de la figura:

$$I_{z_0} = \frac{b \cdot (2h)^3}{12} = \frac{b \cdot (b\sqrt{3})^3}{12} = \frac{b^4 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$I_{y_0} = 2 \left[I_{y_1} + \omega \frac{b^2}{4} \right] \quad I_{y_0} = 2 \left[\frac{h \cdot b^3}{24} + h \cdot b \frac{b}{4} \right]$$

$$I_{y_0} = 2 \left[\frac{h \cdot b^3}{24} + \frac{h \cdot b^3}{16} \right] = \frac{5}{24} \cdot h \cdot b^3 = \frac{5}{24} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} \cdot b^3 = \frac{5}{48} \cdot \sqrt{3} \cdot b^4$$

- Cálculo de los radios de giro:

$$\Omega_{total} = 2 \cdot h \cdot b = 2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} \cdot b = \boxed{b^2 \sqrt{3}}$$

$$i_z^2 = \frac{I_{z_0}}{\Omega} = \frac{b^4 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{b^2 \sqrt{3}} = \frac{b^2}{4} = \frac{144}{4} = \boxed{36}$$

$$i_y^2 = \frac{I_{y_0}}{\Omega} = \frac{5}{48} \sqrt{3} \cdot b^4 \cdot \frac{1}{b^2 \sqrt{3}} = \frac{5}{48} \cdot b^2 = \boxed{15}$$



- Determinación del núcleo central:

Coordenadas de los vértices.-

$$A) \quad z = \frac{3 \cdot b}{4} = 9 \quad y = 0$$

$$B) \quad z = \frac{b}{4} = 3 \quad y = -\frac{b\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$C) \quad z = \frac{3 \cdot b}{4} = 9 \quad y = -\frac{b\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$E) \quad z = \frac{3 \cdot b}{4} = 9 \quad y = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$F) \quad z = \frac{b}{4} = 3 \quad y = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Ecuaciones de las rectas límites:

$$\text{Recta BC} \quad y = -6\sqrt{3} \quad y + 0z + 6\sqrt{3} = 0 \quad \boxed{\frac{1}{6\sqrt{3}}y + 0z + 1 = 0}$$

$$\text{Recta CE} \quad z = -9 \quad z + 0y + 9 = 0 \quad \boxed{\frac{1}{9}z + 0y + 1 = 0}$$

$$\text{Recta AB} \quad \frac{y - y_1}{z - z_1} = \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2} \quad \frac{y - 0}{z - 9} = \frac{0 - (-6\sqrt{3})}{9 - 3} \quad \frac{y}{z - 9} = \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$6y = 6\sqrt{3}z - 54\sqrt{3} \quad y = 3z - 9\sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{1}{9\sqrt{3}}y - \frac{1}{9}z + 1 = 0}$$

$$\text{Ecuación de la Línea Neutra:} \quad -\frac{e_z}{i_z^2}y + \frac{e_y}{i_y^2}z + 1 = 0$$

Identificando coeficientes de las rectas límites:

$$\text{Recta BC.-} \quad \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{e_z}{i_z^2} \quad e_z = \frac{36}{6\sqrt{3}} = \boxed{3,46 = e_z} \quad \boxed{e_y = 0}$$

$$\text{Recta CE.-} \quad \frac{1}{9} = \frac{e_y}{i_y^2} \quad e_y = \frac{15}{9} = \boxed{1,66 = e_y} \quad \boxed{e_z = 0}$$

$$\text{Recta AB.-} \quad \frac{1}{9\sqrt{3}} = \frac{e_z}{i_z^2} \quad e_z = \frac{36}{9\sqrt{3}} = \boxed{2,30 = e_z}$$

$$-\frac{1}{9} = \frac{e_y}{i_y^2} \quad e_y = \frac{15}{9} = \boxed{-1,66 = e_y}$$

- Cálculo de la tensión máxima cuando la carga está aplicada en C.-

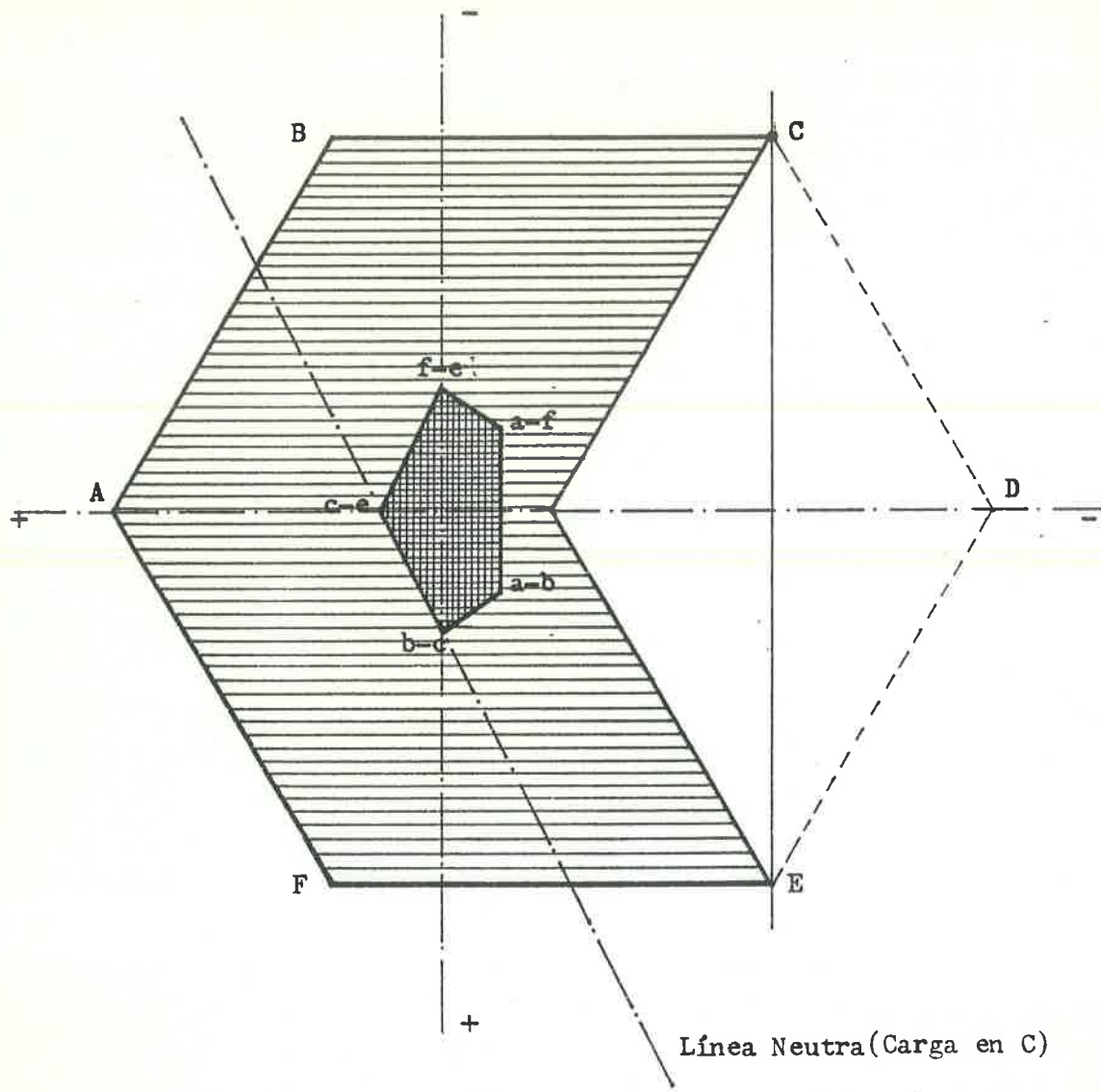
La actuación de la carga en C dará la Línea Neutra coincidente con el núcleo central (lado opuesto). Vamos a comprobarlo:

$$\text{La ecuación de la Línea Neutra será:} \quad 1 + \frac{e_y}{i_y^2}z + \frac{e_z}{i_z^2}y = 0$$

Coordenadas de C $(-9, -6\sqrt{3})$; sustituyendo:

$$1 + \frac{-9}{15}z + \frac{-6\sqrt{3}}{36}y = 0$$

$$\text{Para } \underline{z = 0} \quad y = \frac{36}{6\sqrt{3}} = \underline{3,46 = y} \quad \text{coincide con el punto b-c del N.C.}$$



Línea Neutra (Carga en C)

Para $y = 0$ $z = \frac{15}{9} = 1,66 = z$ coincide con el punto c-e del N.C.

