

**CO-APUNTS**  
**Estructures**



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
Biblioteca



1400754353



a

*www. azafatas y promotoras .com*

*1400754353*

*CO-APUNTS*

*Estructures*

*Exdòs de préstec*

## EXERCICIS D'ESTRUCTURES II

# ÍNDEX

## Capítol 1.- BIGUES HIPERESTÀTIQUES D'UN TRAM

### Aplicació dels Teoremes de Mohr:

Exercici 1.1.....	1
Exercici 1.2.....	3
Exercici 1.3 (examen novembre 1999).....	5
Exercici 1.4 (examen abril 2000).....	6
Exercici 1.5 (examen octubre 2000).....	7
Exercici 1.6 (examen abril 2001).....	8
Exercici 1.7 (examen octubre 2001).....	9
Exercici 1.8 (examen abril 2002).....	10

### Utilització de formularis:

Exercici 1.9.....	11
Exercici 1.10.....	14
Exercici 1.11 (examen octubre 2000).....	15
Exercici 1.12 (examen abril 2001).....	17
Exercici 1.13 (examen octubre 2001).....	19
Exercici 1.14 (examen abril 2002).....	21
Formulari.....	23

### Exercicis per resoldre:

Exercici 1.15.....	24
Exercici 1.16.....	24
Exercici 1.17.....	24
Exercici 1.18.....	25

### Resultats dels exercicis per resoldre:

Exercici 1.15.....	26
Exercici 1.16.....	27
Exercici 1.17.....	28
Exercici 1.18.....	29

## Capítol 2.- RIGIDESES EN LA FLEXIÓ

### Exercicis resolts:

Exercici 2.1 (examen juny 1999).....	31
Exercici 2.2 (examen abril 2001).....	32
Exercici 2.3 (examen octubre 2000).....	33

Exercici 2.4 (examen abril 2000).....	34
Exercici 2.5 (examen abril 2002).....	35
Exercici 2.6 (examen novembre 1999).....	37
Exercici 2.7 (examen octubre 2001).....	39
Exercici 2.8.....	40
<b>Exercicis per resoldre:</b>	
Exercici 2.9.....	41
Exercici 2.10.....	41
Exercici 2.11.....	41
Exercici 2.12.....	42
<b>Resultats dels exercicis per resoldre:</b>	
Exercici 2.9.....	43
Exercici 2.10.....	43
Exercici 2.11.....	43
Exercici 2.12.....	43

### Capítol 3.- ANÀLISI DE PÒRTICS PLANS ORTOGONALS

<b>Exercicis resolts:</b>	
Exercici 3.1.....	44
Exercici 3.2.....	53
Exercici 3.3.....	58
Exercici 3.4.....	63

### Capítol 4.- ANÀLISI DE BIGUES CONTÍNUES

Introducció.....	67
<b>Exercicis resolts:</b>	
Exercici 4.1.....	67
Exercici 4.2.....	72

### Capítol 5.- VINCLAMENT

<b>Exercicis resolts:</b>	
Exercici 5.1.....	77
<b>Exercicis per resoldre:</b>	
Exercici 5.4.....	80
Exercici 5.5.....	80
<b>Resultats dels exercicis per resoldre:</b>	
Exercici 5.4.....	81

Exercici 5.5.....	81
-------------------	----

## Capítol 6.- ESTRUCTURES D'ACER – COMPROVACIÓ DE SECCIONS

### Exercicis resolts:

Exercici 6.1.....	82
-------------------	----

### Exercicis per resoldre:

Exercici 6.3.....	91
-------------------	----

Exercici 6.4.....	91
-------------------	----

Exercici 6.5.....	91
-------------------	----

Exercici 6.6.....	91
-------------------	----

### Resultats dels exercicis per resoldre:

Exercici 6.3.....	93
-------------------	----

Exercici 6.4.....	93
-------------------	----

Exercici 6.5.....	93
-------------------	----

Exercici 6.6.....	94
-------------------	----



## Capítol 1.- BIGUES HIPERESTÀTIQUES D'UN TRAM

### EXERCICI 1.1

Calcula les reaccions de la biga dibuixada (fig 1.1), utilitzant els teoremes de Mohr.

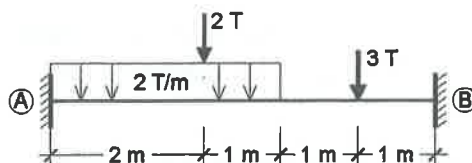


Figura 1.1

#### Solució:

Com que es tracta d'una biga biencastada, sabem que el seu grau hiperestàtic és:  $GH = 2$ .

Això vol dir que per calcular les reaccions de la biga necessitem, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica, dues equacions que haurem de basar en la compatibilitat de les deformacions.

Atenent a la deformació de la biga, (fig 1.1.1), sabem que:

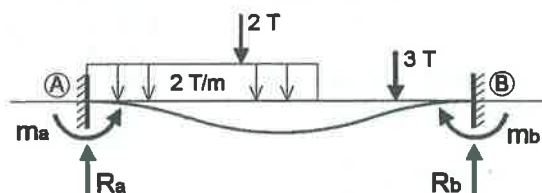


Figura 1.1.1

- El gir de cada una de les seccions extremes de biga (A i B) ha de ser nul, ja que els encastaments els impedeixen:  $\theta_A = 0$      $\theta_B = 0$
- Per tant, les tangents a la deformada, traçades per les seccions A i B, han de ser horitzontals.
- Tant la secció A com la secció B de la biga no es poden desplaçar verticalment per que els respectius encastaments ho impedeixen.

En conseqüència:

- L'angle que formen les dues tangents a la deformada, traçades per les seccions A i B és igual a zero:  $\theta_{AB} = 0$     Aquest angle el podem calcular aplicant el 1er Teorema de Mohr:

$$\theta_{AB} = \frac{\Omega_{AB}}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow \Omega_{AB} = 0$$

- El descens de la secció A de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció B és zero:  $\delta_{A \leftarrow B} = 0$     Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{A \leftarrow B} = \frac{U_{AB}^A}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^A = 0$$

- El descens de la secció B de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció A és zero:  $\delta_{B \leftarrow A} = 0$     Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{B \leftarrow A} = \frac{U_{AB}^B}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^B = 0$$

Així doncs, tot i que només necessitem dues equacions de compatibilitat de les deformacions, en realitat disposem de tres equacions. El criteri per triar dues d'aquestes tres equacions és el següent:

- Com que és més fàcil calcular una àrea que un moment estàtic, sempre agafarem la primera equació:  $\Omega_{AB} = 0$  (àrea del diagrama de moments flectors comprès entre les seccions A i B).
- De les altres dues equacions, podem triar la que vulguem. En aquest cas ens hem quedat amb la segona equació:  $U_{AB}^A = 0$  (moment estàtic del diagrama de moments flectors, comprès entre les seccions A i B, respecte la secció A).

Per calcular l'àrea i el moment estàtic del diagrama de moments flectors, sense haver de integrar l'equació de moments, dibuixarem el diagrama de moments per parts. D'aquesta manera tindrem figures senzilles de les que coneixem molt bé la seva àrea i la situació del seu centre de gravetat. L'àrea i el moment estàtic del diagrama total és la suma dels de cada un dels diagrames parcials.

En la figura 1.1.2 es pot veure el diagrama per parts de la biga.

Càlcul de l'àrea i del moment estàtic del diagrama de moments flectors de la biga:

Diag.	$\Omega_{AB}$ ( $m^2 T$ )	$\gamma_A$ (m)	$U_{AB}^A$ ( $m^3 T$ )
1	$+12,5 \cdot R_b$	1,6	$+20,83 \cdot R_b$
2	$-5 \cdot m_b$	2,5	$-12,5 \cdot m_b$
3	-24	1,3	-32
4	-9	0,75	-6,75
5	-4	0,6	-2,6

Les equacions queden:

$$\sum \Omega_{AB} = 0$$

$$+12,5 \cdot R_b - 5 \cdot m_b - 37 = 0$$

$$\sum U_{AB}^A = 0$$

$$+20,83 \cdot R_b - 12,5 \cdot m_b - 41,416 = 0$$

Multiplicant la primera equació per (-2,5) i sumant-la a la segona equació tenim:

$$R_b = + \frac{51,083}{10,416} = +4,904 T$$

Substituint el valor de la reacció  $R_b$  en la primera equació obtenim  $m_b$ :

$$m_b = \frac{12,5 \cdot 4,904 - 37}{5} = +4,86 mT$$

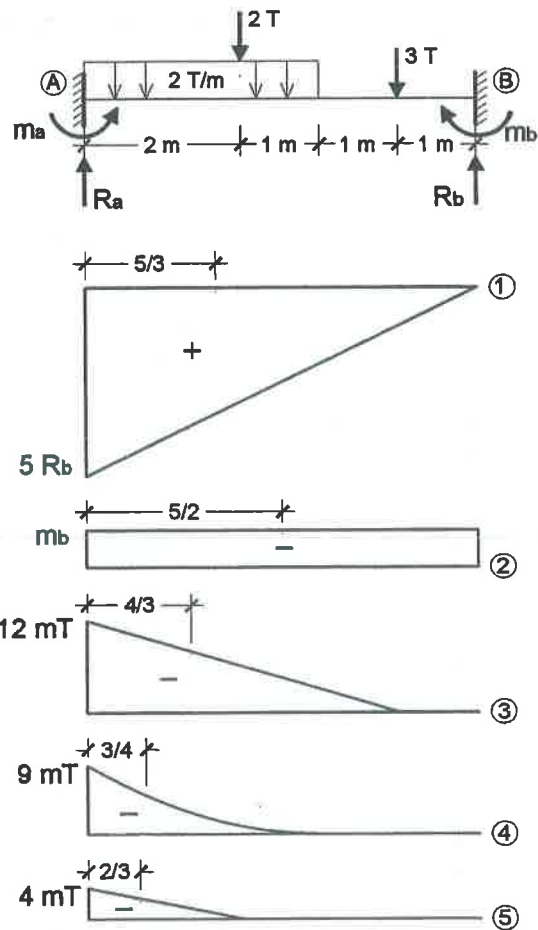


Figura 1.1.2



Imposant l'equilibri de forces verticals obtenim  $R_a$ :

$$R_a = 6 + 2 + 3 - 4,904 = +6,096 \text{ T}$$

Sumant els diagrames de moments flectors obtenim el moment d'encastament perfecte  $m_a$ :

$$m_a = 5 \cdot 4,904 - 4,86 - 12 - 9 - 4 = -5,34 \text{ mT}$$

El signe negatiu indica que les traccions es produeixen en les fibres superiors (signe de diagrama).

Resultat:

$m_a = 5,34 \text{ mT}$ (anti-horari)	$m_b = 4,86 \text{ mT}$ (horari)
$R_a = 6,096 \text{ T}$ (amunt)	$R_b = 4,904 \text{ T}$ (amunt)

El sentit de les reaccions es pot veure en la figura 1.1.2

### EXERCICI 1.2.

Calcula les reaccions de la biga dibuixada (fig 1.2), utilitzant els teoremes de Mohr.

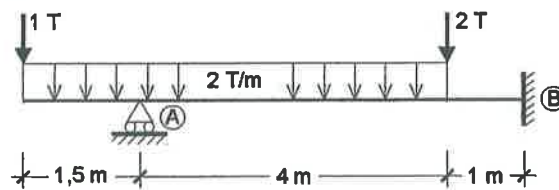


Figura 1.2

Solució:

Com que es tracta d'una biga amb voladís, primer de tot, per tal de simplificar el càlcul, traurem el voladís. Per què la biga resultant es comporti igual que la original, ens caldrà afegir a la secció A el moment flector que la càrrega del voladís li produïa (fig. 1.2.1).

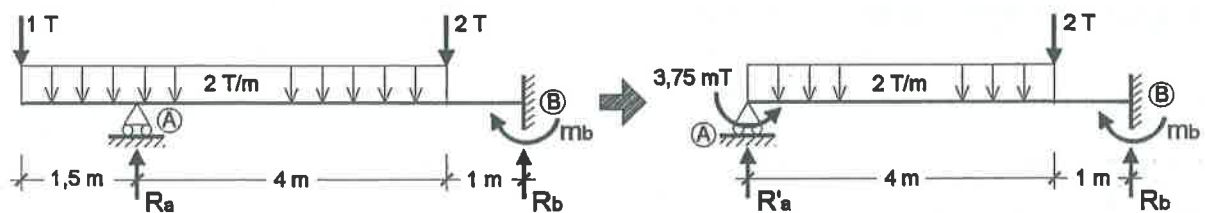


Figura 1.2.1

El moment produït pel voladís és:  $M_{vol} = 1 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} = 1,5 + 2,25 = 3,75 \text{ mT}$

Ara tenim una biga encastada i recolzada i ja sabem que, en aquest cas, el seu grau hiperestàtic és  $GH=1$ . Això vol dir que per calcular les reaccions de la biga, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica, necessitem una altra equació que haurem de basar en la compatibilitat de les deformacions.

Atenent a la deformació de la biga (fig 1.2.2), sabem que:

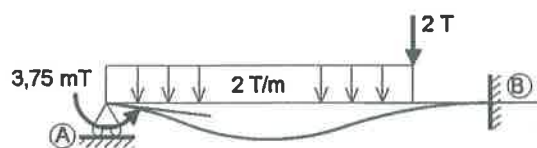


Figura 1.2.2

- El gir de la secció B ha de ser nul, ja que l'encastament l'impedeix.
- Per tant, la tangent a la deformada, traçada per la secció B, ha de ser horitzontal.

- La secció A de la biga no es pot desplaçar verticalment, ja que el recolzament ho impedeix.

En conseqüència:

- El descens de la secció A de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció B és zero:  $\delta_{A \leftarrow B} = 0$  Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{A \leftarrow B} = \frac{U_{AB}^A}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^A = 0$$

Així doncs, l'equació de compatibilitat de les deformacions sortirà de imposar que el moment estàtic del diagrama de moments, comprès entre les seccions A i B de la biga, respecte la secció A és igual a zero.

Per calcular el moment estàtic del diagrama de moments flectors, sense haver de integrar l'equació de moments, dibuixarem el diagrama per parts. D'aquesta manera tindrem figures senzilles de les que coneixem molt bé la seva àrea i la situació del seu centre de gravetat. El moment estàtic del diagrama total és la suma dels moments estàtics de cada un dels diagrames parcials.

En la figura 1.2.3 es pot veure el diagrama, per parts, de la biga. Com que aquests s'han fet des del recolzament A cap a l'encastament B, hem allargat la càrrega repartida fins al final, així el diagrama és una paràbola fins el final, i ho hem compensat afegint una altre càrrega de igual valor i sentit contrari.

Càlcul de l'àrea i del moment estàtic del diagrama de moments flectors de la biga:

Diag.	$\Omega_{AB} \text{ (m}^2 \text{ T)}$	$\gamma_A \text{ (m)}$	$U_{AB}^A \text{ (m}^3 \text{ T)}$
1	$+ 12,5 \cdot R'_a$	3,3	$+ 41,6 \cdot R'_a$
2	- 18,75	2,5	- 46,875
3	- 41,6	3,75	- 156,25
4	- 1	4,6	- 4,6
5	+ 0,3	4,75	+ 1,583

L'equació queda:

$$\sum U_{AB}^A = 0 = +41,6 \cdot R'_a - 206,2083$$

$$R'_a = + \frac{206,2083}{41,6} = 4,949 \text{ T}$$

Imposant l'equilibri de forces verticals obtenim  $R_b$ :

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow R_b = 10 - 4,949 = +5,051 \text{ T}$$

El moment a B el calculem a partir del diagrama per parts (fig.1.2.3):

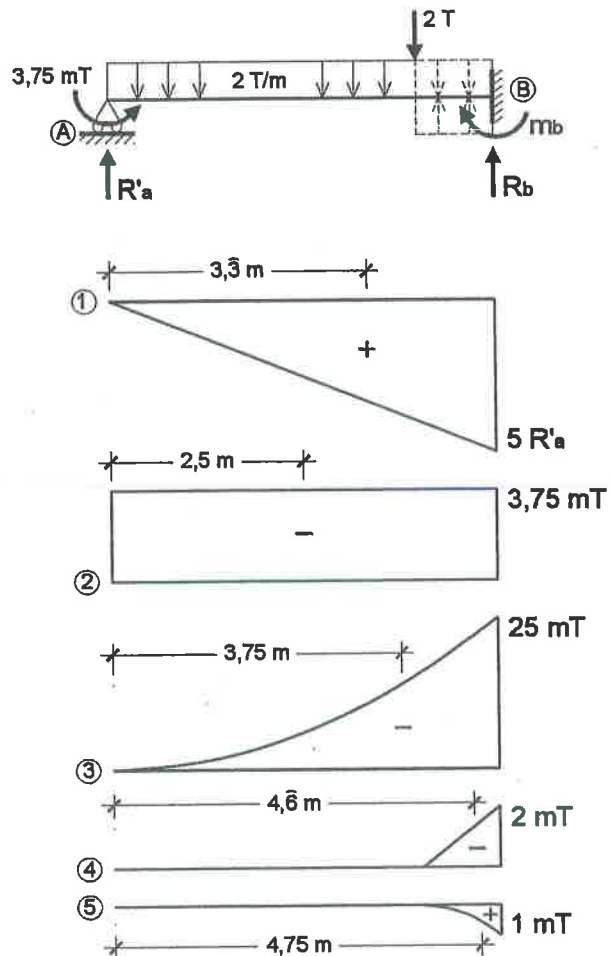


Figura 1.2.3

$$m_b = 5 \cdot 4,949 - 3,75 - 25 - 2 + 1 = -5,005 \text{ mT}$$

El signe negatiu indica que les traccions es produeixen a les fibres superiors (signe de diagrama).

Per obtenir la reacció en el recolzament A de la biga amb voladís, haurem de sumar a la reacció  $R'_a$  la càrrega del voladís:

$$R_a = R'_a + (2 \cdot 1,5 + 1) = 4,949 + 4 = 8,949 \text{ T}$$

En la figura 1.2.4 es presenta l'esquema de la biga on s'indiquen el valor i el sentit de les reaccions obtingudes:

**Resultat:** El valor i el sentit de les reaccions es presenten en la figura 1.2.4

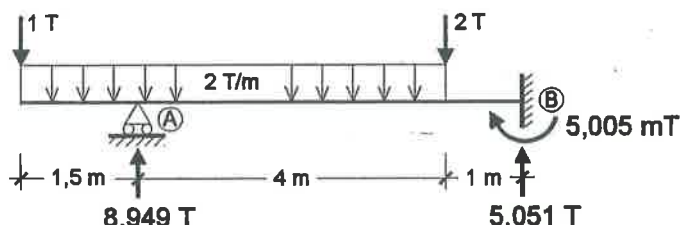


Figura 1.2.4

**EXERCICI 1.3.** (examen novembre 1999)

Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga dibuixada (fig 1.3), utilitzant els teoremes de Mohr.

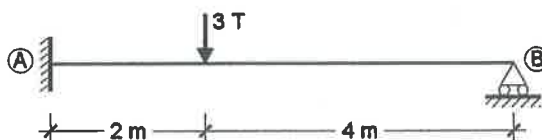


Figura 1.3

**Solució:**

Donat que es tracta d'una biga encastada i recolzada, sabem que només ens cal una equació de compatibilitat de les deformacions, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica.

Atenent a la deformació de la biga (figura 1.3.1), veiem que:

- el descens de la secció B (recolzament) de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció A (encastament) és zero:  $\delta_{B \leftarrow A} = 0$

- Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{B \leftarrow A} = \frac{U_{AB}^B}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^B = 0$$

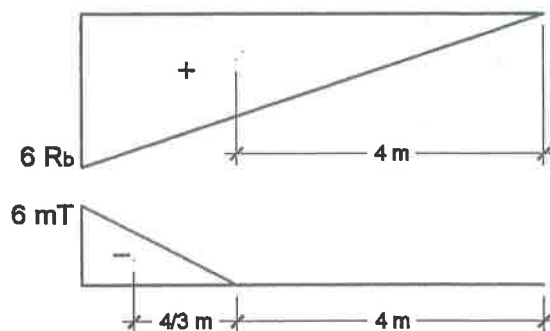
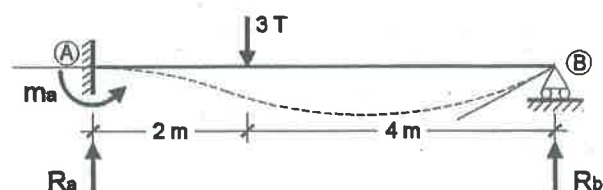


Figura 1.3.1

A partir dels diagrames per parts de la biga (fig. 1.3.1) tenim:

$$U_{AB}^B = \frac{6 \cdot R_b \cdot 6}{2} \cdot 4 - \frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{4}{3} + 4 \right) = 0 \Rightarrow 72 \cdot R_b - 32 = 0 \Rightarrow R_b = 0,4 T$$

També a partir dels diagrames per parts, sumant el valor dels moments en la secció A, obtenim el moment flector en A:

$$m_a = 6 \cdot 0,4 - 6 = -3,3 \text{ mT}$$

El signe negatiu indica que les traccions es produeixen en les fibres superiors (signe de diagrama).

**Resultat:**  $m_a = 3,3 \text{ mT}$  (anti-horari)

**EXERCICI 1.4 (examen abril 2000)**

Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga dibuixada (fig 1.4), utilitzant els teoremes de Mohr.

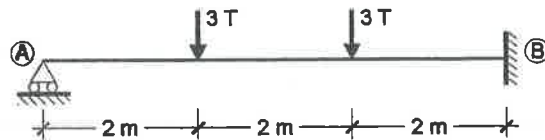


Figura 1.4

**Solució**

Donat que es tracta d'una biga encastada i recolzada, sabem que només ens cal una equació de compatibilitat de les deformacions, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica.

Atenent a la deformació de la biga (figura 1.4.1), veiem que:

- El descens de la secció A (recolzament) de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció B (encastament) és zero:  $\delta_{A \leftarrow B} = 0$
- Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{A \leftarrow B} = \frac{U_{AB}^A}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^A = 0$$

A partir dels diagrames per parts de la biga (fig. 1.4.1) tenim:

Diag.	$\Omega_{AB}$ ( $m^2 T$ )	$\gamma_A$ (m)	$U_{AB}^A$ ( $m^3 T$ )
1	$+18 \cdot R_a$	4	$+72 \cdot R_a$
2	-24	4,6	-112
3	-6	5,3	-32

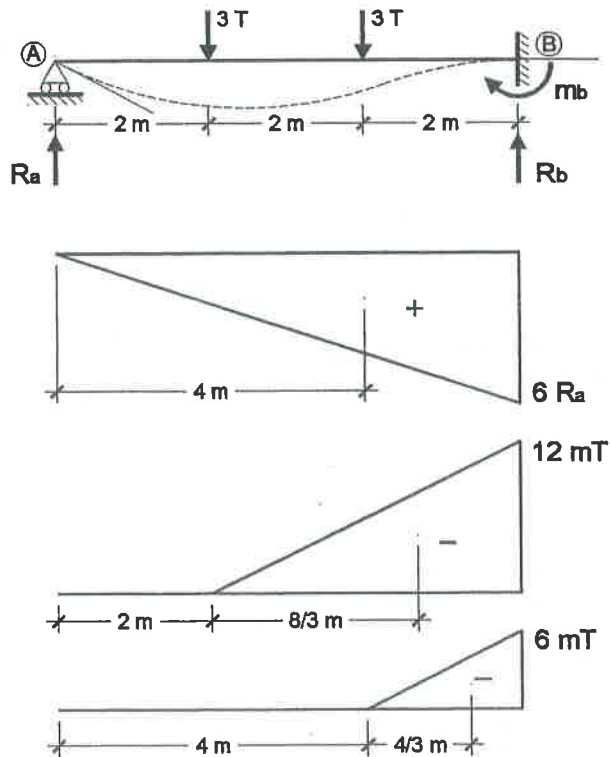


Figura 1.4.1

L'equació queda:

$$\sum U_{AB}^A = 0 = +72 \cdot R_a - 144 \quad R_a = +\frac{144}{72} = 2 \text{ T}$$

El moment a B el calculem a partir del diagrama per parts (fig. 1.4.1):

$$m_b = 6 \cdot 2 - 12 - 6 = -6 \text{ mT}$$

El signe negatiu indica que les traccions es produeixen a les fibres superiors (signe de diagrama).

**Resultat:**  $m_b = 6 \text{ mT}$  (horari)

**EXERCICI 1.5 (examen octubre 2000)**

Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga dibuixada (fig 1.5), utilitzant els teoremes de Mohr.

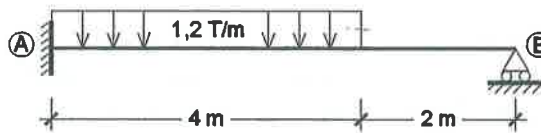


Figura 1.5

**Solució**

Donat que es tracta d'una biga encastada i recolzada, sabem que només ens cal una equació de compatibilitat de les deformacions, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica.

Atenent a la deformació de la biga (figura 1.5.1), veiem que:

- el descens de la secció B (recolzament) de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció A (encastament) és zero:  $\delta_{B \leftarrow A} = 0$
- Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{B \leftarrow A} = \frac{U_{AB}^B}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^B = 0$$

A partir dels diagrames per parts de la biga (fig. 1.5.1) tenim:

Diag.	$\Omega_{AB}$ (m <sup>2</sup> T)	$\gamma_B$ (m)	$U_{AB}^B$ (m <sup>3</sup> T)
1	$+18 \cdot R_b$	4	$+72 \cdot R_b$
2	-12,8	5	-64

L'equació queda:

$$\sum U_{AB}^B = 0 = +72 \cdot R_b - 64$$

$$R_b = +\frac{64}{72} = 0,8 \text{ T}$$

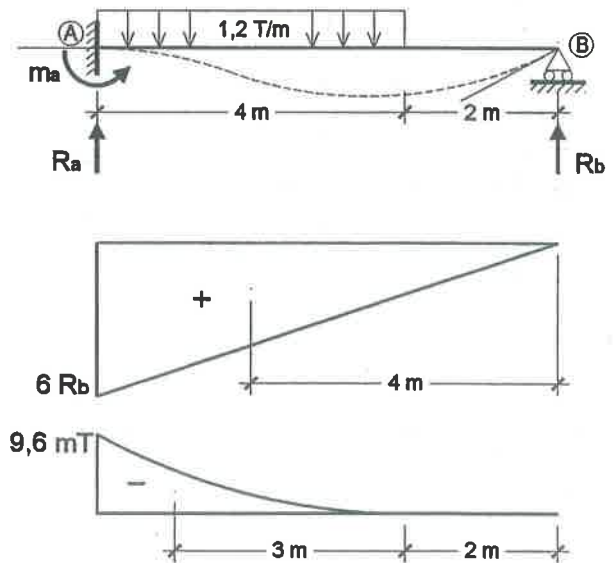


Figura 1.5.1

El moment a A el calculem a partir del diagrama per parts (fig. 1.5.1):

$$m_a = 6 \cdot 0,8 - 9,6 = -4,26 \text{ mT}$$

El signe negatiu indica que les traccions es produeixen a les fibres superiors (signe de diagrama).

**Resultat:**  $m_a = 4,26 \text{ mT}$  (anti-horari)

**EXERCICI 1.6** (examen abril 2001)

Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga dibuixada (fig 1.6), utilitzant els teoremes de Mohr.

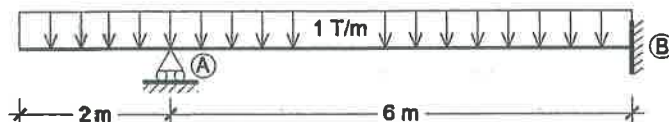


Figura 1.6

**Solució**

Com que es tracta d'una biga amb voladís, primer de tot, per tal de simplificar el càlcul, traurem el voladís. Per què la biga resultant es comporti igual que la original, ens caldrà afegir a la secció A el moment flector que la càrrega del voladís li produïa (fig. 1.6.1).

El moment produït pel voladís és:  $M_{vol} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \text{ mT}$

Donat que es tracta d'una biga encastada i recolzada, sabem que només ens cal una equació de compatibilitat de les deformacions, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica.

Atenent a la deformació de la biga (figura 1.6.1), veiem que:

- El descens de la secció A (recolzament) de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció B (encastament) és zero:  $\delta_{A \leftarrow B} = 0$
- Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{A \leftarrow B} = \frac{U_{AB}^A}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^A = 0$$

A partir dels diagrames per parts de la biga (fig. 1.6.1) tenim:

Diag.	$\Omega_{AB} \text{ (m}^2 \text{ T)}$	$\gamma_A \text{ (m)}$	$U_{AB}^A \text{ (m}^3 \text{ T)}$
1	$+18 \cdot R'_a$	4	$+72 \cdot R'_a$
2	-12	3	-36
3	-36	4,5	-162

L'equació queda:

$$\sum U_{AB}^A = 0 = +72 \cdot R'_a - 198$$

$$R'_a = + \frac{198}{72} = 2,75 \text{ T}$$

El moment a B el calculem a partir del diagrama per parts (fig. 1.4.1):

$$m_b = 6 \cdot 2,75 - 2 - 18 = -3,5 \text{ mT}$$

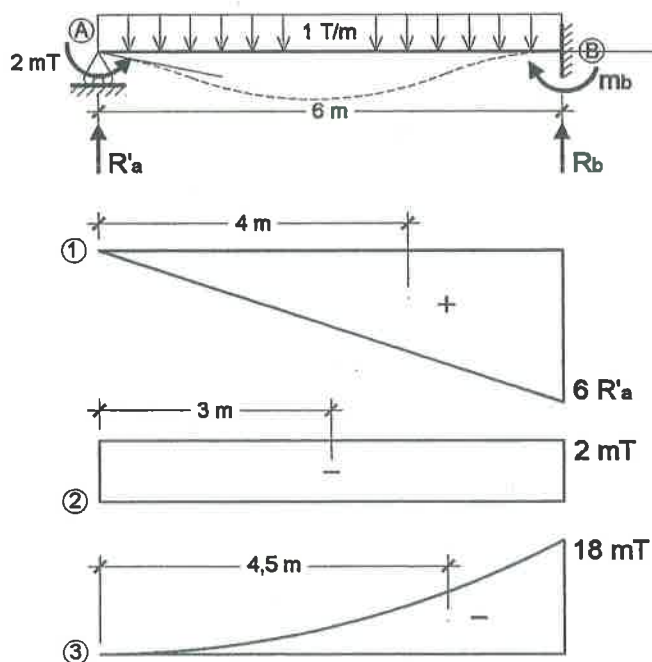


Figura 1.6.1



El signe negatiu indica que les traccions es produeixen a les fibres superiors (signe de diagrama).

