

ESCUELA UNIVERSITARIA  
DE ARQUITECTURA TECNICA

---

**CATEDRA DE MECANICA  
y AMPLIACION DE FISICA**

---

**TENSOR DE INERCIA  
TEORIA Y PROBLEMAS**

---

---

**CARLOTA E AUGUET SANGRA  
INMACULADA RODRIGUEZ CANTALAPIEDRA  
ROBERTO GUERRA FONTANA**

---

DICIEMBRE-86



EPSEB

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
Biblioteca



1400081342



INDICE

	Pág.
1. INTRODUCCION .....	2
2. MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN EJE GENERICO u ....	3
3. PRODUCTO DE INERCIA RESPECTO A DOS EJES u Y v .....	4
4. EL TENSOR DE INERCIA .....	6
5. MOMENTOS DE INERCIA MAXIMO Y MINIMO .....	11
6. EJES CONJUGADOS DE INERCIA .....	14
7. CIRCULO DE MOHR .....	17
8. CIRCULO DE LAND .....	21
9. PROBLEMAS RESUELTOS .....	25
10. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA .....	37

BIBLIOTECA



REGISTRE NUM.  
.....10152.....

## 1. INTRODUCCION.

Dada la superficie plana sombreada de la fig. 1, con momentos

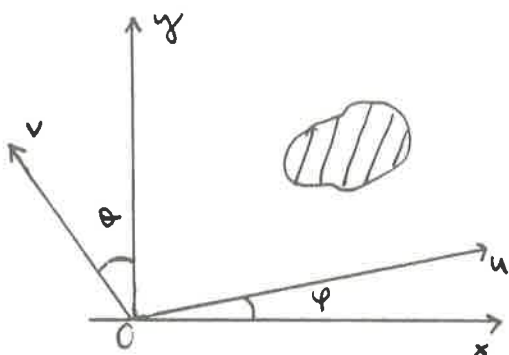


Fig. 1

de inercia respecto a los dos ejes ortogonales "x" e "y":

$$I_x = \int_S y^2 ds \quad ; \quad I_y = \int_S x^2 ds \quad (1)$$

y con producto de inercia respecto a los mismos:

$$P_{xy} = \int_S xy ds \quad (2)$$

veremos que a partir de estos valores podremos calcular:

- el momento de inercia de la figura respecto a cualquier otro eje "u" (que contenga el origen de coordenadas O) girado un ángulo  $\varphi$  respecto a los anteriores.
- el producto de inercia respecto a dos ejes cualesquiera "u" y "v" (que contengan O) girados ángulos  $\varphi$  y  $\theta$  respecto a los ejes x e y, e incluso en el caso particular de que u y v sean ortogonales.

Así mismo, podremos obtener dos ejes, llamados ejes principales de inercia, respecto a los cuales los momentos de inercia serán extremos, es decir, tendrán un valor máximo y uno mínimo, y encontraremos dichos valores.

2. MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN EJE GENERICO u.

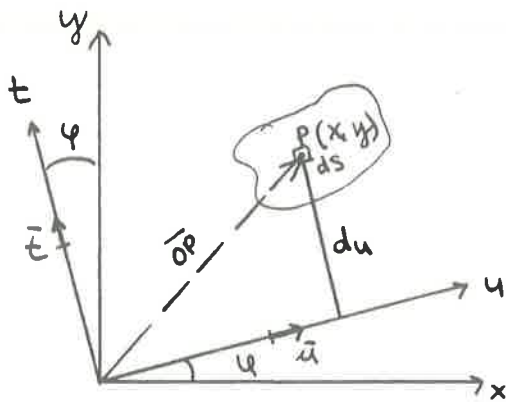


Fig. 2

El momento de inercia de una figura plana respecto a un eje u, contenido en el plano, viene dado por la expresión:

$$I_u = \int_S d_u^2 ds \quad (3)$$

Si las componentes del vector unitario que define la dirección u son  $\bar{u} (u_x, u_y)$ ,

las del vector unitario perpendicular  $\bar{t}$  son:

$$\bar{t} = (t_x, t_y) = (-u_y, u_x)$$

con lo cual la distancia  $d_u$  (ver fig. 2) vendrá dada por la proyección de  $\overline{OP}$  sobre la dirección  $\bar{t}$ , así pues, por el producto escalar:

$$\begin{aligned} d_u &= \overline{OP} \cdot \bar{t} = (x \ y) \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} = -u_y x + y u_x = \\ &= (y \ -x) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión (3):

$$\begin{aligned} I_u &= \int_S d_u^2 ds = \int_S (u_x \ u_y) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} (y \ -x) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_S (u_x \ u_y) \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_u = (u_x \ u_y) \begin{pmatrix} \int_S y^2 ds & -\int_S xy ds \\ -\int_S xy ds & \int_S x^2 ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Recordando (1) y (2) resulta ser:

$$I_u = (u_x \ u_y) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

Si el eje  $u$  está girado un ángulo  $\varphi$  respecto al eje  $x$ :

$$\bar{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$I_u = (\cos \varphi \ \sin \varphi) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

### 3. PRODUCTO DE INERCIA RESPECTO A DOS EJES $u$ Y $v$ .

El producto de inercia respecto a dos ejes cualesquiera  $u$  y  $v$  (que contengan  $O$ ) (ver fig. 3) vendrá determinado por la integral:

$$P_{uv} = \int_S du dv ds \quad (5)$$

Según lo expuesto en el apartado 2:

$$du = (y \ -x) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

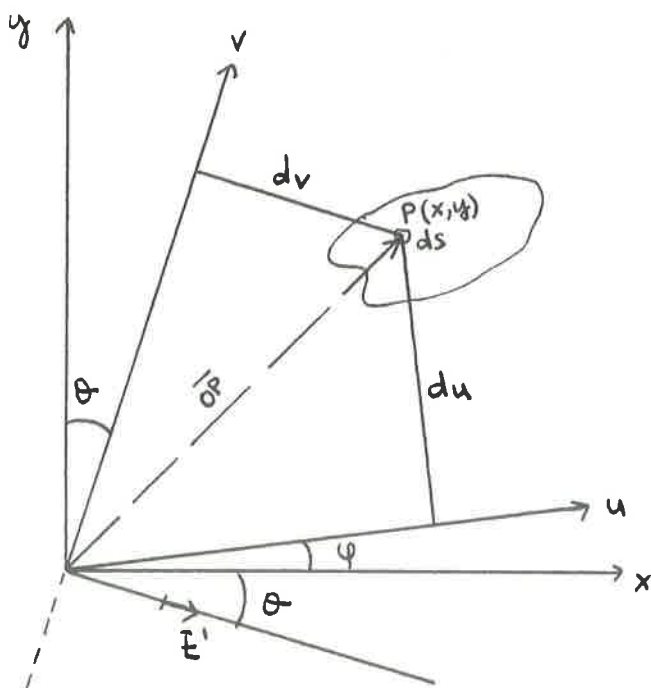


Fig. 3.

y análogamente, si  $\bar{t}'$  es el vector unitario perpendicular a la dirección  $v$ , de versor  $\bar{v} = (v_x, v_y)$ , será  $\bar{t}' = (v_y, -v_x)$ , y la distancia  $d_v$  indicada en la fig. 3 vendrá dada por:

$$d_v = \overline{OP} \cdot \bar{t}' = (x \ y) \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} = v_y x - v_x y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_v = (v_x \ v_y) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión (5):

$$P_{uv} = \int_S (v_x \ v_y) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} (y \ -x) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} ds =$$

$$= - \int_S (v_x \ v_y) \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{uv} = - (v_x \ v_y) \begin{pmatrix} \int_S y^2 ds & - \int_S xy ds \\ - \int_S xy ds & \int_S x^2 ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Recordando (1) y (2)

$$P_{uv} = - (v_x \ v_y) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (6)$$

En particular, si  $\bar{u}$  y  $\bar{w}$  son ortogonales, resulta ser:

$$\bar{w} = (u_y, -u_x)$$

$$P_{uw} = - (u_y \quad -u_x) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (7)$$

#### 4. EL TENSOR DE INERCIA.

Las expresiones de  $I_u$  y  $P_{uv}$  demuestran que es factible considerar a  $I_u$  y  $P_{uv}$  como forma cuadrática y forma bilineal cambiada de signo, respectivamente, de un tensor de segundo orden que llamaremos tensor de inercia, y la matriz asociada al tensor de inercia es:

$$T_I = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \quad (8)$$

Recordemos que si  $E$  es un espacio vectorial sobre  $R$ , de dimensión  $n$ , y  $T: E \rightarrow E$  es un endomorfismo de  $E$ , lo que ahora tenemos es la matriz asociada a  $T$ . Existe un isomorfismo natural entre un tensor de segundo orden y un endomorfismo de  $E$ .

Supongamos que tenemos una base de  $E$   $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  sobre la cual el endomorfismo  $T$  actúa de la siguiente forma:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1; \quad T(v_2) = \lambda_2 v_2; \quad \dots; \quad T(v_n) = \lambda_n v_n; \quad \lambda_i \in R$$

Las expresiones coordenadas de los vectores  $T(v_1)$ ,  $T(v_2)$ ,  $\dots$ ,  $T(v_n)$  en la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  son respectivamente:



$(\lambda_1, 0, \dots, 0), (0, \lambda_2, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \lambda_n)$

y por lo tanto la matriz asociada a T en esta base será la matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos ¿bajo qué condiciones podemos encontrar una base semejante?. Para responder a ello tengamos presente las siguientes definiciones y proposiciones, cuyas demostraciones se encuentran en los apuntes "Algebra lineal y geometría" editados por la Cátedra de Matemáticas de la E.U.A.T.B.

Definición 1: Diremos que un vector  $v \in E$ ,  $v \neq 0$ , es un vector propio (vep) o autovector del endomorfismo T cuando se verifique  $T(v) = \lambda v$  para un cierto  $\lambda \in R$  que se denomina valor propio (vap) o autovalor del endomorfismo T, correspondiente al vector propio v.

Proposición 1: dado un vector propio v de T, existe un único valor propio asociado a él, es decir, existe un único  $\lambda \in R$  tal que  $T(v) = \lambda v$ .

Proposición 2: un número  $\lambda \in R$  es un valor propio de T si y sólo si el endomorfismo  $(T - \lambda I): E \rightarrow E$  tal que  $(T - \lambda I)(v) = T(v) - \lambda(v)$  tiene núcleo diferente de  $\{\vec{0}\}$ . El conjunto de dicho  $\text{Nuc}(T - \lambda I)$  serán todos los vectores propios de T correspondientes al valor propio  $\lambda$ .

Proposición 3: condición necesaria y suficiente para que  $\lambda \in R$  sea un valor propio de T es que el determinante  $|T - \lambda I|$  sea 0.

Proposición 4: los valores propios del endomorfismo  $T$  son las raíces reales de la ecuación  $|A - X I| = 0$ , donde  $A = (a_{ij})$  es la matriz de  $T$  en una base cualquiera de  $E$ ,  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

Proposición 5: el polinomio  $|A - X I|$  es independiente de la base escogida.

Definición 2: llamaremos polinomio característico del endomorfismo  $T$  al que resulta de desarrollar el determinante  $|T - X I|$  que, como hemos dicho, está intrínsecamente asociado a  $T$  y no depende de la base escogida.

Ejemplo: sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cuya matriz, en una cierta base, es  $A = (a_{ij})$ . Se tiene en este caso:

$$\begin{aligned}
 |T - X I| &= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} = \\
 &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\
 &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Según la proposición 5, los coeficientes del polinomio anterior, es decir, la traza (suma de los elementos de la diagonal principal) y el determinante de  $A$  son invariantes por el cambio de base.

Para resumir lo expuesto hasta aquí diremos que, dado el endomorfismo  $T: E \rightarrow E$ , para calcular los valores propios basta con encontrar las raíces reales  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de la ecuación característica  $|T - X I| = 0$ , y que para cada valor propio  $\lambda_i$ , los vectores propios asociados a él son los vectores de  $\text{Nuc}(T - \lambda_i I)$ . Además, según lo anterior, resulta natural la siguiente definición:

Definición 3: se dice que un endomorfismo  $T: E \rightarrow E$  es diagonalizable cuando

existe una base de  $E$  formada por vectores propios.

Proposición 6: vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.

Proposición 7: si el endomorfismo  $T: E \rightarrow E$  posee  $n$  vaps distintos dos a dos, entonces  $T$  es diagonalizable.

En nuestro caso:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightarrow T(x,y) = \lambda_i (x,y) \quad i = 1,2$$

donde los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  serán los valores extremos del momento de inercia (se demostrará en el apartado 5):

$$\lambda_1 = I_{\max}$$
$$\lambda_2 = I_{\min}$$

y los vectores propios que verifican:

$$T(u_p) = I_{\max}(u_p)$$
$$T(v_p) = I_{\min}(v_p)$$

nos determinan los ejes principales de inercia. Así, pues:

$$\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{px} \\ u_{py} \end{pmatrix} = I_{\max} \begin{pmatrix} u_{px} \\ u_{py} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{px} \\ v_{py} \end{pmatrix} = I_{\min} \begin{pmatrix} v_{px} \\ v_{py} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, la matriz asociada al tensor de inercia es simétrica en una base ortonormal, y por lo tanto el tensor también lo es (se dice que un endomorfismo  $T: E \rightarrow E$  es simétrico si se verifica:

$$T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

Proposición 8: las raíces del polinomio característico de un endomorfismo simétrico son siempre reales.

