

ESTADÍSTICA

Examen parcial

Grau Matemàtiques

Divendres 22 d'abril de 2022, 9.00-12.00

Podeu fer ús d'una calculadora tradicional, la llista de distribucions que surt a l'atenea del curs i les taules estadístiques. No s'admet l'ús de telèfons mòbils u ordinadors. Separeu en fulls la teoria dels problemes.

TEORIA (4 punts)

1) En una empresa es fa una enquesta entre els seus empleats on es recull la següent informació:

- **Genere:** 1-Home, 2-Dona
- **NivellEstudis:** 1-Sense estudis 2-Primaris, 3-Secundaris, 4-Superiors
- **Antiguitat:** en anys
- **Salari:** en euros

A l'hora de fer un informe on es faci servir l'estadística descriptiva per analitzar la informació continguda en les dades recollides, indica quines representacions gràfiques i quins resums numèrics faries servir per descriure els següents elements:

- a) Nivell d'Estudis
- b) Antiguitat en l'empresa
- c) Relació entre Gènere i Salari
- d) Relació entre Antiguitat i Salari

2) Siguin $X_i \sim N(\mu = i, \sigma^2 = i^2), i = 1, 2, 3$, tres variables aleatòries independents. Construeix a partir d'aquestes variables d'altres que tinguin les següents distribucions:

- a) χ_3^2
- b) t_2
- c) $F_{1,2}$

3) Demostreu que la distribució de Pareto és conjugada per a variables aleatòries amb distribució uniforme.

$$X \sim U[0, \theta] \Leftrightarrow f(X|\theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x)$$

$$\theta \sim \text{Pareto}[\alpha, \beta] \Leftrightarrow \pi(\theta|\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{[\beta, +\infty)}(\theta)$$

Quina és l'expressió dels paràmetres α' i β' de l'expressió a posteriori per θ ?

$$\text{Indicació: } \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x) = \mathbb{I}_{[x, +\infty)}(\theta)$$

4) Expliqueu què és un estimador eficient. Doneu un exemple d'un estimador eficient utilitzant la distribució exponencial.

PROBLEMES (6 punts)

PROBLEMA 1: (4 punts)

Tenim dues màquines que produeixen peces del mateix tipus. Sigui p la probabilitat de que una peça de la màquina A sigui defectuosa. Llavors, se sap que la probabilitat de que una peça de la màquina B sigui defectuosa és $p/2$. Agafem m peces de cada màquina a l'atzar i omplim caixes de $2 * m$ peces. Sigui Y la variable que ens diu el nombre de peces defectuoses que hi ha en una caixa.

- a) Quan valen l'esperança i la variància de la variable Y ?
- b) Si y_1, y_2, \dots, y_n és una mostra de Y . Trobeu l'estimador de p pel mètode dels moments, que denotarem per \tilde{p} . És sense biaix aquest estimador?
- c) Calculeu la variància de l'estimador anterior i l'EQM. Per a quin valor de p la variància de l'estimador és màxima?
- d) Volem trobar un IC per a p . Per a fer-ho utilitzarem l'aproximació de la Binomial per la Normal (que és vàlida per a m gran). Trobeu l'IC "aproximat" al $(1 - \alpha)\%$ en els tres casos següents:
 - 1) Estimant la p de la variància de l'estimador per $1/2$.
 - 2) Estimant la p de la variància de l'estimador per l'estimador del mètode de moments obtingut a l'apartat b).
 - 3) Estimant la p de la variància de l'estimador pel valor obtingut a l'apartat c).
- e) Per a caixes de $m = 100$ unitats s'ha obtingut una mostra de tamany $n = 15$ del nombre de peces defectuoses en una caixa. La mostra té una mitjana aritmètica i una variància empírica iguals a: $\bar{y} = 3.7$ i $S^2 = 1.2$. Calculeu \tilde{p} i IC_1 , IC_2 i IC_3 per $\alpha = 0.05$. Quin dels dos intervals és més ample? Justifiqueu la vostra resposta.

PROBLEMA 2: (X punts) Supposeu que X és una v.a. que compta el nombre de proves realitzades fins a tenir un encert, i.e. amb distribució geomètrica de paràmetre p i suport $x = 1, 2, \dots$. Prenem una mostra de grandària n d'aquesta distribució. Tenint en compte que $E(X) = 1/p$ i $Var(X) = (1 - p)/p^2$,

- a) Trobeu l'estimador de σ^2 per a màxima versemblança i anomenau-lo $\hat{\sigma}^2$.
- b) Demostreu que $\hat{\sigma}^2$ té biaix i trobeu un estimador de la forma $k * \hat{\sigma}^2$ que no tingui biaix.
- c) Trobeu la fita de Cràmer-Rao per la variància de l'estimador no esbiaixat que heu trobat.