Resultat:

$$m_b = 3,5 \text{ mT (horari)}$$

**EXERCICI 1.7 (examen octubre 2001)**

Calcula els moments d'encastament perfecte de la biga dibuixada (fig 1.7), utilitzant els teoremes de Mohr.

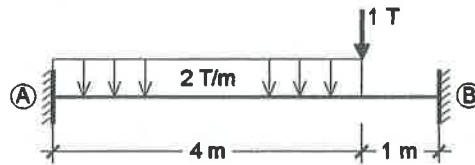


Figura 1.7

**Solució**

Com que es tracta d'un biga biencastada, sabem que per calcular les reaccions de la biga necessitem, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica, dues equacions que haurem de basar en la compatibilitat de les deformacions.

Atenent a la deformació de la biga, (fig 1.7.1), sabem que:

- L'angle que formen les dues tangents a la deformada, traçades per les seccions A i B és igual a zero:  $\theta_{AB} = 0$

- Aquest angle el podem calcular aplicant el 1er Teorema de Mohr:

$$\theta_{AB} = \frac{\Omega_{AB}}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow \Omega_{AB} = 0$$

- El descens de la secció A de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció B és zero:  $\delta_{A \leftarrow B} = 0$

- Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr:

$$\delta_{A \leftarrow B} = \frac{U_{AB}^A}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^A = 0$$

A partir dels diagrames per parts de la biga (fig. 1.7.1) tenim:

Diag.	$\Omega_{AB} \text{ (m}^2 \text{ T)}$	$\gamma_A \text{ (m)}$	$U_{AB}^A \text{ (m}^3 \text{ T)}$
1	$+12,5 \cdot R_b$	1,6	$+20,83 \cdot R_b$
2	$-5 \cdot m_b$	2,5	$-12,5 \cdot m_b$
3	-8	1,3	-10,6
4	-21,3	1	-21,3

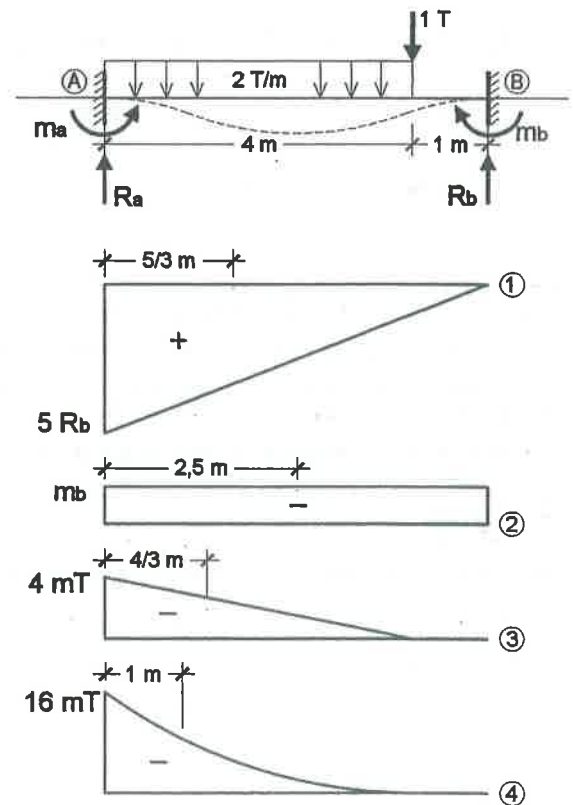


Figura 1.7.1

Les equacions queden:

$$\sum \Omega_{AB} = 0 \quad + 12,5 \cdot R_b - 5 \cdot m_b - 29,3 = 0$$

$$\sum U_{AB}^A = 0 \quad + 20,83 \cdot R_b - 12,5 \cdot m_b - 32 = 0$$

Multiplicant la primera equació per (-2,5) i sumant-la a la segona equació tenim:

$$R_b = + \frac{41,3}{10,416} = + 3,968 \text{ T}$$

Substituint el valor de la reacció  $R_b$  en la primera equació obtenim  $m_b$ :

$$m_b = \frac{12,5 \cdot 3,968 - 29,3}{5} = + 4,053 \text{ mT}$$

Sumant els diagrames de moments flectors (fig 1.7.1) obtenim el moment d'encastament perfecte  $m_a$ :

$$m_a = 5 \cdot 3,968 - 4,053 - 4 - 16 = - 4,213 \text{ mT}$$

El signe negatiu indica que les traccions es produeixen en les fibres superiors (signe de diagrama).

**Resultat:**

$m_a = 4,213 \text{ mT}$ (anti-horari)	$m_b = 4,053 \text{ mT}$ (horari)
--	-----------------------------------

### EXERCICI 1.8 (examen abril 2002)

Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga dibuixada (fig 1.8), utilitzant els teoremes de Mohr.

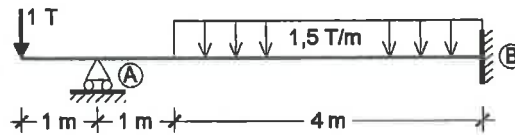


Figura 1.8

### Solució

Com que es tracta d'una biga amb voladís, primer de tot, per tal de simplificar el càlcul, traurem el voladís. Per què la biga resultant es comporti igual que la original, ens caldrà afegir a la secció A el moment flector que la càrrega del voladís li produïa (fig. 1.8.1).

El moment produït pel voladís és:  $M_{vol} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ mT}$

Donat que es tracta d'una biga encastada i recolzada, sabem que només ens cal una equació de compatibilitat de les deformacions, a més de les equacions d'equilibri de l'estàtica.

Atenent a la deformació de la biga (figura 1.8.1), veiem que:

- El descens de la secció A (recolzament) de la deformada, respecte la tangent traçada a la deformada per la secció B (encastament) és zero:  $\delta_{A \leftarrow B} = 0$

Aquest descens el podem calcular aplicant el 2on Teorema de Mohr.

$$\delta_{A \leftarrow B} = \frac{U_{AB}^A}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow U_{AB}^A = 0$$

A partir dels diagrames per parts de la biga (fig. 1.8.1) tenim:



Diag.	$\Omega_{AB}$ ( $m^2 T$ )	$\gamma_A$ (m)	$U_{AB}^A$ ( $m^3 T$ )
1	$+12,5 \cdot R'_a$	3,3	$+41,6 \cdot R'_a$
2	-5	2,5	-12,5
3	-16	4	-64

L'equació queda:

$$\sum U_{AB}^A = 0 = +41,6 \cdot R'_a - 76,5$$

$$R'_a = + \frac{76,5}{41,6} = 1,836 T$$

El moment a B el calculem a partir del diagrama per parts (fig. 1.8.1):

$$m_b = 5 \cdot 1,836 - 1 - 12 = -3,82 mT$$

El signe negatiu indica que les traccions es produeixen a les fibres superiors (signe de diagrama).

Resultat:

$$m_b = 3,82 mT \quad (\text{horari})$$

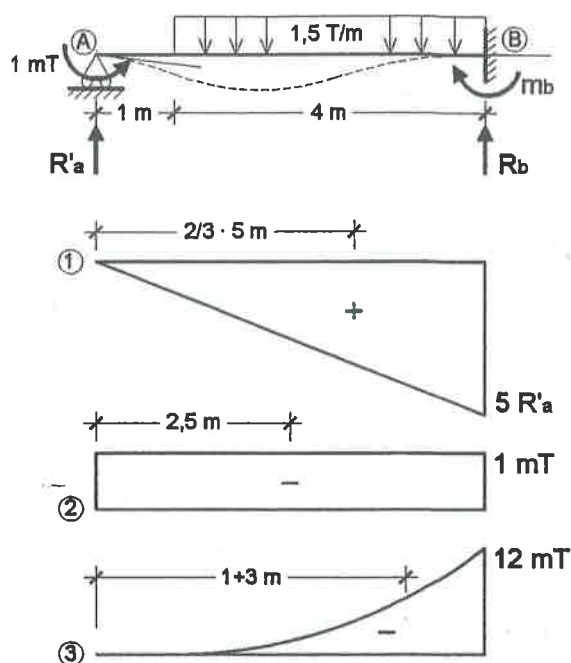


Figura 1.8.1

### EXERCICI 1.9

A partir de la biga de l'exercici 1.1 (fig. 1.1):

- Calcula els moments d'encastament perfecte de la biga, utilitzant les fórmules de m.e.p.
- Després, calcula les reaccions verticals, però sense utilitzar el formulari.
- Finalment, dibuixa el diagrama de moments flectors i el d'esforços tallants de la biga, a escala i indicant els valors significatius.

### Solució

Per poder utilitzar les fórmules de moments d'encastament perfecte haurem de descompondre la biga en casos de càrrega senzills (això ho podem fer per que es compleix el principi de superposició causa-efecte).

Pel cas de la biga proposada, aquests casos de càrrega són els dibuixats en la figura 1.9.1, i els moments d'encastament perfecte seran:

$$m_a = m_{a1} + m_{a2} + m_{a3}$$

$$m_b = m_{b1} + m_{b2} + m_{b3}$$

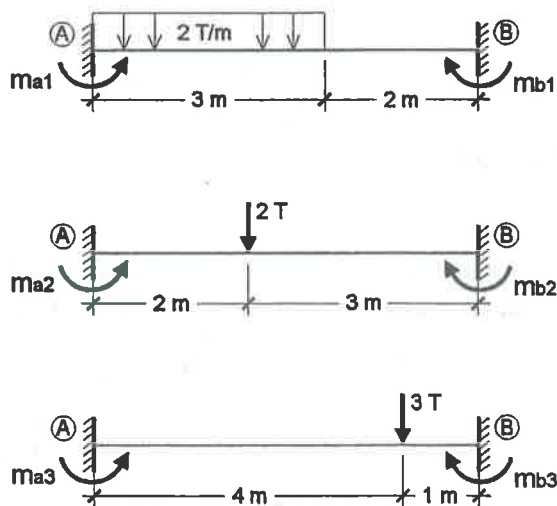


Figura 1.9.1

Aplicant les fórmules tenim:

$$m_{a1} = \frac{2 \cdot 3^2}{12} \cdot \left[ 6 - \frac{3}{5} \cdot \left( 8 - 3 \cdot \frac{3}{5} \right) \right] = 3,42 \text{ mT}$$

$$m_{b1} = \frac{2 \cdot 3^3}{12 \cdot 5} \cdot \left( 4 - 3 \cdot \frac{3}{5} \right) = 1,98 \text{ mT}$$

$$m_{a2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3^2}{5^2} = 1,44 \text{ mT}$$

$$m_{b2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^2}{5^2} = 0,96 \text{ mT}$$

$$m_{a3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1^2}{5^2} = 0,48 \text{ mT}$$

$$m_{b3} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 4^2}{5^2} = 1,92 \text{ mT}$$

El sentit d'aquests moments és el indicat en la figura 1.9.1.

Finalment, els moments d'encastament perfecte de la biga proposada són:

$$m_a = 3,42 + 1,44 + 0,48 = 5,34 \text{ mT}$$

$$m_b = 1,98 + 0,96 + 1,92 = 4,86 \text{ mT}$$

Podeu comprovar que els resultats obtinguts utilitzant els Teoremes de Mohr (exercici 1.1) són idèntics als obtinguts amb les fórmules de m.e.p., tal com era d'esperar.

**Resultat a):**

$m_a = 5,34 \text{ mT}$ (anti-horari)	$m_b = 4,86 \text{ mT}$ (horari)
---------------------------------------	----------------------------------

Un cop coneguts els valors i sentits dels moments d'encastament perfecte, podem calcular les reaccions de la biga, sense utilitzar formularis. Per fer el càlcul més ràpid i intuïtiu, desdoblem la biga en dues (fig. 1.9.2):

- Una biga bi-recolzada, sobre la que hi actua tota la càrrega, excepte els moments dels extrems. A les reaccions d'aquesta biga en diem "Reaccions Isostàtiques".
- Una biga bi-recolzada, sobre la que hi actuen només els moments dels extrems. A les reaccions d'aquesta biga en diem "Reaccions Hiperestàtiques".

Ara podem calcular les reaccions de cada una de les dues bigues:

Reaccions isostàtiques:

$$R_{a1} = \frac{3 \cdot 1}{5} + \frac{2 \cdot 3}{5} + \frac{6 \cdot 3,5}{5} = 0,6 + 1,2 + 4,2 = 6 \text{ T}$$

$$R_{b1} = \frac{3 \cdot 4}{5} + \frac{2 \cdot 2}{5} + \frac{6 \cdot 1,5}{5} = 2,4 + 0,8 + 1,8 = 5 \text{ T}$$

Reaccions hiperestàtiques:

$$R_{a2} = -R_{b2} = \frac{5,34 - 4,86}{5} = 0,096 \text{ T}$$

El sentit d'aquestes reaccions es pot veure en la figura 1.9.2.

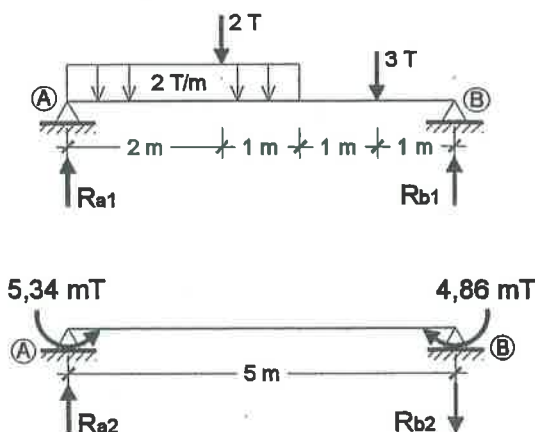


Figura 1.9.2

La superposició de les dues bigues dibuixades és la biga proposada; per tant, la suma de les reaccions ens donarà les reaccions de la biga real.

$$R_a = R_{a1} + R_{a2} = 6 + 0,096 = 6,096 \text{ T}$$

$$R_b = R_{b1} + R_{b2} = 5 - 0,096 = 4,904 \text{ T}$$

Podeu comprovar que els resultats obtinguts utilitzant els Teoremes de Mohr (exercici 1.1) són idèntics als actuals, tal com era d'esperar.

**Resultat b):**

$R_a = 6,096 \text{ T}$ (amunt)	$R_b = 4,904 \text{ T}$ (amunt)
---------------------------------	---------------------------------

**Resultat c):**

En la figura 1.9.3 es presenten els diagrames de moments flectors i esforços tallants, a escala, de la biga proposada.

ESQUEMA I REACCIONS (Escala de longituds: 1/50)

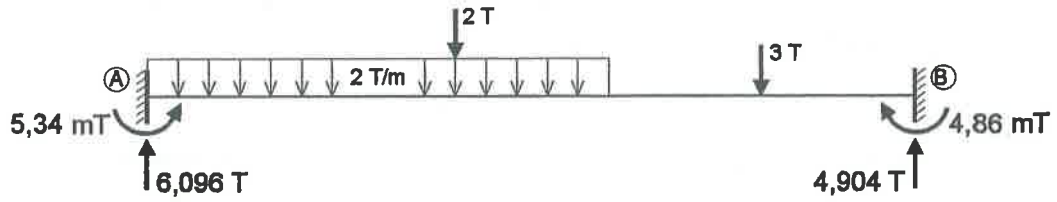


DIAGRAMA DE MOMENTS FLECTORS (Escala: 1 cm = 1 mT)

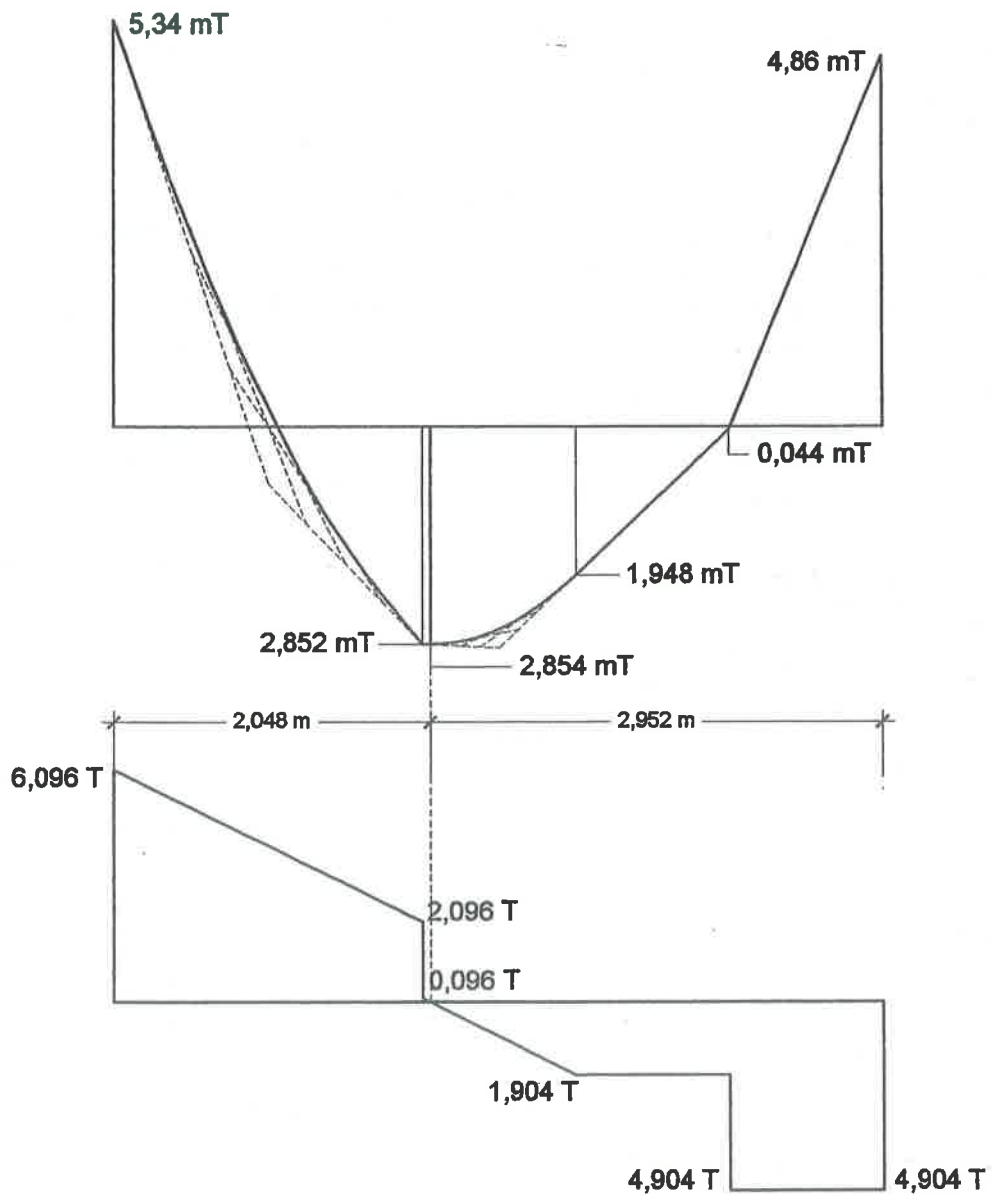


DIAGRAMA D'ESFORÇOS TALLANTS (Escala: 1 cm = 2 T)

Figura 1.9.3

**EXERCICI 1.10**

A partir de la biga de l'exercici 1.2 (fig. 1.2):

- Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga, utilitzant les fórmules de m.e.p.
- Després, calcula les reaccions verticals, però sense utilitzar el formulari.
- Finalment, dibuixa el diagrama de moments flectors i el d'esforços tallants de la biga, a escala i indicant els valors significatius.

**Solució**

Com que es tracta d'una biga amb voladís, primer de tot traurem el voladís, tal com hem fet en l'exercici 1.2. Per què la biga resultant es comporti igual que la original, ens caldrà afegir a la secció A el moment flector que la càrrega del voladís li produïa (figura 1.10.1).

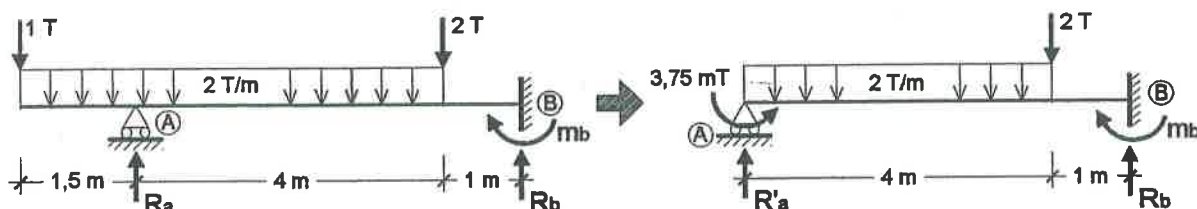


Figura 1.10.1

Ara tenim una biga encastada i recolzada, però per poder utilitzar les fórmules de moments d'encastament perfecte haurem de descompondre la biga en casos de càrrega senzills (això ho podem fer per que es compleix el principi de superposició causa-efecte).

Aquests casos de càrrega són els indicats en la figura 1.10.2, i el moment d'encastament perfecte serà:

$$m_b = m_{b1} + m_{b2} + m_{b3}$$

Aplicant les fórmules tenim:

$$m_{b1} = \frac{2 \cdot 4^2}{8 \cdot 5^2} (2 \cdot 5^2 - 4^2) = 5,44 \text{ mT}$$

$$m_{b2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (5 + 4)}{2 \cdot 5^2} = 1,44 \text{ mT}$$

$$m_{b3} = \frac{3,75}{2} = 1,875 \text{ mT}$$

- El sentit de gir d'aquests moments està indicat en el dibuix.
- Finalment, el moment d'encastament perfecte de la biga és el següent:

$$m_b = 5,44 + 1,44 - 1,875 = 5,005 \text{ mT}$$

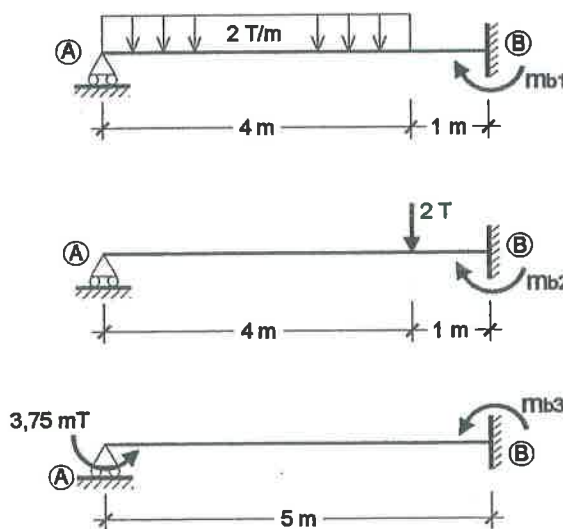


Figura 1.10.2

Podeu comprovar que el resultat obtingut utilitzant els Teoremes de Mohr (exercici 1.2) és idèntic a l'obtingut amb les fórmules de m.e.p., tal com era d'esperar.

Resultat a):

$$m_b = 5,005 \text{ mT (horari)}$$

Un cop conegut el valor i el sentit del moment d'encastament perfecte, podem calcular les reaccions de la biga, sense utilitzar formularis. Per fer el càlcul més ràpid i intuïtiu, desdoblem la biga, sense voladís, en dues (figura 1.10.3):

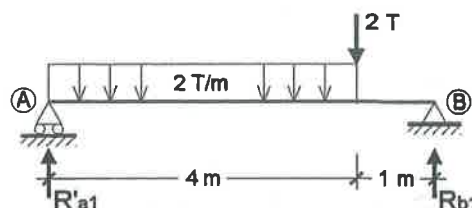
- Una biga bi-recolzada, sobre la que hi actua tota la càrrega, excepte els moments dels extrems. A les reaccions d'aquesta biga en diem "Reaccions Isostàtiques".
- Una biga bi-recolzada, sobre la que hi actuen només els moments dels extrems. A les reaccions d'aquesta biga en diem "Reaccions Hiperestàtiques".

Ara podem calcular les reaccions de cada una de les dues bigues:

Reaccions isostàtiques:

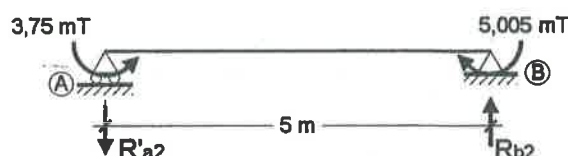
$$R'_{a1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{5} + \frac{2 \cdot 1}{5} = 4,8 + 0,4 = 5,2 \text{ T}$$

$$R_{b1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{5} + \frac{2 \cdot 4}{5} = 3,2 + 1,6 = 4,8 \text{ T}$$



Reaccions Hiperestàtiques:

$$R'_{a2} = -R_{b2} = \frac{5,005 - 3,75}{5} = 0,251 \text{ T}$$



El sentit d'aquestes reaccions es pot veure en la figura 1.10.3.

Figura 1.10.3

La suma d'aquestes reaccions ens donarà les reaccions de la biga sense voladís; per tant, per determinar la reacció en el recolzament A de la biga original, cal tenir en compte la càrrega del voladís. Així tenim:

$$R_a = Q_{vol} + R'_{a1} + R'_{a2} = (2 \cdot 1,5 + 1) + 5,2 - 0,251 = 8,949 \text{ T}$$

$$R_b = R_{b1} + R_{b2} = 4,8 + 0,251 = 5,051 \text{ T}$$

Podeu comprovar que el resultat obtingut utilitzant els Teoremes de Mohr (exercici 1.2) són idèntics als actuals, tal com era d'esperar.

Resultat b):

$R_a = 8,949 \text{ T}$ (amunt)	$R_b = 5,051 \text{ T}$ (amunt)
---------------------------------	---------------------------------

Resultat c):

En la figura 1.10.4 es presenten els diagrames de moments flectors i esforços tallants, a escala, de la biga proposada.

### EXERCICI 1.11 (examen octubre 2000)

A partir de la biga de la figura 1.11:

- Calcula els moments d'encastament perfecte de la biga, utilitzant les fórmules de m.e.p.
- Després, calcula les reaccions verticals, però sense utilitzar el formulari.