Proposición 9: en un endomorfismo simétrico, vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

Proposición 10: para todo endomorfismo simétrico existe una base ortonormal de vectores propios.

Es decir, la base de vectores propios de nuestro tensor de inercia, que nos da los ejes principales de inercia, es siempre ortonormal. El producto de inercia respecto a los ejes principales es nulo.

Se dice que dos ejes son conjugados de inercia cuando el producto de inercia respecto a ambos es nulo. De todo lo expuesto, resulta evidente que los únicos ejes conjugados de inercia ortogonales entre sí son los ejes principales. En el apartado 6 se verá de qué manera podemos encontrar el eje conjugado de inercia de un eje dado. El producto de inercia respecto a ambos será nulo, pero los ejes no serán perpendiculares entre sí.

5. MOMENTOS DE INERCIA MAXIMO Y MINIMO.

Vamos a demostrar ahora que los valores propios del tensor de inercia nos dan precisamente los valores máximo y mínimo del momento de inercia. Partiendo de la expresión (4):

$$I_u = (\cos \varphi, \sin \varphi) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$I_u = I_x \cos^2 \varphi - 2 P_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + I_y \sin^2 \varphi \quad (9)$$

Para que  $I_u$  sea extremo (máx. o mín.) se debe cumplir:

$$\frac{d I_u}{d \varphi} = 0 \Rightarrow (I_y - I_x) \sin \varphi - 2 P_{xy} \cos 2 \varphi = 0$$

por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2 \varphi_{\text{extr}} &= \frac{2 P_{xy}}{I_y - I_x} \\ \cos 2 \varphi_{\text{ext}} &= \frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4 P_{xy}^2}} \\ \sin 2 \varphi_{\text{ext}} &= \frac{2 P_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4 P_{xy}^2}} \end{aligned} \right\}$$

y sabiendo que:

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{\cos 2 \varphi + 1}{2}}$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2 \varphi}{2}}$$

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2 \varphi$$

sustituyendo en (9) resultará:

$$I_u = I_x \frac{1 + \cos 2\psi}{2} + I_y \frac{1 - \cos 2\psi}{2} - P_{xy} \sin 2\psi$$

y por lo tanto: 
$$I_u = \frac{1}{2} \left[ (I_x - I_y) \cos 2\psi - 2 P_{xy} \sin 2\psi + I_x + I_y \right]$$

$$I_{u_{ext}} = \frac{1}{2} \left[ - (I_y - I_x) \frac{(I_y - I_x)}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4 P_{xy}^2}} - \frac{4 P_{xy}^2}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4 P_{xy}^2}} + I_x + I_y \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (I_x + I_y) - \frac{(I_y - I_x)^2 + 4 P_{xy}^2}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4 P_{xy}^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (I_x + I_y) - \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4 P_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (I_x + I_y) - \sqrt{(I_x + I_y)^2 + 4 (P_{xy}^2 - I_x I_y)} \right]$$

que es uno de los valores propios que se obtienen al diagonalizar la matriz asociada al tensor de inercia:

$$\begin{vmatrix} I_x - \lambda & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{u_{ext}} = \lambda = \frac{1}{2} \left[ (I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x + I_y)^2 + 4 (P_{xy}^2 - I_x I_y)} \right]$$

Queda pues demostrado que uno de los valores propios que se obtienen al diagonalizar es un valor extremo. De forma similar se podría demostrar que el otro valor también lo es. A partir de los invariantes :

$$I_x + I_y = \text{cte} = d_1 + d_2$$

$$P_{xy}^2 - I_x \cdot I_y = \text{cte} = -d_1 \cdot d_2$$

se ve claramente que para que se conserven la traza y el determinante, si uno de los dos valores propios es máximo, el otro tiene que ser forzosamente mínimo.

Podemos todavía hacer una consideración más sencilla para la demostración. Supongamos un vector unitario  $\bar{u}' (u'_x, u'_y)$  expresado en la base de vectores que diagonaliza la matriz asociada al tensor (veps). Si queremos hallar el momento de inercia respecto al eje  $u'$  en función de la base de los ejes principales de inercia, resultará:

$$I_{u'} = (u'_x \ u'_y) \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} \quad \text{Sea } d_1 > d_2$$

$$I_{u'} = (u'_x \ d_1, \ u'_y \ d_2) \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} =$$

$$= d_1 u'_x{}^2 + d_2 u'_y{}^2 \leq d_1 (u'_x{}^2 + u'_y{}^2) = d_1$$

$$d_1 u'_x{}^2 + d_2 u'_y{}^2 \geq d_2 (u'_x{}^2 + u'_y{}^2) = d_2$$

Por lo tanto, como queríamos demostrar, siempre se verifica:

$$d_2 \leq I_{u'} \leq d_1$$

## 6. EJES CONJUGADOS DE INERCIA.

Para hallar ejes conjugados de inercia en general, que como hemos definido en el apartado 4 son aquéllos respecto a los cuales el producto de inercia es nulo, tendríamos que tratar la diagonalización de la matriz asociada a un tensor en una base no-ortogonal; en este caso ya no se podría asociar la diagonalización de la forma bilineal o tensor a la del endomorfismo  $T: E \rightarrow E$  (asociación que sí era válida para la diagonalización en base ortogonal), y debería aplicarse el método de los cuadrados perfectos. Como está fuera del propósito de estos apuntes el exponer toda la justificación matemática, y este método, además, es aparatoso, nos limitaremos a dar un método intuitivo y práctico para encontrar el eje conjugado de inercia de un eje dado cualquiera.

Para ello, a cada dirección del plano, definida por un cierto vector  $\bar{u}$ , asociaremos un vector  $\bar{\Psi}_u$  que denominaremos de inercia, mediante la expresión:

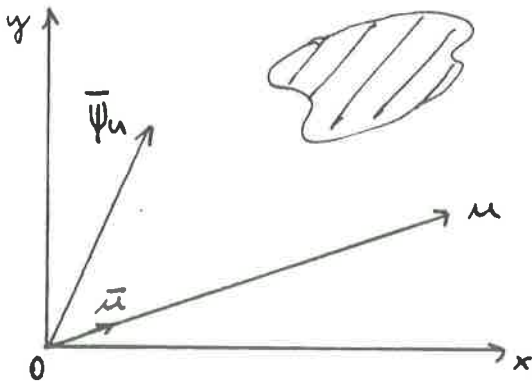


Fig. 4

$$\begin{pmatrix} \Psi_{u_x} \\ \Psi_{u_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$(\Psi_u) = (T_I) (u)$$



La proyección del vector de inercia sobre la dirección definida por  $\bar{u}$  nos proporciona el momento de inercia respecto a un eje que posea dicha orientación y que contenga el origen de coordenadas ( Fig. 5).

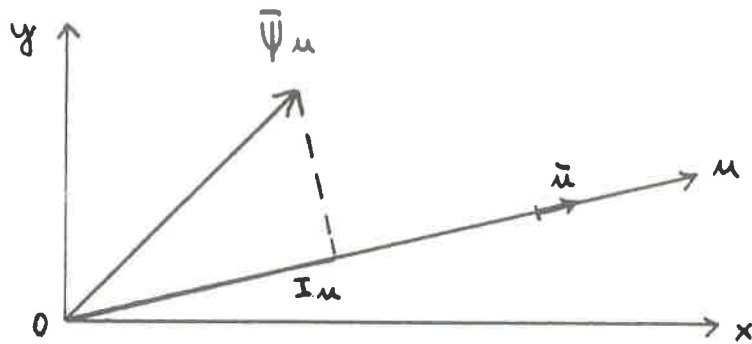


Fig. 5

Por lo tanto:

$$I_u = \bar{u} \cdot \bar{\Psi}_u$$

$$I_u = (u)^T (\Psi_u)$$

$$I_u = (u)^T \cdot (T_{\mathcal{F}}) (u)$$

(lo que coincide con la expresión (4)).

De la expresión (6):

$$P_{uv} = -(v)^T (T_{\mathcal{F}}) ( ) = -(v)^T (\Psi_u) = -\bar{v} \cdot \bar{\Psi}_u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{\Psi}_u = -P_{uv}$$

vemos que la proyección del vector de inercia  $\bar{\Psi}_u$  asociado a una dirección  $u$  sobre otra  $v$  nos proporciona el producto de inercia cambiado de signo, respecto a dos ejes que conteniendo el origen de coordenadas posean las citadas orientaciones ( ver la fig. 6).

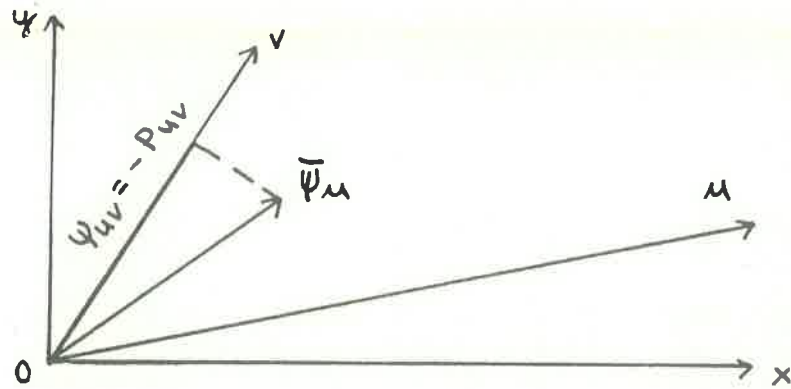


Fig. 6

De aquí que, volviendo a la definición de ejes conjugados, ésta equivale a decir que el eje conjugado de inercia del eje  $u$  (ver fig. 7) debe ser un eje  $\omega^*$ , cuya dirección quedará definida por un vector  $\bar{\omega}^*$  ortogonal a  $\bar{\Psi}_u$ , es decir, de componentes:

$$\bar{\omega}^* = (-\Psi_{uy}, \Psi_{ux})$$

de manera que se verificará que el producto de inercia respecto a ambos ejes será nulo:

$$\begin{aligned} P_{u\omega^*} &= -(\omega^*)^T (T_{\mp})(u) = \\ &= -(\omega^*)^T \cdot (\Psi_u) = 0 \quad \text{por ser ortogonales.} \end{aligned}$$

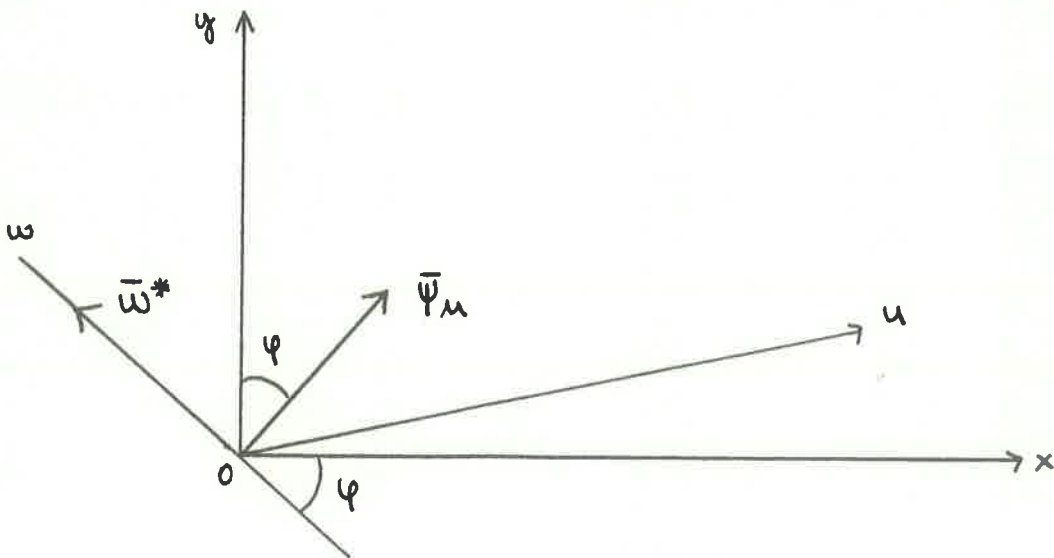
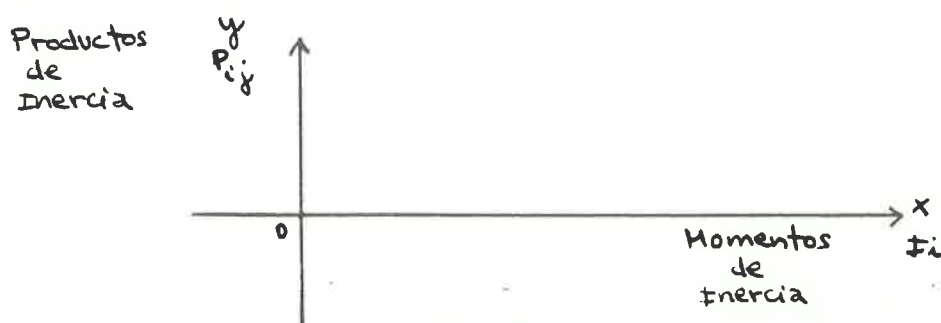


Fig. 7

## 7. CIRCULO DE MOHR.

Nos remitimos a los apuntes "Algebra lineal y geometría" anteriormente citados para tener una justificación matemática de los métodos gráficos que vamos a exponer.

