FME - FONAMENTS de la MATEMÀTICA **30-06-2022**

1. Sigui Ω un conjunt i $A, B, C \subseteq \Omega$ tres subconjunts. És cert que $A \cup C = B \cup C$ si i només si $A \setminus C = B \setminus C$? És cert que $A \cap C = B \cap C$ si i només si $A \setminus C = B \setminus C$?

2. Sigui $p > 2$ un nombre primer i sigui X un conjunt finit de cardinal p. Determineu quantes relacions d'equivalència R es poden definir en el conjunt X de manera que totes les classes del conjunt quocient X/R tinguin el mateix nombre d'elements.

3. Demostreu que si $n \geqslant 4$ és parell aleshores no existeix $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que $\sigma^2 = (1\,2\,\ldots\,n)$. Doneu les permutacions $\sigma \in \mathcal{S}_4$ tals que $\sigma^2 = (1\,2\,3\,4)^2$.

4. Siguin z_1, z_2 dos nombres complexos no nuls. Demostreu que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ si i només si existeix un nombre real no nul λ de manera que $z_2 = i\lambda z_1$.

5. Sigui $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomi amb coeficients enters tal que $\sum_{i=0}^{n} a_i$ és un nombre primer. Demostreu que el polinomi p com a molt té tres arrels enteres diferents. Pot tenir p arrels enteres de multiplicitat més gran o igual que dos?

6. Determineu per a quins naturals n es té que $\sum_{i=0}^{n} 24^i$ és múltiple de 7.