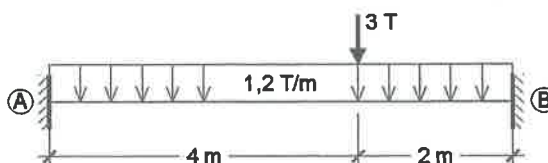


Figura 1.11

### Solució

Per aplicar les fórmules, descomponem la biga en casos de càrrega simples, tal com es pot veure en la figura 1.11.1

ESQUEMA I REACCIONS (Escala de longituds: 1/50)

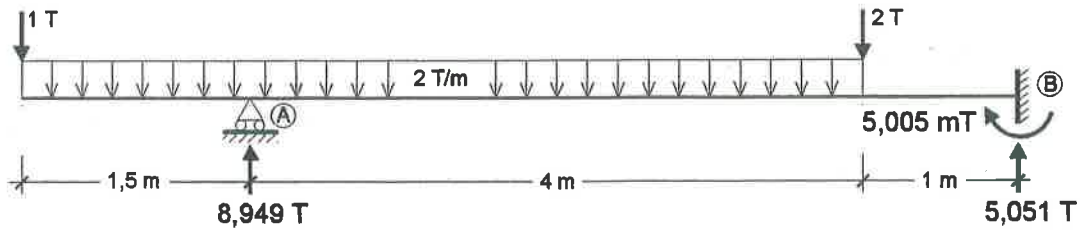


DIAGRAMA DE MOMENTS FLECTORS (Escala: 1 cm = 1 mT)

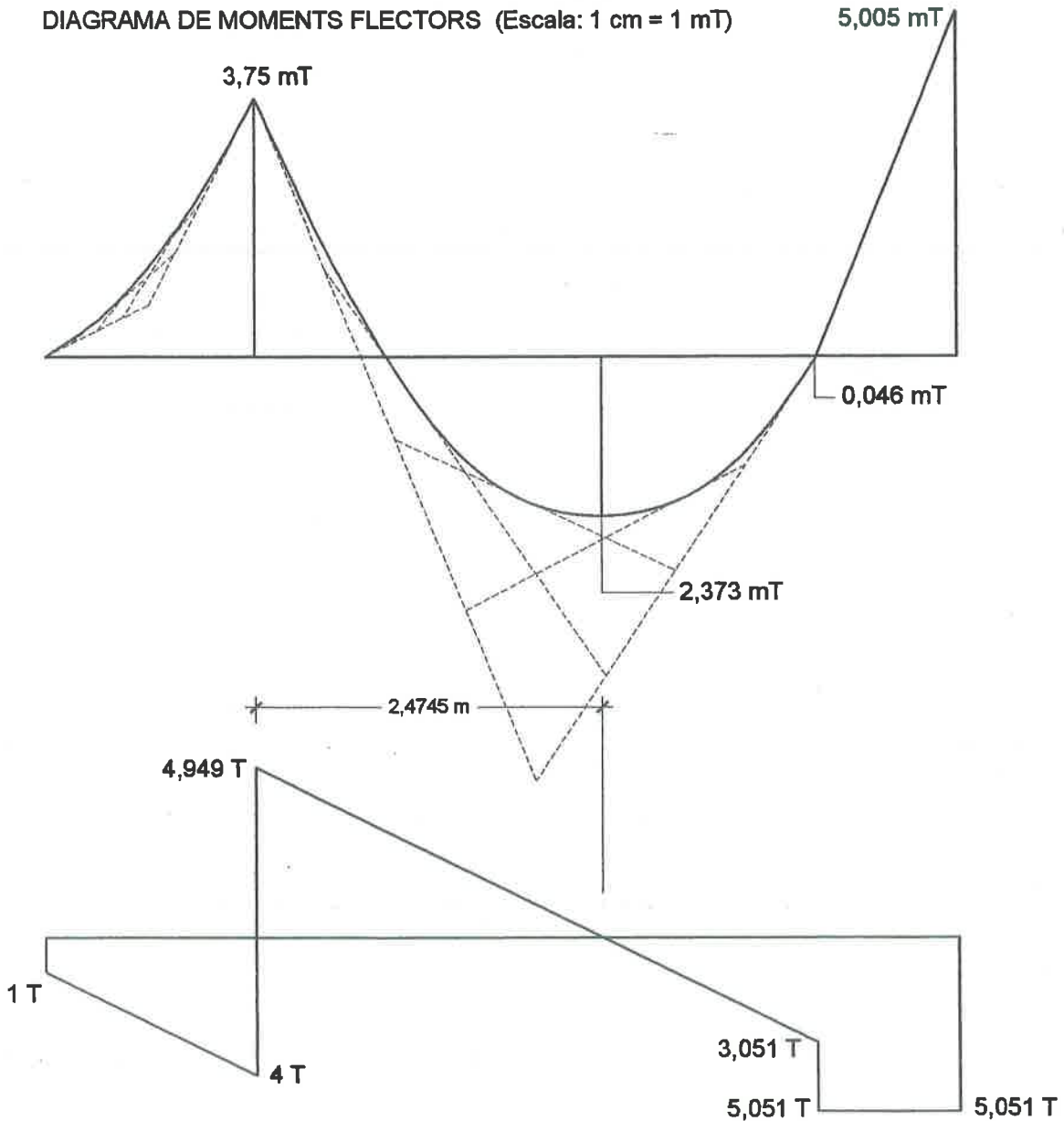


DIAGRAMA D'ESFORÇOS TALLANTS (Escala: 1 cm = 2 T)

Figura 1.10.4



Aplicant les fórmules tenim:

$$m_{a1} = -m_{b1} = \frac{12 \cdot 6^2}{12} = 3,6 \text{ mT}$$

$$m_{a2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2^2}{6^2} = 1,3 \text{ mT}$$

$$m_{b2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^2} = 2,6 \text{ mT}$$

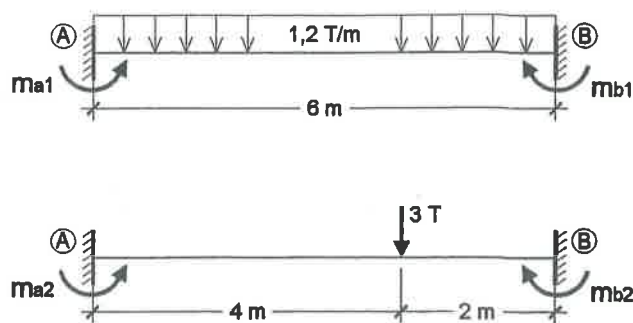


Figura 1.11.1

Els moments d'encastament perfecte de la biga són:

$$m_a = m_{a1} + m_{a2} = 3,6 + 1,3 = 4,93 \text{ mT}$$

$$m_b = m_{b1} + m_{b2} = 3,6 + 2,6 = 6,26 \text{ mT}$$

Resultat a):

$m_a = 4,93 \text{ mT}$ (anti-horari)	$m_b = 6,26 \text{ mT}$ (horari)
---------------------------------------	----------------------------------

Un cop coneguts els valors i sentits dels moments d'encastament perfecte, podem calcular les reaccions de la biga, sense utilitzar formularis. Per fer el càlcul més ràpid i intuïtiu, desdoblarem la biga en dues (fig. 1.11.2):

Reaccions isostàtiques:

$$R_{a1} = \frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 2}{6} = 3,6 + 1 = 4,6 \text{ T}$$

$$R_{b1} = \frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 4}{6} = 3,6 + 2 = 5,6 \text{ T}$$

Reaccions hiperestàtiques:

$$R_{a2} = -R_{b2} = \frac{6,26 - 4,93}{6} = 0,2 \text{ T}$$

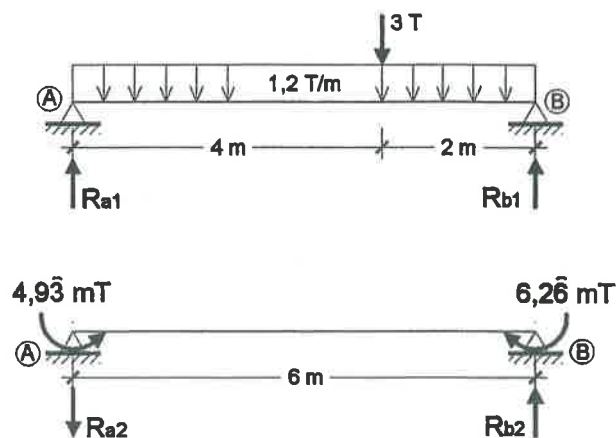


Figura 1.11.2

La superposició de les dues bigues dibuixades és la biga proposada; per tant, la suma de les reaccions ens donarà les reaccions de la biga real.

$$R_a = R_{a1} + R_{a2} = 4,6 - 0,2 = 4,37 \text{ T}$$

$$R_b = R_{b1} + R_{b2} = 5,6 + 0,2 = 5,82 \text{ T}$$

Resultat b):

$R_a = 4,37 \text{ T}$ (amunt)	$R_b = 5,82 \text{ T}$ (amunt)
--------------------------------	--------------------------------

### EXERCICI 1.12 (examen abril 2001)

A partir de la biga de la figura 1.12:

- Calcula els moments d'encastament perfecte de la biga, utilitzant les fórmules de m.e.p.
- Després, calcula les reaccions verticals, però sense utilitzar el formulari.
- Finalment, calcula el valor del moment flector màxim positiu

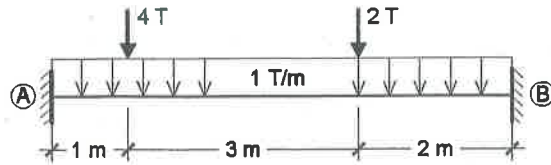


Figura 1.12

**Solució**

Per aplicar les fórmules, descomponem la biga en casos de càrrega simples, tal com es pot veure en la figura 1.12.1.

Aplicant les fórmules tenim:

$$m_{a1} = -m_{b1} = \frac{1 \cdot 6^2}{12} = 3 \text{ mT}$$

$$m_{a2} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5^2}{6^2} = 2,7 \text{ mT}$$

$$m_{b2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 1^2}{6^2} = 0,5 \text{ mT}$$

$$m_{a3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2^2}{6^2} = 0,8 \text{ mT}$$

$$m_{b3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^2} = 1,7 \text{ mT}$$

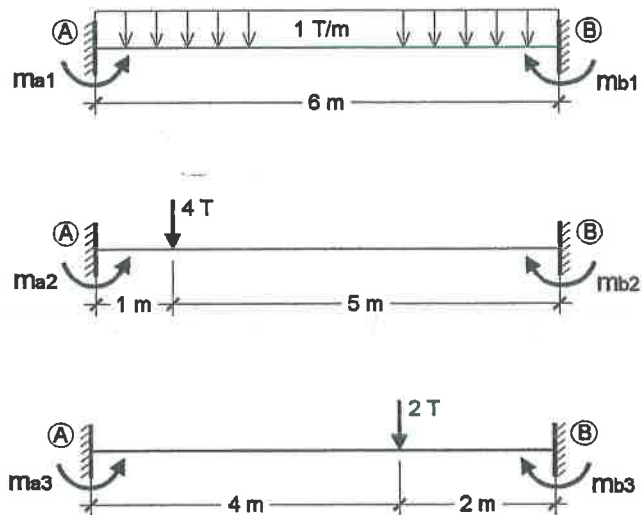


Figura 1.12.1

Els moments d'encastament perfecte de la biga són:

$$m_a = m_{a1} + m_{a2} + m_{a3} = 3 + 2,7 + 0,8 = 6,6 \text{ mT}$$

$$m_b = m_{b1} + m_{b2} + m_{b3} = 3 + 0,5 + 1,7 = 5,3 \text{ mT}$$

**Resultat a):**

$m_a = 6,6 \text{ mT}$ (anti-horari)	$m_b = 5,3 \text{ mT}$ (horari)
--------------------------------------	---------------------------------

Un cop coneguts els valors i sentits dels moments d'encastament perfecte, podem calcular les reaccions de la biga, sense utilitzar formularis. Per fer el càlcul més ràpid i intuïtiu, desdoblarem la biga en dues (fig. 1.12.2):

Reaccions isostàtiques:

$$R_{a1} = \frac{1 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 5}{6} + \frac{2 \cdot 2}{6} = 3 + 3,3 + 0,6 = 7 \text{ T}$$

$$R_{b1} = \frac{1 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 1}{6} + \frac{2 \cdot 4}{6} = 3 + 0,6 + 1,3 = 5 \text{ T}$$

Reaccions hiperestàtiques:

$$R_{a2} = -R_{b2} = \frac{6,66 - 5,33}{6} = 0,2 \text{ T}$$

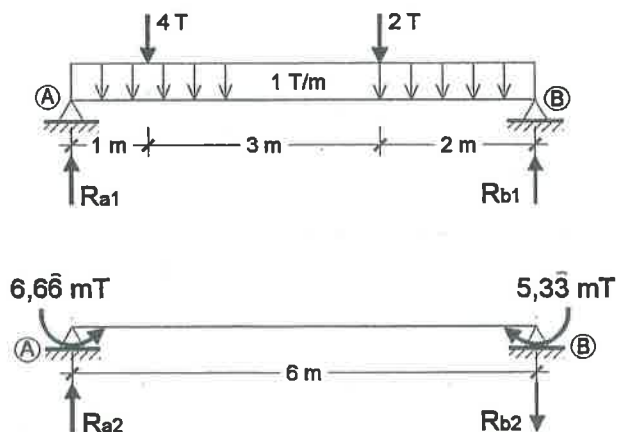


Figura 1.12.2

La superposició de les dues bigues dibuixades és la biga proposada; per tant, la suma de les reaccions ens donarà les reaccions de la biga real.



$$R_a = R_{a1} + R_{a2} = 7 + 0,2 = 7,2 \text{ T}$$

$$R_b = R_{b1} + R_{b2} = 5 - 0,2 = 4,7 \text{ T}$$

Resultat b):

$$R_a = 7,2 \text{ T (amunt)}$$

$$R_b = 4,7 \text{ T (amunt)}$$

Per calcular el moment flector màxim positiu apliquem el principi del tall, però abans hem de saber a quina secció de la biga es produeix, és a dir, per a quina secció hem de tallar.

Atenent a la relació entre la llei de moments flexors i la llei d'esforços tallants, sabem que el moment flector màxim es produeix en la secció on el tallant és nul.

A partir de la biga amb la seva càrrega i les reaccions ja conegudes (fig. 1.12.3) i aplicant el principi del tall, amb l'extrem esquerra de la biga com a origen, tenim que:

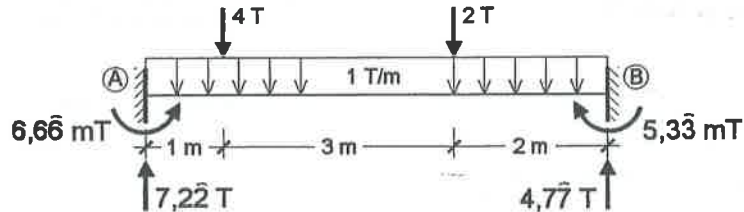


Figura 1.12.3

Per a  $x = 1 \text{ m}$  l'esforç tallant val:

$$T_{1a} = +7,2 - 1 \cdot 1 = +6,2 \text{ T (abans de la càrrega puntual)}$$

$$T_{1b} = +7,2 - 1 \cdot 1 - 4 = +2,2 \text{ T (després de la càrrega puntual)}$$

Per a  $x = 4 \text{ m}$  l'esforç tallant val:

$$T_{4a} = +7,2 - 1 \cdot 4 - 4 = -0,7 \text{ T (abans de la càrrega puntual)}$$

Així doncs, podem afirmar que el tallant nul es produeix en una secció situada entre les dues càrregues puntuals, és a dir:  $1 \text{ m} < x < 4 \text{ m}$

L'esforç tallant en aquesta zona val:  $T_x = +7,2 - 1 \cdot x - 4 = +3,2 - x$

Imposant que el tallant sigui nul trobarem la posició de la secció:

$$+3,2 - x = 0 \Rightarrow x = 3,2 \text{ m}$$

Finalment, tallant per aquesta secció i quedant-nos amb les forces de l'esquerra podem calcular el moment flector màxim:

$$M_{\text{màx}}^+ = 7,2 \cdot 3,2 - 6,6 - 1 \cdot 3,2 \cdot \frac{3,2}{2} - 4 \cdot (3,2 - 1) = 2,525 \text{ mT}$$

Resultat c):

$$M_{\text{màx}}^+ = 2,525 \text{ mT}$$

En la secció a distància  $x = 3,2 \text{ m}$  de l'extrem A

### EXERCICI 1.13 (examen octubre 2001)

A partir de la biga de la figura 1.13:

- Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga, utilitzant les fórmules de m.e.p.
- Després, calcula les reaccions verticals, però sense utilitzar el formulari.
- Finalment, calcula el valor del moment flector màxim positiu

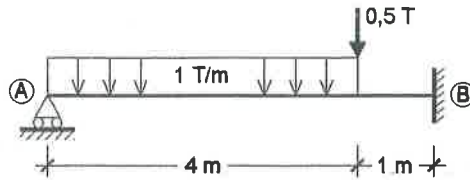


Figura 1.13

**Solució**

Per aplicar les fórmules, descomponem la biga en casos de càrrega simples, tal com es pot veure en la figura 1.13.1.

Aplicant les fórmules tenim:

$$m_{b1} = \frac{1 \cdot 4^2}{8 \cdot 5^2} (2 \cdot 5^2 - 4^2) = 2,72 \text{ mT}$$

$$m_{b2} = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (5 + 4)}{2 \cdot 5^2} = 0,36 \text{ mT}$$

El moment d'encastament perfecte de la biga és:

$$m_b = m_{b1} + m_{b2} = 2,72 + 0,36 = 3,08 \text{ mT}$$

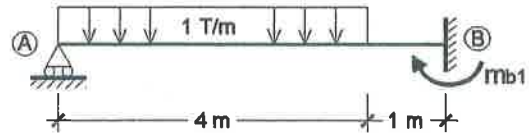


Figura 1.13.1

**Resultat a):**

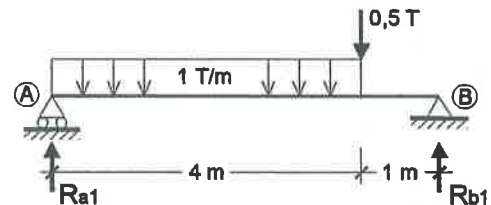
$m_b = 3,08 \text{ mT}$ (horari)
----------------------------------

Un cop coneguts els valors i sentits dels moments d'encastament perfecte, podem calcular les reaccions de la biga, sense utilitzar formularis. Per fer el càlcul més ràpid i intuïtiu, desdoblem la biga en dues (fig. 1.13.2):

Reaccions isostàtiques:

$$R_{a1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3}{5} + \frac{0,5 \cdot 1}{5} = 2,4 + 0,1 = 2,5 \text{ T}$$

$$R_{b1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 2}{5} + \frac{0,5 \cdot 4}{5} = 1,6 + 0,4 = 2 \text{ T}$$



Reaccions hiperestàtiques:

$$R_{a2} = -R_{b2} = \frac{3,08}{5} = 0,616 \text{ T}$$

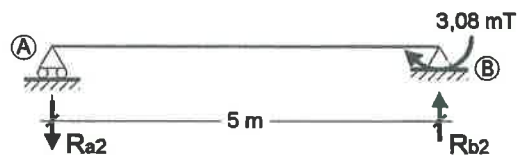


Figura 1.13.2

La superposició de les dues bigues dibuixades és la biga proposada; per tant, la suma de les reaccions ens donarà les reaccions de la biga real.

$$R_a = R_{a1} + R_{a2} = 2,5 - 0,616 = 1,884 \text{ T}$$

$$R_b = R_{b1} + R_{b2} = 2 + 0,616 = 2,616 \text{ T}$$

**Resultat b):**

$R_a = 1,884 \text{ T}$ (amunt)
---------------------------------

$R_b = 2,616 \text{ T}$ (amunt)
---------------------------------

Per calcular el moment flector màxim positiu apliquem el principi del tall, però abans hem de saber a quina secció de la biga es produeix, és a dir, per a quina secció hem de tallar.

Atenent a la relació entre la llei de moments flexors i la llei d'esforços tallants, sabem que el moment flector màxim es produeix en la secció on el tallant és nul.

A partir de la biga amb la seva càrrega i les reaccions ja conegudes (fig. 1.13.3) i aplicant el principi del tall, amb l'extrem esquerra de la biga com a origen, tenim que:

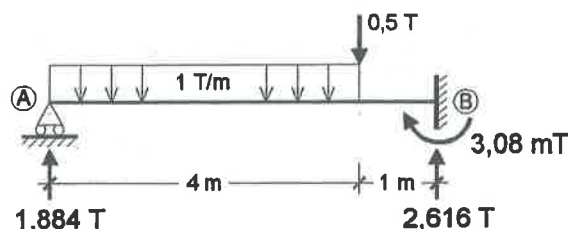


Figura 1.13.3

Per a  $x = 4$  m l'esforç tallant val:

$$T_{4a} = +1,884 - 1 \cdot 4 = -2,116 \text{ T (abans de la càrrega puntual)}$$

Així doncs, podem afirmar que el tallant nul es produeix en una secció situada entre el recolzament A i la càrrega puntual, és a dir:  $0 < x < 4$  m

L'esforç tallant en aquesta zona val:  $T_x = +1,884 - 1 \cdot x$

Imposant que el tallant sigui nul trobarem la posició de la secció:

$$+1,884 - x = 0 \Rightarrow x = 1,884 \text{ m}$$

Finalment, tallant per aquesta secció i quedant-nos amb les forces de l'esquerra podem calcular el moment flector màxim:

$$M_{\text{màx}}^+ = 1,884 \cdot 1,884 - 1 \cdot 1,884 \cdot \frac{1,884}{2} = 1,775 \text{ mT}$$

**Resultat c):**  $M_{\text{màx}}^+ = 1,775 \text{ mT}$  En la secció a distància  $x = 1,884$  m de l'extrem A

### EXERCICI 1.14 (examen abril 2002)

A partir de la biga de la figura 1.14:

- Calcula el moment d'encastament perfecte de la biga, utilitzant les fórmules de m.e.p.
- Després, calcula les reaccions verticals, però sense utilitzar el formulari.
- Finalment, calcula el valor del moment flector màxim positiu

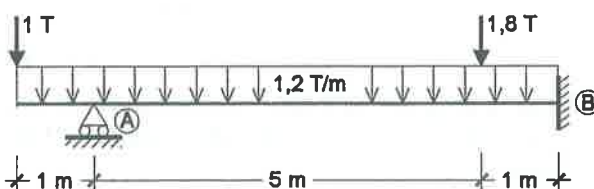


Figura 1.14

### Solució

Com que es tracta d'una biga amb voladís, primer de tot traurem el voladís. Per què la biga resultant es comporti igual que la original, ens caldrà afegir a la secció A el moment flector que la càrrega del voladís li produïa (figura 1.14.1).

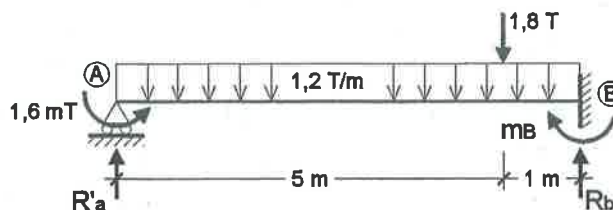


Figura 1.14.1

Ara tenim una biga encastada i recolzada. Per aplicar les fórmules, descomponem la biga en casos de càrrega simples, tal com es pot veure en la figura 1.14.2.

Aplicant les fórmules tenim:

$$m_{b1} = \frac{1,2 \cdot 6^2}{8} = 5,4 \text{ mT}$$

$$m_{b2} = \frac{1,8 \cdot 5 \cdot 1 \cdot (6 + 5)}{2 \cdot 6^2} = 1,375 \text{ mT}$$

$$m_{b3} = \frac{1,6}{2} = 0,8 \text{ mT}$$

El moment d'encastament perfecte de la biga és:

$$m_b = m_{b1} + m_{b2} + m_{b3}$$

$$m_b = 5,4 + 1,375 - 0,8 = 5,975 \text{ mT}$$

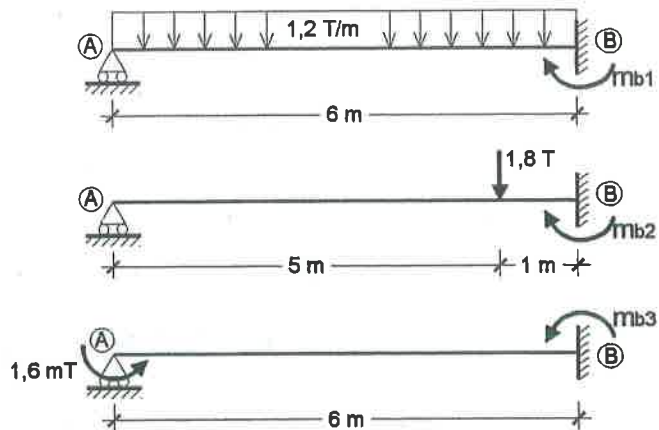


Figura 1.14.2

Resultat a):

$m_b = 5,975 \text{ mT}$ (horari)
-----------------------------------

Un cop coneguts els valors i sentits dels moments d'encastament perfecte, podem calcular les reaccions de la biga, sense utilitzar formularis. Per fer el càlcul més ràpid i intuïtiu, desdoblem la biga en dues (fig. 1.14.3):

Reaccions isostàtiques:

$$R'_{a1} = \frac{1,2 \cdot 6}{2} + \frac{1,8 \cdot 1}{6} = 3,6 + 0,3 = 3,9 \text{ mT}$$

$$R'_{b1} = \frac{1,2 \cdot 6}{2} + \frac{1,8 \cdot 5}{6} = 3,6 + 1,5 = 5,1 \text{ mT}$$

Reaccions hiperestàtiques:

$$R'_{a2} = -R'_{b2} = \frac{5,975 - 1,6}{6} = 0,729 \text{ mT}$$

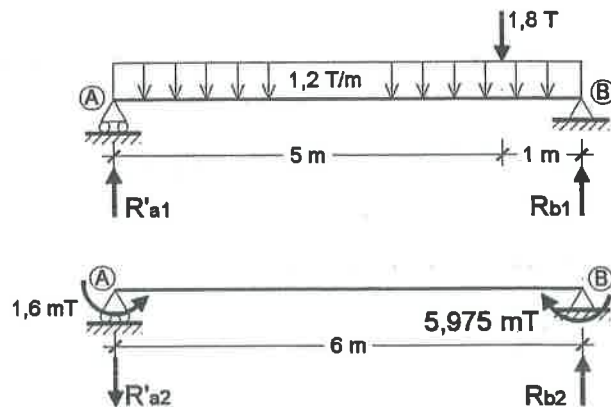


Figura 1.14.3

La suma d'aquestes reaccions ens donarà les reaccions de la biga sense voladís; per tant, per determinar la reacció en el recolzament A de la biga original, cal tenir en compte la càrrega del voladís. Així tenim:

$$R_a = R'_{a1} + R'_{a2} + Q_{vol} = 3,9 - 0,729 + 2,2 = 5,371 \text{ T} \quad R_b = 5,1 + 0,729 = 5,829 \text{ mT}$$

Resultat b):

$R_a = 5,371 \text{ T}$ (amunt)
---------------------------------

$R_b = 5,829 \text{ T}$ (amunt)
---------------------------------

Com que tot el voladís queda sotmès a moment flector negatiu, sabem que només es produiran moments positius en la zona de la biga compresa entre el recolzament A i l'encastament B.

Per això, podem calcular el moment flector màxim positiu a partir de la biga sense voladís (fig. 1.14.4). Aplicant el principi del tall, amb l'extrem esquerra com a origen, podem deduir que la secció on l'esforç tallant és nul es troba entre l'extrem A i la secció on està aplicada la càrrega puntual, és a dir:  $0 < x < 5 \text{ m}$

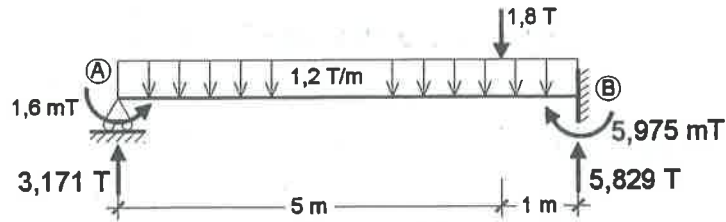


Figura 1.14.4

L'esforç tallant en aquesta zona val:  $T_x = +3,171 - 1,2 \cdot x$

Imposant que el tallant sigui nul trobarem la posició de la secció:

$$+3,171 - 1,2 \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{3,171}{1,2} = 2,6425 \text{ m}$$

Finalment, tallant per aquesta secció i quedant-nos amb les forces de l'esquerra podem calcular el moment flector màxim:

$$M_{\text{màx}}^+ = 3,171 \cdot 2,6425 - 1,6 - 1,2 \cdot 2,6425 \cdot \frac{2,6425}{2} = 2,589 \text{ mT}$$

**Resultat c):**  $M_{\text{màx}}^+ = 2,589 \text{ mT}$  En la secció a distància  $x = 2,6425 \text{ m}$  del recolzament A

## FORMULARI

$m_A = \frac{qL^2}{12}$ $m_B = -\frac{qL^2}{12}$	$m = \frac{qL^2}{8}$
$m_A = \frac{Pab^2}{L^2}$ $m_B = -\frac{Pba^2}{L^2}$	$m = \frac{Pab(L+b)}{2L^2}$
$m_A = \frac{qa^2}{12} \left[ 6 - \frac{a}{L} \left( 8 - 3\frac{a}{L} \right) \right]$ $m_B = -\frac{qa^3}{12L} \left( 4 - 3\frac{a}{L} \right)$	$m = \frac{qa^2(L+b)^2}{8L^2}$
	$m = \frac{M}{2}$

EXERCICIS PER RESOLDRE

EXERCICI 1.15

Donada la biga dibuixada (fig.1.15):

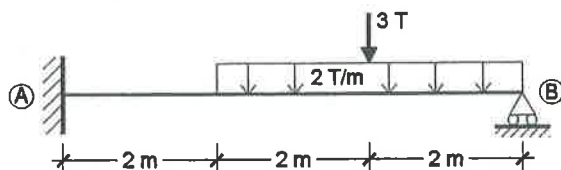


Figura 1.15

- Calcula el Moment d'Encastament Perfecte. utilitzant els Teoremes de Mohr.
- Dibuixa els diagrames de moments flectors i d'esforços tallants, a escala, indicant els valors significatius (màxims, punts angulosos, discontinuïtats...)
- Calcula el Moment d'Encastament Perfecte utilitzant els formularis i, després, calcula els tallants en els recolzaments.

EXERCICI 1.16

Donada la biga dibuixada (fig.1.16):

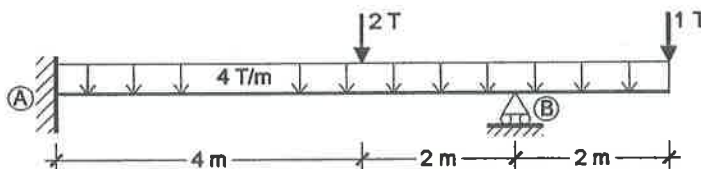


Figura 1.16

- Calcula el Moment d'Encastament Perfecte utilitzant els Teoremes de Mohr.
- Dibuixa els diagrames de moments flectors i d'esforços tallants, a escala, indicant els valors significatius (màxims, punts angulosos, discontinuïtats...)
- Calcula el Moment d'Encastament Perfecte utilitzant els formularis i, després, calcula els tallants en els recolzaments.

EXERCICI 1.17

Donada la biga dibuixada (fig.1.17):

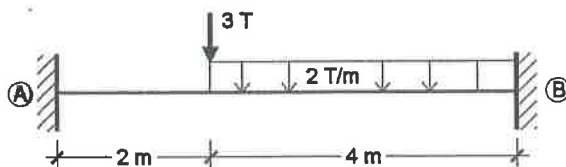


Figura 1.17

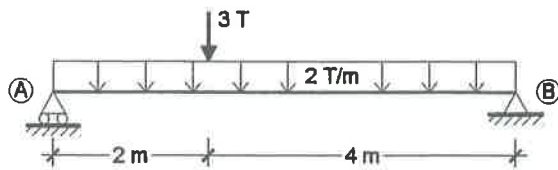
- Calcula els Moments d'Encastament Perfecte utilitzant els Teoremes de Mohr.
- Dibuixa els diagrames de moments flectors i d'esforços tallants, a escala, indicant els valors significatius (màxims, punts angulosos, discontinuïtats...)
- Calcula els Moments d'Encastament Perfecte utilitzant els formularis i, després, calcula els tallants en els recolzaments.