Si conocemos  $I_x$ ,  $I_y$  y  $P_{xy}$  utilizaremos el eje de abcisas para representar los momentos de inercia, mediante escala que se fijará para que sea factible efectuar la representación gráfica que a continuación describimos.



Se representarán con origen  $O$  dos segmentos  $\overline{OP_x}$  y  $\overline{OP_y}$  indicativos de los momentos de inercia  $I_x$  e  $I_y$  respectivamente (situados sobre el eje de abcisas).

Siempre con origen  $P_y$  se dibujará un segmento orientado según el eje de ordenadas, que simbolizaremos por  $\overline{P_y P_0}$  y que representará el producto de inercia, por lo que se dibujará hacia arriba si éste es positivo, y hacia abajo si dicho producto es negativo.

El extremo de este segmento se denominará polo ( $P_0$ )

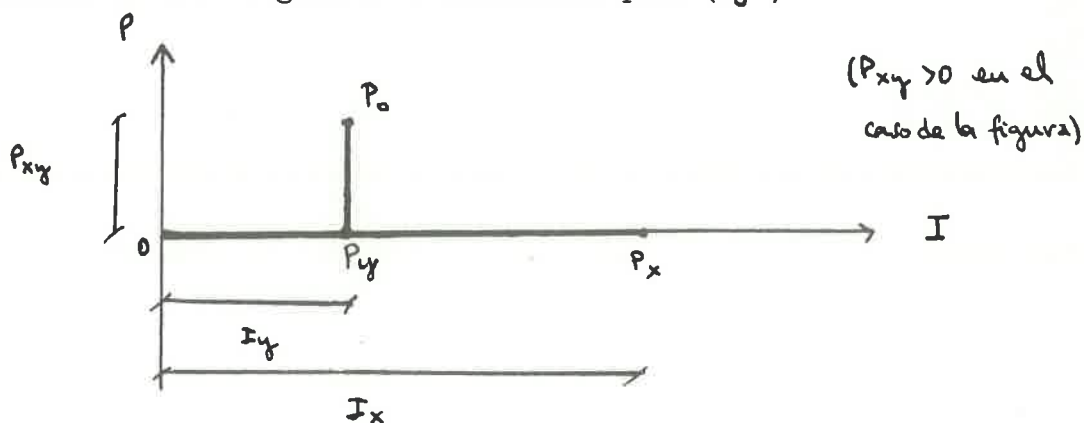


Fig. 9

El centro del círculo de Mohr es el punto intermedio entre  $P_y$  y  $P_x$ , que simbolizaremos por C. El radio de dicho círculo será  $\overline{P_0 C}$ :

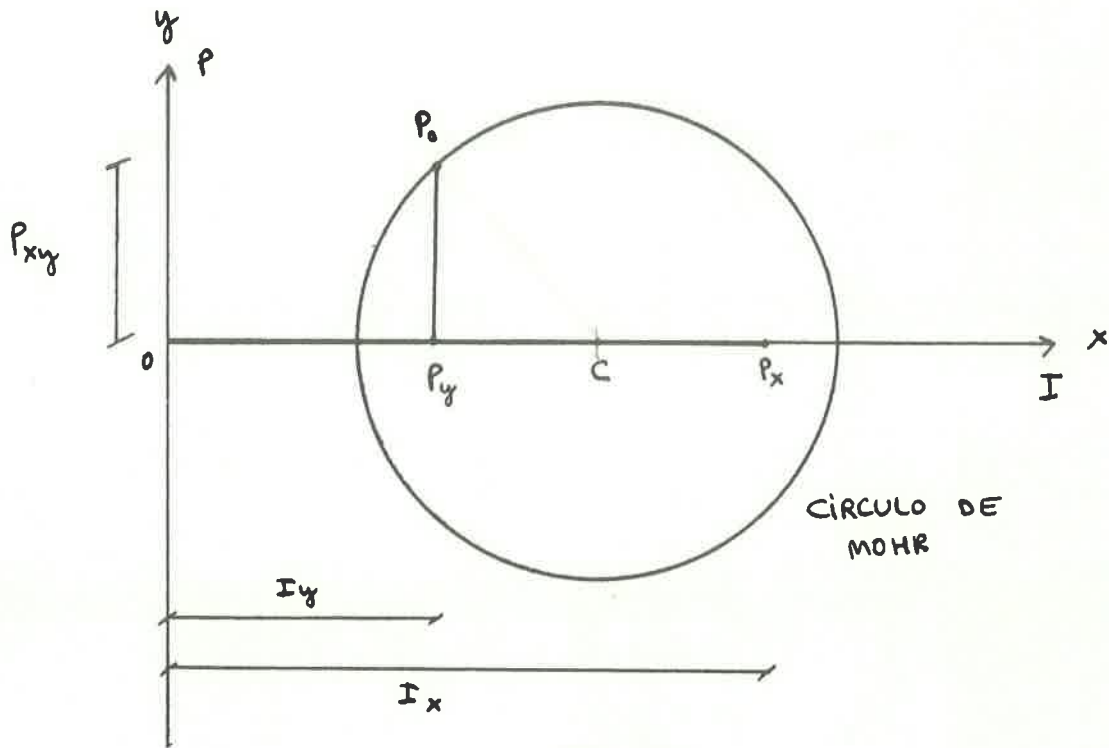


Fig. 10.

Si deseamos calcular el momento de inercia respecto a un cierto eje  $u$ , basta con trazar desde el polo  $P_0$  una paralela a dicho eje, la cual cortará al círculo de Mohr en otro punto  $P_u$ , cuya abcisa representará el momento de inercia con respecto al citado eje:

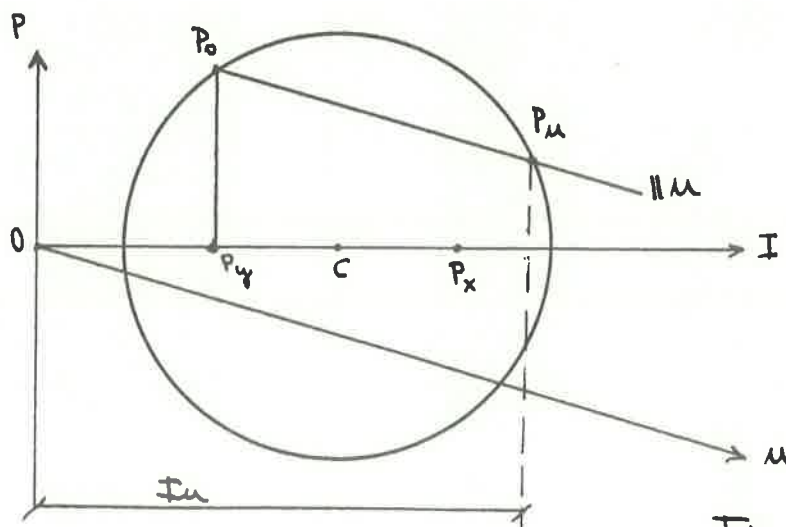


Fig. 11.

La ordenada del punto  $P_{\mu}$  representará el producto de inercia respecto a dos ejes ortogonales  $u$  y  $v$  tales que el sentido del  $v$  es el que le correspondería como rotación del eje  $y$  y cuando el  $x$  coincidiese con el  $u$ :

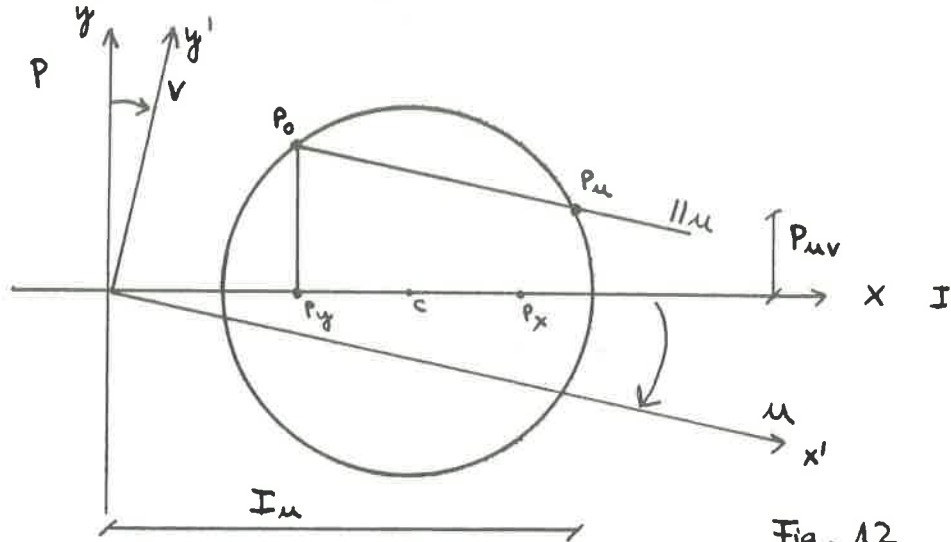
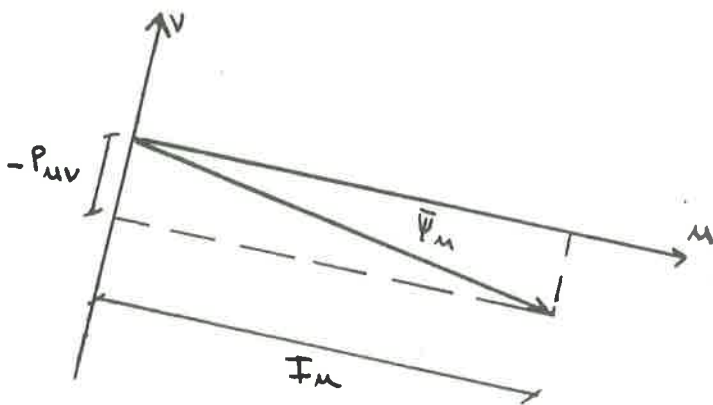
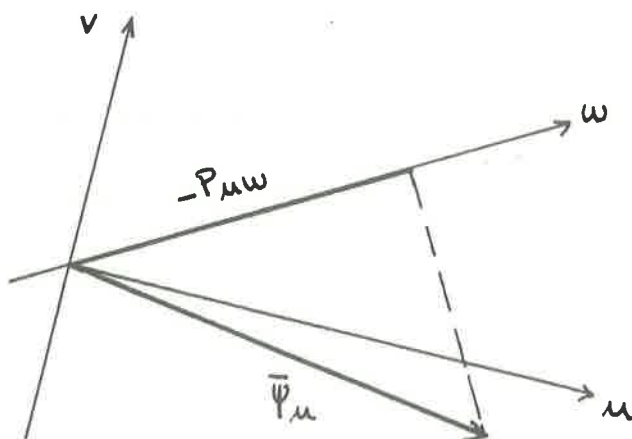


Fig. 12

El vector de inercia  $\bar{\Psi}_{\mu}$  asociado a una dirección  $u$  puede construirse sabiendo que la proyección del mismo sobre  $u$  es el momento de inercia, y la proyección sobre  $v$  proporciona  $-P_{\mu\nu}$ ; por lo tanto,



si  $P_{\mu\nu} > 0$ , se situará sobre el semieje negativo de  $v$  el segmento  $P_{\mu\nu}$ . Así pues, conocido el vector de inercia  $\bar{\Psi}_{\mu}$  se puede obtener fácilmente el producto de inercia respecto a dos ejes  $u$  y  $w$ , puesto que bastará proyectarlo sobre el eje  $w$ , y el citado producto será dicha proyección cambiada de signo.



En el caso de la figura 13, al ser positiva la proyección, implicaría que  $P_{\mu w} < 0$ .