Conocida la situación de la Línea Neutra, vemos que el punto de máxima tensión será el mismo punto C; por tanto, las coordenadas y las excentricidades del punto C son las mismas: $e_y = -9 = z$ $e_z = -6\sqrt{3} = y$

$$\sigma_{\max} = 1200 = \frac{N}{\Omega} \left(1 + \frac{e_z}{i_z^2} y + \frac{e_y}{i_y^2} z \right)$$

Despejando el valor de N obtendremos:

$$N = \frac{1200 \cdot 144 \cdot \sqrt{3}}{1 + \frac{(-9)(-9)}{15} + \frac{(-6\sqrt{3})(-6\sqrt{3})}{36}} = \boxed{31.840 \text{ Kg.} = N}$$

CÁTEDRA DE ESTRUCTURAS ARQUITECTÓNICAS

Catedrático JOSE M^a PUJADAS PORTA

MONOGRAFIAS DE CÁLCULO

TORSIÓN

José M^a Ourbán Fló
Prof. E. C. de la Asignatura

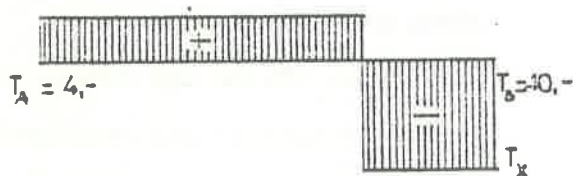
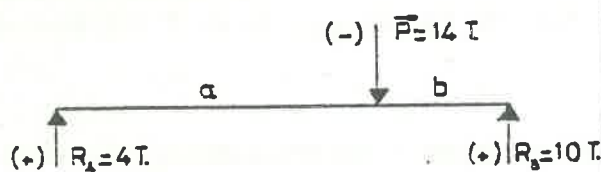
Generalidades.-

Cuando en ambos extremos de una barra actúan momentos iguales y contrarios contenidos en planos normales al eje de la pieza, se origina una sollicitación de torsión pura, constante en todas las secciones. En general se produce torsión cuando las fuerzas exteriores que preceden a una sección, tienen un momento distinto de cero con respecto al eje generatriz de la pieza, o sea, cuando estas fuerzas no cortan al eje.

El problema de la torsión se puede resolver por un procedimiento elemental en las barras de sección circular maciza o hueca. En secciones de otra forma es un problema de solución complicada, que se estudia y resuelve en la Teoría de la Elasticidad.

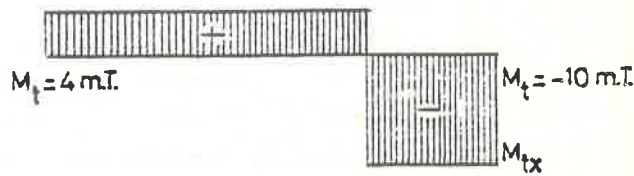
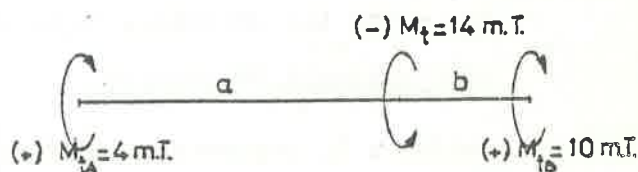
Momento torsor en una sección.-

Por definición, momento torsor en una sección es igual a la suma algebraica de los momentos producidos por los pares que preceden a la sección estudiada. El diagrama de los momentos torsores tiene analogía con el diagrama de cortantes de una viga sometida a fuerzas puntuales, de forma que se pueden sustituir los momentos o pares torsores actuantes por fuerzas puntuales del mismo valor y signo, y con ellas determinar el diagrama de fuerzas cortantes, siendo la lectura de sus ordenadas los momentos torsores de cada sección. (Hay que establecer un convenio de signos concordante).



T_x para $0 < x < a = +4T$

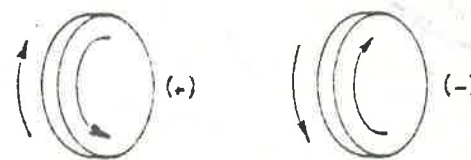
T_x para $a < x < l = -10T$



M_{tx} para $0 < x < a = +4, -m.T$

M_{tx} para $a < x < l = -10, -m.T$

CONVENIO



TENSIONES Y DEFORMACIONES EN UNA BARRA DE SECCIÓN CIRCULAR.-

Para evaluar las tensiones y las deformaciones formulamos las hipótesis de base siguientes:

- a) Todas las secciones rectas giran durante la torsión alrededor de sus centros respectivos (puntos del eje de la pieza).
- b) Todas las secciones rectas permanecen circulares y planas después de la deformación.
- c) Un radio cualquiera trazado dentro de la sección permanece rectilíneo durante la torsión.
- d) El ángulo comprendido entre dos radios cualesquiera, trazado dentro de una sección, no varía durante la torsión.

Es naturalmente vigente la Ley de Hooke, que en la sollicitación de torsión tiene la expresión siguiente:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (1)$$

siendo γ la distorsión unitaria y G el módulo de elasticidad transversal.

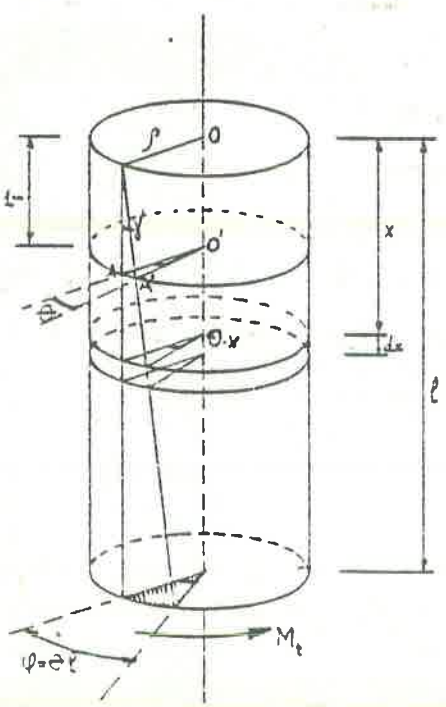
γ mide el desplazamiento de un punto de la fibra cualquiera con respecto a otro punto de la misma fibra situada a la distancia unidad.

En la sollicitación de torsión las secciones de la barra experimentan un giro, una contra otra (deslizamiento) de valor angular φ . Este ángulo es proporcional a la distancia entre las secciones consideradas, ya sean extremas o no. Si la distancia entre las secciones es la unidad, el ángulo girado es ϑ definido como el ángulo unitario de torsión.

Debido a la proporcionalidad entre acciones y deformaciones, el valor del ángulo será $\vartheta \cdot l$, siendo l la distancia entre las secciones consideradas.

La deformación de las fibras longitudinales de las rectas que las representan se convierten en hélices cilíndricas de muy ligera curvatura. (Para el análisis las consideramos rectas, como se observa en la figura).

En la figura se pueden constatar las siguientes relaciones:



$$\frac{AA'}{l} = \text{tg } \gamma = \gamma$$

$$AA' = \gamma \quad (2)$$

$$AA' = \text{tg } \vartheta = \vartheta \rho$$

$$AA' = \rho \cdot \vartheta \quad (3)$$

De la igualdad de los primeros términos se puede establecer la relación:

$$\gamma = \rho \cdot \theta \quad (4)$$

Sustituyendo γ por su valor deducido de la fórmula $\tau = G \cdot \gamma$ sale la relación

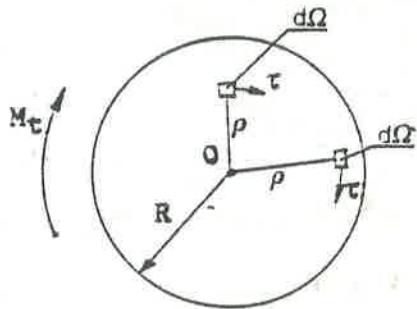
$$\frac{\tau}{G} = \rho \cdot \theta \quad \text{y finalmente} \quad \tau = G \cdot \theta \cdot \rho \quad (5) \quad \text{en la que se}$$

lee que la tensión tangencial debida a la torsión es directamente proporcional a su distancia al centro de la sección.

Del análisis de esta fórmula se deduce que las tensiones crecen con el valor de ρ y por lo tanto son máximas en el contorno de la barra ($\rho = R$) y nulas en el centro de la sección, con lo cual se ve que la solución óptima de diseño sería acumular el área en la periferia, puesto que la materia en la zona cercana al centro contribuye poco a la resistencia.

EQUILIBRIO DE UNA SECCIÓN CIRCULAR.-

Todo punto de una sección, al que corresponde un entorno diferencial de área, reacciona al momento torsor de corte con un momento diferencial elemental de la forma $dM = \tau \cdot d\Omega \cdot \rho$. Al establecer la condición de equilibrio se tendrá la igualdad siguiente: Suma de todos los momentos diferenciales producidos por las tensiones internas = Al momento torsor de la sección considerada.



