Departament de Matemàtiques — EPSEVG
Universitat Politècnica de Catalunya

Llista de problemes
FOMA - Fonaments Matemàtics

Contingut 1.
Càlcul diferencial d'una variable

Curs 2022-2023 Q1

Índex

Mòdul 1.

Funcions bàsiques i funcions definides a trossos

La visualitzaci d'una funció és un element clau per entendre el seu comportament: creixement, extrems, asímptotes, domini, continuïtat i diferenciabilitat, per exemple. La representació de funcions es pot fer de moltes maneres, en particular en Octave/Matlab i en GeoGebra. Per aquest mòdul, on la idea és visualitzar funcions bàsiques variant paràmetres i traslladar-les, per exemple, és més ràpid usar GeoGebra. Més endavant, a la part de mètodes numèrics, es comenta com es fa la representació en Octave/Matlab.

1.1 Funcions bàsiques

Les funcions bàsiques són

- els polinomis (rectes $mx + n$, paràboles $ax^2 + bx + c$ i en general expresions del tipus $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$)
- l'exponencial a^x, p.e. l'exponencial de base e: e^x
- el logaritme de base a: $\log_a x$, p.e. el logaritme neperià: $\ln x$
- les funcions trigonomètriques, p.e. sinus: $\sin x$, cosinus: $\cos x$ i tangent: $\tan x$
- les inverses (respecte la composició) de les funcions trigonomètriques, p.e. arcsinus: $\arcsin x$, arcosinus: $\arccos x$ i arctangent: $\arctan x$
- les funcions potencials x^a, p.e. x^2, $\sqrt{x}$, $1/x$,...

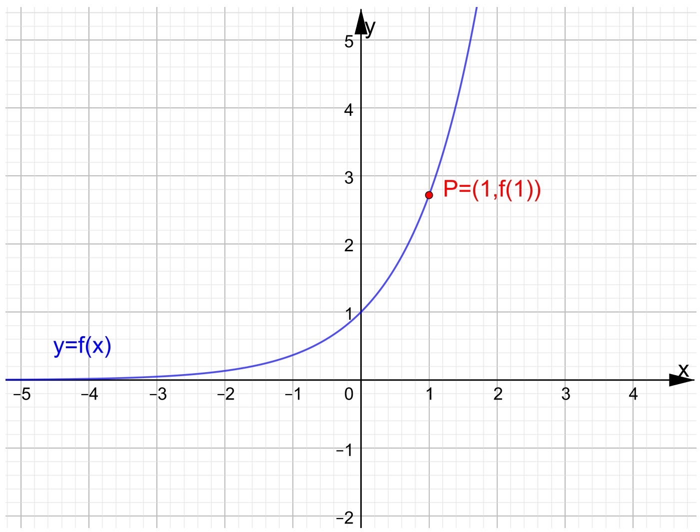
on $x \in \mathbb{R}$ s'anomena la **variable independent** i la resta de paràmetres que apareixen són constants.
En general, les **funcions de variable real** s'escriuen com

$$y = f(x)$$

on per cada valor de x s'obté un únic valor de y, avaluat per l'expresió de $f(x)$.
Les funcions $y = f(x)$ es poden representar en el pla cartesià (2D) amb eixos x (**eix d'abscisses**) i y (**eix d'ordenades**), allà on es pugui, és a dir, pels valors de x del seu **domini** (veure **Mòdul 2**).
Un punt $P = (x_0, y_0)$ sobre la gràfica de la funció compleix:

$$y_0 = f(x_0)$$

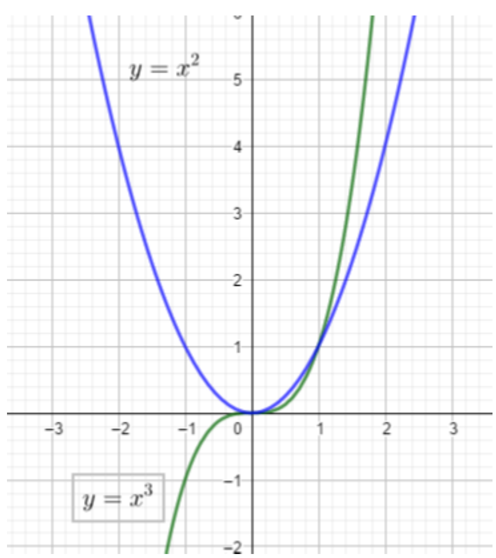
és a dir, $P = (x_0, f(x_0))$.



1.1.1 Algunes definicions

Funció simètrica: Podem trobar dues simetries diferents en una funció

- La simetria és **parell** si $f(-x) = f(x)$. Aquestes funcions són simètriques respecte l'eix d'ordenades. Exemple $y = x^2$.
- La simetria és **senar** si $f(-x) = -f(x)$. Aquestes funcions són simètriques respecte l'origen de coordenades. Exemple $y = x^3$.



Zero o arrel d'una funció: direm que α és un zero o arrel de $y = f(x)$ si

$$f(\alpha) = 0.$$

Gràficament són els punts de tall de la funció amb l'eix d'abscisses.
Multiplicitat d'un zero d'un polinomi: α és un zero (d'un polinomi) de multiplicitat r si a la descomposició en

factors simples del polinomi apareix el factor $x - \alpha$ com:

$$(x-\alpha)^r$$

Per exemple, en el polinomi

$$y = (x-3)(x-1)^2(x-2)^3$$

- el zero $\alpha = 3$ és simple ($r = 1$)
- el zero $\alpha = 1$ és doble ($r = 2$) i el zero $\alpha = 2$ té multiplicitat 3 ($r = 3$)

Funció periòdica i període: $y = f(x)$ és periòdica si per algún $T > 0$ és compleix

$$f(x+T) = f(x)$$

per qualsevol x. T s'anomena **període** i el valor més petit d'aquests s'anomena **període fonamental** o cicle.
Un exemple és

$$y = A\sin(x)$$

que té períodes $T = 2\pi n$, amb $n \in \mathbb{N}$ i té període fonamental $T = 2\pi$.
El valor $|A|$ s'anomena **amplitud**.