Fig. 13

El círculo de Mohr permite calcular fácilmente las direcciones y los momentos de inercia principales, ya que al ser ejes ortogonales que poseen producto de inercia nulo, el punto  $P_u$  debe tener ordenada nula, por lo que las direcciones principales se obtendrán uniendo el punto  $P_o$  o polo con los dos puntos de corte del círculo de Mohr con el eje de abscisas, y los momentos de inercia principales serán las abscisas de dichos puntos de corte, tal como indicamos en la figura siguiente:

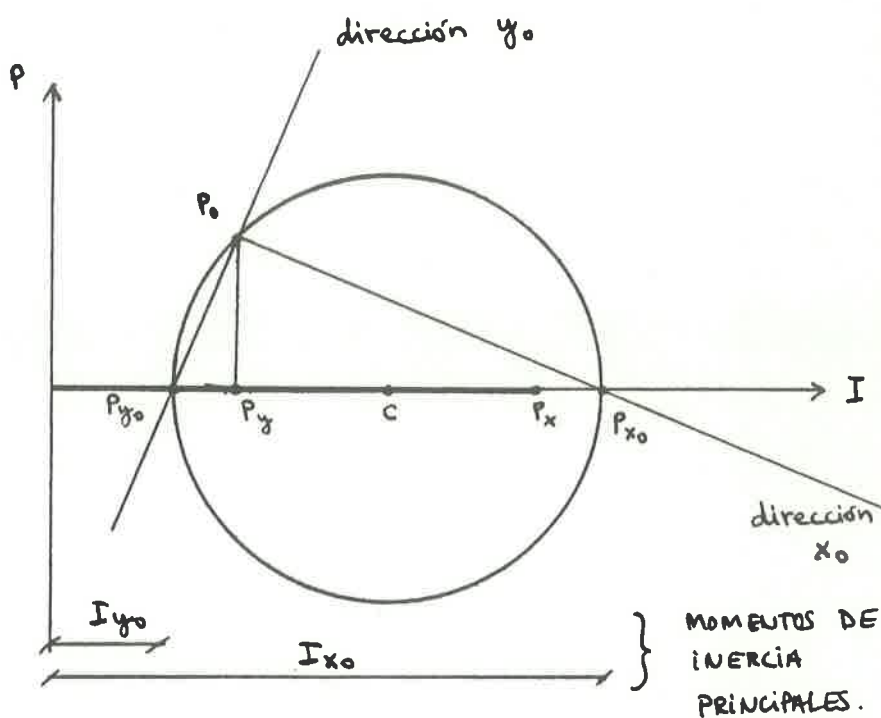


Fig. 14

## 8. CIRCULO DE LAND.

Es similar al círculo de Mohr, pero a diferencia de éste permite obtener el producto de inercia respecto a dos ejes cualesquiera sin necesidad de construcción gráfica auxiliar.

El eje  $x$  se utilizará como eje de representación para  $I_x$  e  $I_y$ , y el eje  $y$  para el producto de inercia  $P_{xy}$ , tal como indicamos en la fig. 15, con  $P_{xy} > 0$  hacia arriba. El centro del círculo de Land es el del arco capaz de  $\overline{OP_x}$ . El círculo de Land debe contener el punto principal o polo  $P_0$ .

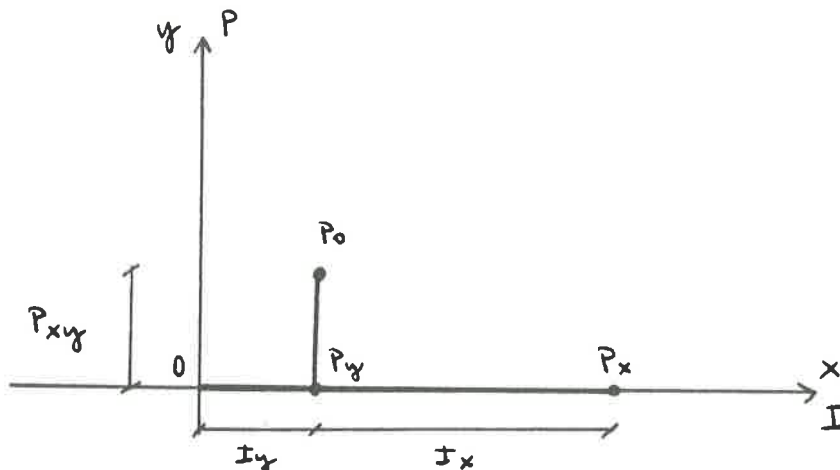


Fig. 15: siempre se sitúa primero el segmento  $\overline{OP_y}$  indicativo de  $I_y$ , y a continuación el segmento  $\overline{P_y P_x}$  representativo de  $I_x$ ).

Para obtener el momento de inercia respecto a un eje  $u$  se traza el mismo, el cual cortará al círculo de Land en un punto  $P_M$  (ver fig. 16), que tendrá como diámetro asociado uno que simbolizaremos por  $D_M$ , sobre el que proyectaremos el polo  $P_0$ , obteniendo un punto  $P_{0M}$ , resultando que el segmento  $\overline{P_M P_{0M}}$  será, a la escala elegida, indicativo de  $I_M$ .

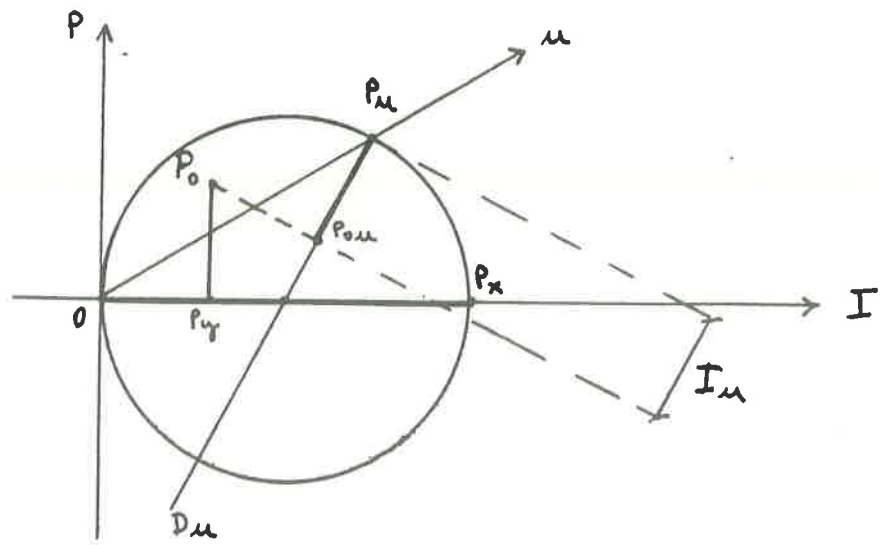


Fig. 16

Para obtener el producto de inercia respecto a dos ejes  $u$  y  $v$  se trazan los mismos, los cuales cortarán al círculo de Land en dos puntos  $P_u$  y  $P_v$ , que definirán una recta  $R_{uv}$ . El producto de inercia  $P_{uv}$  es la mínima distancia del polo  $P_0$  a la recta  $R_{uv}$ . (Fig. 17).

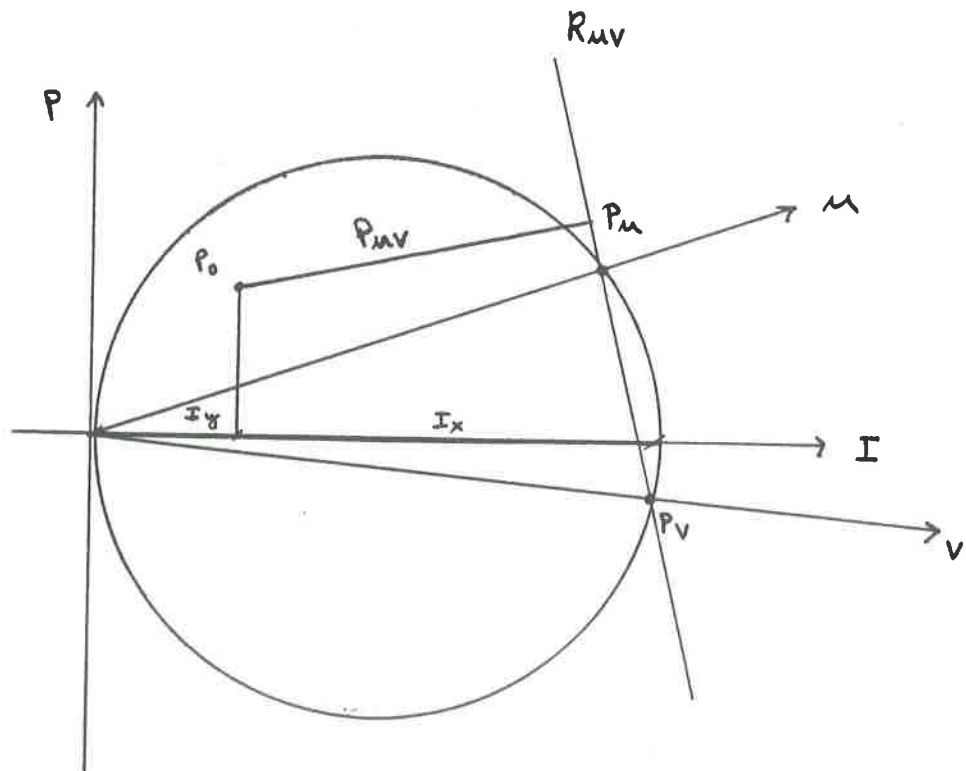


Fig. 17



El signo de  $P_{uv}$  puede determinarse si analizamos la posición del polo con respecto a la secante  $R_{uv}$ , tal como se indica en la figura 18, puesto que si  $P_0$  está situado en la zona rayada,  $P_{uv}$  tendrá signo opuesto al de  $P_{xy}$ , y en caso contrario tendrá su signo.

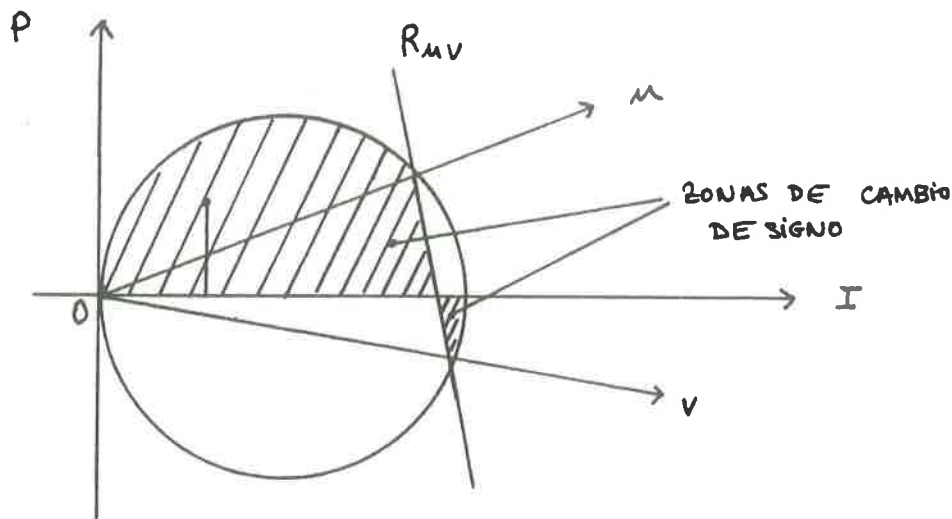


Fig. 18

La determinación del eje conjugado de inercia de uno  $u$  es inmediata utilizando el círculo de Land, puesto que para que el producto de inercia sea nulo es preciso que la distancia del polo a la secante sea cero, es decir, que la secante contenga al polo; por lo que si conocemos un eje  $u$ , su conjugado se obtendrá determinando el punto  $P_u$  de corte del círculo con dicho eje  $u$ , y uniendo este punto con el polo  $P_0$ , mediante una recta  $R_{uv}$ , que cortará al círculo en otro punto  $P_v$ ; uniendo  $P_v$  con el origen de coordenadas queda definido el eje  $v$  conjugado de inercia del  $u$ .

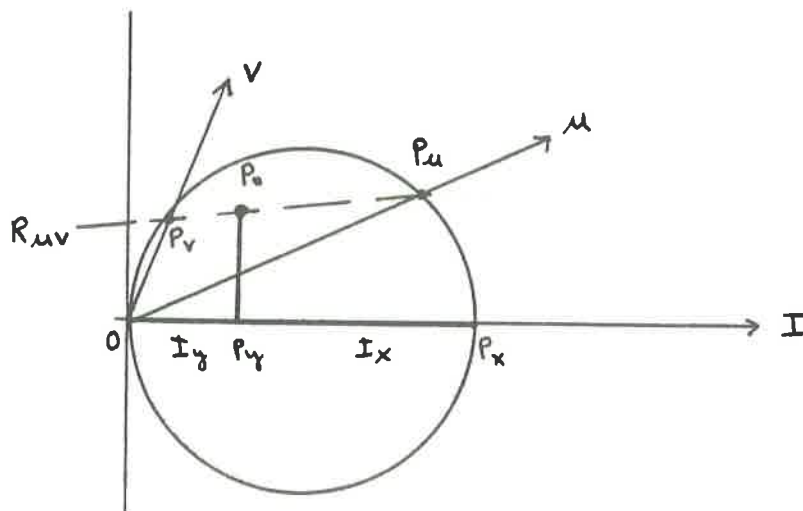


Fig. 19

La obtención de los ejes principales se efectuará atendiendo que deben ser conjugados de inercia y ortogonales, por lo que la secante  $R_{uv}$  debe ser un diámetro; determinaremos dicha secante uniendo  $P_0$  con el centro, y los puntos de corte del diámetro con el círculo unidos con el origen nos proporcionará las direcciones principales.