Esta condición de equilibrio tiene la forma

$$\iint \tau \cdot d\Omega \cdot \rho = M_t$$

Sustituyendo τ por su valor procedente de la ecuación $\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$ se tiene

$$\iint G \cdot \theta \cdot \rho \cdot d\Omega \cdot \rho = M_t \quad \text{pero} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{con lo cual} \quad M_t = G \cdot \theta \iint d\Omega \cdot \rho^2$$

Siendo el concepto que engloba la integral, el momento de inercia polar de la sección y que se puede representar por I_p la fórmula quedará con esta expresión.

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_p$$

pero de la ecuación (5) $G \cdot \theta = \frac{\tau}{\rho}$; se puede hacer la correspondiente sustitución y

$$\text{expresarla así:} \quad M_t = \frac{\tau}{\rho} \cdot I_p$$

Finalmente, despejando la tensión se obtiene:

$$\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_p}$$

cuya analogía con la fórmula de las tensiones en flexión pura es evidente: $\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}$

En definitiva, se observa en la fórmula que las tensiones son directamente proporcionales a su distancia al centro de la sección e inversamente proporcionales a su inercia polar. También se podría escribir $\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t}{W_p}$; siendo W_p el módulo resistente polar de la sección.

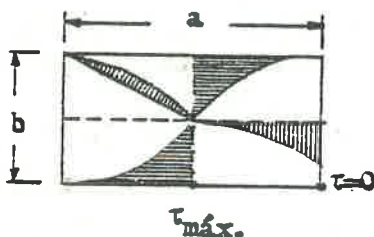
TORSION EN SECCIONES DISTINTAS A LA CIRCULAR.-

La teoría para estas secciones es bastante compleja y su estudio se realiza en el marco de la Teoría de la Elasticidad. Daremos aquí las fórmulas para las secciones más importantes en construcción.

SECCION RECTANGULAR.-

Los puntos de tensión máxima están situados en los puntos medios del lado mayor del rectángulo y las fórmulas vienen afectadas de un coeficiente que está en función de la relación entre los lados del rectángulo.

Es decir, para cada $n = \frac{\text{longitud lado mayor}}{\text{longitud lado menor}}$, le corresponderán los coeficientes α y β según los valores tabulados siguientes: $n = \frac{a}{b}$



n	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	5	10
α	4,8	4,57	4,40	4,27	4,16	4,07	3,88	3,74	3,43	3,2
n	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	5	10
β	7,1	6,02	5,35	4,91	4,60	4,37	4,01	3,80	3,43	3,20

o bien utilizando las fórmulas aproximadas de Saint Venant.

$$\alpha = 3 + \frac{1,8}{n}; \quad \beta = \frac{3n}{n - 0,63};$$

Para $n = 4$ o valor mayor, se tiene $\tau_{\text{máx.}} = G \cdot \theta \cdot b$

FÓRMULAS

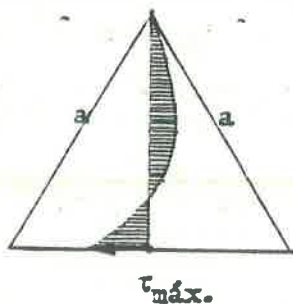
$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{\alpha \cdot M_t}{a \cdot b^2}$$

$$\theta = \beta \frac{M_t}{G \cdot a \cdot b^3}$$

Si a es muy grande con respecto a b se puede usar la fórmula aproximada:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3 M_t}{a \cdot b^2} \quad (\text{La relación } \frac{a}{b} \text{ debe ser mayor de } 20).$$

SECCION TRIÁNGULO EQUILÁTERO.-



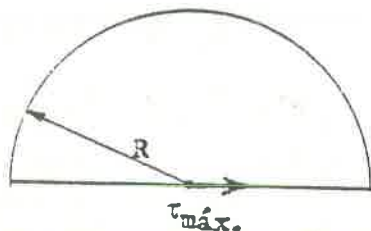
La tensión máxima está situada en los puntos medios de los lados del contorno de la sección.

La fórmula de uso será:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{20 M_t}{a^3};$$

$$\theta = \frac{80}{\sqrt{3}} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3}$$

SECTOR CIRCULAR DE 180°.-



La tensión máxima está situada en el punto medio del diámetro. Las fórmulas son:

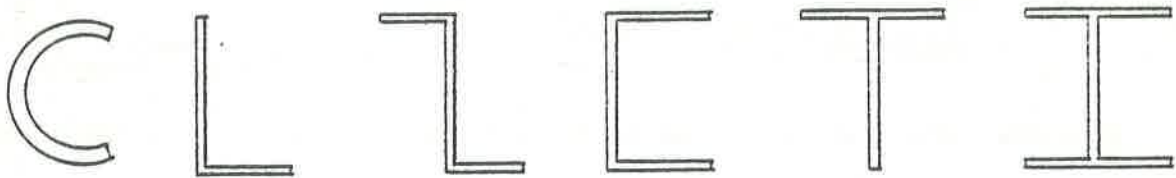
$$\tau_{\text{máx.}} = 2,37 \frac{M_t}{R^2}; \quad \theta = 3,38 \frac{M_t}{G \cdot R^3};$$

PERFILES LAMINADOS.-

Para este tipo de secciones se puede utilizar con bastante aproximación las fórmulas siguientes (suponemos espesor constante).

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3 M_t}{a_m s^2} \quad \theta = \frac{3 M_t}{G a_m s^3} \quad \tau_{\text{máx.}} = G \theta s$$

siendo a_m la longitud de la línea media del perfil en desarrollo y s su espesor.
Si s no es muy considerable con respecto a a_m se usará la expresión $(a_m - 0,63 s)$ en lugar de a_m .



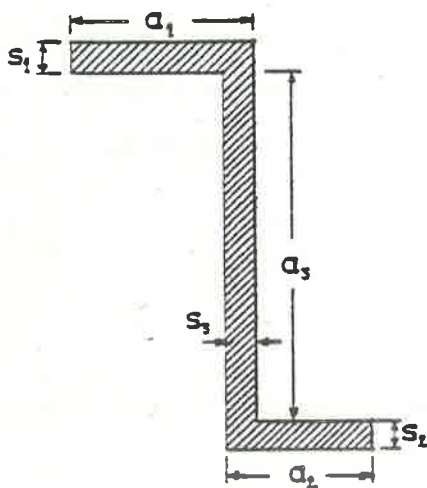
Si la sección está compuesta de rectángulos de distinto espesor se utilizará $\sum a_i \cdot s_i^3$ en lugar de $a_m \cdot s^3$, siendo a_i y s_i las longitudes y espesores de los distintos rectángulos que componen la sección.

Para este caso la tensión máxima se origina en los rectángulos que tienen espesor mayor ($s_{\text{max.}}$)

Para este caso la fórmula es:
$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M \cdot s_{\text{max.}}}{I_t}$$

siendo I_t el valor $\frac{1}{3} \sum a_i s_i^3$

con lo que la fórmula definitiva será:
$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t s_{\text{max.}}}{\frac{1}{3} \sum a_i s_i^3}$$



En el caso de la figura $\sum a_i s_i^3$ sería $(a_1 s_1^3 + a_2 s_2^3 + a_3 s_3^3)$.

Para mayor aproximación en las fórmulas se usará los coeficientes correctores de Foopl, para los diversos modelos de perfiles, multiplicando el valor de I_t por el coeficiente corrector que le corresponde.

1 para las secciones angulares; 1,1 para las secciones en U y en T;

1,3 para las secciones en doble T o en H

Al producto $G \cdot I_t$ se le llama módulo de rigidez a la torsión a semejanza del producto $E \cdot I$, usado en las fórmulas de flexión.

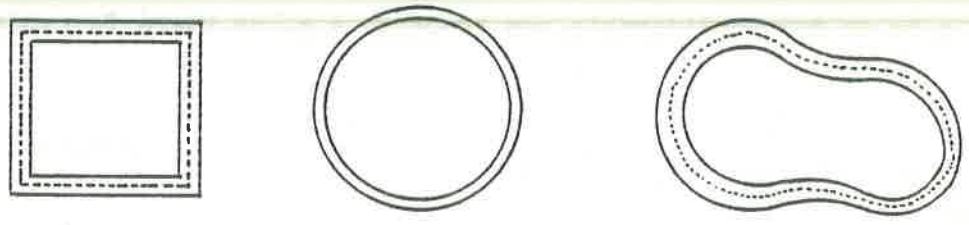
Por último, véase la analogía que existe entre las fórmulas de la torsión y las fórmulas de flexión, cambiando E por G ; I por I_t o I_p ; M por M_t ; σ por τ ; y θ por ϕ

FLEXIÓN: $\sigma = \frac{M y}{I}$; $\sigma_{max.} = \frac{M y_{max.}}{I}$; $\theta = \frac{M \text{ flector}}{E I}$; $\epsilon = \frac{1}{R} y$

TORSIÓN: $\tau = \frac{M_t r}{I_p}$; $\tau_{max.} = \frac{M_t R}{I_p}$; $\theta = \frac{M \text{ torsor}}{G I_t}$; $\gamma = \theta r$

VIGAS TUBULARES DE PAREDES DELGADAS.-

Corresponden a secciones cerradas de las formas grafadas a continuación y que pueden tener el espesor del anillo constante o variable.