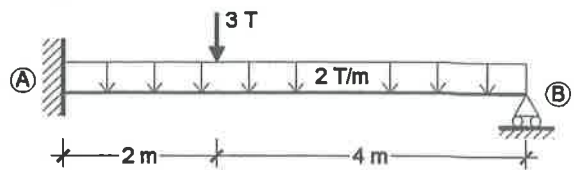
## EXERCICI 1.18

Per a cada una de les 4 bigues dibuixades (fig.1.18):

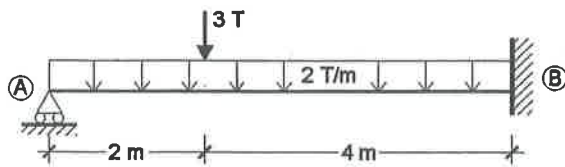
## BIGA A



## BIGA B



## BIGA C



## BIGA D

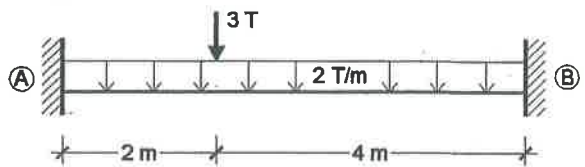


Figura 1.18

- Calcula el/s Moment/s d'Encastament Perfecte. utilitzant les fórmules de m.e.p..
- Calcula les reaccions verticals en els recolzaments, sense utilitzar formularis.
- Dibuixa els diagrames de moments flectors i d'esforços tallants, a escala, indicant els valors significatius (màxims, punts angulosos, discontinuïtats...)
- Compara el resultat obtingut en la biga A amb el de les altres 3 bigues i respon a les següents qüestions:
  - La suma de les dues reaccions verticals de cada biga té el mateix valor?.
  - Les reaccions de l'extrem de la dreta de cada biga tenen el mateix valor?.
  - Ordena les bigues en funció del valor del moment màxim positiu (de més gran a més petit) i analitza si el tipus de lligam extrem de les bigues hi té alguna influència.
  - Quines conclusions en treus?

RESULTATS DELS EXERCICIS PER RESOLDRE

EXERCICI 1.15

Els resultats de l'exercici 1.15 es presenten en la següent figura 1.15.1

ESQUEMA I REACCIONS (Escala de longituds 1/100)

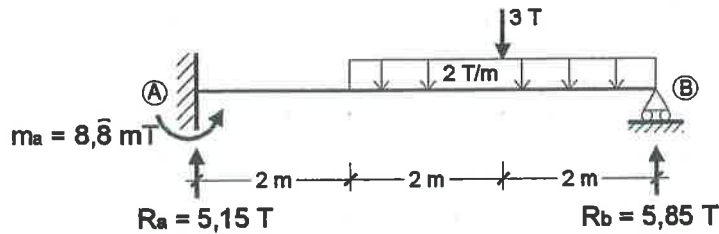


DIAGRAMA DE MOMENTS FLECTORS (Escala: 1 cm = 4 mT)

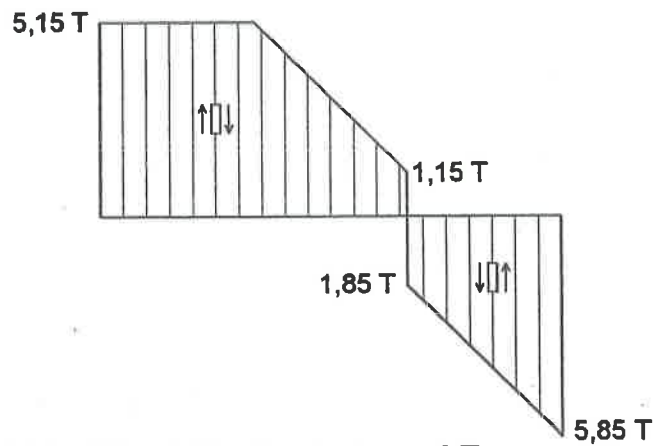
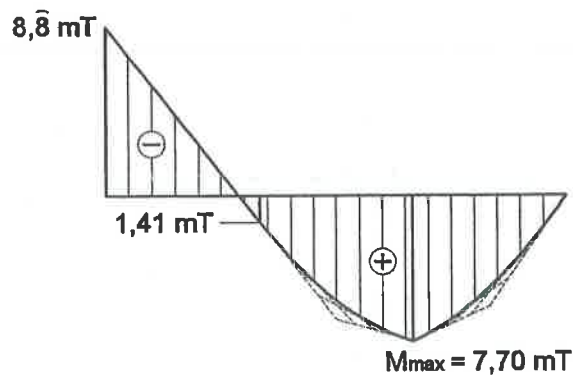


DIAGRAMA D'ESFORÇOS TALLANTS (Escala: 1 cm = 2 T)

Figura 1.15.1



**EXERCICI 1.16**

Els resultats de l'exercici 1.16 es presenten en la següent figura 1.16.1

ESQUEMA I REACCIONS (Escala de longituds 1/100)

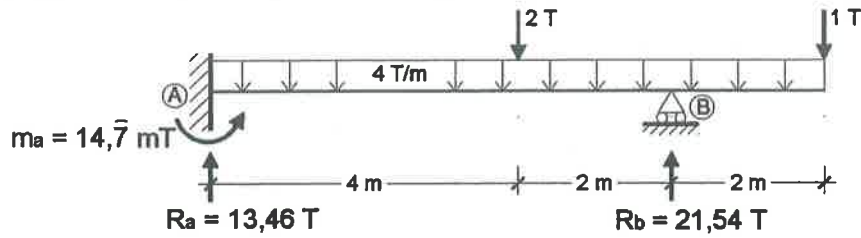


DIAGRAMA DE MOMENTS FLECTORS (Escala: 1 cm = 5 mT)

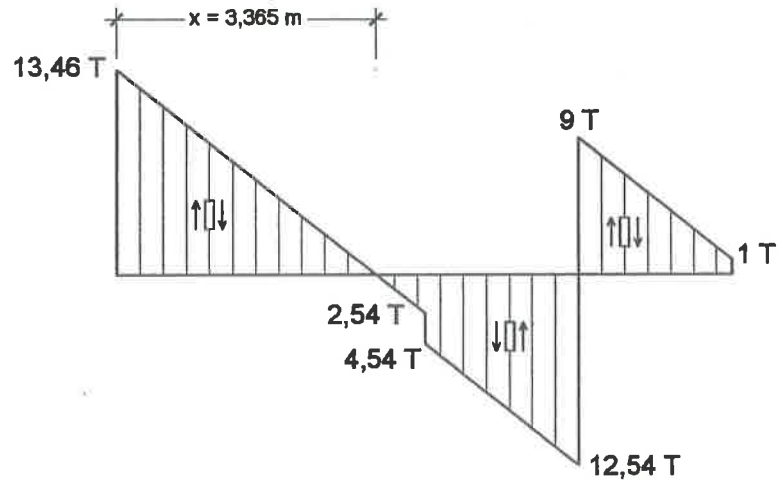
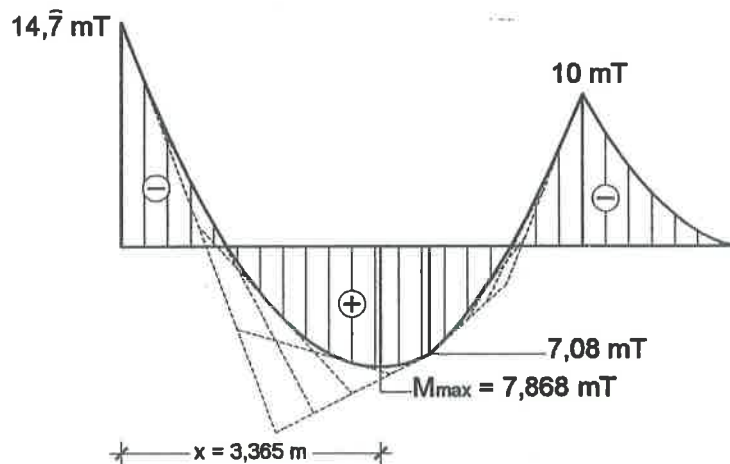


DIAGRAMA D'ESFORÇOS TALLANTS (Escala: 1 cm = 5 T)

Figura 1.16.1

**EXERCICI 1.17**

Els resultats de l'exercici 1.17 es presenten en la següent figura 1.17.1

ESQUEMA I REACCIONS (Escala de longituds 1/100)

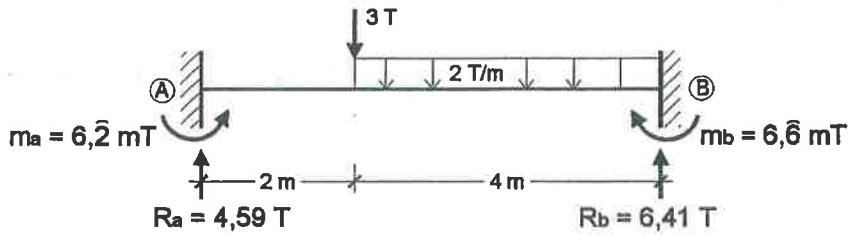


DIAGRAMA DE MOMENTS FLECTORS (Escala: 1 cm = 2 mT)

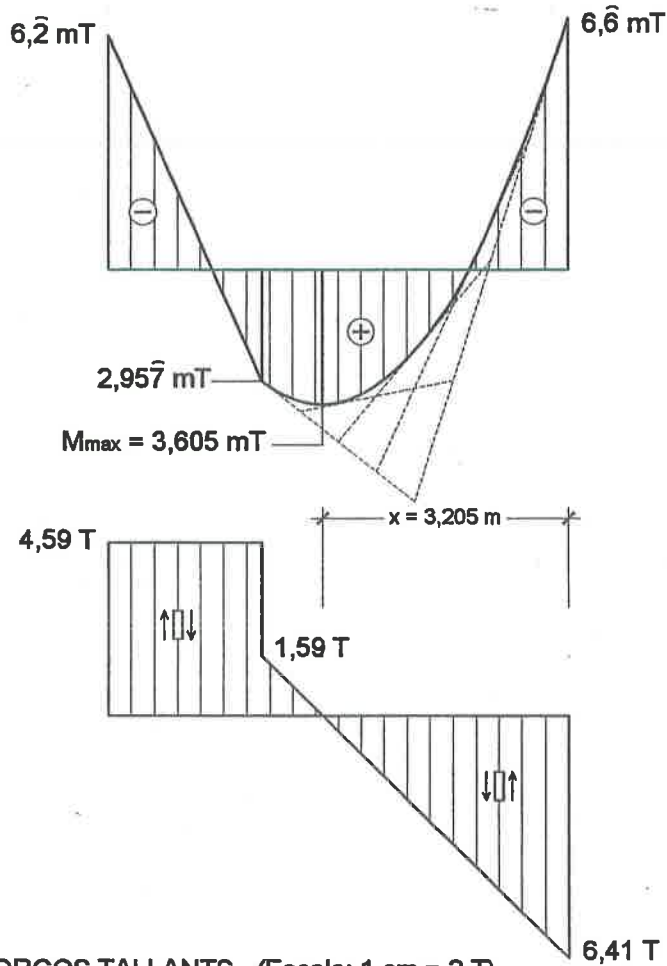


DIAGRAMA D'ESFORÇOS TALLANTS (Escala: 1 cm = 2 T)

Figura 1.17.1

**EXERCICI 1.18**

Els resultats de l'exercici 1.18 es presenten en la següent figura 1.18.1

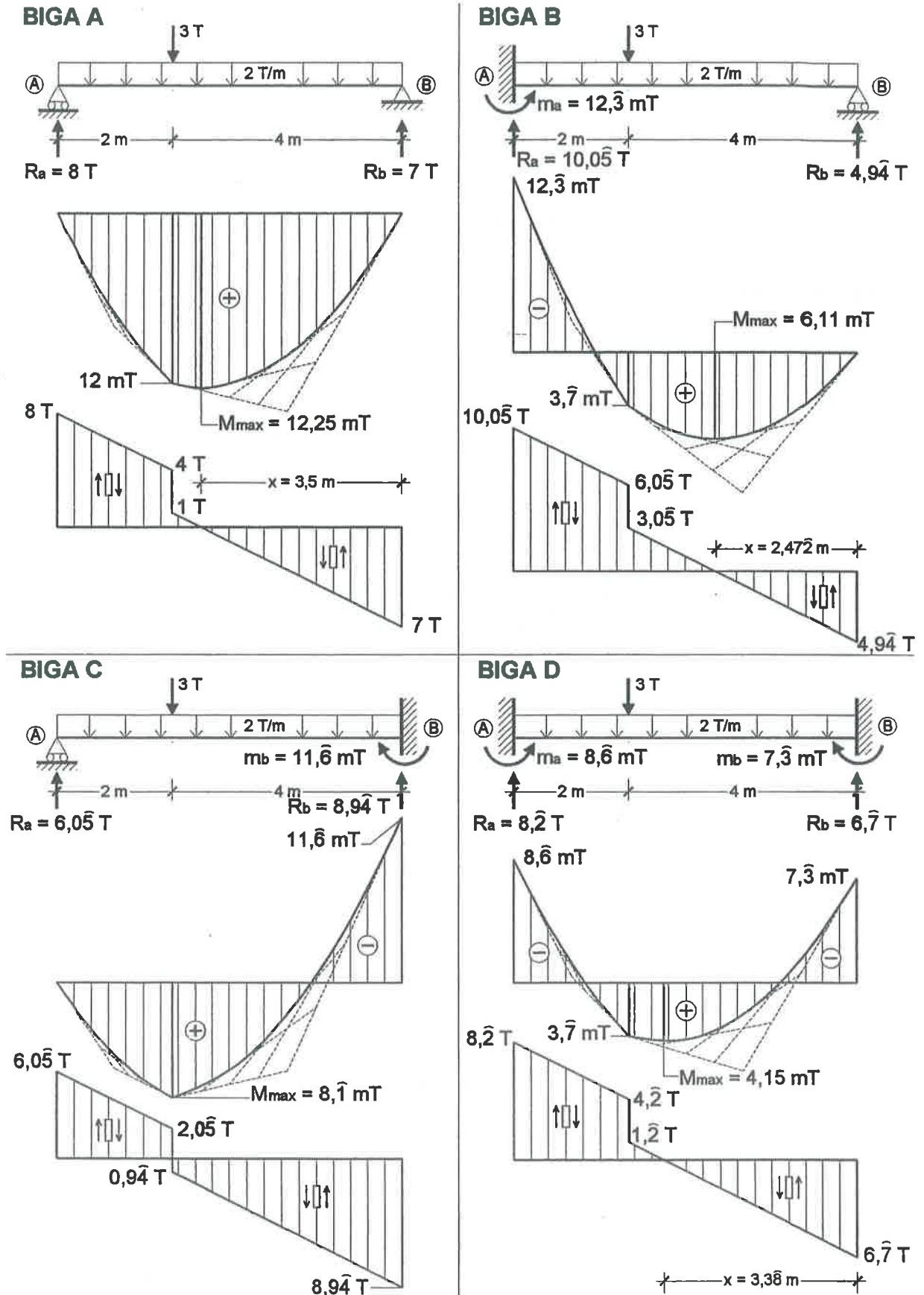


Figura 1.18.1

Efectivament, la suma de les dues reaccions verticals de cada biga té el mateix valor.

- Això és degut a que la càrrega aplicada a totes 4 bigues és la mateixa i al fet de que, per què les bigues quedin en equilibri, cal que la suma de forces verticals sigui igual a zero (condició d'equilibri de l'estàtica).

Però les reaccions de l'extrem de la dreta de cada una de les bigues tenen diferent valor.

- Si heu calculat les reaccions sumant les reaccions isostàtiques i les hiperestàtiques, haureu vist que les reaccions isostàtiques són iguals en totes 4 bigues, mentre que les reaccions hiperestàtiques són diferents en totes elles (la biga A és isostàtica).
- Així doncs, podem afirmar que les reaccions de cada una de les 4 bigues són diferents degut a les diferents condicions de recolzament de les bigues, o el que és el mateix, a l'existència de moments d'encastament perfecte diferents en cada una d'elles.

La biga que té un moment flector màxim positiu més gran és la biga A, seguida de la biga C, la biga B i la biga D que és la que té un moment flector màxim positiu més petit.

- Si heu dibuixat els diagrames de moments superposant el diagrama isostàtic (totalment positiu) i el hiperestàtic (totalment negatiu), haureu vist que el diagrama isostàtic de totes 4 bigues són idèntics, mentre que el diagrama hiperestàtic és diferent ja que depèn del valor dels moments d'encastament perfecte.
- Al superposar el diagrama positiu (isostàtic) al negatiu (hiperestàtic), haureu pogut comprovar que l'existència de moments negatius en els extrems d'una biga provoca un desplaçament del diagrama isostàtic, cap amunt, respecte a l'eix de moment nul.
- Per això la biga D, que té els dos extrems encastats, és la que té un moment flector màxim positiu més petit.
- Entre les bigues B i C, totes dues amb només un extrem encastat, és la biga C la que té el moment flector màxim positiu més gran per què el seu moment d'encastament perfecte és més petit.
- La biga A, birecolzada, és la que té el moment flector màxim positiu més gran per què no té moments d'encastament perfecte.

En conclusió podem dir que l'existència de moments negatius en els extrems d'una biga:

- Modifica el valor de les reaccions isostàtiques però no pas el valor de la seva suma.
- Produeix un desplaçament del diagrama de moments isostàtic, respecte l'eix de moment nul, cap amunt.

## Capítol 2.- RIGIDEESES EN LA FLEXIÓ

### EXERCICI 2.1 (examen juny 1999)

Donada la biga dibuixada (Fig. 2.1):

- Calcula el gir de la secció A de la biga.
- Calcula les reaccions que es produeixen en els extrems de la biga.

Dades: La biga és un IPE-400 ( $I_x = 23130 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

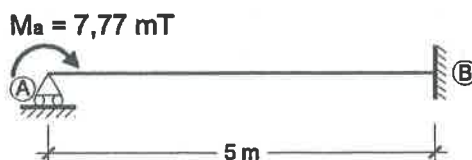


Figura 2.1

### Solució:

El moment aplicat  $M_a$  provoca la flexió de la biga

Tenint en compte les condicions de recolzament d'aquesta, la secció A gira lliurement mentre que la secció B no pot girar degut a que l'encastament ho impedeix (fig 2.1.1), produint aquest una reacció moment  $M_b$ .

Per tal que la biga quedi en equilibri de moments, és necessari que tant el recolzament A com l'encastament B produeixin reaccions verticals, iguals i de sentit contrari (fig 2.1.1)

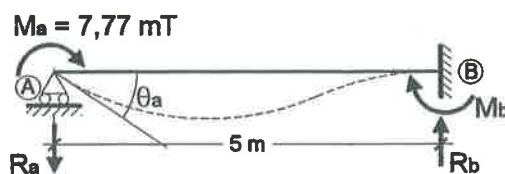


Figura 2.1.1

Sabem que la relació entre el gir de la secció A i cadascuna de les reaccions o del moment aplicat  $M_a$  és la següent:

$$M_a = K_{GG} \cdot \theta_a \quad M_b = K_{GG'} \cdot \theta_a \quad R_a = -R_b = K_{GD} \cdot \theta_a$$

I el valor de les rigideses és:

$$K_{GG} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \quad K_{GG'} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \quad K_{GD} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Per fer el càlcul més ràpid, calculem primer el valor de  $E \cdot I$ :

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 23130 \cdot 10^{-7} = 4857,3 \text{ m}^2\text{T}$$

I ara calculem el valor de cada una de les rigideses anteriors:

$$K_{GG} = \frac{4 \cdot 4857,3}{5} = 3885,84 \text{ mT} \quad K_{GG'} = \frac{2 \cdot 4857,3}{5} = 1942,92 \text{ mT}$$

$$K_{GD} = \frac{6 \cdot 4857,3}{5^2} = 1165,752 \text{ T}$$

Ara podem calcular el gir de la secció A:

$$\theta_a = \frac{M_a}{K_{GG}} = \frac{7,77 \text{ mT}}{3885,84 \text{ mT}} = 1,99957 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

I també les reaccions que es produeixen en els extrems de la biga:

$$M_b = K_{GG'} \cdot \theta_a = 1942,92 \cdot 1,99957 \cdot 10^{-3} = 3,885 \text{ mT}$$

$$R_a = -R_b = K_{GD} \cdot \theta_a = 1165,752 \cdot 1,99957 \cdot 10^{-3} = 2,331 \text{ T}$$

Tanmateix, les reaccions de la biga les podem calcular directament, sense utilitzar les rigideses, és a dir:

– el moment  $M_b$  és la meitat del moment aplicat en el recolzament A (fórmules de m.e.p.)

$$M_b = \frac{M_a}{2} = \frac{7,77 \text{ mT}}{2} = 3,885 \text{ mT}$$

– i les reaccions verticals les podem calcular imposant l'equilibri de moments

$$R_a = -R_b = \frac{M_a + M_b}{L} = \frac{7,77 + 2,885}{5} = 2,331 \text{ T}$$

**Resultat:**

$\theta_a = 1,999 \cdot 10^{-3} \text{ rad (horari)}$	$M_b = 3,885 \text{ mT (horari)}$
$R_a = 2,331 \text{ T (avall)}$	$R_b = 2,331 \text{ T (amunt)}$

El sentit de les reaccions és el indicat en la figura 2.1.1.

### EXERCICI 2.2 (examen abril 2001)

Calcula el moment  $M_b$  que cal aplicar en l'extrem B de la biga dibuixada (fig. 2.2), per què es produeixi un gir en aquest extrem de valor  $\theta_b = 0,01 \text{ rad}$ .

Dades: La biga és un IPE-200 ( $I_x = 1940 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

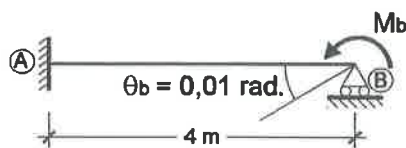


Figura 2.2

**Solució:**

Sabem que la relació entre el moment aplicat en un extrem d'una barra i el gir provocat en el mateix extrem és la rigidesa  $K_{GG}$

En el cas de la biga proposada (fig. 2.2.1) tenim:  $M_b = K_{GG} \cdot \theta_b$

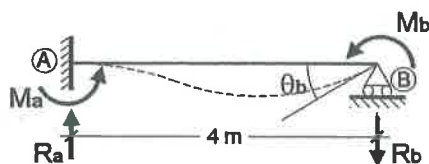


Figura 2.2.1

Donat que la biga té l'extrem A encastat, la rigidesa  $K_{GG}$  és:  $K_{GG} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$

Per fer el càlcul més ràpid, calculem primer el valor de  $E \cdot I$ :

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1940 \cdot 10^{-7} = 407,4 \text{ m}^2\text{T}$$

I ara calculem el valor de la rigidesa:  $K_{GG} = \frac{4 \cdot 407,4}{4} = 407,4 \text{ mT}$

Finalment, el moment que cal aplicar en l'extrem B de la biga per produir un gir en aquest extrem de 0,01 radians és:

$$M_b = K_{GG} \cdot \theta_b = 407,4 \cdot 0,01 = 4,074 \text{ mT}$$

**Resultat:**

$$M_b = 4,074 \text{ mT (anti-horari)}$$

### EXERCICI 2.3 (examen octubre 2000)

Degut a un assentament del terreny, l'encastament B de la biga dibuixada (fig. 2.3) experimenta un desplaçament perpendicular a l'eix de la biga ( $\delta_T = 6 \text{ mm}$ ).

Calcula el moment flector i l'esforç tallant que es produeix en les seccions extremes de la biga.

Dades: La biga és un IPE-220 ( $I_x = 2770 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

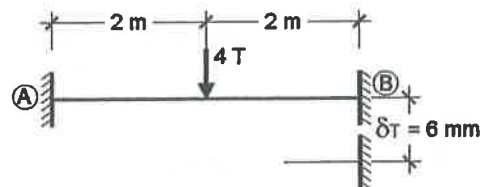


Figura 2.3

**Solució:**

Per resoldre aquest exercici apliquem el principi de superposició causa - efecte, descomponent la biga en dues (fig. 2.3.1), la superposició de les quals ens ha de donar la biga proposada.

Els esforços en les seccions extremes de la biga són, directament, les reaccions produïdes pels encastaments.

En la primera biga calculem l'efecte de les accions sense tenir en compte el desplaçament de l'encastament:

$$M_{a1} = -M_{b1} = \frac{P \cdot L}{8} = \frac{4 \cdot 4}{6} = 2 \text{ mT}$$

En la segona biga calculem l'efecte del desplaçament, sense tenir en compte les accions:

$$M_{a2} = M_{b2} = K_{GD} \cdot \delta_T \quad K_{GD} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2770 \cdot 10^{-7} = 5817 \text{ m}^2\text{T}$$

$$M_{a2} = M_{b2} = \frac{6 \cdot 5817}{4^2} \cdot 0,006 = 1,309 \text{ mT}$$

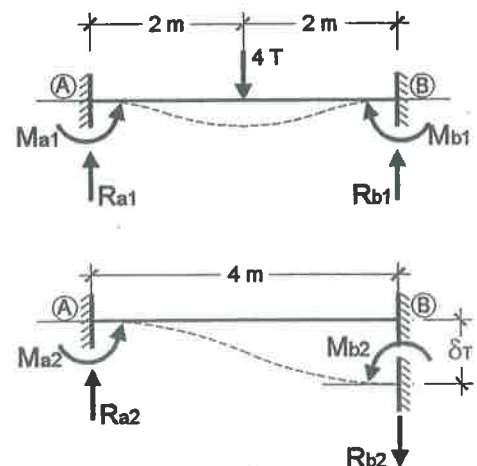


Figura 2.3.1



El moment flector en cada una de les seccions extremes de la biga l'obtenim superposant les dues bigues de la figura 2.3.1

$$M_a = M_{a1} + M_{a2} = 2 + 1,309 = 3,309 \text{ mT} \quad M_b = M_{b1} + M_{b2} = 2 - 1,309 = 0,691 \text{ mT}$$

Tot i que el càlcul de les reaccions de la biga proposada el podríem haver fet a partir de les dues bigues de la figura 2.3.1, resulta més pràctic calcular-les directament, un cop coneguts els moments produïts pels encastaments (fig. 2.3.2)

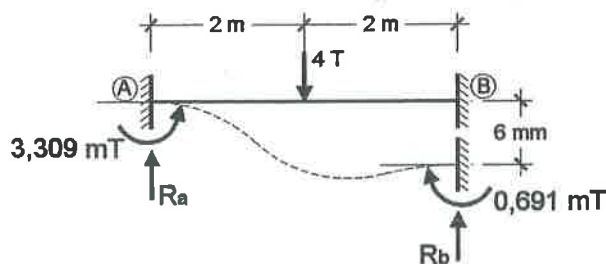


Figura 2.3.2

$$R_a = T_a = \frac{4 \cdot 2}{4} + \frac{3,309 - 0,691}{4} = 2 + 0,6545 = 2,6545 \text{ T}$$

$$R_b = T_b = \frac{4 \cdot 2}{4} - \frac{3,309 - 0,691}{4} = 2 - 0,6545 = 1,3455 \text{ T}$$

Resultat:

$M_a = 3,309 \text{ mT}$ (anti-horari)	$M_b = 0,691 \text{ mT}$ (horari)
$R_a = 2,6545 \text{ T}$ (amunt)	$R_b = 1,3455 \text{ T}$ (amunt)

El sentit de les reaccions és el indicat en la figura 2.3.2.

#### EXERCICI 2.4 (examen abril 2000)

Degut a un assentament del terreny, l'encastament A de la biga dibuixada (fig. 2.4) experimenta un desplaçament perpendicular a l'eix de la biga ( $\delta_T = 15 \text{ mm}$ ).

Calcula el moment flector i l'esforç tallant que es produeix en les seccions extremes de la biga.

Dades: La biga és un IPE-240 ( $I_x = 3890 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

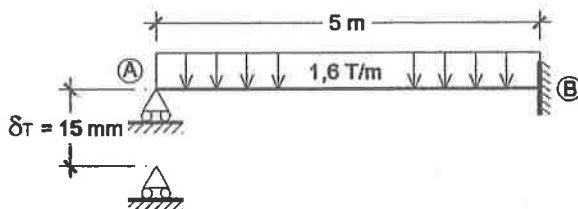


Figura 2.4

Solució:

Per resoldre aquest exercici apliquem el principi de superposició causa - efecte, descomponent la biga en dues (fig. 2.4.1), la superposició de les quals ens ha de donar la biga proposada.

Els esforços en les seccions extremes de la biga són, directament, les reaccions produïdes pels encastaments.