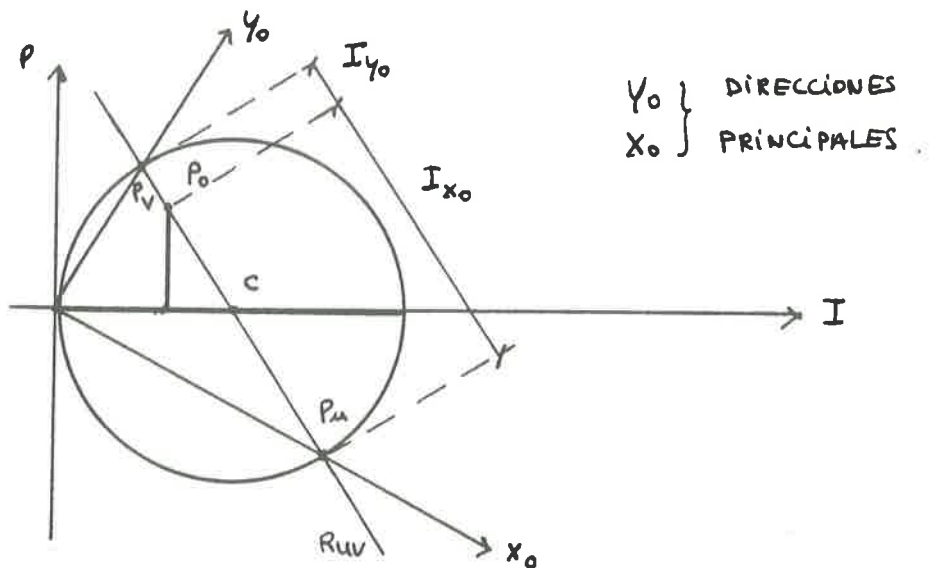


Fig. 20

9. PROBLEMAS RESUELTOS.

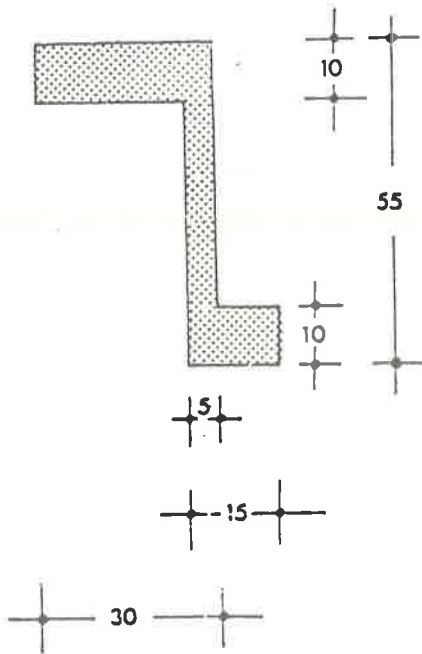


Fig. 21

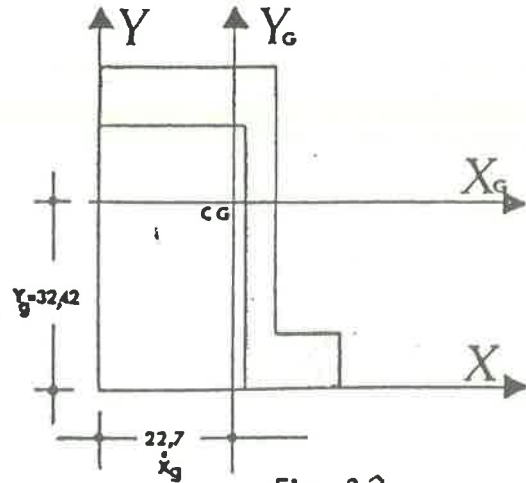


Fig. 22

EJEMPLO 1.

Obténase de la sección croquizada en las Figs. 21 y 22 :

- 1º) El momento de inercia con respecto al eje U que contiene el C. de G., así como al extremo superior izquierdo, del ala superior. 2º) El producto de inercia con respecto al mencionado eje U, y al eje W que conteniendo también el C. de G. pasa por el extremo inferior derecho, del ala inferior. (Véase Fig. 23 ).

SOLUCION

Omitimos el cálculo previo de  $I_{x_G}$  e  $I_{y_G}$ , resultando ser:

$$I_{x_G} = 250798$$

$$I_{y_G} = 61902$$

análogamente :

$$P_{x_G y_G} = -88740$$

Ahora precisamos determinar las proyecciones de los segmentos unidad que situemos sobre los ejes U y W, para lo cual, nos basaremos en que ya conocemos las proyecciones de los segmentos no unitarios  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$

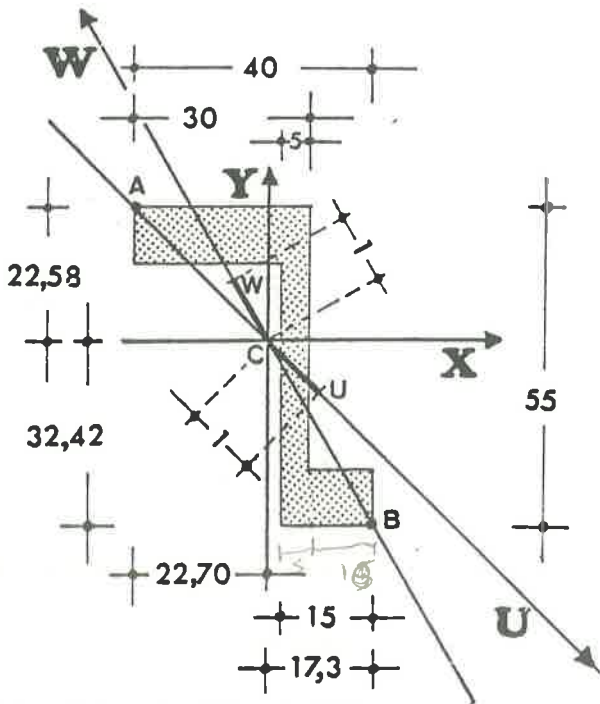


Fig. 23

$$\begin{aligned} \overline{CA}_x &= -22.7 & \overline{CB}_x &= 17.3 \\ \overline{CA}_y &= 22.58 & \overline{CB}_y &= -32.42 \end{aligned}$$

Calculemos las longitudes de dichos segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$ :

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{CA}_x^2 + \overline{CA}_y^2} = \sqrt{(-22.7)^2 + (22.58)^2} = 32.0179$$

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CB}_x^2 + \overline{CB}_y^2} = \sqrt{17.3^2 + (-32.42)^2} = 36.7470$$

Las proyecciones de los segmentos unidad, serán las de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$ , pero 32.0179 y 36.747 veces menores. A parte, como dichos segmentos unidad, se situarán sobre las direcciones positivas de los ejes respectivos, resultarán que habrá que cambiar el signo de ambas proyecciones en los dos casos.

Consecuentemente:

$$U_x = - \frac{\overline{CA}_x}{\overline{CA}} = - \frac{(-22.7)}{32.0179} = 0.7089 = U_x$$

$$U_y = - \frac{\overline{CA}_y}{\overline{CA}} = - \frac{22.58}{32.0179} = -0.7052 = U_y$$

$$W_x = - \frac{\overline{CB}_x}{\overline{CB}} = \frac{-17.3}{36.747} = -0.4707 = W_x$$

$$W_y = - \frac{\overline{CB}_y}{\overline{CB}} = - \frac{(-32.42)}{36.747} = 0.8822 = W_y$$

Con lo que se dispone de todos los datos precisos para aplicar la formulación correspondiente:

$$\begin{aligned} I_U &= \begin{bmatrix} U_x & U_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xg} & -P_{xgyg} \\ -P_{xgyg} & I_{yg} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7089 & -0.7052 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 250798 & 88740 \\ 88740 & 61902 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7089 \\ -0.7052 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.7089 & -0.7052 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (250798 \times 0.7089 - 88740 \times 0.7052) \\ (88740 \times 0.7089 - 61902 \times 0.7052) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7089 & -0.7052 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 115211 \\ 19254 \end{bmatrix} \\ &= 0.7089 \times 115211 - 0.7052 \times 19254 = \boxed{68095 = I_U} \end{aligned}$$

$$P_{UW} = - \begin{bmatrix} w_x & w_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xg} & -P_{xgyg} \\ -P_{xgyg} & I_{yg} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0.4707 & 0.8822 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 250798 & 88740 \\ 88740 & 61902 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7089 \\ -0.7052 \end{bmatrix}$$

Como el producto de la matriz cuadrada por la matriz columna ya se resolvió, podemos establecer que:

$$P_{UW} = - \begin{bmatrix} -0.4707 & 0.8822 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 115211 \\ 19254 \end{bmatrix} = 0.4707 \times 115211 - 0.8822 \times 19254 = \boxed{37244 = P_{UW}}$$

EJEMPLO 2

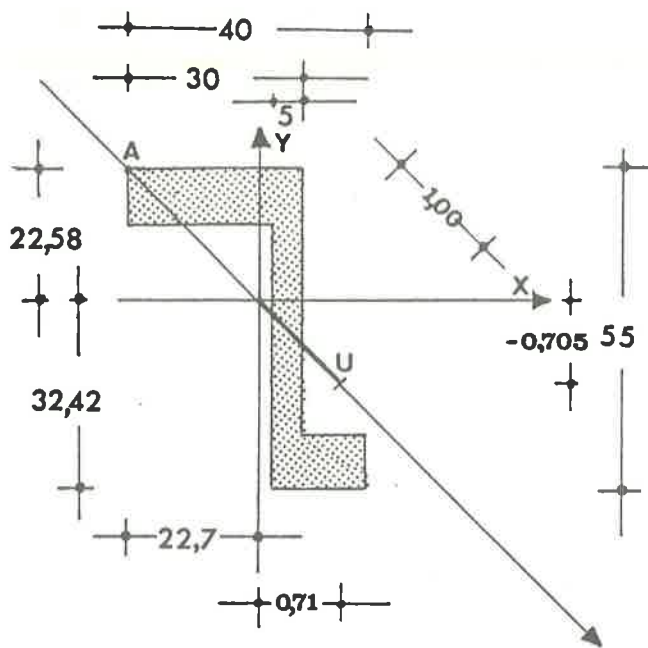


Fig. 24

De la sección utilizada en el ejemplo anterior, obténgase el eje conjugado de inercia del eje U.

SOLUCION: De los ejemplos anteriores se desprenden parte de los datos croquizados en la Fig. 24, así como los siguientes:

$$\begin{aligned} I_x &= 250798 \\ I_y &= 61902 \\ P_{xy} &= -88740 \\ U_x &= 0.7089 \\ U_y &= -0.7052 \end{aligned}$$

Las componentes del vector  $\vec{\Phi}$ , asociado a la dirección U, son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250798 & 88740 \\ 88740 & 61902 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7089 \\ -0.7052 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 115211 \\ 19254 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

valores que ya habían sido, en realidad calculados en el ejemplo 1.

El eje conjugado es perpendicular a  $\vec{\Phi}$ , por lo que será colineal con el vector  $\vec{\Psi}$ , que vamos a definir, de forma que sea ortogonal con el mencionado vector  $\vec{\Phi}$

$$\vec{\Psi}(-19254, 115211) = (\Psi_x, \Psi_y)$$

El ángulo  $\theta$  que formará este vector con el eje X, lo podemos obtener de la forma siguiente:

$$\text{tag. } \theta' = \frac{\Psi_y}{\Psi_x} = \frac{115211}{-19254} = -5.98 \quad (\theta = -80,51^\circ) \quad (\text{ver fig. 25' .})$$

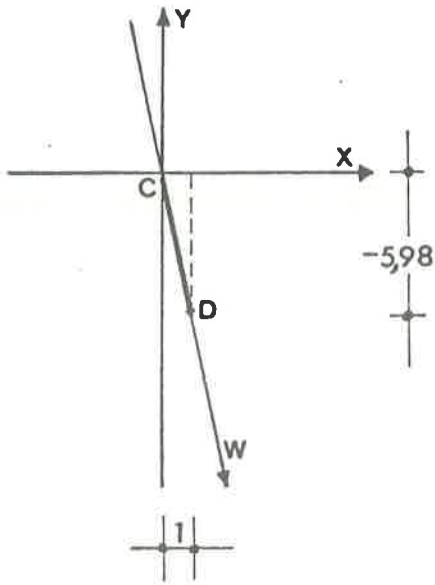


Fig. 25 .

Si deseásemos calcular las proyecciones de un segmento unidad situado sobre  $W_r$ , obtendríamos la longitud  $\overline{CD}$ , en primer lugar:

$$\left. \begin{aligned} \overline{CD}_x &= 1 \\ \overline{CD}_y &= -5.98 \end{aligned} \right\} \overline{CD} = \sqrt{1^2 + 5.98^2} = 6.06$$

$$W_x = \frac{\overline{CD}_x}{\overline{CD}} = \frac{1}{6.06} = 0.1648$$

$$W_y = \frac{\overline{CD}_y}{\overline{CD}} = \frac{-5.98}{6.06} = -0.9863$$

Así pues:  $\vec{W} (0.1648 \quad -0.9863)$

### EJEMPLO 3

Determinación de los momentos de inercia principales y centrales de la figura tratada en los ejemplos 1 y 2 .