Su línea media (puntillado en la figura), encierra un área limitada cuyo valor representamos por Ω , y si el espesor del anillo es constante lo representaremos con una s .

Para estas secciones las fórmulas dan el valor medio de la tensión, siendo éste algo mayor en el contorno exterior. Sin embargo, si el espesor es pequeño, o sea, que las paredes del tubo son delgadas, el valor de fórmula es correcto.

Daremos ahora las fórmulas de uso para este tipo de perfiles.

(1) $\tau = \frac{M_t}{2 \Omega s}$; (2) $\theta = \frac{M_t c}{4 G \Omega^2 s}$;

Siendo c la longitud de la línea media del anillo de la sección y s su espesor, si éste es constante.

En caso de ser s variable, el cociente $\frac{c}{s}$ de la fórmula anterior debe ser sustituido por la expresión:

$$\int_0^c \frac{dc}{s}$$

siendo s función de su situación en el anillo.

Caso de estar formada la sección por diversos trozos de distintos espesores, pero constante en cada trozo, la integral puede ser sustituida por $\sum \frac{c_i}{s_i}$

siendo c_i las longitudes de los trozos y s_i sus respectivos espesores.

Evidentemente, para el caso de espesores variables τ será máximo en el lugar de menor espesor de la pared, o sea $s_{min.}$ en la fórmula (1).

Ver ejemplo nº 5

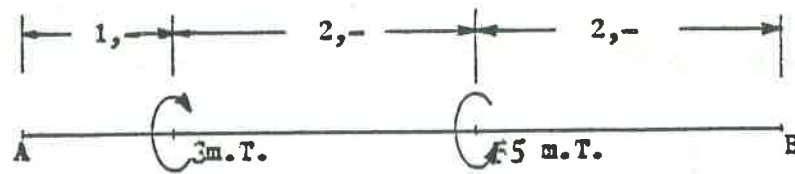
PROBLEMA.- Nº 1

Dada la barra de sección circular, empotrada en sus extremos, y sometida a los momentos torsores que se indican en la figura, determinar:

- El diagrama de momentos torsores.
- Las reacciones en los extremos.
- El momento torsor máximo.

Dimensionar la sección de la barra y el ángulo máximo de torsión sabiendo que las características del material son las siguientes:

Acero A-37; límite elástico 2400 Kg./cm^2 ; $E = 2,1 \times 10^6$; $\nu = 0,3$; y el coef. de seguridad $s = 1,5$



Lo resolveremos por analogía con el diagrama de Esfuerzos cortantes, mediante el siguiente convenio:

Sustituimos

+

-

Tomamos momentos desde B:

$$5 R_A + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 0$$

$$R_A = - \frac{2}{5} = - 0,4 \hat{T}.$$

Este signo negativo nos indica que la reacción R_A es de distinto sentido al propuesto; R_A será

$$R_B = 2 + 0,4 = 2,4 \text{ T.}$$

Las reacciones en los extremos serán momentos de signo equivalente a las reacciones en el caso anterior, según el convenio anterior.

Para dimensionar y calcular el ángulo de torsión se deberá conocer G y τ admisible.

$$G \text{ se obtiene a partir de la relación } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = ; G = \frac{2100000}{2(1+0,3)} \approx 807700 \text{ Kg/cm}^2$$

La tensión tangencial admisible se obtendrá a partir de la fórmula $\tau = \frac{5}{7} \sigma$,

$$\text{o sea } \tau = \frac{5}{7} \cdot \frac{2400}{1,5} = 1143 \text{ Kg./cm}^2$$

Dimensionado de la sección.-

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t R}{I_p}; \quad I_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad (\rho = \text{radio máximo} = R)$$

Sustituimos los valores conocidos y despejamos R.

$$\tau = \frac{M_t R}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}; \quad \text{de donde } R = \sqrt[3]{\frac{2 M_t}{\tau \pi}} = \sqrt[3]{\frac{260000 \text{ Kg. cm.}}{1143 \cdot 3,14}} = 5,25 \text{ cm.} = R$$

Cálculo del ángulo máximo de torsión.-

$$\phi = \frac{M_t}{G I_p} = \frac{260000 \cdot 2}{807700 \cdot \pi R^4} = \frac{260000 \cdot 2}{807700 \cdot 3,14 \cdot 5,25^4} = 0,0002698 \frac{\text{radianes}}{\text{cm.}} = \phi$$

El ángulo de giro máximo estará a 2,00 m. del extremo fijo B y su valor viene dado por la expresión:

$$\phi = \phi l = 0,00027 \cdot 200 = 0,0540 \text{ radianes.}$$

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{0,0540}{x}; \quad x = \frac{0,0540 \cdot 360}{2\pi} = 3,09^\circ$$

RESULTADOS.-

- Las reacciones son: $R_A = -0,4 \text{ m.T.}$

$$R_B = 2,4 \text{ m.T.}$$

- El momento torsor máximo se halla a 2,40m. del extremo B, $M_t = 2,6 \text{ m.T.}$

- La barra es de sección circular, cuyo radio es igual a: $R = 5,25 \text{ cm.}$

- El ángulo de giro máximo será: $\phi = 0,0540 \text{ radianes} = 3,09^\circ$

PROBLEMA.- Nº 2

Un eje macizo de 10 cm. de radio soporta un determinado momento torsor. Si se sustituye el eje por otro hueco, con la relación de diámetros igual a 2: Calcular las dimensiones de este nuevo eje y el ahorro de material que ello reportaría.

DATOS: $R = 10$ cm.; $\frac{\text{Diámetro ext.}}{\text{Diámetro int.}} = 2$; Por lo tanto, $R_i = \frac{R \text{ ext.}}{2}$ (a)

Los momentos de inercia polares de los ejes serán:

Sección maciza: $I_p = \frac{\pi R^4}{2}$; Sección hueca: $I_p = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$

La fórmula a usar es la de la tensión máxima, ya que para ambas barras debe ser la misma.

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t \cdot R}{I_p} \text{ (de la sección maciza)} \qquad \tau_{\text{máx.}} = \frac{M_t \cdot R \text{ ext.}}{I_p} \text{ (de la sección hueca)}$$

Igualando los segundos miembros de las fórmulas anteriores, desaparecen los momentos torsores por la condición del problema, y queda:

● = sección maciza $\frac{R}{I_p} = \frac{R_e}{I_p}$; y colocando los correspondientes valores:
○ = sección hueca

$$\frac{R}{\pi R^4/2} = \frac{R_e}{\pi/2 (R_e^4 - R_i^4)}; \text{ y simplificando al introducir la}$$

relación de los radios (a):

$$\frac{1}{R^3} = \frac{R_e}{R_e^4 - R_e^4/16}; \quad \frac{1}{R^3} = \frac{16}{15 R_e^3}; \quad R_e = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^3}{15}}$$

Finalmente, $R_e = 10,22$ cm.; $D_e = 2 R_e = \boxed{20,44 \text{ cm.}}$ $D_i = 10,22$ cm.

Las áreas de las secciones serán πR^2 y $\pi (R_e^2 - R_i^2)$

y colocando los valores de los radios, la relación de estas áreas será:

$$\frac{\pi \cdot 10^2}{\pi (10,22^2 - 5,11^2)} = \frac{100}{104,44 - 26,11} = \frac{100}{78,33}$$

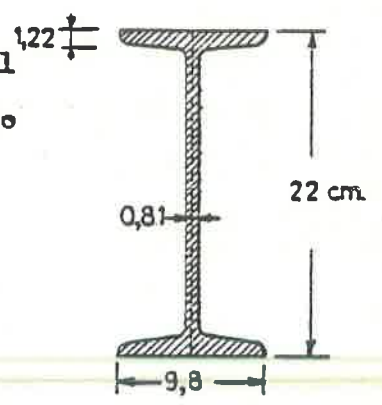
Por lo tanto, la relación anterior nos da directamente el ahorro del material.

$$100 - 78,33 = 21,67$$

Se obtiene pues una economía del material de un 21,67 %

PROBLEMA Nº 3

Dada la viga del perfil doble T de 22cm., determinar el valor del momento torsor que origina un ángulo unitario de torsión (unidad 1 m.) de 4 grados, y cual es la tensión máxima producida por este momento.



Nota: Emplear el coeficiente corrector de Foppl.

G = 800.000.

Las fórmulas de uso para este caso serán: $\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_t}$; $\tau_{m\acute{a}x.} = \frac{3 M_t}{a_m \cdot s^2}$;

La 2ª fórmula se puede escribir tambien en función de I_t . $\tau_{m\acute{a}x.} = \frac{M_t \cdot s_{m\acute{a}x.}}{I_t}$

Calculemos prviamente el paso de los grados sexagesimales a radianes:

$\frac{4}{360} = \frac{x}{2 \pi}$; $x = 0,0698$ radianes a la unidad de separación de las secciones consideradas.