En la primera biga calculem l'efecte de les accions sense tenir en compte el desplaçament de l'encastament:

$$M_{b1} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{16 \cdot 5^2}{8} = 5 \text{ mT}$$

En la segona biga calculem l'efecte del desplaçament, sense tenir en compte les accions:

$$M_{b2} = K_{GD} \cdot \delta_T \quad K_{GD} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 3890 \cdot 10^{-7} = 816,9 \text{ m}^2\text{T}$$

$$M_{b2} = \frac{3 \cdot 816,9}{5^2} \cdot 0,015 = 1,47 \text{ mT}$$

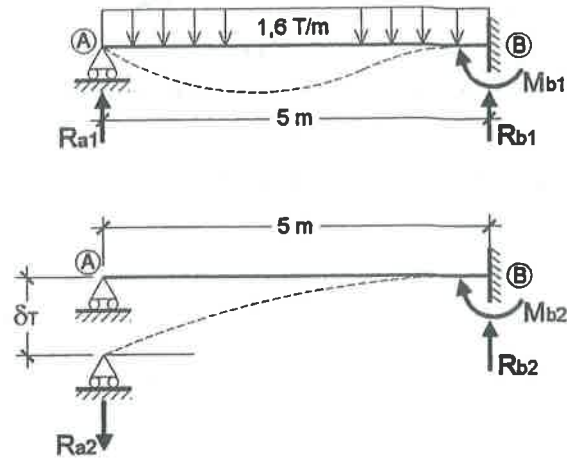


Figura 2.4.1

El moment flector en cada una de les seccions extremes de la biga l'obtenim superposant les dues bigues de la figura 2.4.1

$$M_a = 0$$

$$M_b = M_{b1} + M_{b2} = 5 + 1,47 = 6,47 \text{ mT}$$

Tot i que el càlcul de les reaccions de la biga proposada el podríem haver fet a partir de les dues bigues de la figura 2.4.1, resulta més pràctic calcular-les directament, un cop coneguts els moments produïts pels encastaments (fig. 2.4.2)

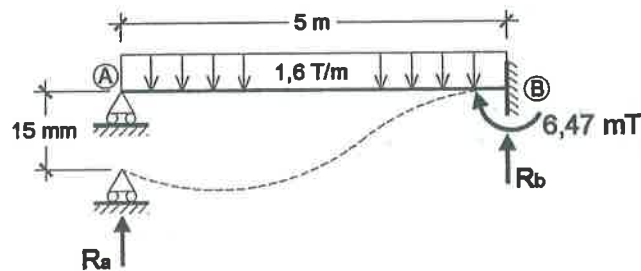


Figura 2.4.2

$$R_a = T_a = \frac{16 \cdot 5}{2} - \frac{6,47}{5} = 4 - 1,294 = 2,706 \text{ T}$$

$$R_b = T_b = \frac{16 \cdot 5}{2} + \frac{6,47}{5} = 4 + 1,294 = 5,294 \text{ T}$$

Resultat:

$M_a = 0$	$M_b = 6,47 \text{ mT (horari)}$
$R_a = 2,706 \text{ T (amunt)}$	$R_b = 5,294 \text{ T (amunt)}$

El sentit de les reaccions és el indicat en la figura 2.4.2.

**EXERCICI 2.5 (examen abril 2002)**

Degut a un assentament del terreny, l'encastament B de la biga dibuixada (fig. 2.5) experimenta un desplaçament perpendicular a l'eix de la biga, cap avall, ( $\delta_T = 0,5 \text{ cm}$ ) i un gir, en sentit anti - horari, ( $\theta_b = 0,002 \text{ radians}$ ).

Calcula el moment flector i l'esforç tallant que es produeix en les seccions extremes de la biga.

Dades: La biga és un IPE-160 ( $I_x = 869 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

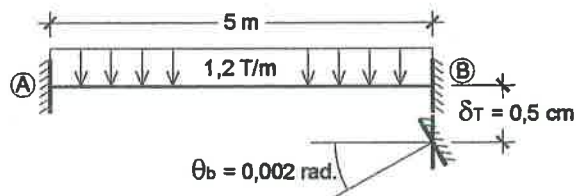


Figura 2.5

**Solució:**

Per resoldre aquest exercici apliquem el principi de superposició causa - efecte, descomponent la biga en tres (fig. 2.5.1), la superposició de les quals ens ha de donar la biga proposada.

Els esforços en les seccions extremes de la biga són, directament, les reaccions produïdes pels encastaments.

En la primera biga calculem l'efecte de les accions sense tenir en compte el desplaçament ni el gir de l'encastament:

$$M_{a1} = -M_{b1} = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{12 \cdot 5^2}{12} = 2,5 \text{ mT}$$

En la segona biga calculem l'efecte del gir, sense tenir en compte les accions ni el desplaçament:

$$M_{b2} = K_{GG} \cdot \theta_b \quad K_{GG} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$$

$$M_{a2} = K_{GG'} \cdot \theta_b \quad K_{GG'} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$$

En la tercera biga calculem l'efecte del desplaçament, sense tenir en compte les accions ni el gir:

$$M_{a3} = M_{b3} = K_{GD} \cdot \delta_T \quad K_{GD} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

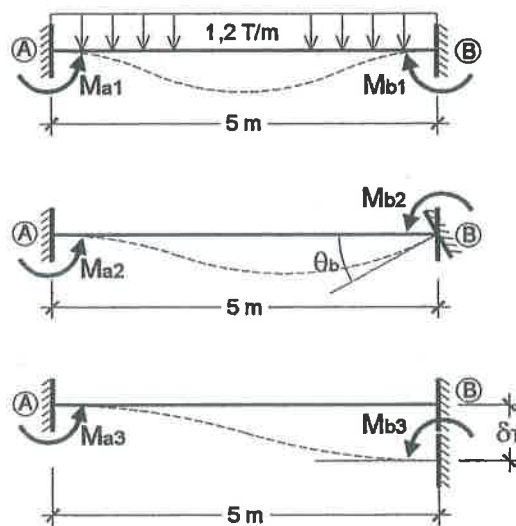


Figura 2.5.1

Fent el càlcul tenim:

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 869 \cdot 10^{-7} = 182,49 \text{ m}^2\text{T}$$

$$M_{b2} = \frac{4 \cdot 182,49}{5} \cdot 0,002 = 0,292 \text{ mT}$$

$$M_{a2} = \frac{2 \cdot 182,49}{5} \cdot 0,002 = 0,146 \text{ mT}$$

$$M_{a3} = M_{b3} = \frac{6 \cdot 182,49}{5^2} \cdot 0,005 = 0,219 \text{ mT}$$

El moment flector en cada una de les seccions extremes de la biga l'obtenim superposant les dues bigues de la figura 2.5.1

$$M_a = M_{a1} + M_{a2} + M_{a3} = 2,5 + 0,146 + 0,219 = 2,865 \text{ mT}$$

$$M_b = M_{b1} + M_{b2} + M_{b3} = 2,5 - 0,292 - 0,219 = 1,989 \text{ mT}$$

Tot i que el càlcul de les reaccions de la biga proposada el podríem haver fet a partir de les dues bigues de la figura 2.5.1, resulta més pràctic calcular-les directament, un cop coneguts els moments produïts pels encastaments (fig. 2.5.2)

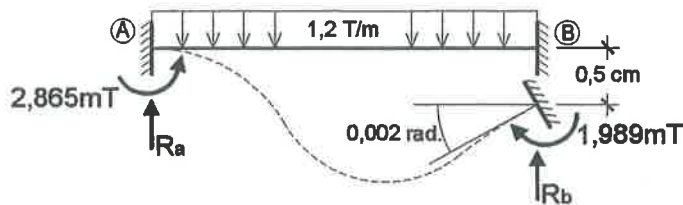


Figura 2.5.2 -

$$R_a = T_a = \frac{12 \cdot 5}{2} + \frac{2,865 - 1,989}{5} = 3 + 0,1752 = 3,1752 \text{ T}$$

$$R_b = T_b = \frac{12 \cdot 5}{2} - \frac{2,865 - 1,989}{5} = 3 - 0,1752 = 2,8248 \text{ T}$$

**Resultat:**

$M_a = 2,865 \text{ mT}$ (anti - horari)	$M_b = 1,989 \text{ mT}$ (horari)
$R_a = 3,1752 \text{ T}$ (amunt)	$R_b = 2,8248 \text{ T}$ (amunt)

El sentit de les reaccions és el indicat en la figura 2.5.2.

### EXERCICI 2.6 (examen novembre 1999)

Degut a un assentament del terreny, l'encastament B de la biga dibuixada (fig. 2.6) experimenta un desplaçament perpendicular a l'eix de la biga, cap avall, ( $\delta_T = 5 \text{ mm}$ ) i un gir, en sentit horari, ( $\theta_b = 0,002 \text{ radians}$ ).

Calcula el moment flector i l'esforç tallant que es produeix en les seccions extremes de la biga.

**Dades:** La biga és un IPE-240 ( $I_x = 3890 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

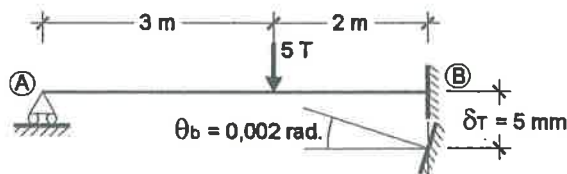


Figura 2.6

**Solució:**

Per resoldre aquest exercici apliquem el principi de superposició causa - efecte, descomponent la biga en tres (fig. 2.6.1), la superposició de les quals ens ha de donar la biga proposada.

Els esforços en les seccions extremes de la biga són, directament, les reaccions produïdes pels encastaments.

En la primera biga calculem l'efecte de les accions sense tenir en compte el desplaçament ni el gir de l'encastament:

$$M_{b1} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (5+3)}{2 \cdot 5^2} = 4,8 \text{ mT}$$

En la segona biga calculem l'efecte del gir, sense tenir en compte les accions ni el desplaçament:

$$M_{b2} = K_{GG} \cdot \theta_b \quad K_{GG} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$$

En la tercera biga calculem l'efecte del desplaçament, sense tenir en compte les accions ni el gir:

$$M_{b3} = K_{GD} \cdot \delta_T \quad K_{GD} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

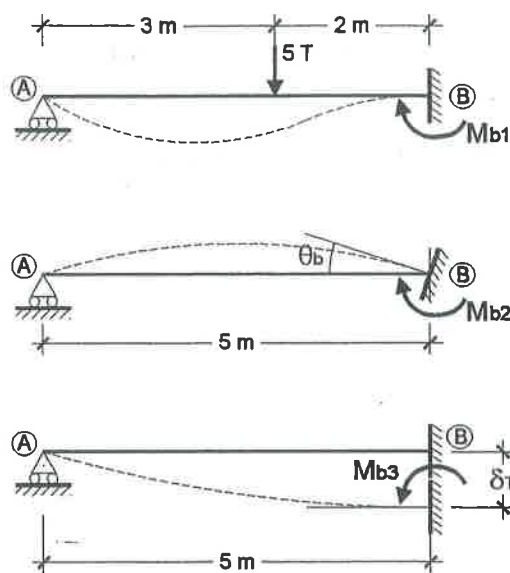


Figura 2.6.1

Fent el càlcul tenim:

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 3890 \cdot 10^{-7} = 816,9 \text{ m}^2\text{T}$$

$$M_{b2} = \frac{3 \cdot 816,9}{5} \cdot 0,002 = 0,98 \text{ mT}$$

$$M_{b3} = \frac{3 \cdot 816,9}{5^2} \cdot 0,005 = 0,49 \text{ mT}$$

El moment flector en cada una de les seccions extremes de la biga l'obtenim superposant les dues bigues de la figura 2.6.1

$$M_a = 0$$

$$M_b = M_{b1} + M_{b2} + M_{b3} = 4,8 + 0,98 - 0,49 = 5,29 \text{ mT}$$

Tot i que el càlcul de les reaccions de la biga proposada el podríem haver fet a partir de les dues bigues de la figura 2.6.1, resulta més pràctic calcular-les directament, un cop coneguts els moments produïts pels encastaments (fig. 2.6.2)

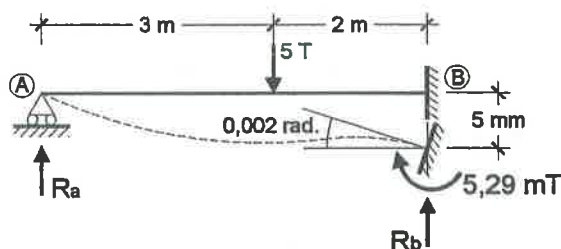


Figura 2.6.2

$$R_a = T_a = \frac{5 \cdot 2}{5} - \frac{5,29}{5} = 2 - 1,058 = 0,942 \text{ T}$$

$$R_b = T_b = \frac{5 \cdot 3}{5} + \frac{5,29}{5} = 3 + 1,058 = 4,058 \text{ T}$$

Resultat:

$M_a = 0$	$M_b = 5,29 \text{ mT (horari)}$
$R_a = 0,942 \text{ T (amunt)}$	$R_b = 4,058 \text{ T (amunt)}$

El sentit de les reaccions és el indicat en la figura 2.6.2.

**EXERCICI 2.7 (examen octubre 2001)**

Calcula el moment  $M_b$  que cal aplicar a la biga dibuixada (fig. 2.7) per què el gir en aquest extrem sigui  $\theta_b = 0,005$  radians, en sentit anti - horari.

Dades: La biga és un IPE-120 ( $I_x = 318 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

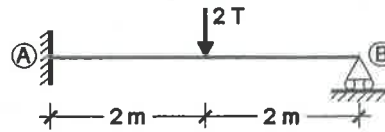


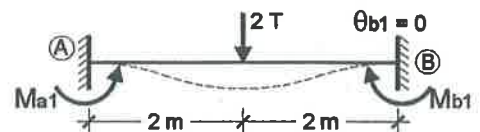
Figura 2.7

**Solució:**

Per resoldre aquest exercici apliquem el principi de superposició causa - efecte, descomponent la biga en dues (fig. 2.7.1), la superposició de les quals ens ha de donar la biga proposada.

En la primera biga calculem l'efecte de les accions però impedint que el gir de la secció B es pugui produir:

$$M_{a1} = -M_{b1} = \frac{P \cdot L}{8} = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1 \text{ mT}$$



En la segona biga imposem el gir de la secció B i calculem el seu efecte:

$$M_{b2} = K_{GG} \cdot \theta_b \quad K_{GG} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$$

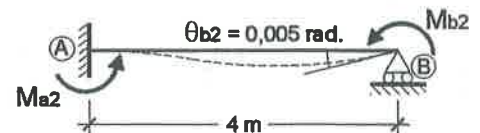


Figura 2.7.1

Fent el càlcul tenim:  $E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 318 \cdot 10^{-7} = 66,78 \text{ m}^2\text{T}$

$$M_{b2} = \frac{4 \cdot 66,78}{4} \cdot 0,005 = 0,3339 \text{ mT}$$

Finalment, el moment que cal aplicar en l'extrem B de la biga per aconseguir que el gir en aquest extrem sigui 0,005 radians, en sentit anti - horari, l'obtenim superposant les dues bigues de la figura 2.7.1

$$M_b = M_{b1} + M_{b2} = 1 - 0,3339 = 0,6661 \text{ mT}$$

En la figura 2.7.2 es pot veure com és, aproximadament, la deformata de la biga, així com el sentit de gir d'aquest moment  $M_b$ .

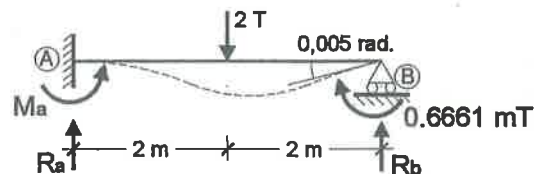


Figura 2.7.2

**Resultat:**

$$M_b = 0,6661 \text{ mT (horari)}$$

**EXERCICI 2.8**

Donada la biga dibuixada (fig.2.8), calcula el gir que cal imposar a l'encastament A ( $\theta_a$ ), per tal que el moment flector en aquest extrem de la biga sigui nul.

Dades: La biga és un IPE-120 ( $I_x = 318 \text{ cm}^4$ ) d'acer A-42 ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ )

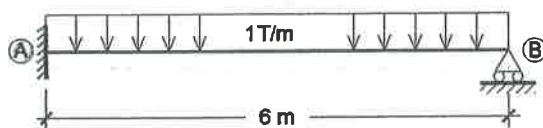
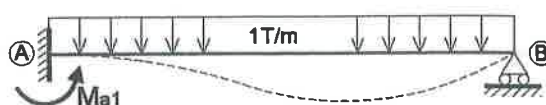


Figura 2.8

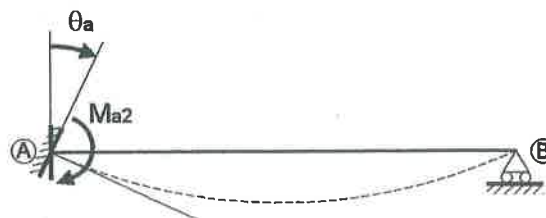
**Solució:**

Per començar, tenim una biga encastada i recolzada que suporta una càrrega uniformement repartida de 1 T/m. En aquest cas, l'encastament impedeix el gir de l'extrem A de la biga produint-li un moment  $M_{a1}$  (moment d'encastament perfecte) (fig. 2.8.1).

D'altra banda, si a una biga encastada i recolzada, sense càrrega, li fem girar l'encastament, aquest arrossega l'extrem A de la biga fent que també giri i provocant-li un moment  $M_{a2}$  que tindrà el mateix sentit de gir (fig. 2.8.1).



L'exercici proposat demana quin gir cal aplicar a l'encastament, per tal d'anular el moment en l'extrem A de la biga.



La solució està en superposar les dues bigues dibuixades (fig. 2.8.1), és a dir, d'una banda tenir en compte l'efecte de la càrrega sense gir i, de l'altra, l'efecte del gir sense càrrega, i imposar que la suma dels moments  $M_{a1}$  i  $M_{a2}$  sigui zero:

Figura 2.8.1

$$M_{a1} + M_{a2} = 0 \Rightarrow M_{a2} = -M_{a1}$$

És a dir, el gir de l'encastament ha de ser en sentit contrari al sentit de gir del moment d'encastament perfecte: com que el moment d'encastament perfecte té un sentit anti-horari, haurem de fer girar l'encastament en sentit horari.

Càlcul del moment d'encastament perfecte:  $M_{a1} = \frac{1 \cdot 6^2}{8} = 4,5 \text{ mT}$

Relació entre el moment  $M_{a2}$  i el gir  $\theta_a$ :  $M_{a2} = K_{GG} \cdot \theta_a$

Càlcul de la rigidesa de la biga:  $K_{GG} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{3 \cdot 66,78}{6} = 33,39 \text{ mT}$

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2 \cdot 318 \text{ cm}^4 \cdot 10^{-7} = 66,78 \text{ m}^2\text{T}$$

Càlcul del gir:  $M_{a1} = -M_{a2} \Rightarrow 4,5 \text{ mT} = 33,39 \text{ mT} \cdot \theta_a$

$$\theta_a = \frac{4,5}{33,39} = 0,13477 \text{ rad}$$

**Resultat:**  $\theta_a = 0,13477 \text{ rad. (horari)}$



## EXERCICIS PER RESOLDRE

## EXERCICI 2.9

Donada la biga dibuixada (Fig. 2.9):

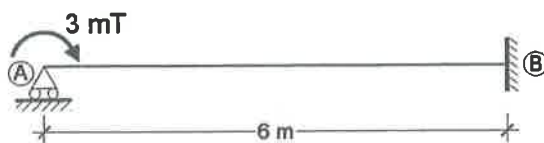


Figura 2.9

- Calcula el gir de la secció A de la biga.
- Calcula les reaccions que es produeixen en els extrems de la biga.

Dades: La biga és un IPN-200 d'acer A-42

## EXERCICI 2.10

A la biga dibuixada (Fig. 2.10) se li imposa un desplaçament vertical de 1 cm, cap avall, en el seu extrem A:

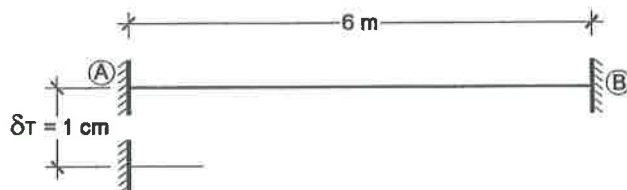


Figura 2.10

- Calcula les reaccions que es produeixen en els extrems de la biga.

Dades: La biga té una secció de 30x40 cm (base 30 cm i cantell 40 cm) i el mòdul d'elasticitat del material és  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Kp/cm}^2$

## EXERCICI 2.11

Degut a un assentament del terreny, l'encastament A de la biga dibuixada (fig. 2.11) experimenta un desplaçament perpendicular a l'eix de la biga, cap avall, ( $\delta_T = 1 \text{ cm}$ ) i un gir, en sentit anti - horari, ( $\theta_a = 0,003 \text{ radians}$ ).

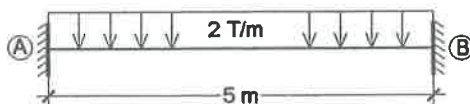


Figura 2.11

- Calcula les reaccions que es produeixen en els extrems de la biga.

Dades: La biga és un IPE-270 d'acer A-42

**EXERCICI 2.12**

A partir dels moments d'encastament perfecte ( $m_1$ ) d'una biga doblement encastada amb càrrega repartida (fig. 2.12a), dedueix el moment d'encastament perfecte ( $m_2$ ) d'una biga recolzada i encastada amb càrrega repartida (fig. 2.12b).

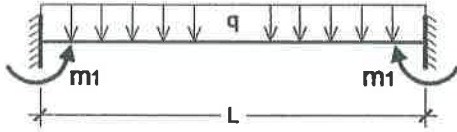


Figura 2.12a

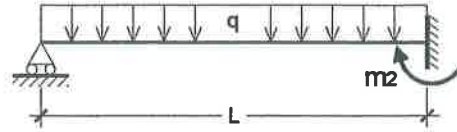


Figura 2.12b

**Ajuda:** aplica el principi de superposició causa - efecte, superposant a la biga biencastada (fig. 2.12.1a) una biga recolzada - encastada amb un moment aplicat en l'extrem articulat (fig. 2.12.1b) que anul·li el moment d'encastament de la primera.

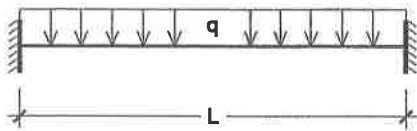


Figura 2.12.1a

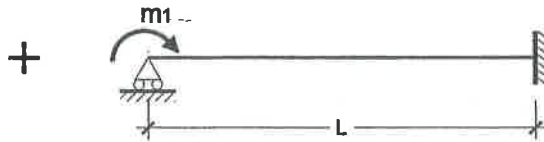


Figura 2.12.1b

## RESULTATS DELS EXERCICIS PER RESOLDRE

## EXERCICI 2.9

A continuació es presenten els resultats de l'exercici 2.9. El sentit del gir i de les reaccions són indicades en la figura 2.9.1.

$$\theta_a = 0,01 \text{ rad (horari)}$$

$$M_b = 1,5 \text{ mT (horari)}$$

$$R_a = 0,75 \text{ T (avall)}$$

$$R_b = 0,75 \text{ T (amunt)}$$

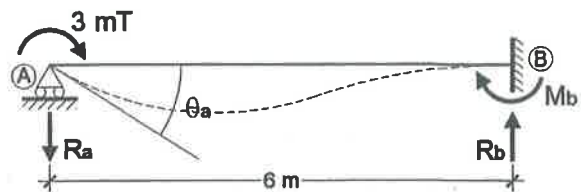


Figura 2.9.1

## EXERCICI 2.10

A continuació es presenten els resultats de l'exercici 2.10. El sentit de les reaccions són indicades en la figura 2.10.1.

$$M_a = 5,3 \text{ mT (horari)}$$

$$M_b = 5,3 \text{ mT (horari)}$$

$$R_a = 1,7 \text{ T (avall)}$$

$$R_b = 1,7 \text{ T (amunt)}$$

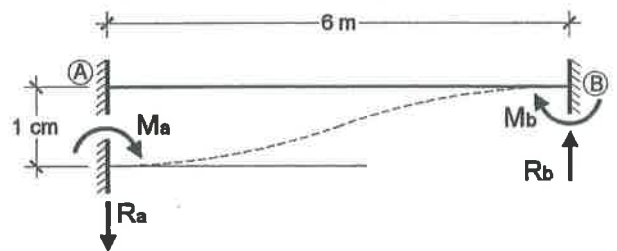


Figura 2.10.1

## EXERCICI 2.11

A continuació es presenten els resultats de l'exercici 2.11. El sentit de les reaccions són indicades en la figura 2.11.1.

$$M_a = 4,16 \text{ mT (anti-horari)}$$

$$M_b = 5,626 \text{ mT (horari)}$$

$$R_a = 4,708 \text{ T (amunt)}$$

$$R_b = 5,292 \text{ T (amunt)}$$

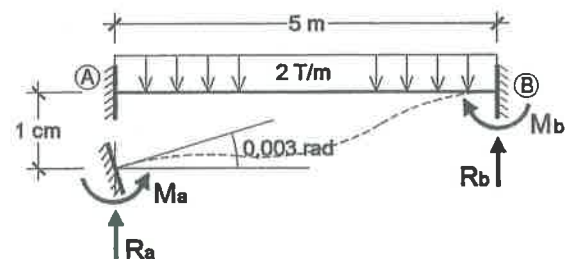


Figura 2.11.1

## EXERCICI 2.12

El moment d'encastament perfecte d'una biga recolzada i encastada, amb càrrega uniforme repartida és:

$$m_2 = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

### Capítol 3.- ANÀLISI DE PÒRTICS PLANS ORTOGONALS

#### EXERCICI 3.1

Donat el pòrtic de la figura 3.1:

- Calcula els moments finals en extrems de barra.
- Calcula les reaccions en els recolzaments del pòrtic.
- Comprova si el pòrtic ha quedat globalment en equilibri.

Dades: Totes les barres són d'acer A-42

Les bigues són perfils IPE-200, i els pilars són perfils HEB-180

L'eix Y de la secció dels pilars coincideix amb el pla del pòrtic.

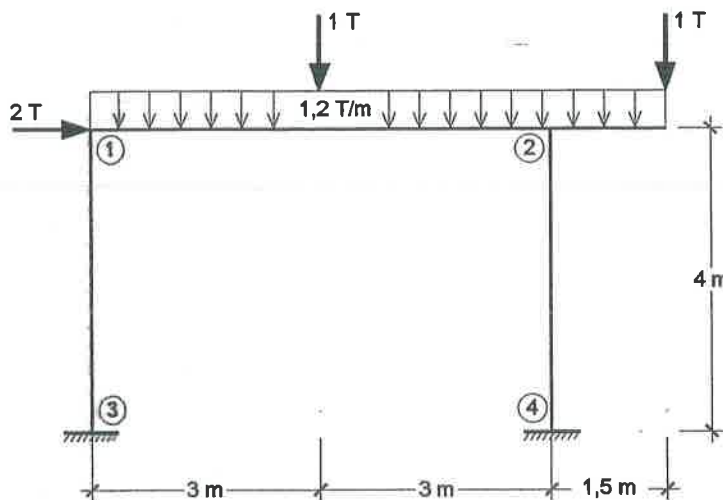


Figura 3.1

#### Solució:

Donat que es tracta d'una estructura hiperestàtica, per determinar els moments finals en extrem de barra utilitzarem el mètode matricial de les deformacions, amb la simplificació de no considerar la variació de longitud de les barres.

El mètode matricial de les deformacions consta de dues fases:

- En la primera fase es determinen els moviments dels nusos de l'estructura (equació matricial d'equilibri de l'estructura).
- En la segona fase es determinen els moments finals en extrem de barra.

L'equació matricial d'equilibri d'una estructura sempre té el format:  $[P] = [K] \cdot [\delta]$  on

$[P]$  és el vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura

$[K]$  és la matriu de rigidesa de l'estructura

$[\delta]$  és el vector de moviments dels nusos de l'estructura

Els moviments dels nusos de l'estructura són les incògnites de l'equació i, per tant, el número de moviments determina el número d'elements de cada un dels vectors i de la matriu de rigidesa, és a dir, el número de files de l'equació matricial.

Si l'estructura és ortogonal i apliquem la simplificació que consisteix en no considerar la variació de longitud de les barres, els moviments possibles són:

- 1 gir per cada nus lliure
- 1 desplaçament horitzontal per cada planta desplaçable

En el cas de l'estructura proposada, aquesta té 2 nusos lliures (els extrems dels voladissos no compten), i la planta és desplaçable. Així doncs, els moviments incògnita són 3:

- 2 girs: Gir del nus 1  $\Rightarrow \theta_1$   
Gir del nus 2  $\Rightarrow \theta_2$
- 1 desplaçament horitzontal: Desplaçament de la planta  $\Rightarrow \delta_{Hp}$

Per tant, el vector de moviments dels nusos de l'estructura proposada és:  $[\delta] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_{Hp} \end{bmatrix}$

I el número de files de l'equació matricial d'aquesta estructura és 3.

Cada fila de l'equació matricial és una equació d'equilibri. L'ordre d'aquestes equacions s'estableix en funció del vector de moviments de l'estructura; així, si el primer element d'aquest vector és el gir del nus 1, la primera fila de l'equació matricial serà una equació on imposarem que la suma de moments en el nus 1 sigui zero ( $\Sigma M_1=0$ ); o bé si el cinquè element del vector de moviments és el desplaçament de la planta 1, la cinquena fila de l'equació matricial serà una equació on imposarem que la suma de forces horitzontals a nivell de la planta 1 sigui zero ( $\Sigma F_{Hp1}=0$ ).

Així doncs, en el cas de l'estructura proposada, l'equació matricial d'equilibri tindrà el següent format:

$$\begin{matrix} \Sigma M_1 = 0 \\ \Sigma M_2 = 0 \\ \Sigma F_{Hp} = 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_{Hp} \end{bmatrix}$$

El vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura s'obté valorant l'efecte de les accions quan tots els moviments són impeditos.

Com que podem tenir accions aplicades directament en els nusos i accions aplicades en les barres, el vector d'accions equivalents serà la suma de dos vectors:  $[P] = [A] - [m]$  on

$[A]$  és el vector d'accions aplicades directament en els nusos de l'estructura, i

$[m]$  és el vector de reaccions d'encastament perfecte de les barres.