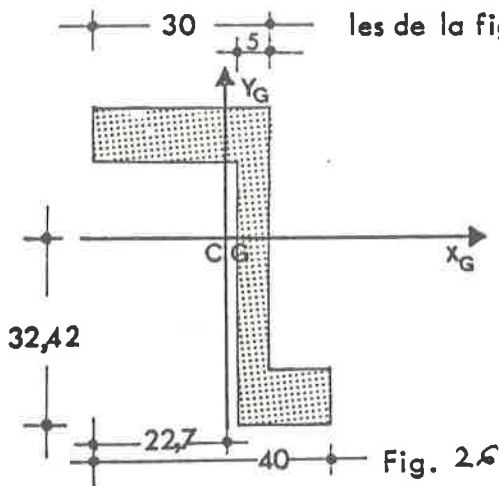


Fig. 26

SOLUCION:

Sabemos que:

$$I_{x_g} = 250798$$

$$I_{y_g} = 61902$$

$$P_{x_g y_g} = -88740$$

Por lo tanto, los invariantes valdrán:

$$I_{x_g} + I_{y_g} = 250798 + 61902 = 312700$$

$$\begin{vmatrix} I_{x_g} & -P_{x_g y_g} \\ -P_{x_g y_g} & I_{y_g} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 250798 & 88740 \\ 88740 & 61902 \end{vmatrix} = 250798 \cdot 61902 - 88740^2 = 7650 \cdot 10^6$$

Consecuentemente, los momentos de inercia principales y centrales, deben verificar la invarianza de dichos valores, manteniendo nulo su producto de inercia (ya que a la vez son ejes conjugados de inercia).

Por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} I_{x_o} + I_{y_o} = 312700 \\ \left| \begin{array}{cc} I_{x_o} & 0 \\ 0 & I_{y_o} \end{array} \right| = 7650 \cdot 10^6 \end{array} \right\} \text{ello equivale a} \left\{ \begin{array}{l} I_{x_o} + I_{y_o} = 312700 \\ I_{x_o} \cdot I_{y_o} = 7650 \cdot 10^6 \end{array} \right.$$

$$I_{y_o} = \frac{7650 \cdot 10^6}{I_{x_o}} \quad \text{Sustituyendo en la primera:}$$

$$I_{x_o} + \frac{7650 \cdot 10^6}{I_{x_o}} = 312700$$

$$I_{x_o}^2 - 312700 I_{x_o} + 7650 \cdot 10^6 = 0 \quad \text{Recordando que la ecuación:}$$

$x^2 + bx + c$  tiene como raíces:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

resultará:

$$\left. \begin{array}{l} I_{x_o} \\ I_{y_o} \end{array} \right\} = 156350 \pm \sqrt{156350^2 - 7650 \cdot 10^6} = 156350 \pm 129596 = \left\{ \begin{array}{l} 285946 \\ 26754 \end{array} \right.$$

Luego los momentos de inercia principales son:

$I_{x_o}$	=	285846
$I_{y_o}$	=	26754

Posteriormente, veremos como determinamos la orientación de los ejes correspondientes.

#### EJEMPLO 4

Calcúsen las direcciones principales, conocidos los datos utilizados y obtenidos en el EJEMPLO 3.

SOLUCION: Sabíamos que:

$$\begin{array}{l} I_{x_g} = 250798 \\ I_{y_g} = 61902 \\ P_{x_g y_g} = -88740 \end{array}$$

De cuyos valores, se obtuvieron los momentos de inercia principales:  $I_{x_o} = 285946$

La matriz asociada al sistema, es:  $I_{y_o} = 26754$

$$\begin{bmatrix} 250798 & 88740 \\ 88740 & 61902 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{x_g} & -P_{x_g y_g} \\ -P_{x_g y_g} & I_{y_g} \end{bmatrix}$$

Para la obtención del eje  $X$  , restemos 1 :

$$\begin{bmatrix} I_{x_g} - I_{y_o} & -P_{x_g y_g} \\ -P_{x_g y_g} & I_{y_g} - I_{y_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 224044 & 88740 \\ 88740 & 35148 \end{bmatrix}$$

Como las filas definen vectores colineales a  $X_o$  , para obtener el ángulo que forma  $X_o$  con  $X$  , nos bastará con una simple división entre las componentes.

$$\left. \begin{aligned} \text{tag. } \theta &= \frac{88740}{224044} = 0.3960 \\ \text{tag. } \theta &= \frac{35148}{88740} = 0.3960 \end{aligned} \right\} \theta = 21^\circ, 36'$$

El eje  $Y_o$  , vendrá definido por una tangente recíproca y con signo opuesto:

$$\text{tag. } \beta = - \frac{1}{\text{tag } \theta} = -2.5247 \Rightarrow \beta = -68^\circ 23'$$

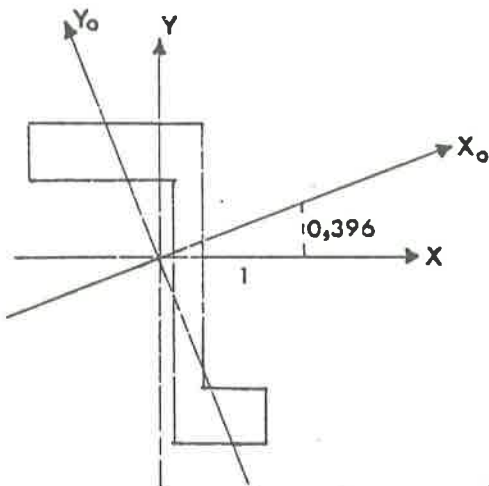


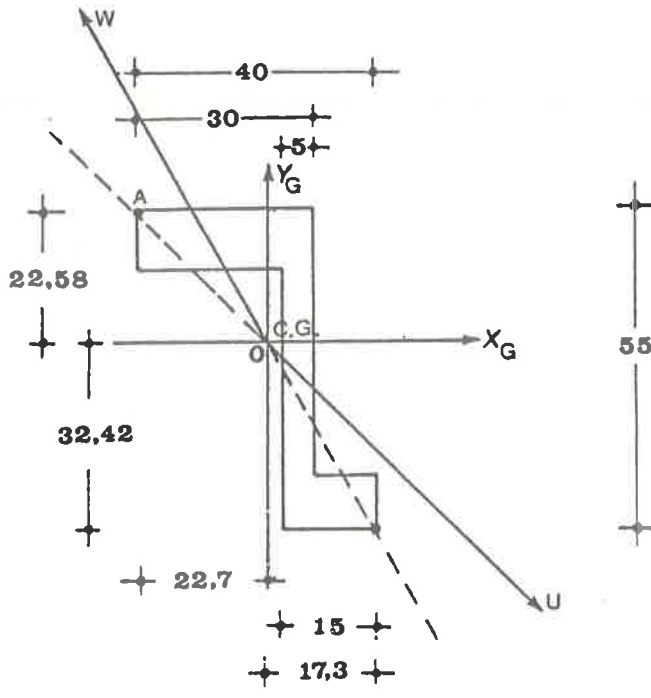
FIG. 27

Obsérvese (Fig. 27 .), que el eje  $Y_o$  , al que se le había asignado momento de inercia mínimo, sigue en consecuencia, la dirección en que se alarga la figura.



EJEMPLO 5 :

Conocidos los momentos de inercia:



$$I_{x_g} = 250798$$

$$I_{y_g} = 61902$$

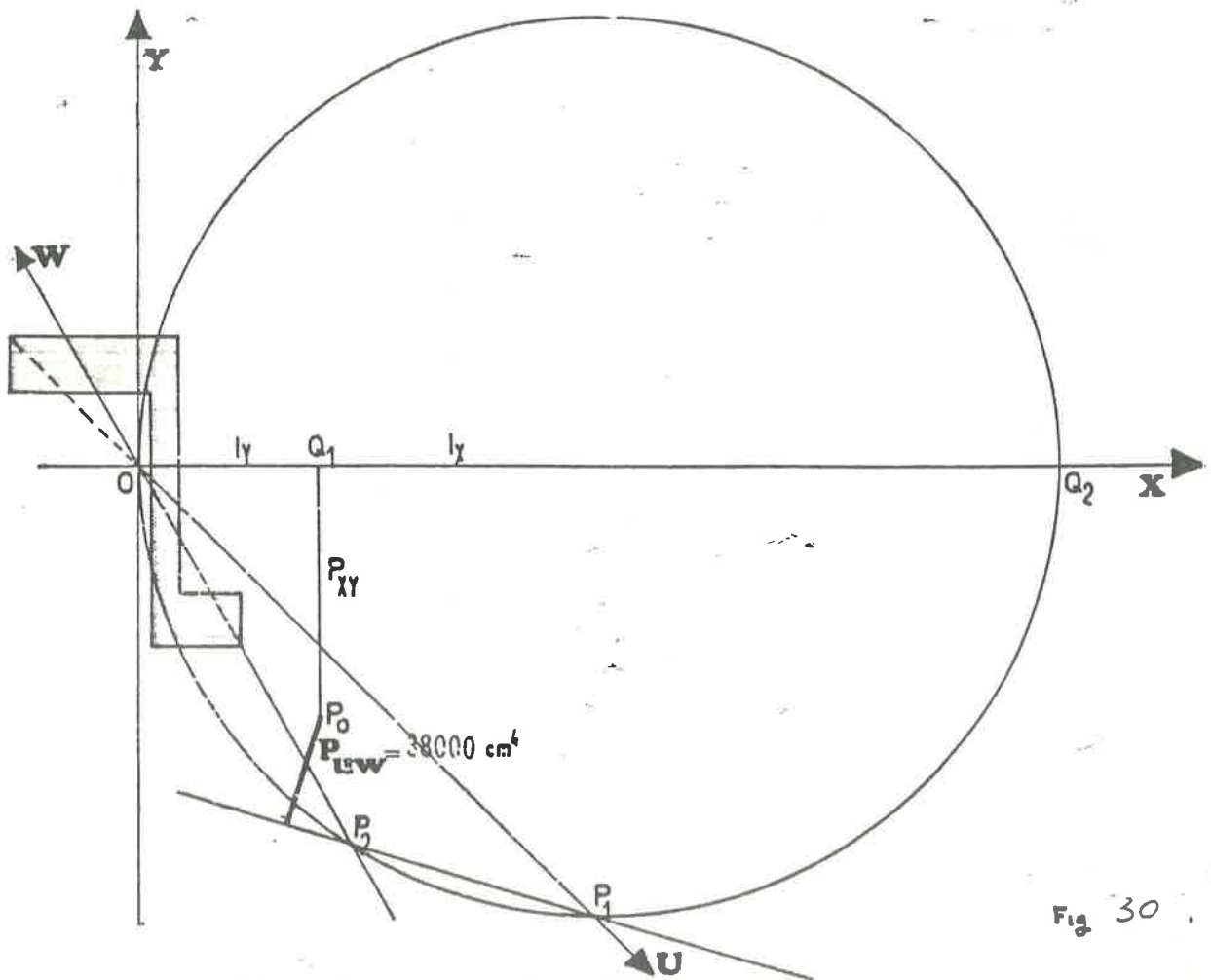
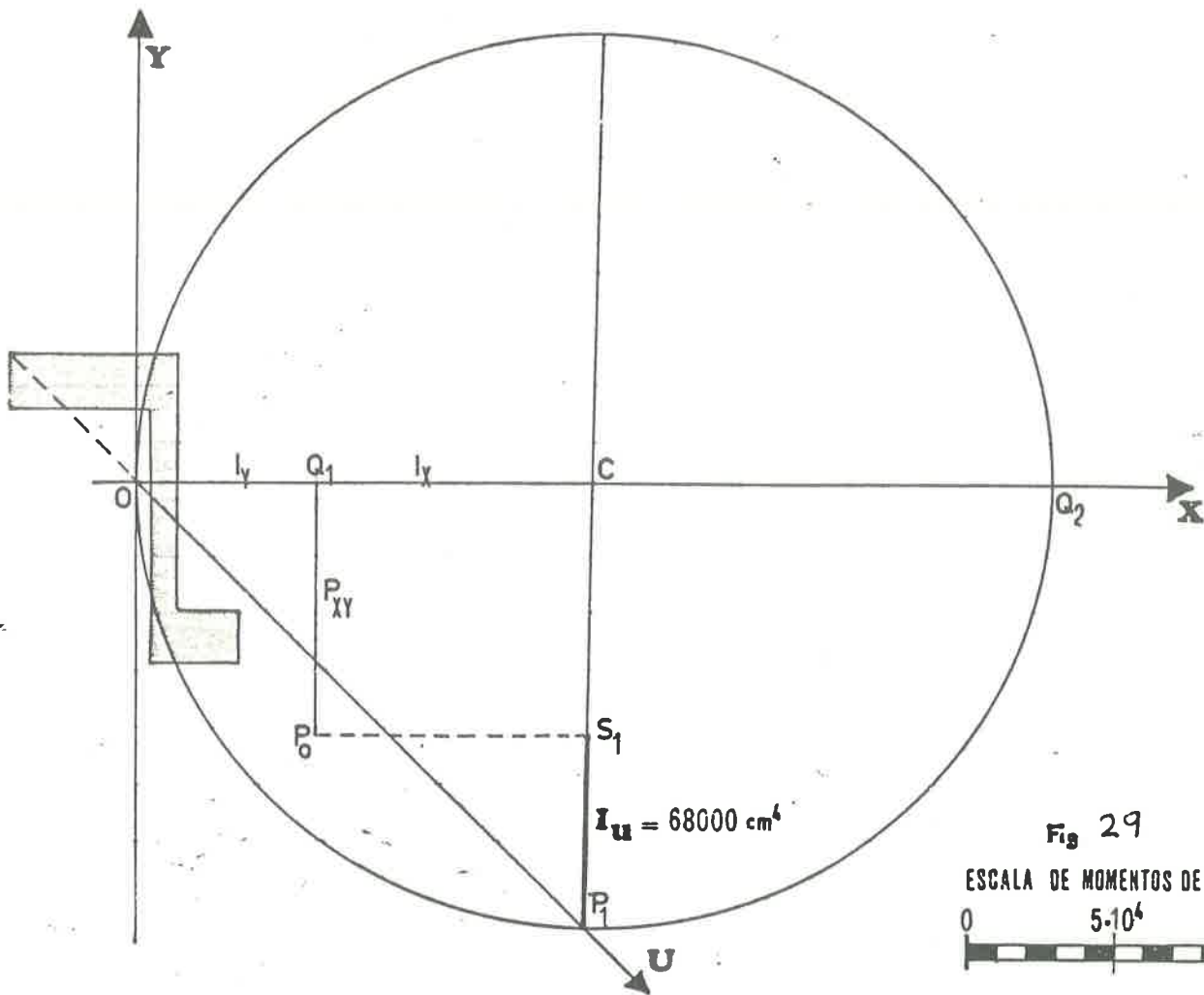
$$P_{x_g y_g}^i = -88740$$

Obténase de la figura croquizada (Fig. 28 .):

19) El momento de inercia con respecto al eje U que contiene el C. de G., así como el punto A, extremo superior izquierdo, del ala superior.