Como todas las unidades a emplear en la fórmula se refieren a la unidad centímetro, se expresarán los radianes por cm. de separación de secciones, o sea, 0,000698 radianes.

Calculemos $I_t = \frac{1}{3} (2 \cdot 9,8 \cdot 1,22^3 + 19,56 \cdot 0,81^3) = 15,33 \text{ cm}^4$

El empleo de las fórmulas con el coeficiente de Foppl, que para este caso es 1,3 dará los siguientes resultados:

$M_t = G \cdot \theta \cdot I_t = 800.000 \times 0,000698 \times 1,3 \times 15,33 = 11.128 \text{ cm.Kg.}$

Primer resultado.-

Momento torsor necesario para producir un giro de 4º entre dos secciones separadas 1 m. $M_t = 111,28 \text{ m.Kg.}$

El empleo de la fórmula $\tau_{m\acute{a}x.} = \frac{M_t \cdot s_{m\acute{a}x.}}{I_t} = \frac{11.128 \times 1,22}{15,33} = 886 \text{ Kg./cm}^2$

Segundo resultado.-

La tensión máxima que se originará en las alas será 886 Kg./cm²

EJERCICIO Nº 4

A una barra de paredes delgadas de sección tipo canal, se le suelda una barra de sección angular. Determinar en cuantas veces aumenta la rigidez de la barra a la torsión y en cuantas veces disminuyen las tensiones, manteniendo el mismo momento torsor.

Para el perfil canal la formula (1) dará lo siguiente:

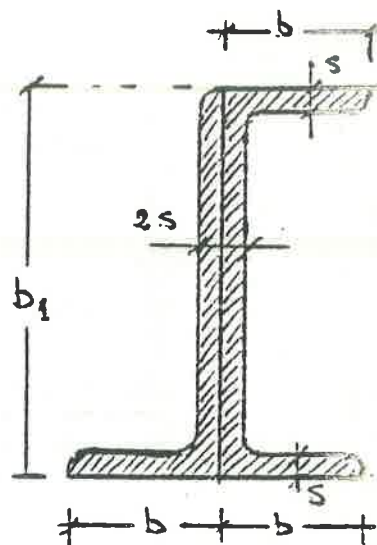
$$\theta^c = \frac{M}{G \cdot \frac{1}{3} (2b \cdot s^3 + b_1 \cdot s^3)}$$

mientras que en el caso de la sección compuesta

$$\theta^K = \frac{M}{G \cdot \frac{1}{3} [3b \cdot s^3 + b_1 \cdot (2s)^3]}$$

Así pues para que el ángulo sea igual, su relación

será $\frac{3b + 8b_1}{2b + b_1}$ la cual indicará las veces que la rigidez aumenta.



Las tensiones se calculan por la formula (2), la cual en el caso del perfil canal dará

$$\max. \tau = \frac{3M}{\frac{1}{3} (2b \cdot s^3 + b_1 \cdot s^3)}$$

y para la sección compuesta se tendrá

$$\max \tau = \frac{M \cdot 2s}{\frac{1}{3} [3b_1 \cdot s^3 + b_1 (2s)^3]}$$

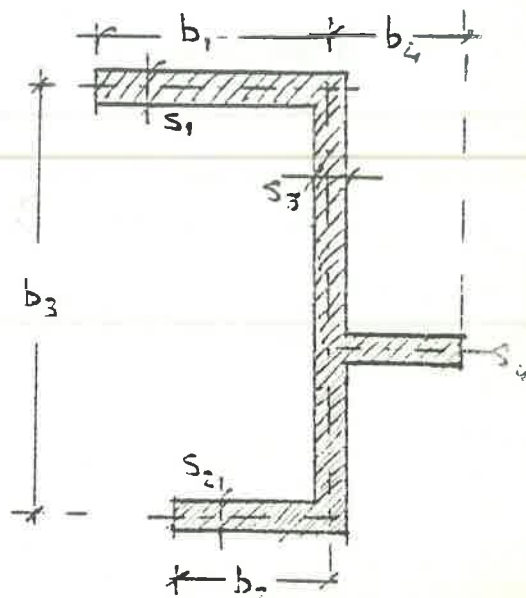
Haciendo la relación de ambas formulas se obtendrá el valor $\frac{1}{2} \frac{3b + 8b_1}{2b + b_1}$

que indica el número de veces que disminuye la tensión.

Formulas

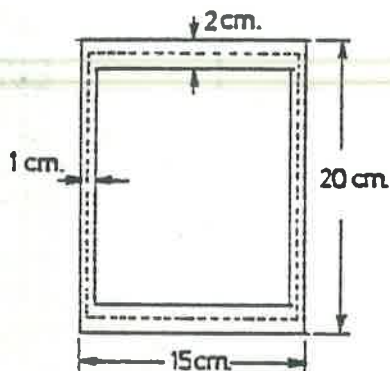
(1) $\theta = \frac{M_t}{G \frac{1}{3} \sum b_i s_i^3}$

(2) $\tau_{max} = \frac{M_t \cdot S_{max}}{\frac{1}{3} \sum b_i \cdot S_i^3}$



EJERCICIO Nº 5

Una viga de hierro tiene la sección rectangular hueca indicada en la figura. Calcúlese el momento torsor admisible ($\tau = 900 \text{ Kg/cm}^2$) y el ángulo de torsión en una longitud de 2,20 m. ($G = 800.000 \text{ Kg/cm}^2$).



El área encerrada por la línea media del perfil valdrá:

$$(20 - 2) \times (15 - 1) = 252 \text{ cm}^2$$

La integral $\int \frac{dc}{s}$ por tratarse de tramos de espesor constante tendrá el valor siguiente:

$$\int \frac{dc}{s} = \frac{14}{2} + \frac{14}{2} + \frac{18}{1} + \frac{18}{1} = 50$$

De la fórmula $\tau = \frac{M_t}{2 \Omega s}$

Despejando: $M_t = 2 \cdot \Omega \cdot s \cdot \tau$, luego:

$$M_t = 2 \cdot 252 \cdot 1 \cdot 900$$

ya que la tensión máxima ($\tau_{max.}$) está en la zona estrecha, o sea, espesor mínimo igual a 1 cm.

Obtenemos así: $M_t = 453.600 \text{ cm.Kg.}$

Aplicando la fórmula del ángulo de giro unitario:

$$\phi = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \cdot \int \frac{dc}{s} \quad \text{obtendremos:}$$

$$\phi = \frac{453.600}{4 \cdot 800.000 \cdot 252^2} \cdot 50 = 0,0001116 \text{ radianes}$$

Y el ángulo en una longitud de 2,20 m. será:

$$\phi = 0,1 = 0,0001116 \cdot 220 = 0,0245 \text{ radianes.}$$

Y que pasando a grados centesimales:

$$\phi = 0,0245 \cdot \frac{360}{2\pi} = 1,40 = \underline{1^\circ 24'} = \phi$$

PROBLEMA DE FLEJO-TORSION

Una barra de sección angular 10x10x1 cms., empotrada en un extremo y libre en el otro, está sometida a una carga puntual P situada en la punta del ala horizontal del perfil, tal como indica la figura.

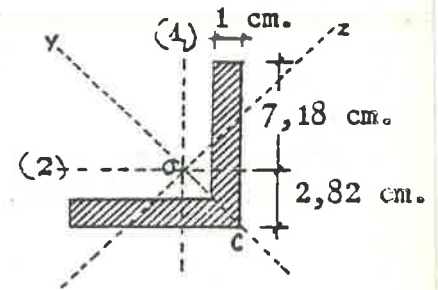
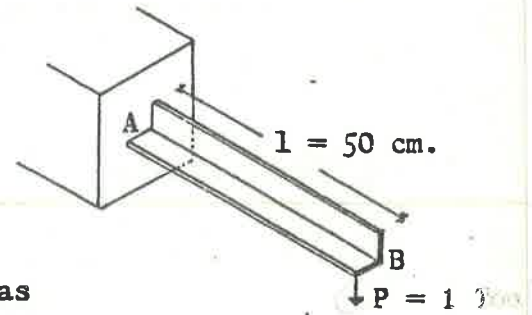
El material tiene las siguientes características:

$$\sigma_{ad.} = 2500 \text{ Kg/cm}^2 \quad E = 2.100.000$$

$$\tau_{ad.} = 1200 \text{ Kg/cm}^2 \quad \nu = 1/3$$

DETERMINAR:

- 1º) Con $P = 1 \text{ Ton.}$, calcular las tensiones máximas que se originarán en la barra (σ y τ) y deducir si es correcto o no el perfil elegido.
- 2º) Calcular el ángulo φ de torsión girado por la sección extrema B.
- 3º) Sin cambiar el perfil, deducir cual deberá ser la longitud de la barra y el valor de P para que se alcancen simultáneamente los dos valores de las tensiones admisibles.