En el cas del pòrtic proposat, i tenint en compte el que s'ha exposat abans sobre les files de l'equació matricial, tindrem:

$$\begin{matrix} \text{Moments sobre el nus 1} \\ \text{Moments sobre el nus 2} \\ \text{Forces horitzontals sobre la planta} \end{matrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F_{Hp} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{12} + m_{13} \\ m_{21} + m_{24} + m_{2-vol} \\ T_{13} + T_{24} \end{bmatrix} = [P]$$

L'efecte de les accions directament aplicades sobre els nusos de l'estructura, suposant els moviments impeditos, es pot veure en la figura 3.1.1.

No hi ha cap moment directament aplicat als nusos:

$$M_1 = M_2 = 0$$

Hi ha una força horitzontal directament aplicada a nivell de planta:

$$F_{Hp} = +2 T$$

No es produeix deformació a cap barra.

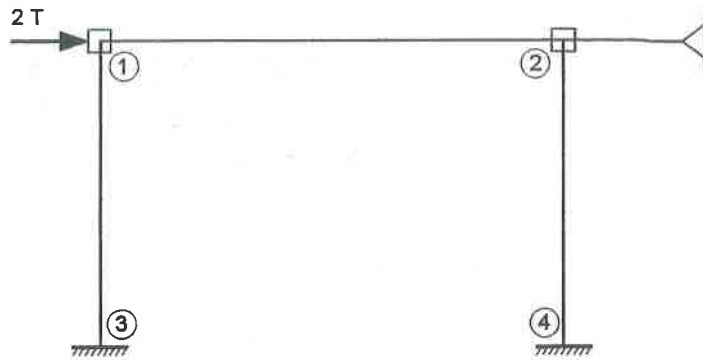


Figura 3.1.1

L'efecte de les accions aplicades a les barres, suposant els moviments impeditos, es pot veure en la figura 3.1.2.

Només es deformen les barres que tenen càrrega aplicada.

Com que els pilars no tenen càrrega aplicada, els seus moments d'encastament perfecte són nuls, igual que els tallants en els seus extrems:

$$m_{13} = m_{31} = 0 \quad T_{13} = T_{31} = 0$$

$$m_{24} = m_{42} = 0 \quad T_{24} = T_{42} = 0$$

Càlcul dels moments d'encastament perfecte de les bigues:

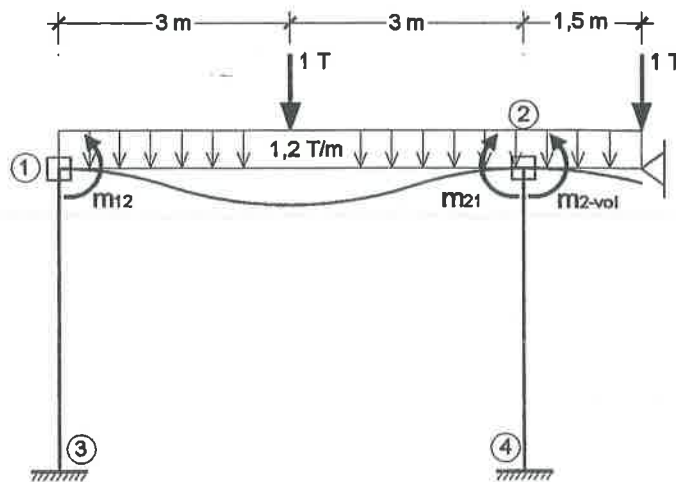


Figura 3.1.2

$$m_{12} = -m_{21} = \frac{1,2 \cdot 6^2}{12} + \frac{1 \cdot 6}{8} = 3,6 + 0,75 = 4,35 \text{ mT}$$

$$m_{2-vol} = \frac{1,2 \cdot 1,5^2}{2} + 1 \cdot 1,5 = 1,35 + 1,5 = 2,85 \text{ mT}$$

Per tant, el vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura proposada queda:

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +4,35 \\ -4,35 + 2,85 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,35 \\ +1,5 \\ +2 \end{bmatrix}$$

La matriu de rigidesa d'una estructura sempre és una matriu quadrada de NxN elements, on N és el número de moviments dels nusos de l'estructura.

Tots els elements d'una mateixa columna són esforços (moments o forces) produïts per un únic moviment. Així, tots els elements de la primera columna són esforços produïts pel gir del nus 1 (primer element del vector de moviments), o bé, tots els elements de la tercera columna són esforços produïts pel desplaçament de la planta (tercer element del vector de moviments).

Tanmateix, tots els elements d'una mateixa fila són el mateix tipus d'esforç, produït per cada un dels diferents moviments dels nusos de l'estructura. Així, tots els elements de la primera fila són moments sobre el nus 1, o bé, tots els elements de la tercera fila són forces horitzontals sobre la planta.



En el cas del pòrtic proposat, la matriu de rigidesa serà de 3x3 elements, i tindrem:

$$\begin{array}{l}
 \text{Moments sobre el nus 1} \\
 \text{Moments sobre el nus 2} \\
 \text{Forces horitzontals sobre la planta}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 11 & & \\
 & & 23 \\
 & 32 & \\
 \theta_1 & \theta_2 & \delta_{Hp}
 \end{bmatrix}$$

- l'element 11 de la matriu de rigidesa de l'estructura ( fila1, columna 1) serà el moment que rep el nus 1 degut al gir del nus 1;
- l'element 23 de la matriu de rigidesa de l'estructura (fila 2, columna 3) serà el moment que rep el nus 2 degut al desplaçament de la planta;
- l'element 32 de la matriu de rigidesa de l'estructura (fila 3, columna 2) serà la força horitzontal que rep la planta deguda al gir del nus 2;

La manera mes pràctica de muntar la matriu de rigidesa d'una estructura és fer-ho per columnes; d'aquesta manera només cal saber veure els esforços que provoca cadascun dels moviments per separat, es a dir, amb els altres moviments impedit.

Els moviments incògnita sempre es suposen positius.

L'efecte del gir del nus 1 es presenta en la figura 3.1.3.

Els esforços provocats per aquest gir configuren la primera columna de la matriu de rigidesa de l'estructura:

$$\begin{array}{l}
 M_1 \\
 M_2 \\
 F_{Hp}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 K_{GG}^{12} + K_{GG}^{13} & & \\
 K_{GG}^{12} & & \\
 K_{GD}^{13} & & \\
 \theta_1 & \theta_2 & \delta_{Hp}
 \end{bmatrix}$$

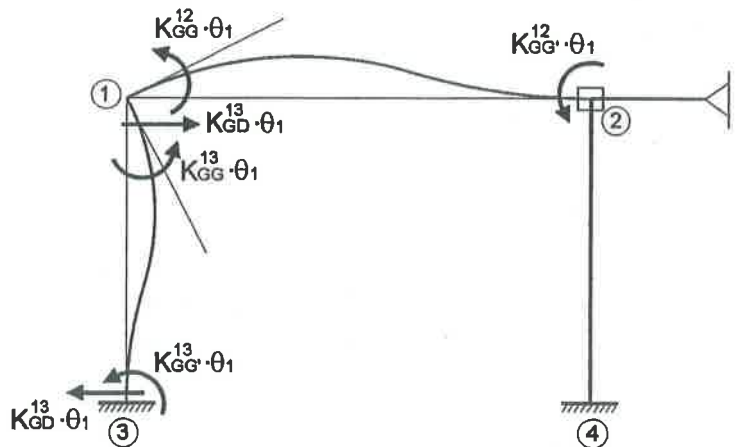


Figura 3.1.3

L'efecte del gir del nus 2 es presenta en la figura 3.1.4.

Els esforços provocats per aquest gir configuren la segona columna de la matriu de rigidesa de l'estructura:

$$\begin{array}{l}
 M_1 \\
 M_2 \\
 F_{Hp}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 & K_{GG}^{12} & \\
 K_{GG}^{12} + K_{GG}^{24} & & \\
 K_{GD}^{24} & & \\
 \theta_1 & \theta_2 & \delta_{Hp}
 \end{bmatrix}$$

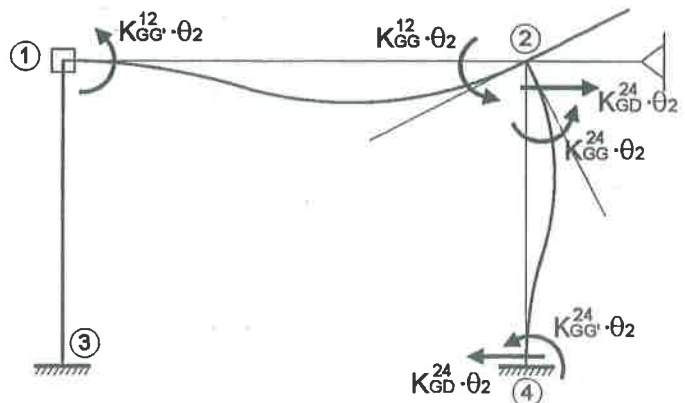


Figura 3.1.4

L'efecte del desplaçament de la planta es presenta en la figura 3.1.5.

Els esforços provocats per aquest desplaçament configuren la tercera columna de la matriu de rigidesa de l'estructura:

$$\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ F_{Hp} \end{matrix} \begin{bmatrix} & & K_{GD}^{13} \\ & & K_{GD}^{24} \\ & & K_{DD}^{13} + K_{DD}^{24} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \delta_{Hp} \end{matrix}$$

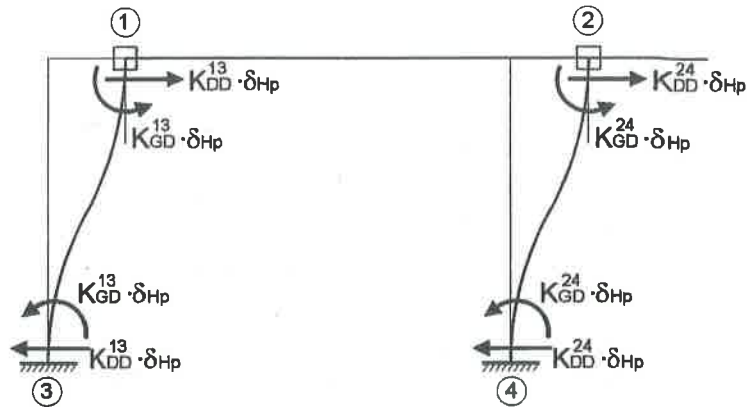


Figura 3.1.5

Així doncs, la matriu de rigidesa de l'estructura proposada està formada pels següents elements:

$$\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ F_{Hp} \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{GG}^{12} + K_{GG}^{13} & K_{GG'}^{12} & K_{GD}^{13} \\ K_{GG'}^{12} & K_{GG}^{12} + K_{GG}^{24} & K_{GD}^{24} \\ K_{GD}^{13} & K_{GD}^{24} & K_{DD}^{13} + K_{DD}^{24} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \delta_{Hp} \end{matrix}$$

Per poder escriure l'equació matricial d'equilibri de l'estructura només falta calcular les rigideses de les barres.

Tal i com es pot observar en les figures 3.1.1 i 3.1.2, quan hem impedit els moviments dels nusos de l'estructura ens han quedat totes les barres biencastades excepte, evidentment, el voladís. Així doncs, tant a la biga 1-2, com als pilars 1-3 i 2-4, els hi correspon el valor de rigidesa de barra amb extrem encastat; els voladissos no tenen rigidesa. El valor de les rigideses es presenta en el següent quadre:

BARRA	L (m)	E·I (m <sup>2</sup> T)	K <sub>GG</sub> (mT)	K <sub>GG'</sub> (mT)	K <sub>GD</sub> (T)	K <sub>DD</sub> (T/m)
			4EI/L	2EI/L	6EI/L <sup>2</sup>	12EI/L <sup>3</sup>
1-2	6	407,4	271,6	135,8	67,9	22,633
1-3 i 2-4	4	804,51	804,51	402,25	301,69	150,845

Donat que l'eix Y de la secció dels pilar coincideix amb el pla del pòrtic, l'eix de flexió (o eix neutre) d'aquests pilars és el X, per tant:  $I_x = 3831 \text{ cm}^4$  (pilars)

Pel cas de la biga, la disposició lògica és aquella que fa que l'eix de flexió sigui el X, per tant:

$$I_x = 1940 \text{ cm}^4 \text{ (bigues)}$$

Finalment, l'equació matricial d'equilibri del pòrtic proposat queda:

$$\begin{bmatrix} -4,35 \\ +1,5 \\ +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1076,11 & 135,8 & 301,69 \\ 135,8 & 1076,11 & 301,69 \\ 301,69 & 301,69 & 301,69 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_{Hp} \end{bmatrix}$$

Resolent aquesta equació matricial d'equilibri, amb qualsevol programa de resolució d'equacions, obtenim els moviments dels nusos de l'estructura:

$$\theta_1 = -8,738994 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_2 = -2,517642 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_{Hp} = +1,788596 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Un cop obtinguts els moviments dels nusos de l'estructura, es poden determinar els moments finals en extrem de barra.

La superposició dels 5 estats, descrits en les figures 3.1.1 a 3.1.5, ens donarà la situació final de l'estructura, és a dir, el que realment li passa. Així, per obtenir els moments finals en els extrems d'una barra, només ens cal sumar els moments que es produeixen, en cada un dels extrems, per a cadascun dels estats esmentats.

Així doncs, els moments finals en extrem de barra de l'estructura proposada són:

Biga 1-2:

$$M_{12} = m_{12} + K_{GG}^{12} \cdot \theta_1 + K_{GG'}^{12} \cdot \theta_2$$

$$M_{21} = m_{21} + K_{GG}^{12} \cdot \theta_2 + K_{GG'}^{12} \cdot \theta_1$$

Voladís:

$$M_{2-vol} = m_{2-vol}$$

Pilars 1-3 i 2-4

$$M_{13} = K_{GG}^{13} \cdot \theta_1 + K_{GD}^{13} \cdot (\delta_{Hp})$$

$$M_{31} = K_{GG'}^{13} \cdot \theta_1 + K_{GD}^{13} \cdot (\delta_{Hp})$$

$$M_{24} = K_{GG}^{24} \cdot \theta_2 + K_{GD}^{24} \cdot (\delta_{Hp})$$

$$M_{42} = K_{GG'}^{24} \cdot \theta_2 + K_{GD}^{24} \cdot (\delta_{Hp})$$

Substituint pels valors coneguts prèviament tenim:

Biga 1-2:

$$M_{12} = +4,35 + 271,6 \cdot (-8,738994 \cdot 10^{-3}) + 135,8 \cdot (-2,517642 \cdot 10^{-3}) = +1,635 \text{ mT}$$

$$M_{21} = -4,35 + 271,6 \cdot (-2,517642 \cdot 10^{-3}) + 135,8 \cdot (-8,738994 \cdot 10^{-3}) = -6,22 \text{ mT}$$

Voladís:

$$M_{2-vol} = +2,85 \text{ mT}$$

Pilar 1-3:

$$M_{13} = 804,51 \cdot (-8,738994 \cdot 10^{-3}) + 301,69 \cdot (+1,788596 \cdot 10^{-2}) = -1,635 \text{ mT}$$

$$M_{31} = 402,25 \cdot (-8,738994 \cdot 10^{-3}) + 301,69 \cdot (+1,788596 \cdot 10^{-2}) = +1,88 \text{ mT}$$

Pilar 2-4:

$$M_{24} = 804,51 \cdot (-2,517642 \cdot 10^{-3}) + 301,69 \cdot (+1,788596 \cdot 10^{-2}) = +3,37 \text{ mT}$$

$$M_{42} = 402,25 \cdot (-2,517642 \cdot 10^{-3}) + 301,69 \cdot (+1,788596 \cdot 10^{-2}) = +4,383 \text{ mT}$$

Resultat:

$M_{12} = +1,635 \text{ mT}$	$M_{2-vol} = +2,85 \text{ mT}$	$M_{13} = -1,635 \text{ mT}$	$M_{24} = +3,37 \text{ mT}$
$M_{21} = -6,22 \text{ mT}$		$M_{31} = +1,88 \text{ mT}$	$M_{42} = +4,383 \text{ mT}$

Les reaccions del pòrtic es produeixen en els nusos que tenen algun moviment impedit. Aquestes reaccions són els esforços que es produeixen en els extrems de les barres lligades als esmentats nusos.

Així, en el cas del pòrtic proposat, els nusos amb moviments impedits són el nus 3 (encastament), i el nus 4 (encastament). Les reaccions en el nus 3 són els esforços en l'extrem 3 del pilar 1-3, i les reaccions en el nus 4 són els esforços en l'extrem 4 del pilar 2-4.

Tenint en compte el tipus de nus, les reaccions del pòrtic són:

$$\begin{aligned} \text{Nus 3 (encastament):} \quad & \text{Reacció vertical } R_{3V} = \text{Esforç axial } N_{31} \\ & \text{Reacció horitzontal } R_{3H} = \text{Esforç tallant } T_{31} \\ & \text{Reacció moment } M_3 = \text{Moment flector } M_{31} \\ \text{Nus 4 (encastament):} \quad & \text{Reacció vertical } R_{4V} = \text{Esforç axial } N_{42} \\ & \text{Reacció horitzontal } R_{4H} = \text{Esforç tallant } T_{42} \\ & \text{Reacció moment } M_4 = \text{Moment flector } M_{42} \end{aligned}$$

Com que fins ara només hem calculat els moments finals en extrems de barra, ens cal completar l'anàlisi per determinar la resta d'esforços en extrem de barra, és a dir, els esforços tallants i els esforços axials.

Aquest càlcul el podem fer aplicant el principi bàsic d'equilibri:

"Si l'estructura està globalment en equilibri, també ho estaran cadascuna de les barres i cadascun dels nusos que la conformen"

Així doncs, només ens cal imposar l'equilibri a cadascuna de les barres i a cadascun del nusos del pòrtic, i això ho podem fer perquè ja hem determinat els moments flectors que els nusos provoquen en els extrems de les barres, la qual cosa ens permet tractar cada barra per separat, com si fos biarticulada i aplicant els moments dels extrems com una càrrega mes.

En la figura 3.1.6 es pot veure el tractament aïllat de cada barra i cada nus del pòrtic, amb indicació de les càrregues aplicades i dels esforços que fan falta per aconseguir l'equilibri.

Càlcul dels esforços tallants en els extrems de les barres:

$$\text{Biga 1-2:} \quad T_{12} = \frac{1}{2} + \frac{12 \times 6}{2} - \frac{6,22 - 1,635}{6} = 0,5 + 3,6 - 0,764 = 3,336 \text{ T}$$

$$T_{21} = \frac{1}{2} + \frac{12 \times 6}{2} + \frac{6,22 - 1,635}{6} = 0,5 + 3,6 + 0,764 = 4,864 \text{ T}$$

$$\text{Voladís:} \quad T_{2-\text{vol}} = 1,2 \times 1,5 + 1 = 1,8 + 1 = 2,8 \text{ T}$$

$$\text{Pilar 1-3:} \quad T_{13} = -T_{31} = \frac{1,88 - 1,635}{4} = 0,062 \text{ T}$$

$$\text{Pilar 2-4:} \quad T_{24} = -T_{42} = \frac{4,383 + 3,37}{4} = 1,938 \text{ T}$$

L'esforç axial de les barres el podem determinar imposant l'equilibri en els nusos del pòrtic:

$$\text{Nus 2:} \quad \sum F_V = 0 \Rightarrow N_{24} = T_{21} + T_{2-\text{vol}} = 4,864 + 2,8 = 7,664 \text{ T}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{21} = T_{24} = 1,938 \text{ T}$$

Imposant l'equilibri de forces verticals en el pilar 2-4 tenim:

$$N_{42} = N_{24} = 7,664 \text{ T}$$

Imposant l'equilibri de forces horitzontals en la biga 1-2 tenim:

$$N_{12} = N_{21} = 1,938 \text{ T}$$

Nus 1:  $\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{13} = T_{12} = 3,336 \text{ T}$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow 2 - N_{12} - T_{13} = 2 - 1,938 - 0,062 = 0 \quad (\text{OK})$$

Imposant l'equilibri de forces verticals en el pilar 13 tenim:

$$N_{31} = N_{13} = 3,336 \text{ T}$$

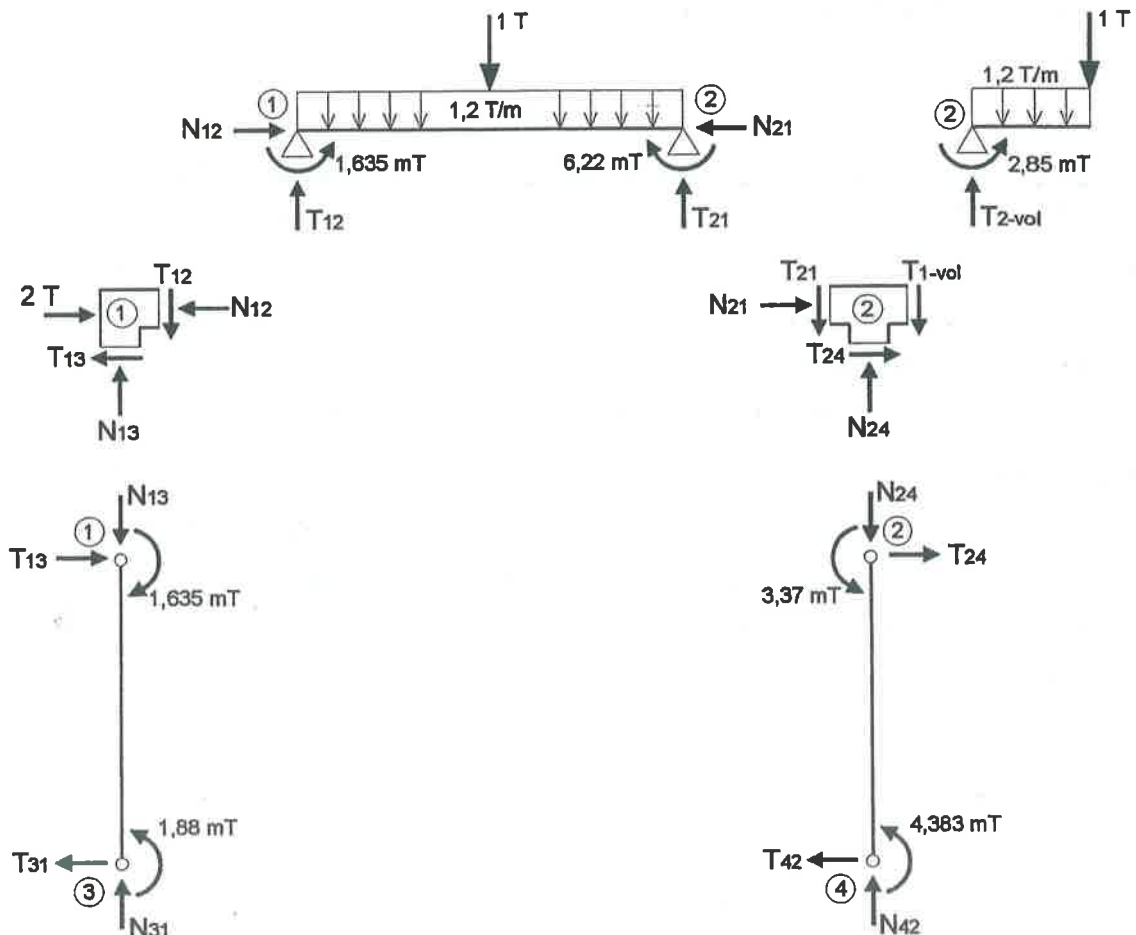


Figura 3.1.6

Les reaccions del pòrtic, en valor absolut, són les següents:

Nus 3:  $R_{3V} = N_{31} = 3,336 \text{ T}$

$$R_{3H} = T_{31} = 0,062 \text{ T}$$

$$M_3 = M_{31} = 1,88 \text{ mT}$$

Nus 4:  $R_{4V} = N_{42} = 7,664 \text{ T}$

$$R_{4H} = T_{42} = 1,938 \text{ T}$$

$$M_4 = M_{42} = 4,383 \text{ mT}$$

El sentit d'aquestes reaccions són les indicades en la figura 3.1.7.

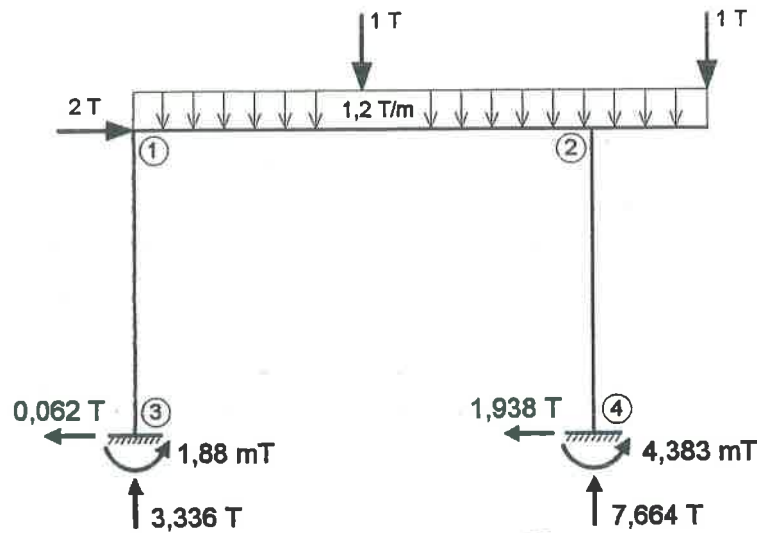


Figura 3.1.7

Un cop calculades les reaccions, podem comprovar si, efectivament, el pòrtic ens ha quedat globalment en equilibri:

Equilibri de forces verticals:

$$\sum F_v = 1 + 1 + 1,2 \cdot 7,5 - 3,336 - 7,664 = 11 - 11 = 0 \quad \text{correcte}$$

Equilibri de forces horitzontals:

$$\sum F_h = 2 - 0,062 - 1,938 = 2 - 2 = 0 \quad \text{correcte}$$

Equilibri de moments:

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7,5 + 1,2 \cdot 7,5 \cdot 3,75 - 1,88 - 4,383 - 7,664 \cdot 6 = \\ &= 8 + 3 + 7,5 + 33,75 - 1,88 - 4,383 - 45,984 = \\ &= 52,25 - 52,247 = 0,003 \cong 0 \quad \text{correcte} \end{aligned}$$



**EXERCICI 3.2**

Escriu l'equació matricial d'equilibri (amb números) del pòrtic de la figura 3.2

Dades: Totes les barres són d'acer A-42

Les bigues són perfils IPE-180, i els pilars són perfils HEB-120

L'eix Y de la secció dels pilars coincideix amb el pla del pòrtic.

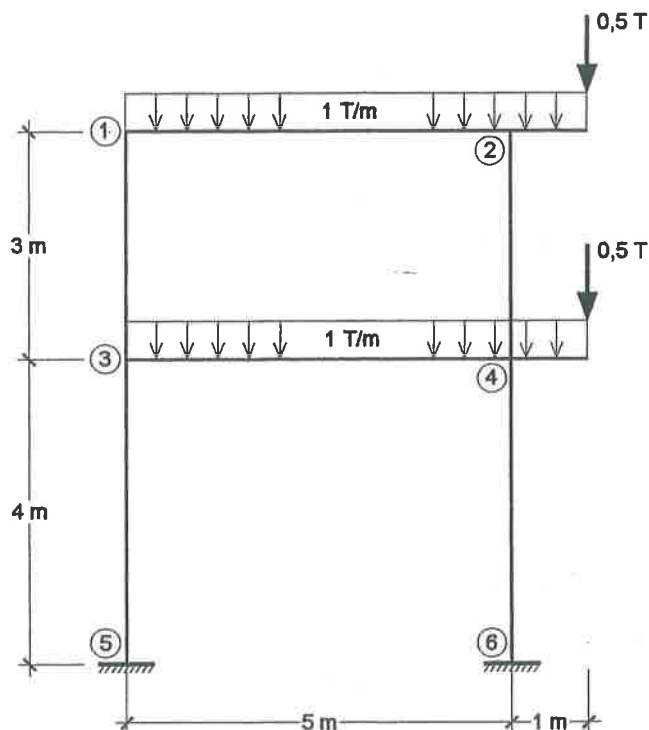


Figura 3.2

**Solució:**

L'equació matricial d'equilibri d'una estructura sempre té el format:  $[P] = [K] \cdot [\delta]$  on

$[P]$  és el vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura

$[K]$  és la matriu de rigidesa de l'estructura

$[\delta]$  és el vector de moviments dels nusos de l'estructura

Els moviments dels nusos de l'estructura són les incògnites de l'equació i, per tant, el número de moviments determina el número d'elements de cada un dels vectors i de la matriu de rigidesa, és a dir, el número de files de l'equació matricial.

L'estructura proposada té 4 nusos lliures (els extrems dels voladissos no compten), i les dues plantes són desplaçables. Així doncs, els moviments incògnita són 6:

4 girs: Gir del nus 1  $\Rightarrow \theta_1$

Gir del nus 2  $\Rightarrow \theta_2$

Gir del nus 3  $\Rightarrow \theta_3$

Gir del nus 4  $\Rightarrow \theta_4$

2 desplaçaments horitzontals: Desplaçament de la planta inferior  $\Rightarrow \delta_{Hp1}$

Desplaçament de la planta superior  $\Rightarrow \delta_{Hp2}$

Per tant, el vector de moviments dels nusos de l'estructura és:  $[\delta] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \delta_{Hp1} \\ \delta_{Hp2} \end{bmatrix}$

El vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura s'obté valorant l'efecte de les accions quan tots els moviments són impeditos.