1.1.2 Representació gràfica amb GeoGebra

GeoGebra permet fer una representació molt àgil de les funcions.
Obrim GeoGebra, entrem la funció a la línia de comandes:

Entrada: f(x)=ln(x)

i automàticament surt representada la funció. La finestra gràfica i el zoom es canvien interactivament amb el ratolí.
A continuació representem $y = f(-x) = \ln(-x)$

Entrada: f(-x)

- $y = f(-x)$ és la **funció simètrica de** $f(x)$ **respecte l'eix** y

I les comandes

Entrada: -f(x)
Entrada: f(x-2)
Entrada: f(x)+2

representen

- $y = -f(x) = -\ln(x)$, la **funció simètrica de** $f(x)$ **respecte l'eix** x
- $y = f(x-2) = \ln(x-2)$ la **funció traslladada de** $f(x)$ **2 unitats cap a la dreta**
- $y = f(x) + 2 = \ln x + 2$ la **funció traslladada de** $f(x)$ **2 unitats cap amunt**

respectivament.

També podem representar funcions amb un (o més) paràmetres i amb una barra lliscant variar el valor del paràmetre, per exemple $f(x) = k\ln(x)$:

Entrada: f(x)=k*ln(x)

Automàticament GeoGebra considera k un paràmetre i crea una barra lliscant que permet variar-lo. Els valors que prén el paràmetre es poden variar a *Propietats*.

Les funcions e^x i $\sqrt{x}$ s'entren amb comandes especials:

Entrada: exp(x)
Entrada: sqrt(x)

1.2 Exercicis

Senyalem amb un * tots els que segur que cal fer. Els problemes senyalats com REPTE cal treballar-los una mica més que la resta.

1. REPTE: Trobeu i representeu

   (a) La recta paral.lela a $y = x$ que talli l'eix d'abscisses en $x = -3$.

   (b) La recta paral.lela a $y = 3x$ que talli l'eix d'abscisses en $x = 3$.

   (c) La recta que talla l'eix x en $x = 5$ i té pendent -3.

   (d) La recta que tingui zero $x = 2$ i que talli l'eix y en $y = -10$.

2. *REPTE: Trobeu i representeu

   (a) Una paràbola que miri cap amunt ($y = ax^2 + bx + c$ amb $a > 0$) i talli l'eix x en $x = -2$ i -3.

   (b) Una paràbola que miri cap avall ($y = ax^2 + bx + c$ amb $a < 0$) i que només talli l'eix x en $x = -1.5$, és a dir, que tingui a $x = -1.5$ com a zero doble.

   (c) Trobeu i representeu una paràbola que miri cap abaix ($y = ax^2 + bx + c$ amb $a < 0$) i talli l'eix x en $x = -1$ i 1 i $f(2) = -3$.

3. *Representeu $f(x) = x^3$. Representeu en general $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

4. *Representeu les funcions amb paràmetre k, varieu el paràmetre a l'interval $[0, 2]$, observeu l'efecte sobre la gràfica segons $k < 1$ o $k > 1$, i digueu si són funcions parells o senars:

   (a) $f(x) = \arctan(kx)$

   (b) $f(x) = \cos(kx)$

5. *Donada la funció $f(x) = e^x$, representeu:

   (a) La funció i la simètrica respecte l'eix y: $f(-x)$

   (b) La funció i la simètrica respecte l'eix x: $-f(x)$

   (c) La funció i les funcions: $f(2x)$ i $f(0.5x) = f(x/2)$

   (d) La funció i les traslladades a la dreta i l'esquerra: $f(x-2)$ i $f(x+2)$

   (e) La funció i les traslladades de f a dalt i a baix: $f(x) + 2$ i $f(x) - 2$

6. *Donades les funcions periòdiques $\sin(x)$ i $\cos(x)$:

   (a) Representeu-les. Quin periode fonamental tenen?

   (b) Quines són les unitats de la x, radians o graus?

   (c) Una funció es traslladada de l'altra, quants radians? Comproveu-ho a la gràfica.

7. *Donades les funcions $f(x) = \arctan(x)$ i $g(x) = 1/x$. Representeu les funcions:

   (a) $f(x)$ i $g(x)$ i la seva suma $f(x) + g(x)$

   (b) $f(x)$ i $g(x)$ i la seva resta $f(x) - g(x)$

   (c) $f(x)$ i $g(x)$ i el seu producte $f(x)g(x)$

   (d) $f(x)$ i $g(x)$ i el seu quocient $f(x)/g(x)$

   (e) La composició $f(g(x)) = \arctan(1/x)$

   (f) La composició $g(f(x)) = 1/\arctan(x)$

8. *Donada la funció periòdica $f(x) = \sin(2\pi x)$

(a) Representeu $f(x)$. Comproveu que el període fonamental és 1, en aquest cas hi ha 1 oscil.lació completa del sinus o cicle per unitat de magnitut.