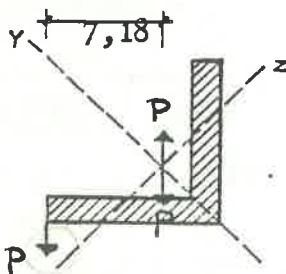


$$\begin{aligned} OC &= 4 \text{ cm.} \\ I_1 &= I_2 = 177 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 73,33 \text{ cm}^4 \\ I_y &= 280 \text{ cm}^4 \\ \Omega &= 19 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

NOTA: En los cálculos No se tiene en cuenta las tensiones τ debidas a la sollicitación de cortadura.

RESOLUCION:

1º Cálculo de los momentos torsor y flector a que esta sometido el perfil.



$$M_t = P \cdot 7,18 = 1000 \cdot 7,18 = 7180 \text{ cm.Kg.}$$

$$M_f = P \cdot 50 = 1000 \cdot 50 = 50.000 \text{ cm.Kg.}$$

- Cálculo de las tensiones máximas σ y τ

Para calcular la tensión debida al momento torsor aplicaremos la fórmula:

$$\tau_{max.} = \frac{3 M_t}{a_m \cdot s^2} \quad \begin{aligned} a_m &= \text{longitud línea media} = 19 \text{ cm.} \\ s^2 &= \text{espesor}^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } \tau_{max.} = \frac{7180}{19 \cdot 1} = 1.133 \text{ Kg/cm}^2$$

1.133 < 1.200 Válido el perfil a la torsión.

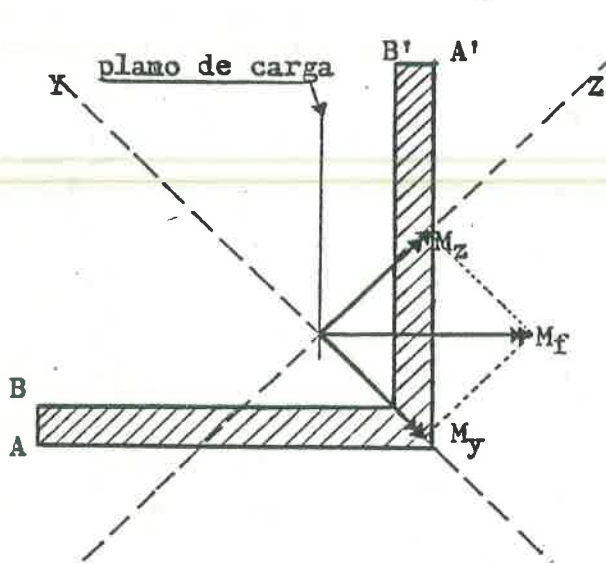
Para calcular la tensión debida al momento flector, vemos que el plano de cargas no coincide con ninguno de los ejes principales de inercia, lo cual nos indica que se trata de una flexión desviada; aplicaremos por tanto la

fórmula:

$$\sigma_{\max.} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

$$M_z = M_y = M_f \cos 45 = -50.000 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_z = M_y = -35.355 \text{ cm.Kg.}$$



Se prevé que las tensiones máximas se darán en uno de los cuatro extremos

A A' B y B'

Vamos a hallar las coordenadas de dichos puntos:

$$A) \quad y = -3,08 \quad z = +7$$

$$A') \quad y = -3,08 \quad z = -7$$

$$B) \quad y = -3,78 \quad z = +6,3$$

$$B') \quad y = -3,78 \quad z = -6,3$$

Aplicando la fórmula obtendremos las tensiones correspondientes.

$$\sigma_A = \frac{-35.355 \cdot (-3,08)}{73,3} + \frac{-35.355 \cdot (+7)}{280} = 1.485,6 - 883,8 = 601,7 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{A'} = \frac{-35.355 \cdot (-3,08)}{73,3} + \frac{-35.355 \cdot (-7)}{280} = 1.485,6 + 883,8 = 2.369,4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{-35.355 \cdot (-3,78)}{73,3} + \frac{-35.355 \cdot (+6,3)}{280} = 1.823,2 - 795,5 = 1.027,7 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{B'} = \frac{-35.355 \cdot (-3,78)}{73,3} + \frac{-35.355 \cdot (-6,3)}{280} = 1.823,2 + 795,5 = 2.618,7 \text{ Kg/cm}^2$$

El punto de máxima tensión es B' y como $\sigma_{B'} > \sigma_{ad}$ $2618,7 > 2500$

deducimos que el perfil está mal dimensionado para la flexión.

2º) Cálculo del ángulo φ en la sección extrema B con respecto a la sección fija A.

$$\varphi = \theta \cdot l \quad \theta = \frac{3 M_t}{G \cdot a_m \cdot s^3} \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$G = \frac{2.100.000}{2 \cdot (1 + 1/3)} = 787.500 \quad \theta = \frac{3 \cdot 7.180}{787.500 \cdot 19 \cdot 1} = 0,00144 \text{ rad./cm.}$$

$$\varphi = 0,00144 \text{ rad./cm.} \cdot 50 \text{ cm.} = 0,072 \text{ rad.}$$

Pasando los radianes a grados obtenemos:

$$\frac{2 \pi}{360} = \frac{0,072}{x} \quad x = \frac{0,072 \cdot 360}{2 \cdot \pi} = 4,125 = \varphi$$

3º) Hemos visto que para la flexión el punto con tensión máxima es el B'
 Así pues, en este caso deberemos conseguir que en dicho punto se alcance la tensión admisible:

$$\sigma_{B'} = \frac{-M_z \cdot (-3,78)}{73,3} + \frac{-M_y \cdot (-6,3)}{280} = -M_z \left[\frac{-3,78}{73,3} + \frac{-6,3}{280} \right]$$

(sacamos M_z factor común por darse el caso de que $M_z = M_y = M_f \cos 45$).

y sustituyendo M_z por $M_f \frac{\sqrt{2}}{2}$ obtenemos:

$$\sigma_{B'} = M_f \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-0,074) \quad \text{y como } M_f = P \cdot l; \quad \sigma_{B'} = P \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,074 = \sigma_{ad} \quad *$$

De esta ecuación no pueden salir simultáneamente las incógnitas P y l

Para la torsión tenemos que debemos alcanzar igualmente la tensión τ_{ad}

así pues:
$$\tau_{ad} = \frac{3 \cdot M_t}{19 \cdot 1} = \frac{3 \cdot P \cdot 7,18}{19 \cdot 1} = 1200 \text{ Kg/cm}^2$$

Despejando P de la ecuación obtenemos:
$$P = \frac{1200 \cdot 19}{3 \cdot 7,18} = 1058,5 \text{ Kg.} = P$$

Se ve, pues, que la torsión condiciona $P_{max.}$, valor que ahora podemos

introducir en * :
$$2500 = 1058,5 \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,074.$$

y despejando l obtenemos:
$$l = \frac{2500}{1058,5 \cdot 0,0523} = 45,16 \text{ cm.} = l$$