Fig. 28

- 29) El producto de inercia con respecto al mencionado eje U, y al eje W, que conteniendo el C. de G. pasa por B, extremo inferior derecho, del ala inferior.
- 39) Eje conjugado de inercia de U.
- 49) Determinación de los ejes y momentos de inercia principales.



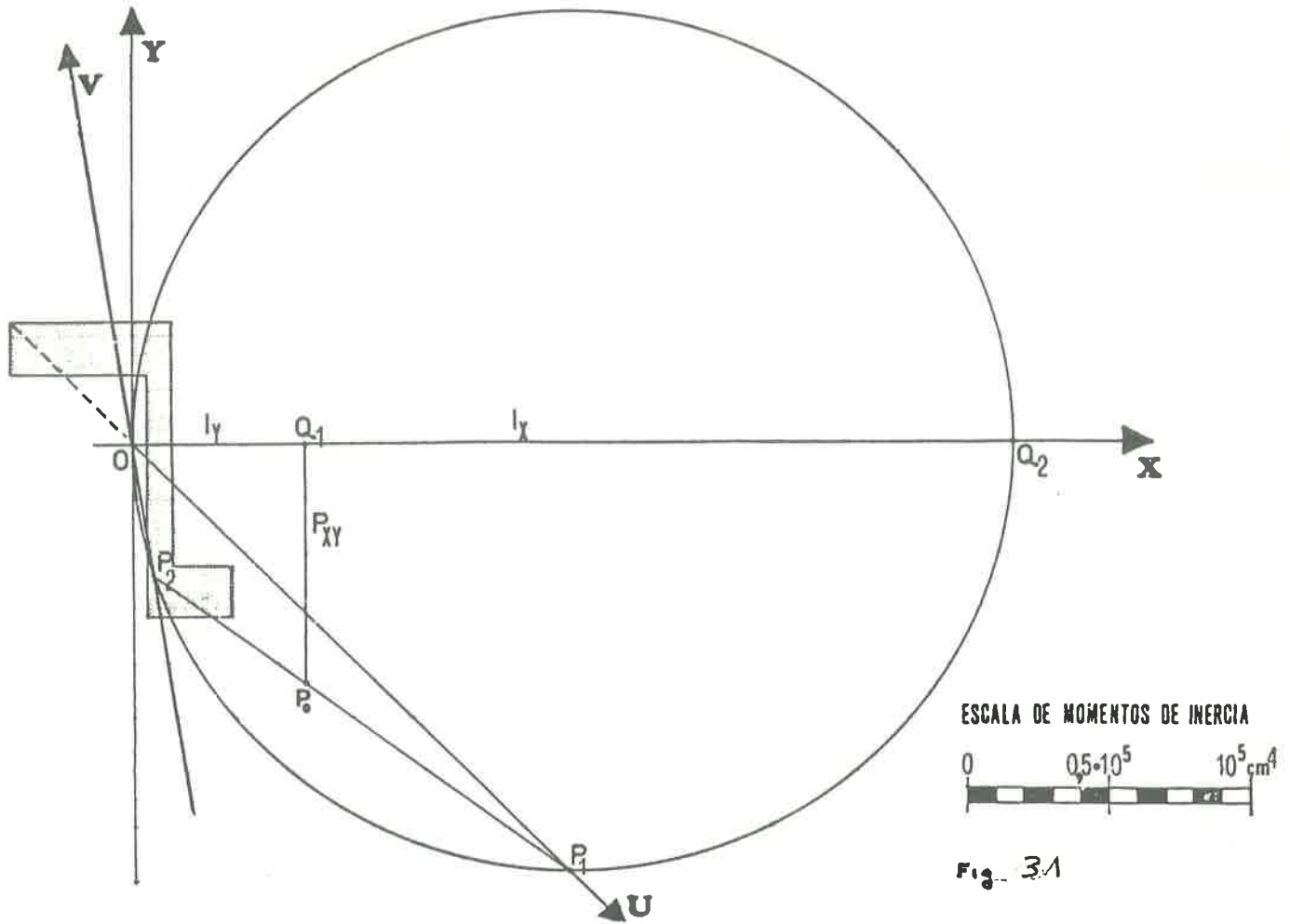


Fig. 3.1

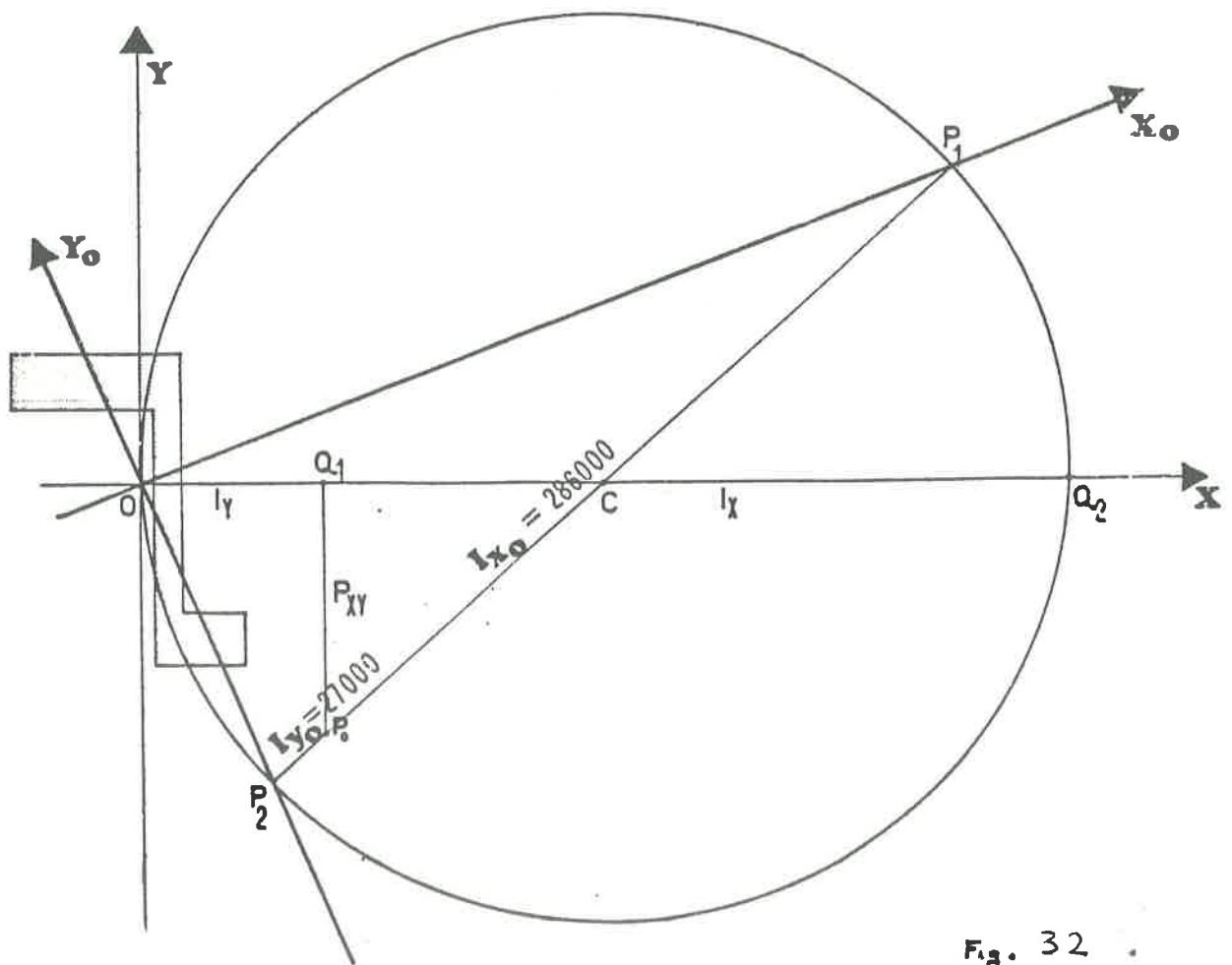


Fig. 3.2

EJEMPLO 6 Conocidos los momentos de inercia:

$$I_{x_g} = 250798$$

$$I_{y_g} = 61902$$

$$P_{x_g y_g} = -88740$$

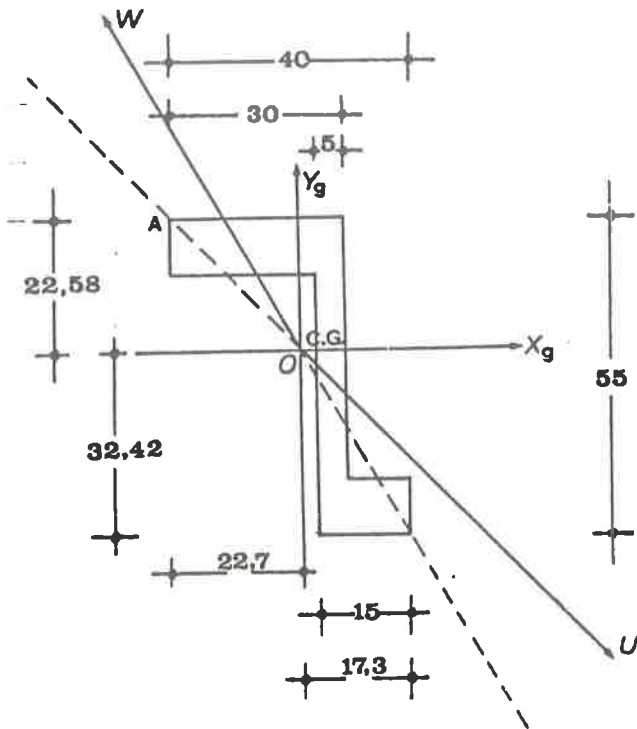


Fig. 33

Obtégase de la figura croquizada (fig. 33 .)

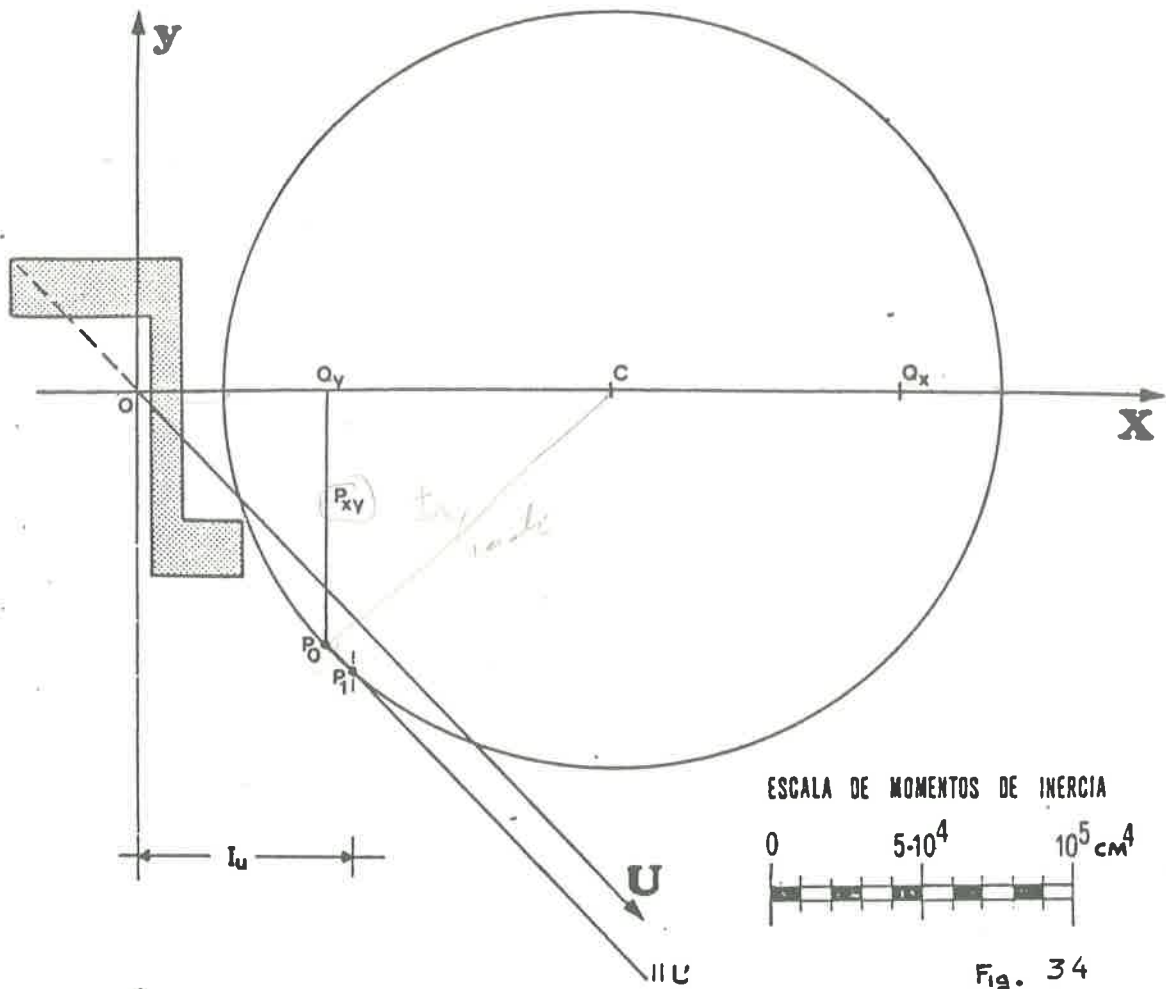
- 1º) El momento de inercia con respecto al eje U que contiene el C. de G., así como el punto A, (extremo superior izquierdo, del ala superior).
- 2º) El producto de inercia con respecto al mencionado eje U, y al eje W, que conteniendo el C. de G. pasa por B, extremo inferior derecho, - del ala inferior.