(b) Representeu $f(kx) = \sin(2\pi kx)$ i varieu el paràmetre k a l'interval $[1, 10]$ amb increment 1. Observeu com visualment la funció es contrau al augmentar el valor de $k > 1$. Hi ha més oscil.lacions o cicles per unitat de magnitud, es diu que la seva freqüència augmenta.

(c) Donada $f(kx) = \sin(2\pi kx)$, si fixem $k = 5$, quin creieu que és el seu període fonamental? Quants cicles fa en una unitat de magnitud?

(d) Ara incrementem k a l'interval $(0, 1]$ amb increment 0.25. Observeu com la funció s'expandeix. Quin periode observes quan $k = 1/2 = 0.5$? Quants cicles fa en una unitat de magnitud? I quan $k = 0.25$?

9. *Donada $f(x)$, doneu l'expressió de la funció traslladada 1 unitat a l'esquerra i 2 cap a munt si

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = 1/x$

(c) $f(x) = \ln x$

(d) $f(x) = \sin x$

(e) $f(x) = e^{1/x}$

(f) $f(x) = x \ln x$

(g) $f(x) = x^2 + 3x$

(h) $f(x) = \sqrt{x}$

10. *REPTES:

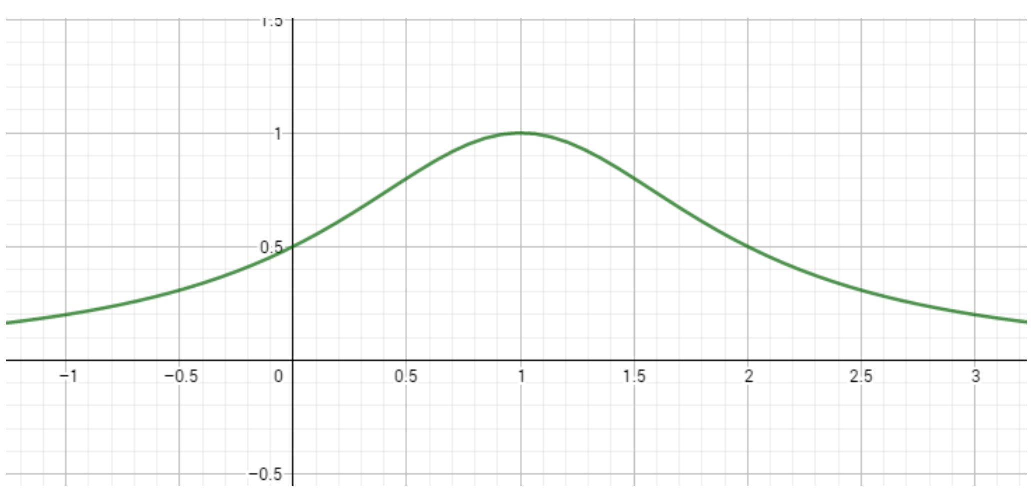
(a) Partint de la funció cosinus construeix una funció $f(x)$ periòdica tal que la y oscil.li entre 2 i 6 i $f(0) = 4$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(b) Partint de la funció exponencial construeix una funció $f(x)$ sempre negativa i que quan $f(0) = -5$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(c) Partint de la funció logaritme construeix una funció $f(x)$ que només estigui definida per $x < -1$ i que quan $f(-5) = 0$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(d) Partint de la funció sinus construeix una funció $f(x)$ periòdica de periode $1/8$ tal que la y oscil.li entre -3 i 3 i $f(0) = 3$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

11. * La següent figura mostra la gràfica de la funció $f(x)$



Dibuixeu a mà, aproximadament, les gràfiques de les funcions $g(x) = 3f(x) + 2$, $h(x) = f(x - 2)$, $k(x) = f(x + 3)$.
Digueu per quins valors de x tenen el màxim les funcions $g(x)$, $h(x)$ i $k(x)$, i quan valen les funcions per aquests valors.

12. * Donades les funcions:

$$f(x) = \sqrt{x} - x, \quad g(x) = \ln x.$$

(a) Representeu a mà la gràfica traslladada de $g(x)$ 2 unitats cap a la dreta. Quina és l'expressió algebraica d'aquesta funció traslladada?

(b) Doneu l'expressió de $f(x - \pi)$.

(c) Quina funció és $g(f(x))$? I $f(g(x))$?

1.3 Funcions definides a trossos

A més a més de les funcions bàsiques i compostes d'aquestes existeixen les **funcions que estan definides a trossos** que són del tipus:

$$f(x) = \begin{cases} \text{expressió 1 funció} & \text{si} \quad \text{condició 1 per x} \\ \text{expressió 2 funció} & \text{si} \quad \text{condició 2 per x} \\ \dots & \qquad\qquad \dots \end{cases}$$

Per exemple, ho són:

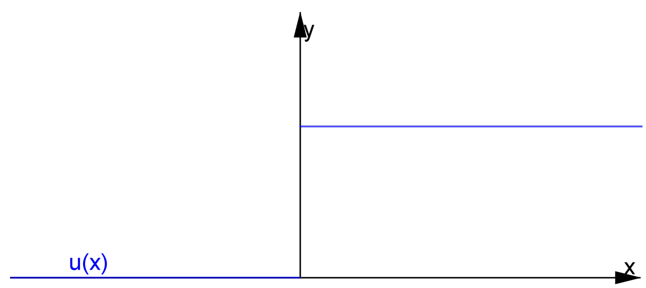
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad \text{altrament} \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & \quad \text{altrament} \end{cases} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -1 & \quad \text{altrament} \end{cases}$$

1.3.1 Funció esgraó o de Heaviside

Una funció definida a trossos que es fa servir àmpliament en el camp de les enginyeries és la **funció esgraó o funció de Heaviside**:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad \text{altrament} \end{cases}$$

$u(x)$ té el salt o esgraó a $x = 0$.