Com que podem tenir accions aplicades directament en els nusos i accions aplicades en les barres, el vector d'accions equivalents serà la suma de dos vectors:  $[P] = [A] - [m]$  on

$[A]$  és el vector d'accions aplicades directament en els nusos de l'estructura, i

$[m]$  és el vector de reaccions d'encastament perfecte de les barres.

En el cas del pòrtic proposat tenim:

Moments sobre el nus 1	$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ F_{Hp1} \\ F_{Hp2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{12} + m_{13} \\ m_{21} + m_{2-vol} + m_{24} \\ m_{31} + m_{34} + m_{35} \\ m_{42} + m_{43} + m_{4-vol} + m_{46} \\ T_{35} + T_{31} + T_{46} + T_{42} \\ T_{13} + T_{24} \end{bmatrix} = [P]$
Moments sobre el nus 2	
Moments sobre el nus 3	
Moments sobre el nus 4	
Força horitzontal sobre planta 1 (inf)	
Força horitzontal sobre planta 2 (sup)	

Com que no hi ha accions directament aplicades sobre els nusos de l'estructura, tenim:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = F_{Hp1} = F_{Hp2} = 0$$

L'efecte de les accions aplicades a les barres, suposant els moviments impeditos, es pot veure en la figura 3.2.1.

Només es deformen les barres que tenen càrrega aplicada.

Com que els pilars no tenen càrrega aplicada, els seus moments d'encastament perfecte són nuls, igual que el tallant en els seus extrems:

$$\begin{aligned} m_{13} = m_{31} = 0 & \quad T_{13} = T_{31} = 0 \\ m_{24} = m_{42} = 0 & \quad T_{24} = T_{42} = 0 \\ m_{35} = m_{53} = 0 & \quad T_{35} = T_{53} = 0 \\ m_{46} = m_{64} = 0 & \quad T_{46} = T_{64} = 0 \end{aligned}$$

Càlcul dels moments d'encastament perfecte de les bigues:

$$m_{12} = -m_{21} = \frac{1 \cdot 5^2}{12} = 2,083 \text{ mT}$$

$$m_{34} = -m_{43} = \frac{1 \cdot 5^2}{12} = 2,083 \text{ mT}$$

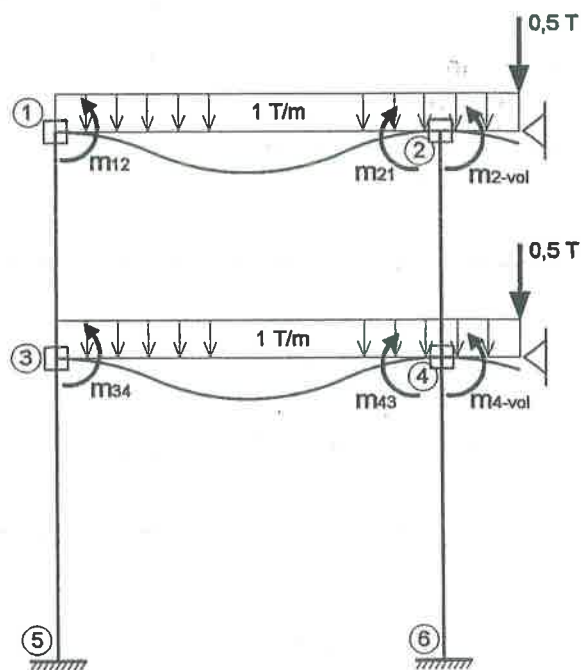


Figura 3.2.1

$$m_{2-vol} = m_{4-vol} = \frac{1 \cdot 1^2}{2} + 0,5 \cdot 1 = 1 \text{ mT}$$

Per tant, el vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura queda:

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +2,083 \\ -2,083 + 1 \\ +2,083 \\ -2,083 + 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,083 \\ +1,083 \\ -2,083 \\ +1,083 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriu de rigidesa d'una estructura sempre és una matriu quadrada de NxN elements, on N és el número de moviments dels nusos de l'estructura. Així, en el cas del pòrtic proposat, la matriu de rigidesa serà de 6x6 elements.

En el cas del pòrtic proposat tindrem:

Moments sobre el nus 1	11
Moments sobre el nus 2	
Moments sobre el nus 3	
Moments sobre el nus 4	43
Força horitzontal sobre planta 1 (inf)	
Força horitzontal sobre planta 2 (sup)	56
	$\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \delta_{Hp1} \quad \delta_{Hp2}$

I sabem que:

- l'element 11 de la matriu de rigidesa de l'estructura ( fila1, columna 1) serà el moment que rep el nus 1 degut al gir del nus 1;
- l'element 43 de la matriu de rigidesa de l'estructura (fila 4, columna 3) serà el moment que rep el nus 4 degut al gir del nus 3;
- l'element 56 de la matriu de rigidesa de l'estructura (fila5, columna 6) serà la força horitzontal que rep la planta 1 deguda al desplaçament de la planta 2

La manera mes pràctica de muntar la matriu de rigidesa d'una estructura és fer-ho per columnes; d'aquesta manera només cal saber veure els esforços que provoca cadascun dels moviments per separat, es a dir, amb els altres moviments impeditos.

Com que només tenim dos tipus de moviments (gir d'un nus i desplaçament d'una planta), si estudiem l'efecte del gir d'un nus genèric i el del desplaçament d'una planta genèrica podrem extrapolar el resultat a qualsevol estructura.

Per el cas d'estructures de barres ortogonals, en un nus hi arribaran, com a màxim, 4 barres i, per tant, el nus més genèric serà aquell en el que hi coincideixin 2 bigues i 2 pilars (Fig. 3.2.2).

Es pot veure com el gir d'un nus només afecta a les barres lligades a ell.

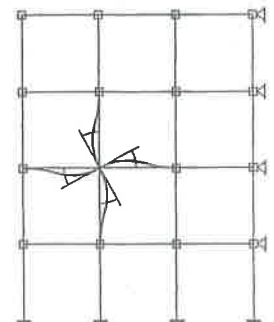


Figura 3.2.2

En la figura 3.2.3 es presenten els esforços produïts pel gir d'un nus genèric. No s'han inclòs els esforços tallants de les bigues, tot i que sí que existeixen, per que habitualment no cal imposar l'equilibri de forces verticals.

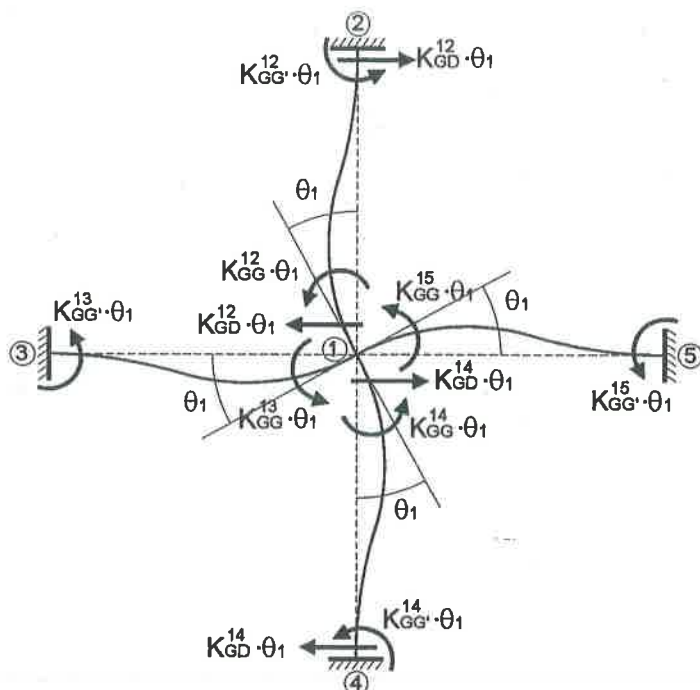


Figura 3.2.3

Tanmateix, el cas més genèric de desplaçament d'una planta serà una planta intermèdia, és a dir, amb pilars tant per dalt com per sota de la planta desplaçada (Fig. 3.2.4).

Es pot veure com el desplaçament d'una planta afecta a tots els pilars lligats a ella, tant els superiors com els inferiors.

En la figura 3.2.5 es presenten els esforços produïts pel desplaçament horitzontal d'una planta genèrica.

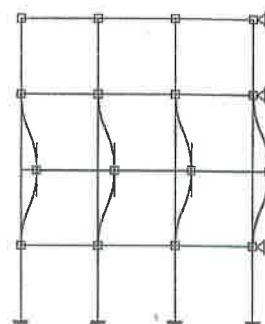


Figura 3.2.4

Amb l'ajut d'aquestes dues figures i tenint en compte el que s'ha explicat sobre la matriu de rigidesa d'una estructura, estem en condicions de muntar la matriu de rigidesa de l'estructura proposada.

Així doncs, la matriu de rigidesa de l'estructura proposada està formada pels següents elements:

$M_1$	$K_{GG}^{12} + K_{GG}^{13}$	$K_{GG}^{12}$	$K_{GG}^{13}$	0	$-K_{GD}^{13}$	$K_{GD}^{13}$
$M_2$	$K_{GG}^{12}$	$K_{GG}^{12} + K_{GG}^{24}$	0	$K_{GG}^{24}$	$-K_{GD}^{24}$	$K_{GD}^{24}$
$M_3$	$K_{GG}^{13}$	0	$K_{GG}^{13} + K_{GG}^{34} + K_{GG}^{35}$	$K_{GG}^{34}$	$K_{GD}^{35} - K_{GD}^{13}$	$K_{GD}^{13}$
$M_4$	0	$K_{GG}^{24}$	$K_{GG}^{34}$	$K_{GG}^{24} + K_{GG}^{34} + K_{GG}^{46}$	$K_{GD}^{46} - K_{GD}^{24}$	$K_{GD}^{24}$
$F_{Hp1}$	$-K_{GD}^{13}$	$-K_{GD}^{24}$	$K_{GD}^{35} - K_{GD}^{13}$	$K_{GD}^{46} - K_{GD}^{24}$	$K_{DD}^{13} + K_{DD}^{24} + K_{DD}^{35} + K_{DD}^{46}$	$-(K_{DD}^{13} + K_{DD}^{24})$
$F_{Hp2}$	$K_{GD}^{13}$	$K_{GD}^{24}$	$K_{GD}^{13}$	$K_{GD}^{24}$	$-(K_{DD}^{13} + K_{DD}^{24})$	$K_{DD}^{13} + K_{DD}^{24}$
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\delta_{Hp1}$	$\delta_{Hp2}$

Per poder escriure l'equació matricial d'equilibri de l'estructura només falta calcular les rigideses de les barres.

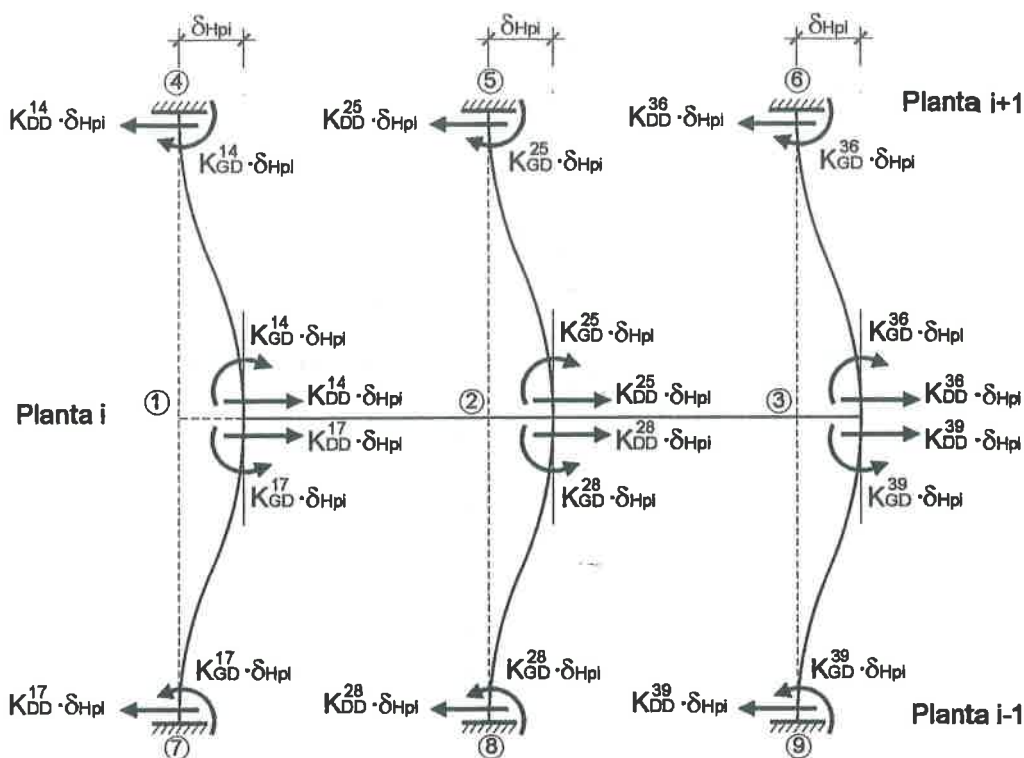


Figura 3.2.5

Tal i com es pot observar en la figura 3.2.1, quan hem impedit els moviments dels nusos de l'estructura ens han quedat totes les barres biencastades excepte, evidentment, els voladissos. Així doncs, tant a les bigues 1-2 i 3-4, com als pilars 1-3, 2-4, 3-5 i 4-6 els hi correspon el valor de rigidesa de barra amb extrem encastat. El valor de les rigideses es presenta en el següent quadre:

BARRA	L (m)	E·I (m <sup>2</sup> T)	K <sub>GG</sub> (mT)	K <sub>GG'</sub> (mT)	K <sub>GD</sub> (T)	K <sub>DD</sub> (T/m)
			4EI/L	2EI/L		
1-2 i 3-4	5	277,20	221,76	110,88	66,528	26,6112
1-3 i 2-4	3	181,44	241,92	120,96	120,96	80,64
3-5 i 4-6	4	181,44	181,44	90,72	68,04	34,02

Finalment, l'equació matriu d'equilibri de l'estructura queda:

$$\begin{bmatrix} -2,083 \\ +1,083 \\ -2,083 \\ +1,083 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 463,68 & 110,88 & 120,96 & 0 & -120,96 & 120,96 \\ 110,88 & 463,68 & 0 & 120,96 & -120,96 & 120,96 \\ 120,96 & 0 & 645,12 & 110,88 & -52,96 & 120,96 \\ 0 & 120,96 & 110,88 & 645,12 & -52,96 & 120,96 \\ -120,96 & -120,96 & -52,96 & -52,96 & 229,32 & -16,128 \\ 120,96 & 120,96 & 120,96 & 120,96 & -16,128 & 16,128 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \delta_{Hp1} \\ \delta_{Hp2} \end{bmatrix}$$



**EXERCICI 3.3**

Sabem que els moviments dels nusos del pòrtic de la figura 3.3 són:

$$\theta_1 = -6,883725 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_3 = -2,966177 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\delta_{H34} = -8,630954 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

- Calcula els moments finals en extrem de barra
- Calcula les reaccions del pòrtic

**Dades:** Totes les barres són d'acer A-42

Les bigues són perfils IPE-180, i els pilars són perfils HEB-120

L'eix Y de la secció dels pilars coincideix amb el pla del pòrtic.

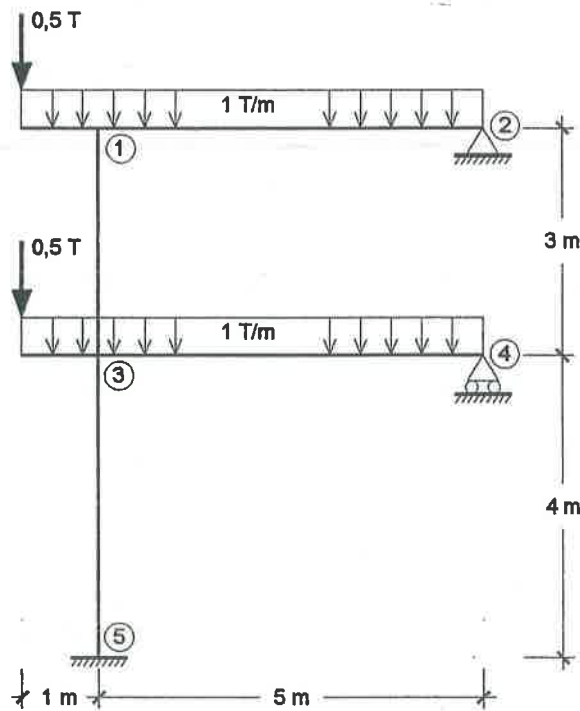


Figura 3.3

**Solució:**

Sabem que el moment final en l'extrem d'una barra és la suma del moment d'encastament perfecte (efecte de la càrrega sense moviments), el moment produït pel gir de cada un dels seus extrems i el moment produït pel desplaçament relatiu dels extrems de la barra, transversal a aquesta. Així, el moment final es pot expressar de la següent manera:

$$M_{ij} = m_{ij} + K_{GG} \cdot \theta_i + K_{GG'} \cdot \theta_j + K_{GD} \cdot (\delta_i - \delta_j)$$

$$M_{ji} = m_{ji} + K_{GG} \cdot \theta_j + K_{GG'} \cdot \theta_i + K_{GD} \cdot (\delta_i - \delta_j)$$



on "i" és l'extrem esquerra de la barra, quan es tracta d'una biga, o bé l'extrem superior quan es tracta d'un pilar.

Quan la barra té un extrem en voladís, el moment final en el seu extrem lligat a l'estructura és sempre el moment produït per les càrregues que suporta, ja que els moviments dels nusos de l'estructura no l'afecten.



En el cas del pòrtic proposat tindrem:

Barres en voladís:  $M_{1-vol} = m_{1-vol}$   $M_{3-vol} = m_{3-vol}$

Bigues: Tant la biga 1-2 com la biga 3-4 tenen un extrem articulat, per tant, el moment en aquest extrem serà nul.

El desplaçament del pòrtic (horitzontal) no afecta a les bigues perquè no és transversal a elles.

$$M_{12} = m_{12} + K_{GG}^{12} \cdot \theta_1 \qquad M_{34} = m_{34} + K_{GG}^{34} \cdot \theta_3$$

$$M_{21} = 0 \qquad M_{43} = 0$$

Pilars: La planta superior del pòrtic no té desplaçament horitzontal mentre que la planta inferior sí en té.

En el cas del pilar 1-3 només es produeix desplaçament transversal en el seu extrem inferior (nus 3)

En el cas del pilar 3-5 només es produeix desplaçament transversal en el seu extrem superior (nus 3). L'extrem 5 està encastat (gir nul).

$$M_{13} = K_{GG}^{13} \cdot \theta_1 + K_{GG'}^{13} \cdot \theta_3 + K_{GD}^{13} \cdot (-\delta_{H34}) \qquad M_{35} = K_{GG}^{35} \cdot \theta_3 + K_{GD}^{35} \cdot (\delta_{H34})$$

$$M_{31} = K_{GG}^{13} \cdot \theta_3 + K_{GG'}^{13} \cdot \theta_1 + K_{GD}^{13} \cdot (-\delta_{H34}) \qquad M_{53} = K_{GG}^{35} \cdot \theta_3 + K_{GD}^{35} \cdot (\delta_{H34})$$

L'efecte de les accions sobre les barres, suposant els moviments impeditos es pot veure en la figura 3.3.1

Càlcul dels moments d'encastament perfecte:

$$m_{1-vol} = m_{3-vol} = -(1 \cdot 1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1) = 1,0 \text{ mT}$$

$$m_{12} = m_{34} = + \frac{1 \cdot 5^2}{8} = + 3,125 \text{ mT}$$

Càlcul de les rigideses de les barres:

Bigues:

$$E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{Kp}}{\text{cm}^2} \cdot 1320 \text{ cm}^4 \cdot 10^{-7} = 277,2 \text{ m}^2\text{T}$$

Tant la biga 1-2 com la biga 3-4 tenen un extrem articulat

$$K_{GG}^{12} = K_{GG}^{34} = \frac{3 \cdot 277,2}{5} = 166,32 \text{ mT}$$

$$K_{GG'}^{12} = K_{GG'}^{34} = 0$$

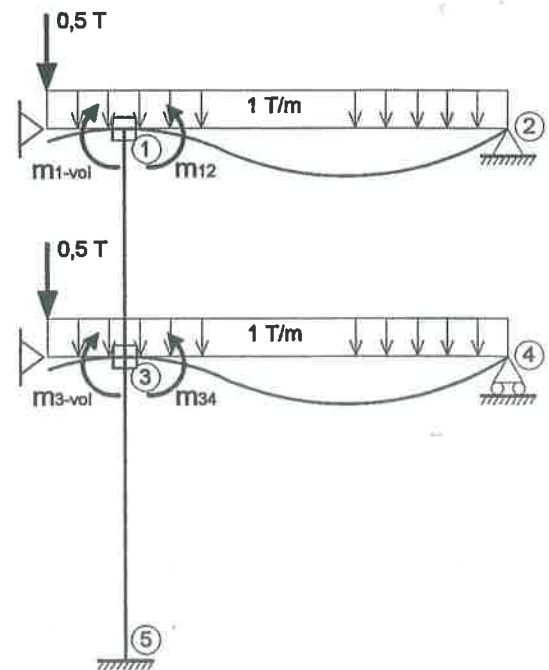


Figura 3.3.1

Pilars:  $E \times I = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{Kp}}{\text{cm}^2} \cdot 864 \text{ cm}^4 \cdot 10^{-7} = 181,44 \text{ m}^2\text{T}$

$$K_{GG}^{13} = \frac{4 \cdot 181,44}{3} = 241,92 \text{ mT}$$

$$K_{GG}^{35} = \frac{4 \cdot 181,44}{4} = 181,44 \text{ mT}$$

$$K_{GG'}^{13} = \frac{2 \cdot 181,44}{3} = 120,96 \text{ mT}$$

$$K_{GG'}^{35} = \frac{2 \cdot 181,44}{4} = 90,72 \text{ mT}$$

$$K_{GD}^{13} = \frac{6 \cdot 181,44}{3^2} = 120,96 \text{ T}$$

$$K_{GD}^{35} = \frac{6 \cdot 181,44}{4^2} = 68,04 \text{ T}$$

Un cop calculades les rigideses de les barres només cal substituir en les expressions anteriors per determinar els moments finals en extrem de barra:

Voladissos:  $M_{1-vol} = -1 \text{ mT}$

$$M_{3-vol} = -1 \text{ mT}$$

Bigues:  $M_{12} = +3,125 + 166,32 \cdot (-6,883725 \cdot 10^{-3}) = +1,98 \text{ mT}$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{34} = +3,125 + 166,32 \cdot (-2,966177 \cdot 10^{-3}) = +2,631 \text{ mT}$$

$$M_{43} = 0$$

Pilars:  $M_{13} = +24,192 \cdot (-6,883725 \cdot 10^{-3}) + 120,96 \cdot (-2,966177 \cdot 10^{-3}) + 120,96 \cdot (-(-8,630954 \cdot 10^{-3})) = -0,98 \text{ mT}$

$$M_{31} = +24,192 \cdot (-2,966177 \cdot 10^{-3}) + 120,96 \cdot (-6,883725 \cdot 10^{-3}) + 120,96 \cdot (-(-8,630954 \cdot 10^{-3})) = -0,506 \text{ mT}$$

$$M_{35} = +181,44 \cdot (-2,966177 \cdot 10^{-3}) + 68,04 \cdot (-8,630954 \cdot 10^{-3}) = -1,125 \text{ mT}$$

$$M_{53} = +90,72 \cdot (-2,966177 \cdot 10^{-3}) + 68,04 \cdot (-8,630954 \cdot 10^{-3}) = -0,856 \text{ mT}$$

Comprovació de l'equilibri en els nusos 1 i 3:

Nus 1:  $\sum M_1 = M_{1-vol} + M_{12} + M_{13} = -1 + 1,98 - 0,98 = 0$

Nus 3:  $\sum M_3 = M_{3-vol} + M_{34} + M_{31} + M_{35} = -1 + 2,631 - 0,506 - 1,125 = 0$

**Resultat:**

$M_{1-vol} = -1 \text{ mT}$	$M_{12} = +1,98 \text{ mT}$	$M_{34} = +2,631 \text{ mT}$	$M_{13} = -0,98 \text{ mT}$	$M_{35} = -1,125 \text{ mT}$
$M_{3-vol} = -1 \text{ mT}$	$M_{21} = 0$	$M_{43} = 0$	$M_{31} = -0,506 \text{ mT}$	$M_{53} = -0,856 \text{ mT}$

Les reaccions del pòrtic es produeixen en els nusos que tenen algun moviment impedit. Aquestes reaccions són els esforços que es produeixen en els extrems de les barres lligades als esmentats nusos.

Així, en el cas del pòrtic proposat, els nusos amb moviments impedits són el nus 2 (ròtula fixa), el nus 4 (ròtula mòbil) i el nus 5 (encastament). Les reaccions en el nus 2 són els esforços en l'extrem 2 de la biga 1-2, les reaccions en el nus 4 són els esforços en l'extrem 4 de la biga 3-4 i les reaccions en el nus 5 són els esforços en l'extrem 5 del pilar 3-5. És a dir:

Nus 2 (ròtula fixa): Reacció vertical  $R_{2V} =$  Esforç tallant  $T_{21}$

Reacció horitzontal  $R_{2H} =$  Esforç axial  $N_{21}$

Nus 3 (ròtula mòbil): Reacció vertical  $R_{4V} =$  Esforç tallant  $T_{43}$

Nus 5 (encastament): Reacció vertical  $R_{5V} =$  Esforç axial  $N_{53}$

Reacció horitzontal  $R_{5H} =$  Esforç tallant  $T_{53}$

Reacció moment  $M_5 =$  Moment flector  $M_{53}$

Com que fins ara només hem calculat els moments finals en extrems de barra, ens cal completar l'anàlisi per determinar la resta d'esforços en extrem de barra, és a dir, els esforços tallants i els esforços axials.

Aquest càlcul el podem fer aplicant el principi bàsic d'equilibri:

"Si l'estructura està globalment en equilibri, també ho estaran cadascuna de les barres i cadascun dels nusos que la conformen"

Així doncs, només ens cal imposar l'equilibri a cadascuna de les barres i a cadascun del nusos del pòrtic, i això ho podem fer perquè ja hem determinat els moments flectors que els nusos provoquen en els extrems de les barres, la qual cosa ens permet tractar cada barra per separat, com si fos biarticulada i aplicant els moments dels extrems com una càrrega mes.

En la figura 3.3.2 es pot veure el tractament aïllat de cada barra i cada nus del pòrtic, amb indicació de les càrregues aplicades i dels esforços que fan falta per aconseguir l'equilibri.