3º) Eje conjugado de inercia de U.

4º) Determinación de los ejes y momentos de inercia principales.

SOLUCION.-

La solución está grafiada en las siguientes figuras:



ESCALA DE MOMENTOS DE INERCIA  
 0 5·10<sup>4</sup> 10<sup>5</sup> cm<sup>4</sup>

Fig. 34

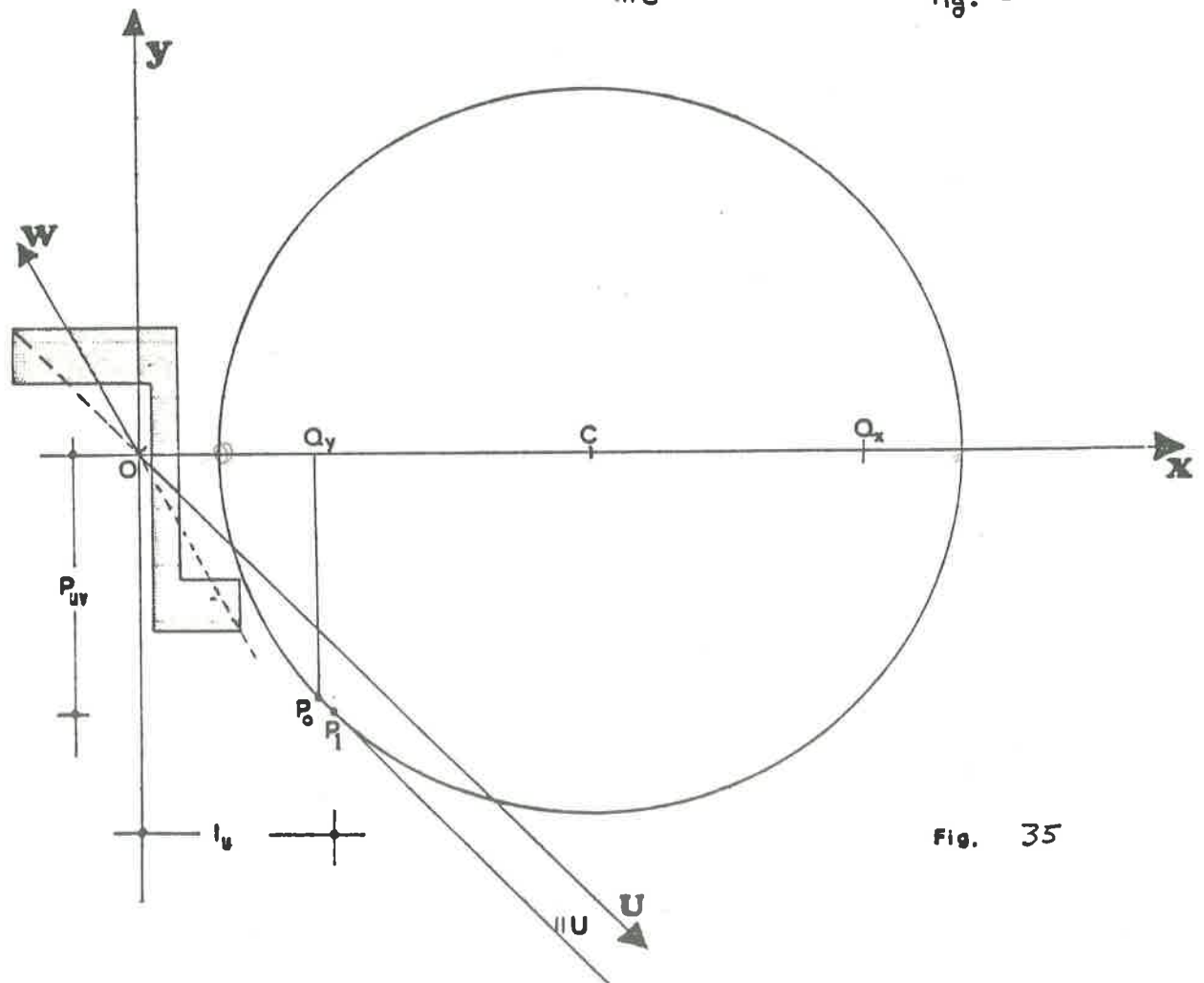
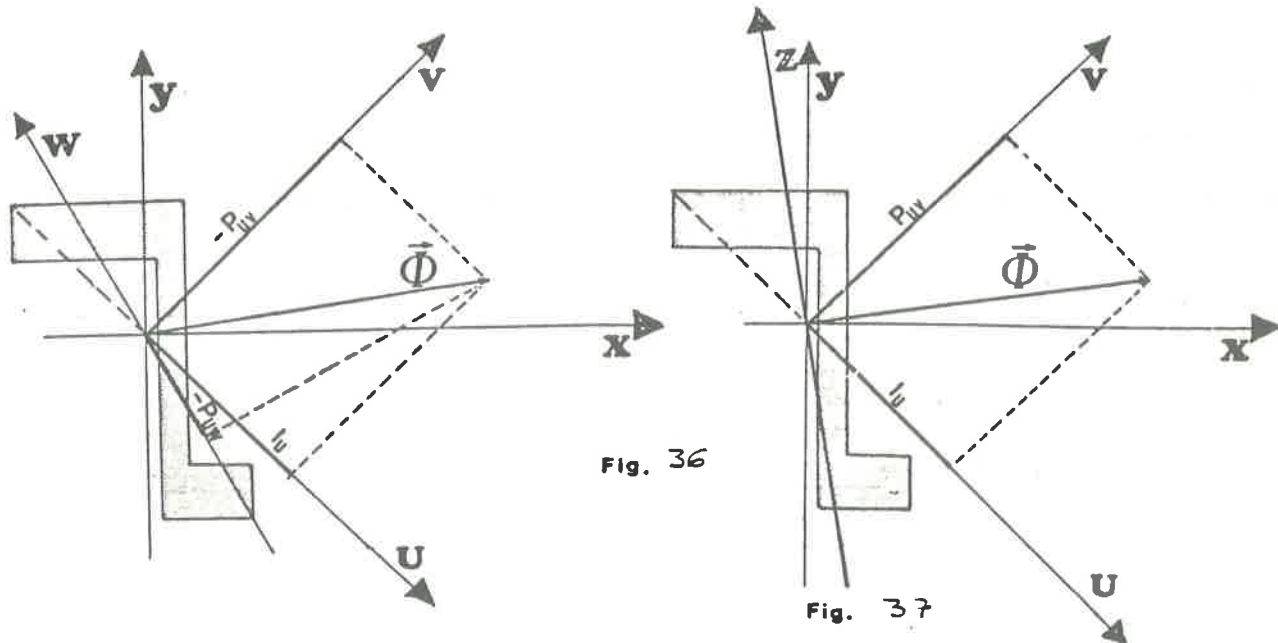
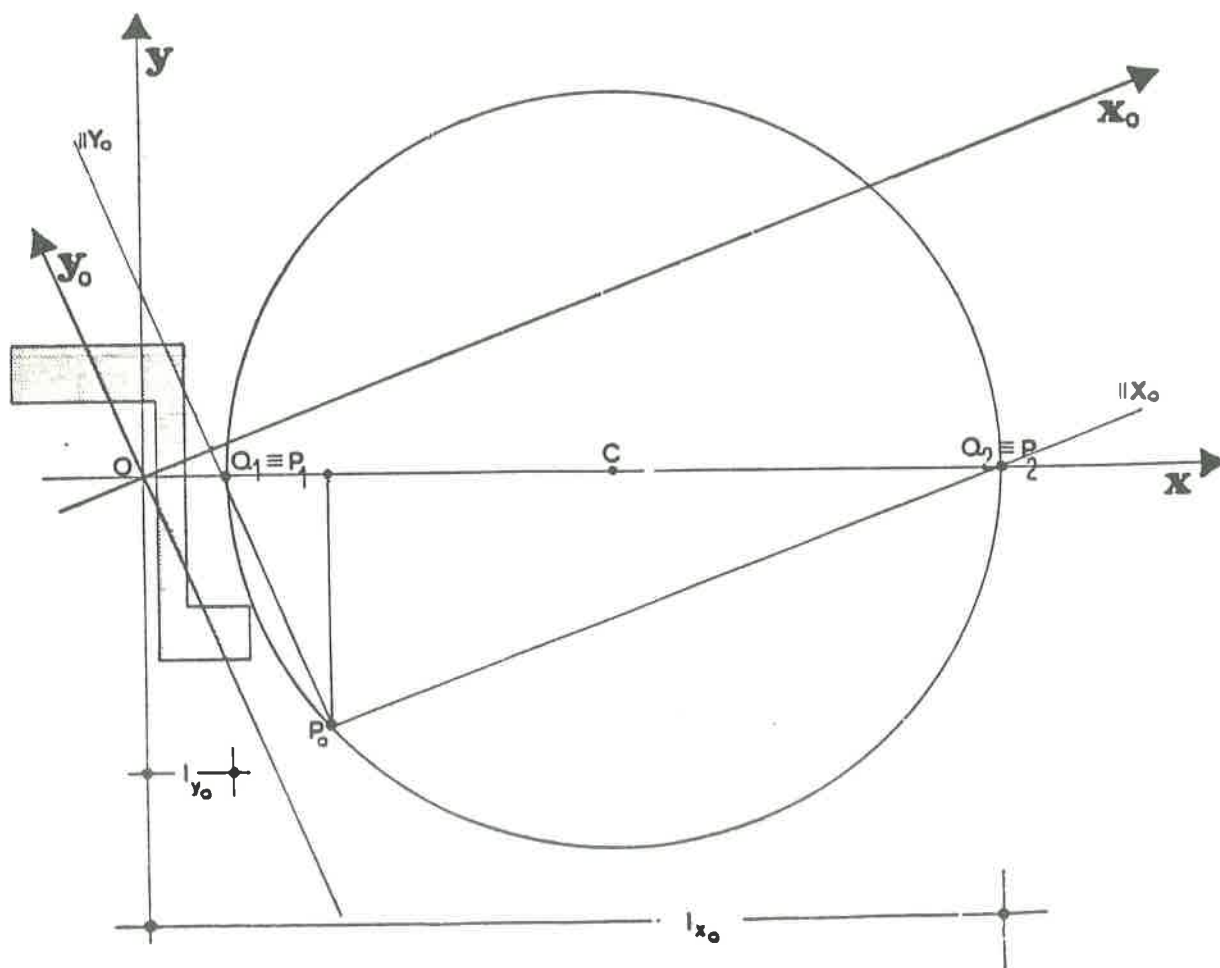
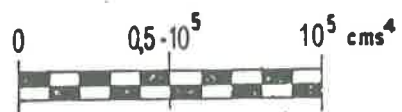


Fig. 35



ESCALA DE MOMENTOS DE INERCIA



10. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA.

- "Algebra lineal y geometría". Apuntes de la Cátedra de Matemáticas de E.U.A.T.B.
- Estática. Beer- Jonhston. Ed. McGraw Hill.

Autor AVGUET SANGRA, Carlob  
Signatura A 531 (075) Ang  
Títol Fluor de inèrcia, teoria i prof.  
Registre 10152



**BIBLIOTECA**

ESCOLA UNIVERSITARIA  
POLITECNICA DE BARCELONA

Sigt. A 531 (075)

Ang

N.º Regl. ....

10152



CO-APU  
FISIC