Per tenir el salt a $x = a$ simplement la traslladem a unitats

$$u(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \quad \text{altrament} \end{cases}$$

En general l'expressió:

$$f(x)\, u(x-a)$$

retalla $f(x)$ per $x \geq a$; per $x < a$ fa zero $f(x)$.

Visualitzem-ho per la funció:

$$\sin(2\pi x)\, u(x-1)$$

Entrada: u(x)=Si[x>=0,1,0]
Entrada: u(x-1)
Entrada: f(x)=sin(2*pi*x)
Entrada: f(x)*u(x-1)

Una dent a l'interval $a \leq x < b$ s'expressa

$$u(x-a) - u(x-b) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \leq x < b \\ 0 & \quad \text{altrament} \end{cases}$$

Per tallar $f(x)$ a l'interval $a \leq x < b$ i anul.lar la resta faríem

$$f(x)(u(x-a) - u(x-b))$$

Visualitzem-ho amb $a = 1, b = 2$:

Entrada: u(x-2)
Entrada: u(x-1)-u(x-2)
Entrada: f(x)*(u(x-1)-u(x-2))

La funció de Heaviside és útil per expressar funcions definides a trossos de manera compacta.

Exemples

La funció de Heaviside la podem fer servir per expressar les funcions que:

1. són zero fora de $x \geq a$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} = x^2\, u(x-1)$$

2. són zero fora de $a \leq x < b$

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} = e^x\,(u(x+1) - u(x-1))$$

3. són zero fora de $x < a$

$$h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} = e^x\,(1 - u(x-1))$$

4. en general estan definides amb diversos trossos

$$k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ e^x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = e^x\,(1 - u(x)) + x\,(u(x) - u(x-1)) + x^2\,u(x-1)$$

Que també es pot expressar, començant per la 1a funció de l'esquerra, en aquest cas e^x, definida pels valors de $x < 0$ i restant a cada esgraó la funció de l'esgraó anterior

$$k(x) = e^x + (x - e^x)\,u(x) + (x^2 - x)\,u(x-1).$$

1.3.2 Funció valor absolut

La **funció valor absolut** de x és una funció definida a trossos:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{altrament} \end{cases}$$

En general podem fer el valor absolut d'una funció qualsevol:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{altrament} \end{cases}$$

El valor absolut fa positiva la funció quan no ho és. Per exemple observem les gràfiques de $f(x) = \sin(x)$ i $|f(x)| = |\sin(x)|$:

Entrada: abs(x)
Entrada: f(x)=sin(x)
Entrada: abs(f(x))

1.4 Exercicis

Senyalem amb un * tots els que segur que cal fer. Els problemes senyalats com REPTE cal treballar-los una mica més que la resta.

1. * Representeu $|f(x)|$ per les funcions que indiquem i doneu els punts de tall exactes amb l'eix x:

   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$
   (b) $f(x) = \cos(2\pi x)$
   (c) $f(x) = 2x - 1$
   (d) $f(x) = \log(x+1)$
   (e) $f(x) = 3 - x^2$
   (f) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$

2. * Visualitza le següents funcions definides a trossos i descriu-les en termes de la funció esgraó $u(x)$:

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

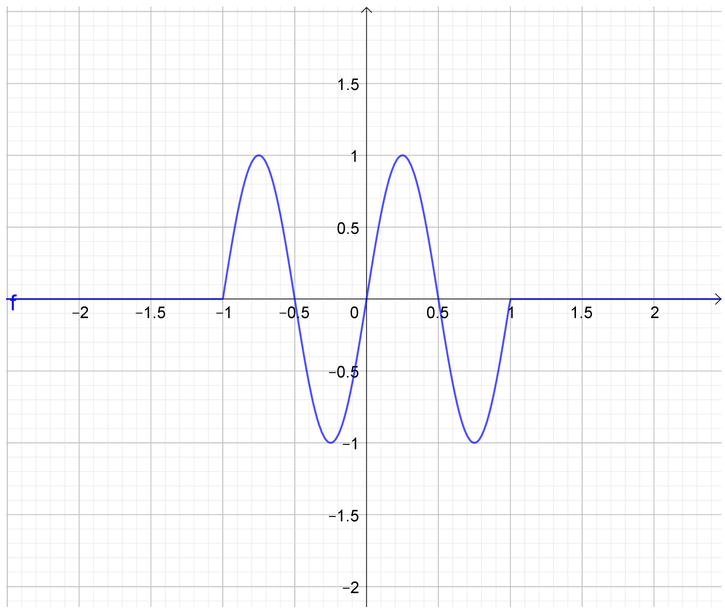
   (d)
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ e^{1/(x-1)} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

3. * Defineix a trossos les següents funcions:

   (a) $f(x) = \sin(2\pi x)\,(u(x-1) - u(x-4))$
   (b) $f(x) = \sin(2\pi x)\,(u(x) - u(x-4)) + u(x-4)$
   (c) $f(x) = x^3\,u(x)$
   (d) $f(x) = x^3 + (x - x^3)\,u(x) + (1-x)\,u(x-1) + 2\,u(x-2)$
   (e) $f(x) = -x(1 - u(x)) + x\,(u(x) - u(x-1)) + (x^2 - x)\,u(x-2)$
   (f) $f(x) = \arctan x + (x^3 - \arctan x)\,u(x) + (x^2 - x^3)\,u(x-1) + (1 - x^2)\,u(x-2)$
   (g) $f(x) = -\cos x + (1 - x + \cos x)\,u(x-1) + (x^2 + x - 1)\,u(x-3)$

