Geometria Afí i Euclidiana

Examen Final · PROBLEMES

2 de juny de 2022

TEMPS: 10.00 - 13.00 h.

Problema 1) [3 punts] Considerem el pla afí real $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ i la referència ordinària.

a) Raoneu l'existència d'una única afinitat bijectiva de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que transformi el conjunt de punts

$$\{A_1 = (0,-1), A_2 = (1,0), A_3 = (2,-1), A_4 = (2,1), A_5 = (3,-2), A_6 = (3,0)\}$$

en el conjunt

$$\{B_1 = (-1,0), B_2 = (-1,1), B_3 = (0,1), B_4 = (0,2), B_5 = (0,3), B_6 = (1,2)\}$$

i determineu la imatge de cada punt. (*Indicació: Mireu la posició dels punts.*)

b) Trobeu la matriu de l'afinitat en la referència natural.

c) Classifiqueu l'afinitat, doneu la forma reduïda i la referència corresponent. Trobeu les rectes invariants.

Problema 2) [2 punts] En l'espai afí euclidià $\mathbb{E}^3$ considerem les rectes

$$\begin{array}{ll} r: & (1,a,0) + [(1,-\sqrt{2},-\sqrt{2})] \\ s: & (0,\sqrt{2},\sqrt{2}) + [(1,0,0)] \\ t: & \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 1 \\ \bar{y} - \bar{z} = -a \end{array} \right. \end{array}$$

expressades en la referència $\bar{\mathcal{R}} = \{O; e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3\}$ (on $\{e_1, e_2, e_3\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^3$).

a) Trobeu els valors de $a \in \mathbb{R}$ per tal que les tres rectes siguin coplanàries. Per a aquests valors, calculeu les coordenades en referència $\bar{\mathcal{R}}$ dels punts $A = r \cap s$, $B = s \cap t$, i $C = t \cap r$.

b) Trobeu les longituds dels costats i l'àrea del triangle $\triangle ABC$. Justifiqueu que no existeix cap moviment $f \neq id$ que deixi invariant el triangle.

Problema 3) [3 punts] Sigui $\mathbb{E}^3$ l'espai afí euclidià estàndard i sigui $\mathcal{R}$ la referència ortonormal ordinària. Sigui $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ el moviment les equacions del qual en la referència ordinària són:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Classifiqueu el moviment f.

b) Descriviu els elements característics de f i trobeu una referència ortonormal adaptada.

c) Sigui H_2 el pla d'equació $x - \sqrt{2}y + z = 0$ en $\mathcal{R}$. Trobeu dos plans H_1 i H_3 de manera que, si $f_i : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ és la simetria especular respecte del pla H_i $(i = 1,2,3)$, aleshores $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.