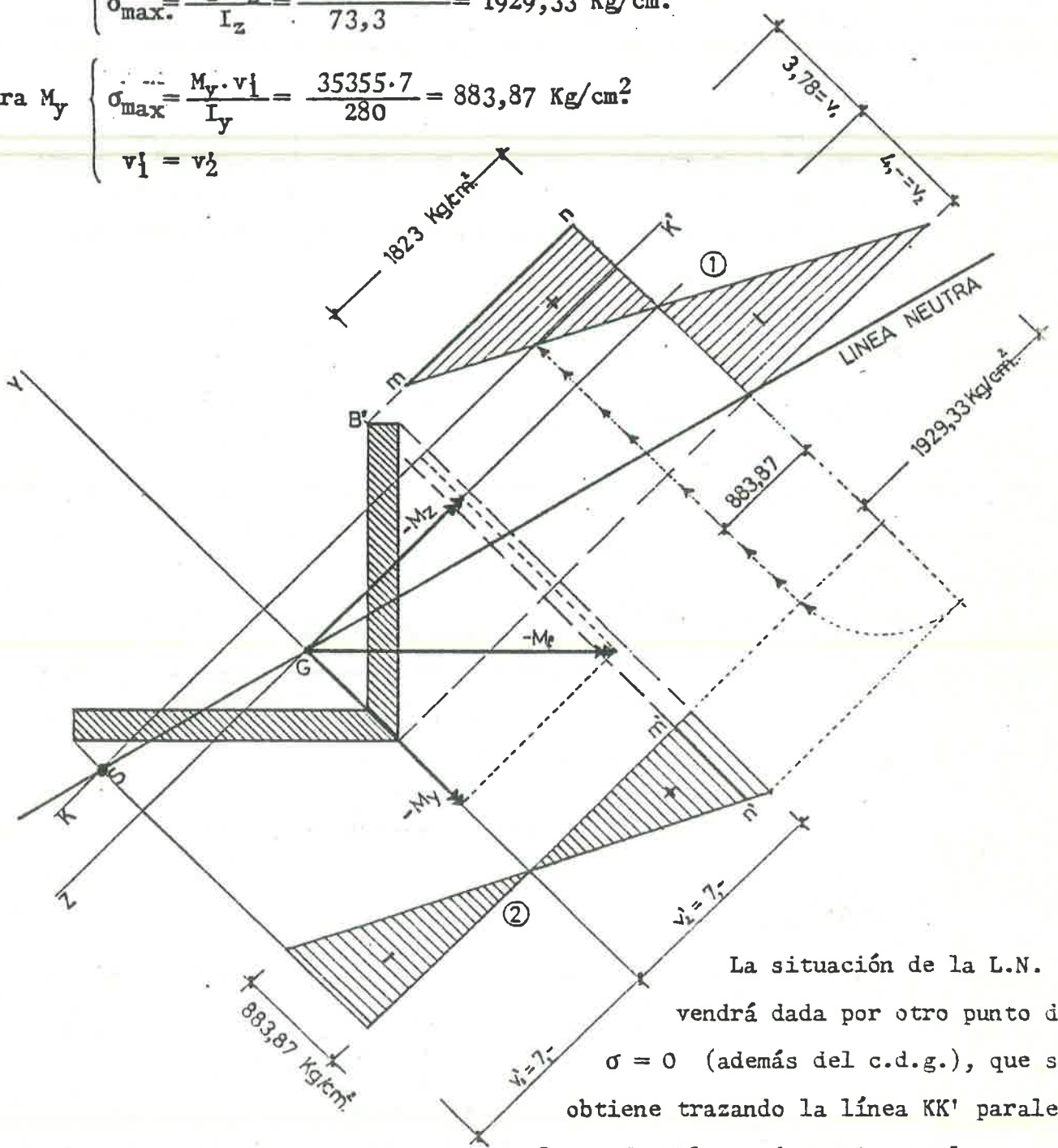
Así pues el resultado es
$$P = 1058,5 \text{ Kg.} \quad l = 45,16 \text{ cm.}$$

SOLUCION GRAFICA.-

El procedimiento consiste en dibujar los diagramas de Navier para cada uno de los momentos M_z y M_y , calculando las tensiones máximas:

$$\text{Para } M_z \begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot v_1}{I_z} = \frac{35355 \cdot 3,78}{73,3} = 1823 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot v_2}{I_z} = \frac{35355 \cdot 4}{73,3} = 1929,33 \text{ Kg/cm}^2 \end{cases}$$

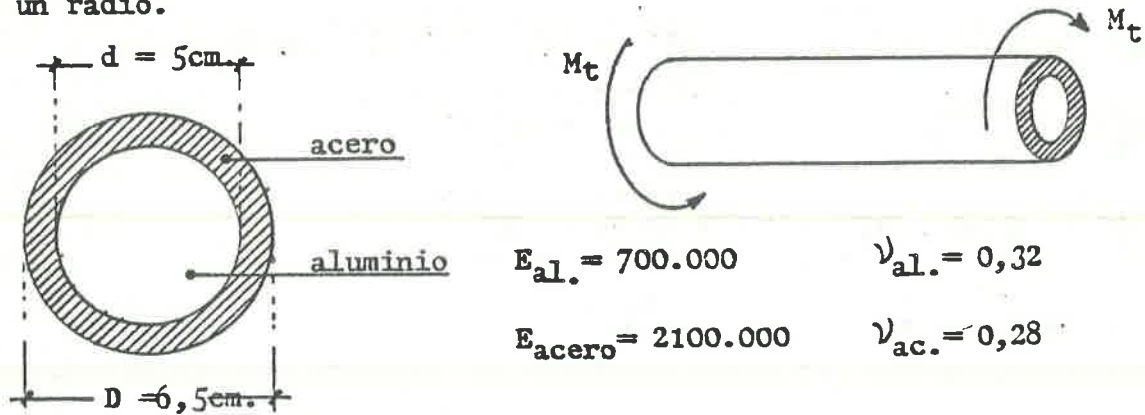
$$\text{Para } M_y \begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{M_y \cdot v_1}{I_y} = \frac{35355 \cdot 7}{280} = 883,87 \text{ Kg/cm}^2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$$



La situación de la L.N. vendrá dada por otro punto de $\sigma = 0$ (además del c.d.g.), que se obtiene trazando la línea KK' paralela al eje Z, tal que determine en la ecuación de Navier de M_z una tensión $\sigma = 883,87 \text{ Kg/cm}^2$; Esta recta cortará a la línea de tensión $\sigma = -883,87 \text{ Kg/cm}^2$, del diagrama correspondiente a M_y (2) en el punto S, que unido con G da la Línea Neutra. Con ello se ve que el punto B' es el de máxima tensión, cuyo valor será la suma de los valores de los segmentos $mn + m'n' = 1823 + 800 = 2623 \text{ Kg/cm}^2$, valor que difiere en algo al hallada analíticamente, debido a errores de grafismo.

La situación de la L.N. vendrá dada por otro punto de $\sigma = 0$ (además del c.d.g.), que se obtiene trazando la línea KK' paralela al eje Z, tal que determine en la ecuación de Navier de M_z una tensión $\sigma = 883,87 \text{ Kg/cm}^2$; Esta recta cortará a la línea de tensión $\sigma = -883,87 \text{ Kg/cm}^2$, del diagrama correspondiente a M_y (2) en el punto S, que unido con G da la Línea Neutra. Con ello se ve que el punto B' es el de máxima tensión, cuyo valor será la suma de los valores de los segmentos $mn + m'n' = 1823 + 800 = 2623 \text{ Kg/cm}^2$, valor que difiere en algo al hallada analíticamente, debido a errores de grafismo.

Una barra de sección circular, formada por dos materiales distintos soldados, está sometida a un momento torsor de 16000 cm.Kg. Calcular los momentos torsores que absorbe cada material, y dibujar el diagrama de tensiones a lo largo de un radio.



CALCULOS PREVIOS.-

1º) Los módulos G de elasticidad transversal los calculamos mediante la fórmula:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$G_{al.} = \frac{700000}{2(1 + 0,32)} = 265.151$$

$$G_{ac.} = \frac{2100000}{2(1 + 0,28)} = 820.312$$

2º) Cálculo de los momentos de inercia polares del círculo y la corona.

$$I_{p\bullet} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,32 \text{ cm}^4$$

$$I_{p\circ} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} = \frac{3,14 \cdot (6,5^4 - 5^4)}{32} = 113,82 \text{ cm}^4$$

ANALISIS DEL PROBLEMA.-

Al actuar el momento torsor M_t , éste se descompondrá en dos sumandos, uno para cada material, y se tendrá la relación:

$$\boxed{M_t^{ac} + M_t^{al} = M_t} \quad (1)$$

Por otra parte, los materiales totalmente solidarios, darán en cada una de las secciones el mismo ángulo unitario de torsión, es decir:

$$\theta_{ac} = \theta_{al}$$

La fórmula del ángulo unitario de torsión es: $\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p}$

Se tendrá, por tanto: $\theta_{ac} = \frac{M_t^{ac}}{G_{ac} \cdot I_{p\circ}}$ $\theta_{al} = \frac{M_t^{al}}{G_{al} \cdot I_{p\bullet}}$

Por lo tanto:
$$\frac{M_t^{ac}}{M_t^{al}} = \frac{G_{ac} \cdot I_{p_0}}{G_{al} \cdot I_{p_0}} = \frac{820312 \cdot 113,82}{265151 \cdot 61,32} = 5,74 = \frac{M_t^{ac}}{M_t^{al}} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$M_t^{ac} = M_t^{al} \cdot 5,74 ; \quad M_t^{al} + (M_t^{al} \cdot 5,74) = 16000 \text{ cm.Kg.}$$