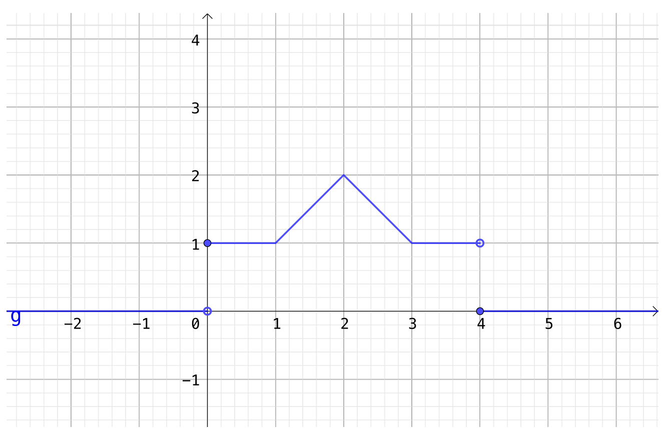
   Comprova que el resultat és correcte fent la gràfica amb Geogebra.

4. *REPTE: Donada la següent funció:



(a) Descriu-la en termes de la funció de Heaviside i usant una funció sinusoidal.
(b) Justifica si és una funció senar o parell.
(c) Doneu l'expressió de la funció traslladada 2 unitats a la dreta i representeu-la.

5. *REPTE: Descriu la següent funció en termes de la funció de Heaviside.



(a) Descriu-la en termes de la funció de Heaviside i usant rectes.
(b) Doneu l'expressió de la funció traslladada 2 unitats a l'esquerra i representeu-la. Justifiqueu si aquesta és una funció senar o parell (excepte potser en algun punt).

Mòdul 2.

Dominis i asímptotes

2.1 Definicions

El **domini d'una funció** $f(x)$ són els valors de x que fan que existeixi la funció:

$$Dom f = \{x \in \mathbb{R} | \quad \exists\, f(x)\}\,.$$

El comportament asimptòtic d'una funció, tant en horitzontal com en vertical, és molt útil i ve donat per les asímptotes de la funció:

- $y = a$ és **asímptota horitzontal** si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{i/o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a,$$

- $x = b$ és **asímptota vertical** si

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{i/o} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty.$$

2.2 Exemples amb GeoGebra

Les asímptotes de

$$f(x) = 1/x,$$

per exemple, es calcularien en GeoGebra amb les instruccions:

Entrada: f(x)=1/x

Entrada: Asímptota[f(x)]

Si es treballa en un altre idioma (que no sigui el català) buscaríem la comanda a la dreta de la línia de comandes on hi ha un interrogant a 'funcions i càlcul'.

Prova què passa si la funció és

$$g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Observa que aquesta és la traslladada una unitat a la dreta de $f(x)$: $g(x) = f(x-1)$.
Prova què passa si la funció és

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Observa que aquesta és la traslladada una unitat cap amunt de $f(x)$.

2.2.1 Atenció

GeoGebra té una limitació important quan en algun dels intervals s'usen funcions com $\sqrt{x}$ o $\ln(x)$, que per $x < 0$ no estan definides. Per exemple la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad\quad \text{altrament} \end{cases} = \sqrt{x}\, u(x)$$

escrita en termes de Heaviside, al GeoGebra s'ha de fer així:

Entrada: f(x)= Si(x>=0,sqrt(x),0)

Un altre problema de visualització amb GeoGebra el podem trobar al buscar les asímptotes de funcions logaritmiques, en aquest cas cal fer servir les comandes de límits laterals per calcular-les.

2.3 Exercicis

Senyalem amb un * tots els que segur que cal fer. Els problemes senyalats com REPTE cal treballar-los una mica més que la resta.
Els dominis i les asímptotes s'han de trobar a mà i comprovar els resultats amb ajuda del GeoGebra.

1. * Calcula el domini i les asímptotes horitzontals i verticals de cadascuna de les funcions $f(x)$ següents. Representa-les gràficament per comprovar els resultats.

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ x & \quad\quad\ \text{altrament} \end{cases}$$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \quad\quad\ \text{altrament} \end{cases}$$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & \quad\quad\ \text{altrament} \end{cases}$$

   (d)
   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1/(x^2-1) & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1/(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

2. * Calcula el domini i les asímptotes horitzontals i verticals de cadascuna de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ següents. Representa-les gràficament per comprovar els resultats.

   (a) $f(x) = \dfrac{-1}{2x-3}, \quad g(x) = 3 + f(x) = 3 + \dfrac{-1}{2x-3}$

   (b) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}, \quad g(x) = f(x-1) = \arctan\dfrac{1}{x-1}$

   (c) $f(x) = e^{1/x}, \quad g(x) = 3 + f(x+1) = 3 + e^{1/(x+1)}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $g(x)$ la traslladada de $f(x)$ 4 unitats cap a l'esquerra,

   (e) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x}$ i $g(x)$ la traslladada de $f(x)$ una unitat cap avall i 2 unitats cap a la dreta.

3. * Calcula el domini i les asímptotes horitzontals i verticals de cadascuna de les funcions següents. Representa-les gràficament per comprovar els resultats.

   (a) $f(x) = \ln(x+1)$

   (b) $f(x) = \arctan(x-0.5)$

   (c) $f(x) = \sqrt{5-x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-4)}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi + x}}$

   (f) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

4. * Calcula el domini i les asímptotes horitzontals i verticals de cadascuna de les funcions següents. Representa-les gràficament per comprovar els resultats.

   (a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$

   (c) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x+1}$

   (d) $f(x) = \sqrt{\ln(-x)}$

   (e) $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+2}$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{|x+4|}$

   (g) $f(x) = \left|x^3+3x+4\right|$

   (h) $f(x) = \ln\left(x^2-9\right)$

   (i) $f(x) = e^{\sqrt{x+5}}$

5. * REPTES:

(a) Partint de la funció $\sqrt{x}$ construeix una funció $f(x)$ que tingui per domini $x \leq -1$ i que $f(-3) = 3$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(b) Partint de la funció $\ln x$ construeix una funció $f(x)$ que tingui per asímptota vertical $x = 2$ i que talli el eix x en $x = 3$ ($f(3) = 0$). Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(c) Partint de la funció $\ln x$ construeix una funció $f(x)$ que tingui per domini $x < -2$ i $f(-3) = 2$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(d) Partint de la funció e^x construeix una funció $f(x)$ que tingui per asímptota horitzontal $y = 2$ i que $f(0) = 3$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(e) Partint de la funció $1/x$ construeix una funció $f(x)$ que tingui asímptotes $y = -1$, $x = -1$ tal que $f(0) = 2$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

(f) Partint de la funció $\arctan(x)$ construeix una funció $f(x)$ que tingui asímptotes horitzontals $y = \pm 1$ i tal que talla en el eix de les x només en el punt $x = -1$. Usa paràmetres, trasllacions o/i les propietats que vulguis.

Mòdul 3.

Continuïtat

3.1 Definicions

Una funció $f(x)$ és **contínua** en un punt $a \in \mathbb{R}$ si:

1. El punt és del domini, $a \in Dom f$.
2. El límit de la funció cap al punt existeix, és a dir, els valors dels límits laterals en el punt existeixen i són finits i coincideixen
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$
3. El límit coincideix amb el valor de la funció en el punt:
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Quan algun d'aquests punts no es compleix i la funció existeix a prop de $x = a$ (pot ser: per l'esquerra o/i dreta de a), aleshores diem que $f(x)$ és **discontínua** en $x = a$.

3.2 Classificació de les discontinuïtats

Les discontinuïtats es poden classificar en (de menys a més greu):

- **Evitable** si existeix el límit $\lim_{x \to a} f(x)$ però o bé $a \notin Dom f$ o bé $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.
- **De salt** si els límits laterals són finits però diferents: $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$.
- **Asimptòtica** si algun dels límits laterals és infinit.
- **Essencial** si algun dels límits laterals no existeix i no és infinit.

3.3 Teorema de Bolzano

Donada una funció $f(x)$ contínua a l'interval $[a, b]$ tal que $f(a)\, f(b) < 0$ aleshores existeix algun zero c de la funció dins l'interval tal que anul.la la funció:

$$\text{existeix} \quad c \in (a, b) \quad | \quad f(c) = 0.$$

3.4 Propietat dels límits

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ i $g(x)$ és una funció acotada (p.e. funcions sinusoidals),
es compleix que:
$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0.$$

3.5 Exemples amb GeoGebra

En cas de treballar amb GeoGebra (en català), es pot calcular límits amb les instruccions:

Entrada: f(x)=1/x
Entrada: a=0
Entrada: LímitDreta[f(x), a]
Entrada: LímitEsquerra[f(x), a]
Entrada: Límit[f(x), a]

que calcula els límits laterals i el límit quan x tendeix a $a = 0$ de $f(x) = 1/x$.

GeoGebra permet calcular limits de funcions definides a trossos, només cal expresar-les en termes de la funció de Heaviside.

3.6 Exercicis

Senyalem amb un * tots els que segur que cal fer. Els problemes senyalats com REPTE cal treballar-los una mica més que la resta.
L'estudi de continuïtat s'ha de fer a mà i comprovar els resultats amb ajuda del GeoGebra.

1. * Estudia la continuïtat de
$$f(x) = e^{1/(x-2)}$$
pas a pas: Visualitza la gràfica, troba el domini i els límits laterals de la funció quan x tendeix a 2.

2. * Donades les funcions $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ i $g(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$
   (a) Representa-les gràficament i fixa't què passa al voltant de l'origen. Discuteix la continuïtat d'aquestes funcions en $x = 0$.
   (b) Representa gràficament $f(x+3)$ i $g(x+3)$. Estudia'n la continuïtat.

3. * Estudia la continuïtat de les funcions següents i classifica les seves discontinuïtats:
   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 11x + 28}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{1 + e^{1/(x-5)}}$
   (c) $f(x) = (x+2)\cos \dfrac{1}{x+2}$
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$
   (e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 8x + 15}$
   (f) $f(x) = \arctan \dfrac{2}{1 - x}$

4. * Estudia la continuïtat de les funcions següents i classifica les seves discontinuïtats:
   (a) $u(x) + u(x-1) + u(x-2)$
   (b) $x\,(1 - u(x)) + x^2\,u(x) + u(x-1)$
   (c) $e^{-x}\,(u(x) - u(x-1))$
   (d) $|1 - x|\,(u(x) - u(x-1)) + e^{-(x-1)}\,u(x-1)$

   pas a pas: Visualitza la gràfica, troba el domini i els límits laterals de la funció allà on convingui.