$$M_t^{al} = \frac{16000}{1 + 5,74} = 2374 \text{ cm.Kg.} = M_t^{al}$$

$$M_t^{ac} = 16000 - 2374 = 13626 \text{ cm.Kg.} = M_t^{ac}$$

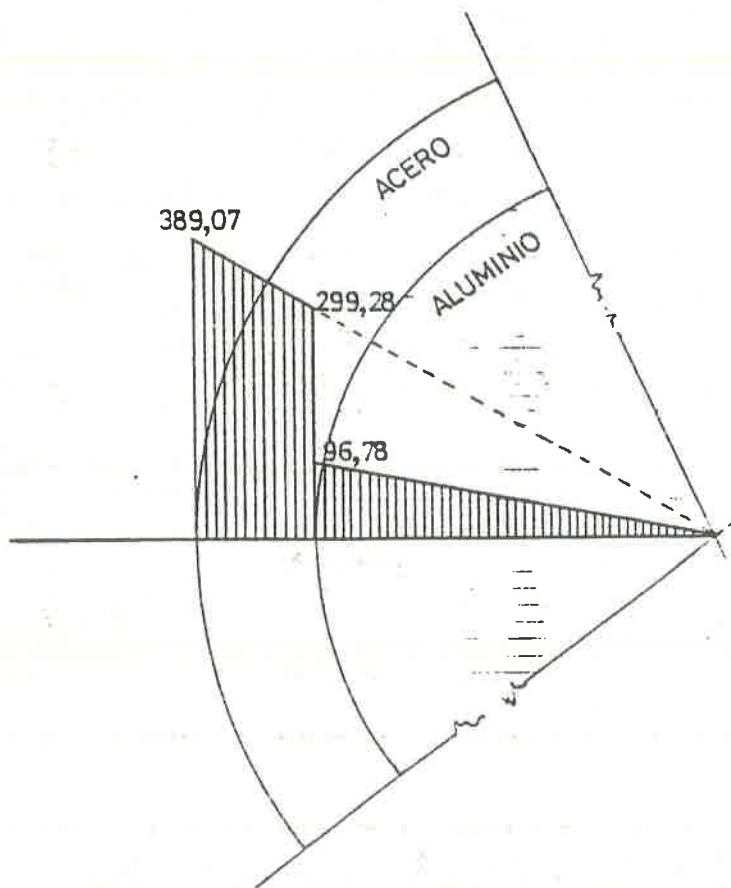
Las tensiones serán:
$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p}$$

Tensión máxima para el aluminio:
$$\tau^{al} = \frac{2374 \cdot 2,5}{61,32} = 96,78 \text{ Kg/cm}^2 = \tau^{al}$$

Tensión mínima para el acero:
$$\tau^{ac} = \frac{13626 \cdot 2,5}{113,82} = 299,28 \text{ Kg/cm}^2 = \tau_{min}^{ac}$$

Tensión máxima para el acero:
$$\tau^{ac} = \frac{13626 \cdot 3,25}{113,82} = 389,07 \text{ Kg/cm}^2 = \tau_{max}^{ac}$$

DIAGRAMA DE TENSIONES A LO LARGO DE UN RADIO.-



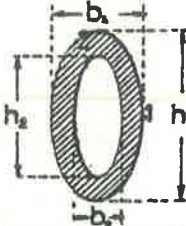
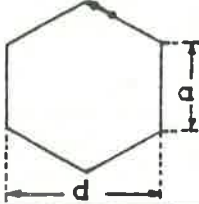
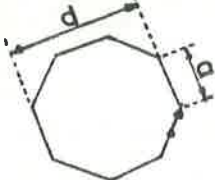
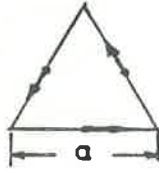
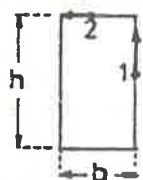
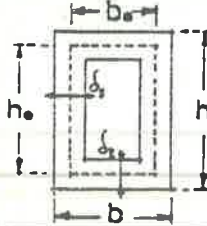
Sección	Módulo de torsión I_t	Módulo resistente a la torsión μ_t	Angulo de giro θ	Esfuerzos
	$I_t = \frac{\pi}{16} \frac{m^3}{(m^2+1)} b_1^4 (1-\alpha^4)$ $\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m$	$\mu_t = \frac{\pi b^3}{16} (1-\alpha^4) m$ $\geq 1, \frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$	$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau_1 = \frac{M_t}{\mu_t}$ $\tau_2 = \frac{t_1}{m}$
	$I_t = 1,037 a^4 = 0,1152 d^4$	$\mu_t = \frac{a^3}{1,024} = \frac{d^3}{5,322}$	$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau = \frac{M_t}{\mu_t}$
	$I_t = 3,66 a^4 = 0,1076 d^4$	$\mu_t = 2,599 a^3 = 0,1847 d^3$	$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau = \frac{M_t}{\mu_t}$
	$I_t = \frac{a^4}{46,2}$	$\mu_t = \frac{a^3}{20}$	$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau = \frac{M_t}{\mu_t}$
	$I_t = \beta b^3 h$ ó $I_t = \frac{(m-0,63) b^4}{3}$	$\mu_{t1} = \alpha_1 b^2 h$ $\mu_{t2} = \alpha_2 b^2 h$ $\mu_t = \frac{(m-0,63) b^3}{3}$	$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$	(máx.) $\tau_1 = \frac{M_t}{\alpha_1 b^2 h}$ $\tau_2 = \frac{M_t}{\alpha_2 b^2 h}$
$m = h/b > 1$. Ver tabla I para los valores de α_1, α_2 y β				
	$I_t = \frac{2 h_0 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$\mu_{t1} = 2 h_0 b_0 \delta_1$ $\mu_{t2} = 2 h_0 b_0 \delta_2$	$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$	(máx.) $\tau_1 = \frac{M_t}{\mu_{t1}}$ $\tau_2 = \frac{M_t}{\mu_{t2}}$

TABLA I

h/b	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10	∞
α_1	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
α_2	0,208	0,270		0,309		0,354	0,379	0,402			0,448
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

NOTACIONES:

ϑ = Angulo de torsión per unidad de longitud.

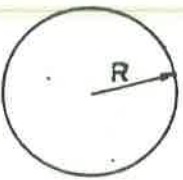
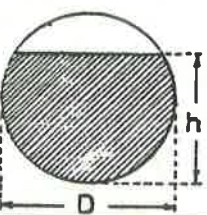

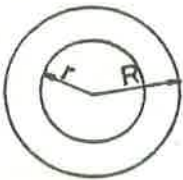
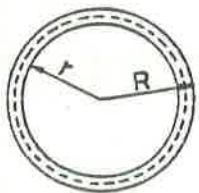
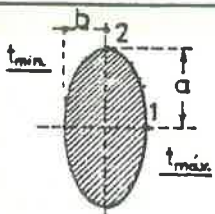
I_t = Módulo de torsión (L^4); depende de la geometría de la sección.

γ = Distorsión unitaria.

φ = Angulo total de torsión = $\vartheta \cdot l$

$G \cdot I_t$ = Rigidez de la sección a la torsión.

τ = Tensión tangencial.

Sección	Módulo de torsión I_t	Módulo resistente a la torsión μ_t	Angulo de giro ϑ	Esfuerzos																														
	$I_t = \frac{\pi R^4}{2}$	$\mu_t = \frac{\pi R^3}{2}$	$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\mu_t}$																														
	$I_t = \frac{D^4}{16} (2,6 \frac{h}{D} - 1)$ $\frac{h}{D} > \frac{1}{2}$	$\mu_t = \frac{D^3}{8} \times \frac{(2,6 \frac{h}{D} - 1)}{(0,3 \frac{h}{D} - 0,7)}$	$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\mu_t}$																														
	$I_t = \alpha R^4$			$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\mu_t}$																													
	$\mu_t = \rho R^3$																																	
	<table border="1"> <tr> <th>r/R</th> <th>ρ</th> <th>α</th> </tr> <tr> <td>0,00</td> <td>1,57</td> <td>1,57</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,81</td> <td>1,56</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,82</td> <td>1,56</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>0,80</td> <td>1,46</td> </tr> </table>	r/R	ρ	α	0,00	1,57	1,57	0,05	0,81	1,56	0,10	0,82	1,56	0,20	0,80	1,46	<table border="1"> <tr> <th>r/R</th> <th>ρ</th> <th>α</th> </tr> <tr> <td>0,40</td> <td>0,76</td> <td>1,22</td> </tr> <tr> <td>0,60</td> <td>0,66</td> <td>0,92</td> </tr> <tr> <td>0,80</td> <td>0,52</td> <td>0,63</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,38</td> <td>0,38</td> </tr> </table>	r/R	ρ	α	0,40	0,76	1,22	0,60	0,66	0,92	0,80	0,52	0,63	1,00	0,38	0,38		
r/R	ρ	α																																
0,00	1,57	1,57																																
0,05	0,81	1,56																																
0,10	0,82	1,56																																
0,20	0,80	1,46																																
r/R	ρ	α																																
0,40	0,76	1,22																																
0,60	0,66	0,92																																
0,80	0,52	0,63																																
1,00	0,38	0,38																																
	$I_t = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \nu^4)$ $\nu = \frac{r}{R}$	$\mu_t = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \nu^4)$	$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\mu_t}$																														
	$I_t = 2\pi r_o^3 \delta = 2S_o \delta$ $r_o = \frac{r+R}{2}; S_o = \pi r_o^2$	$\mu_t = 2\pi r_o^2 \delta = 2S_o \delta$	$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\mu_t}$																														
	$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\mu_{t1} = \frac{\pi a b^2}{2}$ $\mu_{t2} = \frac{\pi a^2 b}{2}$	$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t}$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\mu_{t1}}$ $\tau_{\min} = \frac{M_t}{\mu_{t2}}$																														

NOTA: I_t = Momento de inercia polar I_o , para las secciones circulares, ma-