5. * Estudia la continuïtat de les funcions següents i classifica les seves discontinuïtats:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sin x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \cos^2 \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \ln |x| & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{\arctan x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} (x+2) \sin \left(\dfrac{1}{x+2} \right) & \text{si} \quad x < -2 \\ 1 & \text{si} \quad x = -2 \\ \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x+2} & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

6. * Estudieu el signe de les funcions (ajudeu-vos del Teorema de Bolzano):

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

   (c) $f(x) = e^{-x}\,(x^2 - 2x - 2)$

   (d) $f(x) = x\,e^{x+1}$

7. REPTES: Construeix funcions $f(x)$ amb domini a tot arreu, contínues i definides en 2 trossos (qualsevols) tals que:

   (a) $f(0) = -1$, en un tros hi hagi una recta i en l'altre una funció composta quasevol a partir de $\sqrt{x}$.

   (b) $f(0) = 2$, en un tros hi hagi un valor absolut d'una paràbola i en l'altre una funció composta quasevol a partir de $\ln x$.

Mòdul 4.

Derivabilitat. Creixement/decreixement. Extrems relatius

4.1 Definició i interpretació geomètrica

Una funció $f(x)$ és **derivable** en $x = a \in \mathbb{R}$ si:

1. a és del domini, $a \in Dom f$.
2. El següent límit existeix
$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
Aquest límit és la derivada de la funció en el punt a i s'anomena $f'(a)$.

Geomètricament la derivada en $x = a$ és la **pendent de la recta tangent** a la gràfica en el punt $(a, f(a))$ i la recta tangent és:
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

4.2 Propietat

Les funcions derivables en a són, en particular, contínues en a. Per tant una funció que no és contínua en a no pot ser derivable en a.

4.3 Creixement/decreixement

Direm que f és creixent (decreixent) en un interval I del domini si quan $x < y, x, y \in I$ aleshores $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$).

Es compleix les següents propietats:

- En els intervals on $f' \geq 0$ aleshores la funció és creixent.
- En els intervals on $f' \leq 0$ aleshores la funció és decreixent.

4.4 Punt crític

$x = a$ és un punt crític de f si:

1. a és del domini de f ($a \in Dom f$),
2. i: o bé $f'(a) = 0$,
3. o bé a és un punt de no derivabilitat de f.

4.5 Extrems relatius

Dels màxims i dels mínims, se'n diu de forma general extrems. Els extrems relatius són el valor més gran (màxim) o el més petit (mínim), que pren una funció, en un entorn del punt.
Sigui $a \in Dom f$, es compleix:

- Si la derivada (f') canvia de signe en a aleshores a és un extrem relatiu de f.
  - Si per $x < a,\ f'(x) > 0$ i per $x > a, f'(x) < 0$ aleshores és un màxim relatiu.
  - Si per $x < a,\ f'(x) < 0$ i per $x > a, f'(x) > 0$ aleshores és un mínim relatiu.

Els punts crítics són candidats a extrems relatius.

4.6 Regla d'Hôpital

Si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{o bé} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

aleshores

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que el límit del qüocient de les derivades existeixi.

4.7 Exemple amb ajuda de GeoGebra

Estudiem creixement, decreixement, extrems relatius i derivabilitat de la funció $f(x) = |x^2 - 4|$, que és contínua a tot arreu.

Representem la funció amb GeoGebra:
Entrada: f(x)=abs(x∧2-4))

- Afegim un punt sobre la gràfica amb l'opció Punt en un objecte.
- Representem la recta tangent (agafeu un punt on es pugui trobar la recta tangent) amb l'opció Tangents.
- Amb el botó de la dreta podem moure el punt i observar la pendent de la recta tangent:
  - per exemple, és positiva en $x = 3$, i això implicarà que en $x = 3$ la funció creix,
  - i és negativa en $x = -3$, i això implicarà que en $x = -3$ la funció decreix,
  - no existeix en $x = -2, 2$, és a dir, en $x = -2, 2$ la funció no serà derivable i seran, per tant, punts crítics de f (valors del domini tals que: o bé anul.len la derivada o bé fan que no existeixi la derivada).
  - es fa zero en $x = 0$, per tant $x = 0$ també serà un punt crític.

Per tant, com que $f(x)$ és una funció contínua, l'estudi de creixement, decreixement, extrems relatius i derivabilitat el podem fer directament de la gràfica de $f'(x)$ sense veure la gràfica de $f(x)$.

Representem ara la funció derivada (la pendent de la recta tangent a cada punt) allà on existeix:
Entrada: f'
Observem:

- **Intervals de creixement**: $(-2, 0) \cup (2, \infty)$, on f és creixent ja que f' prén valors positius (pendent ≥ 0). Els intervals de creixement no contenen el $x = 2$ ni $x = -2$ ja que han de ser oberts.
- **Intervals de decreixement**: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, on f és decreixent, ja que f' prén valors negatius (pendent ≤ 0). Els intervals de decreixement també són oberts.

- $x = -2, 2$ i $x = 0$ són punts crítics de f:
  - en $x = -2, 2$ hi ha un salt i no està definida la derivada, per tant f no hi és derivable però al ser la f contínua i la f' fer un salt de negatiu a positiu (la f passa de decreixer a creixer), aquests són mínims relatius de f.
  - en $x = 0$ passa de ser positiva a negativa, és a dir, la pendent de f passa de creixer a decreixer, i per tant $x = 0$ serà un màxim relatiu de f.

En general, quan la funció està definida a trossos, per a que GeoGebra calculi i representi la derivada caldrà fer servir la instrucció:

Entrada: Derivada(f)

Quan hi ha un logaritme la funció s'ha de definir en el domini per a que calculi explícitament la derivada i la faci allà on toca. Per exemple, $f(x) = \ln(x)$:

Entrada: f(x)=Si(x>0,log(x))
Entrada: Derivada(f)

4.8 Exercicis

Senyalem amb un * tots els que segur que cal fer. Els problemes senyalats com REPTE cal treballar-los una mica més que la resta.
Tots s'han de fer a mà i comprovar els resultats amb ajuda del GeoGebra excepte els que ho indiqui.

1. * Calcula la funció derivada de cadascuna de les funcions següents:

   (a) $f(x) = 7^x + e^x - \ln x$ (*)
   (b) $f(x) = 8\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$
   (c) $f(x) = e^x \ln(x-3)$ (*)
   (d) $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{2x+3}$
   (e) $f(x) = \sqrt{2-x^3}$
   (f) $f(x) = \sin^2(3x)$
   (g) $f(x) = \arctan(e^x + 1)$
   (h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ (*)
   (i) $f(x) = \arctan(3x^2)$

   (*) S'ha de definir $f(x)$ en el seu domini per a que GeoGebra calculi i representi correctament la derivada.

2. * Estudia la continuïtat de
$$f(x) = \frac{\arctan(x-1)}{x-1}$$
   pas a pas: Visualitza la gràfica amb GeoGebra, troba el domini i els límits laterals de la funció quan x tendeix a 1. Calcula a mà els límits usant la regla d'Hôpital.

3. * Calcula els límits de les següents funcions en els punts $x = a$ indicats. Aquests límits dónen alguna d'aquestes indeterminacions: $0/0, \infty/\infty, 0\cdot\infty$, i es poden resoldre usant la Regla d'Hôpital.

   (a) $f(x) = \dfrac{\sin(x-a)}{x-a}$ en $x = a$ si $a = 0, 1, -1$
   (b) $f(x) = \dfrac{\arctan(x-a)}{x-a}$ en $x = a$ si $a = 0, 2, -2$
   (c) $f(x)$ és el qüocient de 2 polinomis en $x = \pm\infty$
   (d) $f(x) = \dfrac{e^{x+1}-1}{x+1}$ en $x = -1$
   (e) $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ en $x = -2$
   (f) $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}$ en $x = -2$
   (g) $f(x) = x\ln(x)$ en $x = 0$,
   (h) $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x = +\infty$
   (i) $f(x) = (x-2)\,e^{x-2}$ en $x = -\infty$

4. * Estudia la continuïtat de

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\arctan(x)} & x<0\\ e^{\frac{1}{x-1}} & 0\le x<1\\ (x-1)\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & x>1\end{cases}$$

pas a pas: troba el domini i calcula els límits laterals de la funció en els punts: $x=0, x=1$.

5. * Considera la funció $f(x)=\arctan x$.
   (a) Troba l'equació de la recta tangent a la funció en el punt $x=1$.
   (b) Existeix algun punt on f tingui per tangent a la seva gràfica una recta horitzontal?
   (c) En quin punt la funció donada té una tangent paral·lela a la recta $y=x+3$?

6. * Un saltador es llença a l'aigua des d'un trampolí que està a 10 metres d'altura sobre el nivell de l'aigua. L'altura del saltador ve donada per $h(t)=-5t^2+5t+10$ (t en segons).
   (a) En quin instant de temps toca l'aigua?
   (b) Calcula la velocitat del saltador quan entra a l'aigua.
   (c) Estudia el creixement i decreixement de la funció $h(t)$.
   (d) Troba en quin instant el saltador arriba a l'alçada màxima.

7. * Troba el domini, les asímptotes horitzontals/verticals, els punts crítics, determina els intervals de creixement, decreixement i els extrems relatius de les funcions següents:
   (a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$
   (b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
   (c) $f(x)=\dfrac{3x+5}{7-x}$
   (d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$
   (e) $f(x)=x\,e^{-x}$
   (f) $f(x)=\ln(1+x^2)$

8. * REPTE: Dedueix el comportament (derivabilitat, punts crítics, creixement/decreixement i extrems relatius) d'una funció $f(x)$ contínua a tot arreu només mirant la gràfica de $f'(x)$. Per fer l'exercici representa f, f' amb GeoGebra i amaga la gràfica de f de les funcions:
   (a) $f(x)=|x^3|$
   (b) $f(x)=|x^2-x-2|$
   (c) $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|$
   (d) $f(x)=x\arctan(x)$
   (e) $f(x)=(x-1)\,e^{-(x-1)}$
   (f) $f(x)=\sqrt{4+x^2}\,u(x)-\sqrt{4+x^2}\,(1-u(x))$

9. * Estudieu la derivabilitat de les següents funcions definides a trossos:
   (a) $f(x)=|x+2|$
   (b) $f(x)=|x^2-1|$
   (c) $f(x)=x(1-u(x))+x^2(u(x)-u(x-1))$
   (d) $f(x)=e^{-2x}(u(x)-u(x-2))$

10. REPTE: Segons la teoria de relativitat, la massa m d'un objecte que es mou a velocitat v és

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ \text{kg},$$

on $m_0=1$ és la massa de l'objecte en repòs i $c=3\cdot 10^8$ m s^{-1} és la velocitat de la llum.

(a) Troba el domini de la funció $m(v)$.

(b) Estudia la continuïtat de la funció i troba les seves asímptotes. Interpreta els resultats.

(c) Troba les velocitats per a les quals la massa de l'objecte supera els 3 kg.