Càlcul dels esforços tallants en els extrems de les barres:

Voladissos: Els dos voladissos són iguals, per tant,

$$T_{1-vol} = T_{3-vol} = 1 \cdot 1 + 0,5 = 1,5 \text{ T}$$

Biga 1-2:

$$T_{12} = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{1,98}{5} = 2,896 \text{ T}$$

$$T_{21} = \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{1,98}{5} = 2,104 \text{ T}$$

Biga 3-4:

$$T_{34} = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{2,631}{5} = 3,026 \text{ T}$$

$$T_{43} = \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{2,631}{5} = 1,974 \text{ T}$$

Pilar 1-3:  $T_{31} = -T_{13} = \frac{0,98 + 0,506}{3} = 0,495 \text{ T}$

Pilar 3-5:  $T_{53} = -T_{35} = \frac{1,125 + 0,856}{4} = 0,495 \text{ T}$

Càlcul dels esforços axials en els extrems de les barres:

L'esforç axial de les barres el podem determinar imposant l'equilibri en els nusos del pòrtic:

Nus 1:  $\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{13} = T_{1-vol} + T_{12} = 1,5 + 2,896 = 4,396 \text{ T}$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{12} = T_{13} = 0,495 \text{ T}$$

Imposant l'equilibri de forces verticals en el pilar 1-3 tenim:

$$N_{31} = N_{13} = 4,396 \text{ T}$$

Imposant l'equilibri de forces horitzontals en la biga 1-2 tenim:

$$N_{21} = N_{12} = 0,495 \text{ T}$$

Nus 2:  $\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{35} = T_{3-vol} + T_{34} + N_{31} = 1,5 + 3,026 + 4,396 = 8,922 \text{ T}$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{34} = T_{35} - T_{31} = 0,495 - 0,495 = 0$$

Imposant l'equilibri de forces verticals en el pilar 3-5 tenim:

$$N_{53} = N_{35} = 8,922 \text{ T}$$

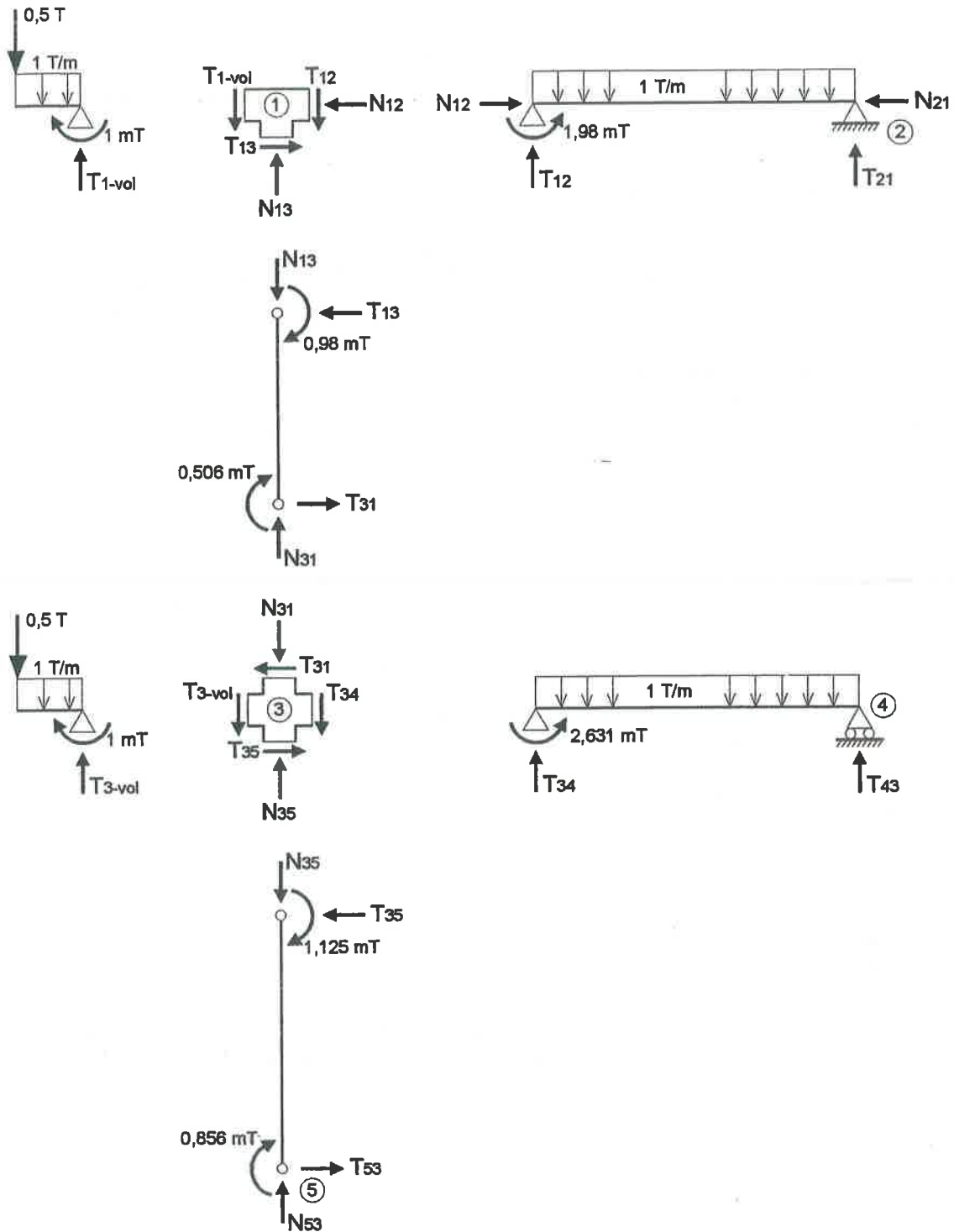


Figura 3.3.2

Finalment, un cop coneguts tots els esforços en els extrems de les barres, podem afirmar que les reaccions del pòrtic són les següents:

$$R_{2V} = T_{21} = 2,104 \text{ T}$$

$$R_{2H} = N_{21} = 0,495 \text{ T}$$

$$R_{4V} = T_{43} = 1,974 \text{ T}$$

$$R_{5V} = N_{53} = 8,922 \text{ T}$$

$$R_{5H} = T_{53} = 0,495 \text{ T}$$

$$M_5 = M_{53} = 0,856 \text{ mT}$$

El sentit d'aquestes reaccions són els indicats en la figura 3.3.3

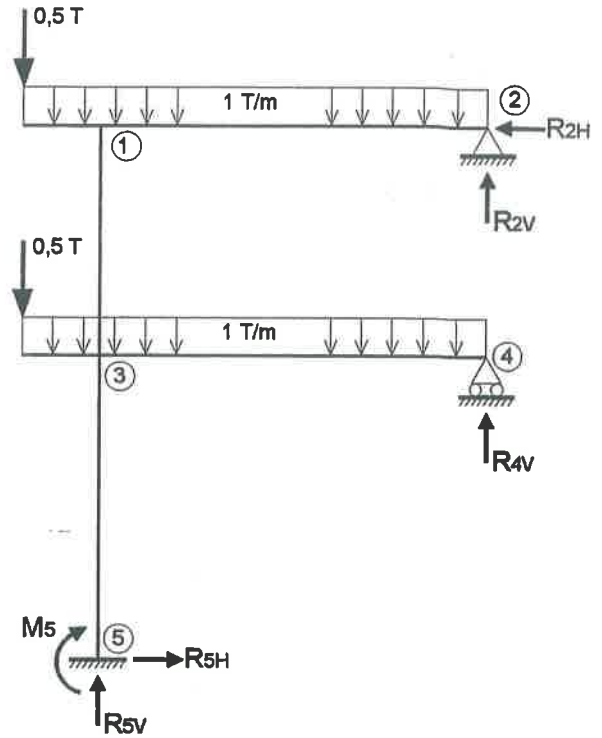


Figura 3.3.3

### EXERCICI 3.4

Calcula les reaccions de l'estructura dibuixada (fig. 3.4), sense considerar la variació de longitud de les barres.

Dades: Totes les barres són d'acer A-42

La biga és un perfil IPE-270, i el pilar és un perfil HEB-140

L'eix Y de la secció del pilar coincideix amb el pla del pòrtic.

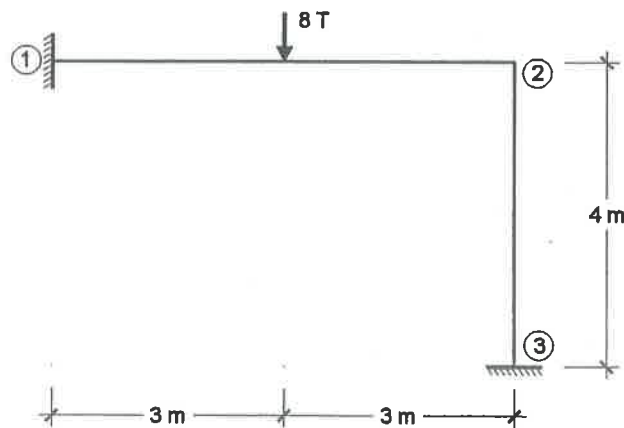


Figura 3.4

**Solució:**

Com que es tracta d'una estructura hiperestàtica, resoldrem la seva anàlisi mitjançant el mètode matricial de les deformacions amb la simplificació de no considerar la variació de longitud de les barres.

L'estructura només té 1 moviment incògnita: el gir del nus 2 ( $\theta_2$ )

Per tant, només cal establir 1 equació:  $\Sigma M_2 = 0$  (equilibri de moments en el nus 2)

El nus 2 no té cap moment directament aplicat.

L'efecte de les càrregues aplicades en barres es pot veure en la figura 3.4.1

$$m_{12} = -m_{21} = \frac{8 \cdot 6}{8} = 6 \text{ mT}$$

Imposant l'equilibri de moments en el nus 2 tenim:

$$-(-6) = (K_{GG}^{12} + K_{GG}^{23}) \cdot \theta_2$$

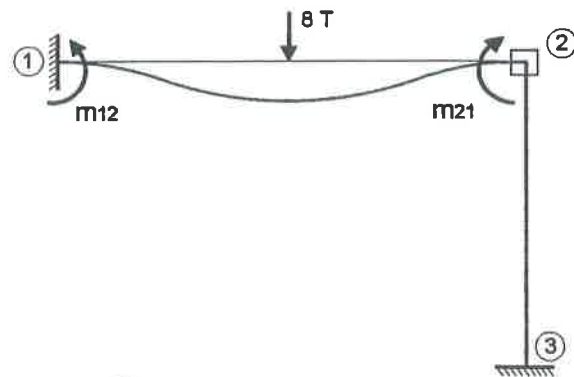


Figura 3.4.1

Calculem les rigideses de les barres:

Biga 12:  $E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 5790 \cdot 10^{-7} = 1215,9 \text{ m}^2\text{T}$

$$K_{GG}^{12} = \frac{4 \cdot 1215,9}{6} = 810,6 \text{ mT}$$

$$K_{GG'}^{12} = \frac{2 \cdot 1215,9}{6} = 405,3 \text{ mT}$$

Pilar 23:  $E \cdot I = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1509 \cdot 10^{-7} = 316,89 \text{ m}^2\text{T}$

$$K_{GG}^{23} = \frac{4 \cdot 316,89}{4} = 316,89 \text{ mT}$$

$$K_{GG'}^{23} = \frac{2 \cdot 316,89}{4} = 158,445 \text{ mT}$$

I ja podem calcular el gir del nus 2:

$$-(-6) = (K_{GG}^{12} + K_{GG}^{23}) \cdot \theta_2$$

$$K_{GG}^{12} + K_{GG}^{23} = 810,6 + 316,89 = 1127,49$$

$$+6 = 1127,49 \cdot \theta_2 \quad \theta_2 = + \frac{6}{1127,49} = +5,321555 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Un cop coneguts els moviments dels nusos de l'estructura, podem calcular els moments finals en extrem de barra:

$$M_{12} = m_{12} + K_{GG'}^{12} \cdot \theta_2 = +6 + 405,3 \cdot 5,321555 \cdot 10^{-3} = +8,157 \text{ mT}$$

$$M_{21} = m_{21} + K_{GG}^{12} \cdot \theta_2 = -6 + 810,6 \cdot 5,321555 \cdot 10^{-3} = -1,686 \text{ mT}$$

$$M_{23} = K_{GG}^{23} \cdot \theta_2 = 316,89 \cdot 5,321555 \cdot 10^{-3} = +1,686 \text{ mT}$$

$$M_{32} = K_{GG'}^{23} \cdot \theta_2 = 158,445 \cdot 5,321555 \cdot 10^{-3} = +0,843 \text{ mT}$$

Per arribar a les reaccions del pòrtic, cal conèixer els esforços tallants i axials en els extrems de les barres. Aquests esforços els podem calcular imposant l'equilibri a cada barra i a cada nus, tal com es pot veure en la figura 3.4.2



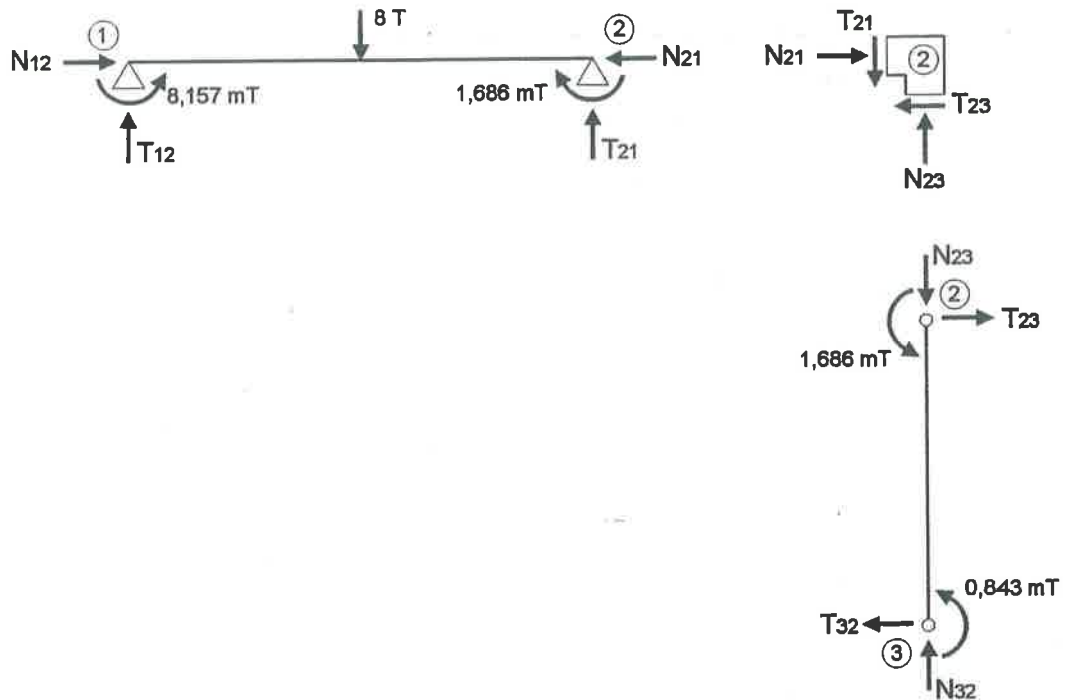


Figura 3.4.2

Biga 1-2: 
$$T_{12} = \frac{8 \cdot 3}{6} + \frac{8,157 - 1,686}{6} = 4 + 1,0785 = 5,0785 \text{ T}$$

$$T_{21} = \frac{8 \cdot 3}{6} - \frac{8,157 - 1,686}{6} = 4 - 1,0785 = 2,9215 \text{ T}$$

Pilar 2-3: 
$$T_{23} = -T_{32} = \frac{1,686 + 0,843}{4} = 0,63225 \text{ T}$$

Coneguts els esforços tallants en extrem de barra, podem imposar l'equilibri de forces en el nus 2, així obtindrem els esforços axials en extrem de barra:

Nus 2: 
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{21} = T_{23} = 0,63225 \text{ T}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{23} = T_{21} = 2,9215 \text{ T}$$

Finalment, un cop coneguts tots els esforços en els extrems de les barres, podem afirmar que les reaccions del pòrtic són les següents:

$$R_{1V} = T_{12} = 5,0785 \text{ T}$$

$$R_{3V} = T_{32} = 2,9215 \text{ T}$$

$$R_{1H} = N_{12} = 0,63225 \text{ T}$$

$$R_{3H} = T_{23} = 0,63225 \text{ T}$$

$$M_1 = M_{12} = 8,157 \text{ mT}$$

$$M_3 = M_{32} = 0,843 \text{ mT}$$

El sentit d'aquestes reaccions són els indicats en la figura 3.4.3

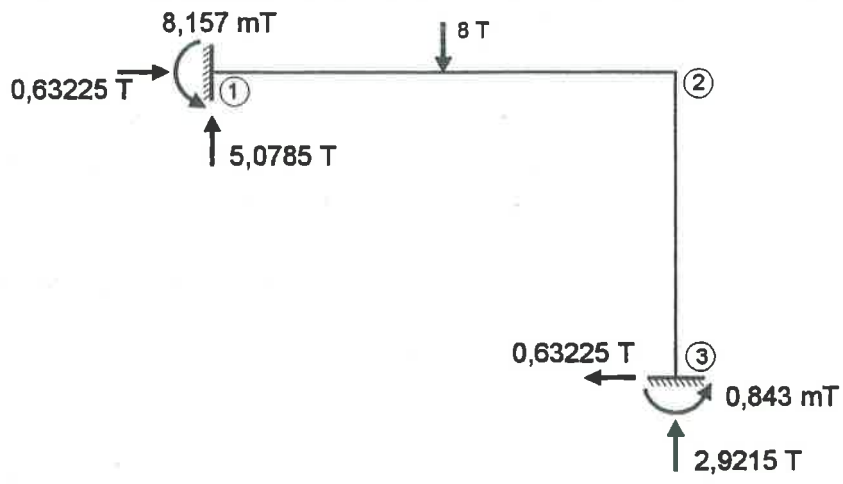


Figura 3.4.3

## Capítol 4.- ANÀLISI DE BIGUES CONTÍNUES

### INTRODUCCIÓ

Les bigues contínues són estructures hiperestàtiques; per tant, per poder fer la seva anàlisi no n'hi ha prou amb les equacions d'equilibri de l'estàtica.

Com que les bigues contínues són estructures formades per barres (trams de biga compresos entre dos recolzaments) i planes (barres i càrregues contingudes en un mateix pla), per fer la seva anàlisi podem utilitzar el mètode matricial, simplificat, de les deformacions, el qual ha estat exposat en el capítol anterior i aplicat a l'anàlisi de pòrtics plans.

En el cas de les bigues contínues, si no tenim en compte la variació de longitud de les barres, els moviments incògnita són 1 gir per a cada recolzament intermedi, és a dir, el número de incògnites és igual al número total de recolzaments menys 2 (els dos recolzaments extrems)

### EXERCICI 4.1

Donada la biga contínua de la figura 4.1:

- Calcula els moments finals en extrem de barra.
- Calcula les reaccions en els recolzaments de la biga.
- Calcula el moment flector màxim positiu del tram 3-4.

Dades: La secció de totes les barres és un IPE-220, d'acer A-42.

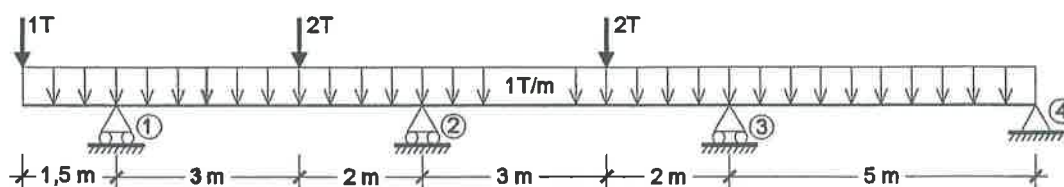


Figura 4.1

### Solució:

Els moment finals en extrem de barra els podem calcular mitjançant el mètode matricial de les deformacions, sense tenir en compte la variació de longitud de les barres.

1a Fase - Equació matricial d'equilibri i determinació dels moviments incògnita:

Les incògnites de l'equació matricial d'equilibri són dos girs: Gir del nus 2  $\Rightarrow \theta_2$

Gir del nus 3  $\Rightarrow \theta_3$

El vector de moviments dels nusos de l'estructura és:  $[\delta] = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$

I l'equació matricial d'equilibri tindrà el següent format:  $\begin{matrix} \Sigma M_2 = 0 \\ \Sigma M_3 = 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$

El vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura s'obté valorant l'efecte de les accions quan tots els moviments són impeditos.

La biga contínua proposada no té accions directament aplicades sobre els nusos.

L'efecte de les accions aplicades sobre les barres es pot veure en la figura 4.1.1.

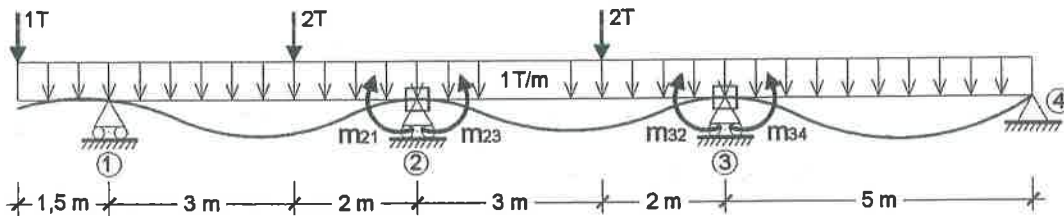


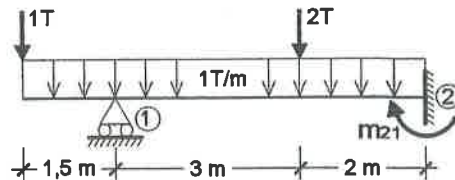
Figura 4.1.1

Càlcul dels moments d'encastament perfecte (fig. 4.1.2):

Barra 1-2 (vegeu exercici 1.10):

$$m_{vol} = 1 \cdot 1,5 + 1 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} = 1,5 + 1,125 = 2,625 \text{ mT}$$

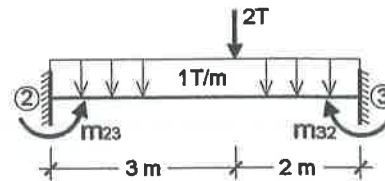
$$m_{21} = \frac{1 \cdot 1,5^2}{8} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (5+3)}{2 \cdot 5^2} - \frac{2,625}{2} = 3,7325 \text{ mT}$$



Barra 2-3:

$$m_{23} = \frac{1 \cdot 1,5^2}{12} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^2}{5^2} = 3,043 \text{ mT}$$

$$m_{32} = \frac{1 \cdot 1,5^2}{12} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3^2}{5^2} = 3,523 \text{ mT}$$



Barra 3-4:

$$m_{34} = \frac{1 \cdot 1,5^2}{8} = 3,125 \text{ mT}$$

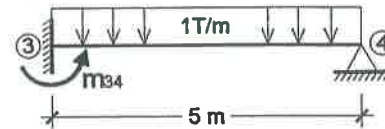


Figura 4.1.2

El vector d'accions equivalents sobre els nusos de la biga contínua queda:

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3,7325 + 3,043 \\ -3,523 + 3,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,689 \\ +0,398 \end{bmatrix}$$

Atenent al que s'ha exposat en l'exercici 3.2 respecte a la matriu de rigidesa d'una estructura i a l'efecte del gir d'un nus genèric (fig. 3.2.3), la matriu de rigidesa de la biga contínua proposada està formada pels següents elements:

$$\begin{matrix} M_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{GG}^{12} + K_{GG}^{23} & K_{GG}^{23} \\ K_{GG}^{23} & K_{GG}^{23} + K_{GG}^{34} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

Càlcul de les rigideses de les barres:

Com que totes les barres tenen la mateixa secció i són del mateix material, calculem les rigideses en funció de EI (el càlcul manual resulta més senzill).

Tal i com es pot observar en la figura 4.1.2, quan hem impedit els moviments dels nusos, les barres 1-2 i 3-4 han quedat amb un extrem articulat, mentre que la barra 2-3 ha quedat biencastada. El valor de les rigideses de les barres es presenta en el següent quadre:

BARRA	L (m)	$K_{GG}$	$K_{GG'}$
1-2 i 3-4	5	$\frac{3 \cdot E \cdot I}{5} = 0,6 \cdot E \cdot I$	0
2-3	5	$\frac{4 \cdot E \cdot I}{5} = 0,8 \cdot E \cdot I$	$\frac{2 \cdot E \cdot I}{5} = 0,4 \cdot E \cdot I$

Finalment l'equació matricial d'equilibri de la biga contínua queda:

$$\begin{bmatrix} +0,689 \\ +0,398 \end{bmatrix} = E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} 14 & 0,4 \\ 0,4 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Resolent el sistema d'equacions obtenim els moviments dels nusos de l'estructura, en funció de E·I:

$$\theta_2 = \frac{+0,4474}{E \cdot I} \qquad \theta_3 = \frac{+0,1564}{E \cdot I}$$

### 2a Fase – Càlcul dels moment finals en extrem de barra:

Atenent al que s'ha exposat en l'exercici 3.3 respecte als moments finals en extrem de barra i sabent que en els nusos d'una biga contínua només es produeixen girs tindrem:

$$M_{1-\text{vol}} = -2,625 \text{ mT}$$

$$M_{12} = +2,625 \text{ mT}$$

$$M_{21} = -3,7325 + 0,6 \cdot E \cdot I \cdot \frac{0,4474}{E \cdot I} = -3,464 \text{ mT}$$

$$M_{23} = +3,043 + 0,8 \cdot E \cdot I \cdot \frac{0,4474}{E \cdot I} + 0,4 \cdot E \cdot I \cdot \frac{0,1564}{E \cdot I} = +3,464 \text{ mT}$$

$$M_{32} = -3,523 + 0,8 \cdot E \cdot I \cdot \frac{0,1564}{E \cdot I} + 0,4 \cdot E \cdot I \cdot \frac{0,4474}{E \cdot I} = -3,219 \text{ mT}$$

$$M_{34} = +3,125 + 0,6 \cdot E \cdot I \cdot \frac{0,1564}{E \cdot I} = +3,219 \text{ mT}$$

$$M_{43} = 0$$

És important observar que en un nus d'una biga contínua només hi ha dues barres i que, per tal de que s'acompleixi l'equilibri de moments en el nus, el moment final en l'extrem lligat al nus de les dues barres ha de ésser igual i de sentit contrari.

En el cas del nus 1, el moment en l'extrem 1 del voladís només pot ésser el provocat per les càrregues que suporta, i el moment en l'extrem 1 de la barra 1-2 és el provocat pel voladís.

En el cas del nus 4, com que és un recolzament simple en el que només hi està lligada una barra, el moment final en aquest extrem de la barra és nul.

En la figura 4.1.3 es poden veure els moments finals en extrem de barra, i el seu sentit de gir, de la biga contínua proposada.

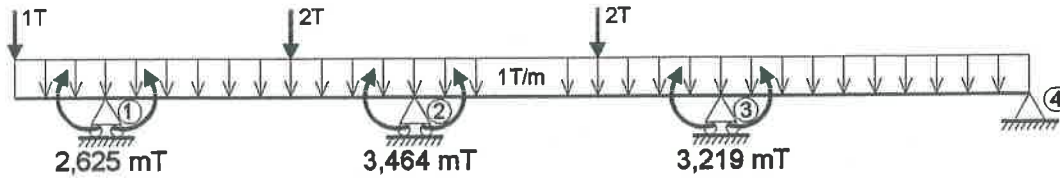


Figura 4.1.3

El mètode matricial de les deformacions ens ha permès resoldre el problema hiperestàtic, obtenint els moments finals en extrem de barra.

Per determinar les reaccions en els recolzaments de la biga contínua cal completar l'anàlisi calculant els esforços tallants en extrem de barra. Aquest càlcul el podem fer aplicant el principi bàsic d'equilibri: "Si l'estructura està globalment en equilibri, també ho estaran cadascuna de les barres i cadascun dels nusos que la conformen".

Així doncs, es tracta de imposar l'equilibri a cadascuna de les barres i a cadascun dels nusos de la biga contínua, i això ho podem fer perquè ja hem determinat els moments flectors que els nusos provoquen en els extrems de les barres, la qual cosa ens permet tractar cada barra per separat, com si fos biarticulada i aplicant els moments dels extrems com una càrrega més. En la figura 4.1.4 podeu veure el tractament aïllat de les barres de la biga contínua.

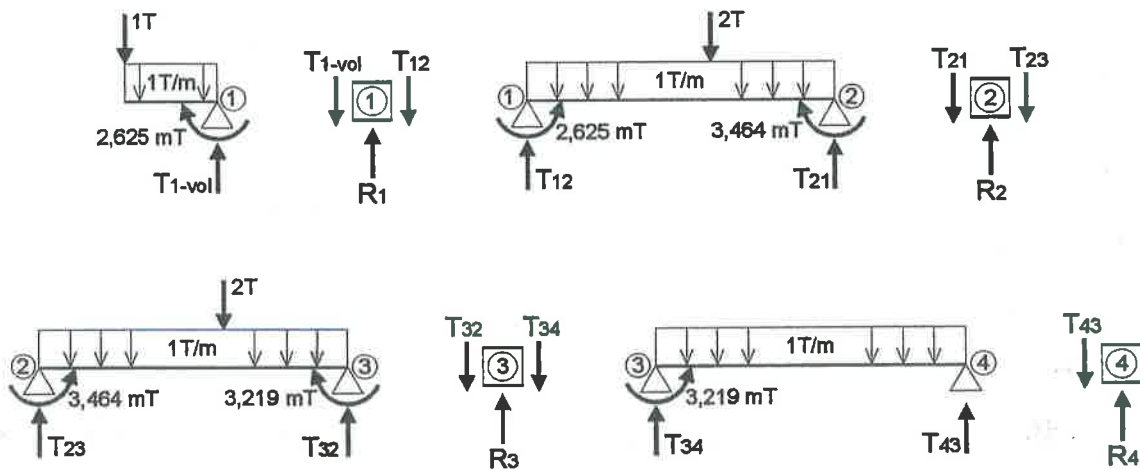


Figura 4.1.4

Càlcul dels esforços tallants en els extrems de les barres:

Voladís:  $T_{1-vol} = 1 + 1 \cdot 1,5 = 2,5 T$

Barra 1-2:  $T_{12} = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{2 \cdot 2}{5} - \frac{(3,464 - 2,625)}{5} = 2,5 + 0,8 - 0,168 = 3,132 T$

$T_{21} = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{2 \cdot 3}{5} - \frac{(3,464 - 2,625)}{5} = 2,5 + 1,2 + 0,168 = 3,868 T$

Barra 2-3:  $T_{23} = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{2 \cdot 2}{5} + \frac{(3,464 - 3,219)}{5} = 2,5 + 0,8 + 0,049 = 3,349 T$

$T_{32} = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{2 \cdot 3}{5} - \frac{(3,464 - 3,219)}{5} = 2,5 + 1,2 - 0,049 = 3,651 T$



Barra 3-4:  $T_{34} = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{3,219}{5} = 2,5 + 0,644 = 3,144 \text{ T}$

$T_{43} = \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{3,219}{5} = 2,5 - 0,644 = 1,856 \text{ T}$

Càlcul de les reaccions de la biga contínua:

$R_1 = T_{1-101} + T_{12} = 2,5 + 3,132 = 5,632 \text{ T}$

$R_2 = T_{21} + T_{23} = 3,868 + 3,349 = 7,217 \text{ T}$

$R_3 = T_{32} + T_{34} = 3,651 + 3,144 = 6,795 \text{ T}$

$R_4 = T_{43} = 1,856 \text{ T}$

En la figura 4.1.5 es pot veure el valor i el sentit de les reaccions de la biga contínua proposada.

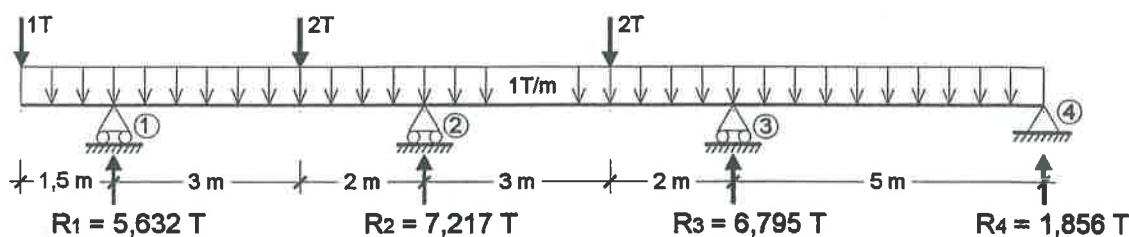


Figura 4.1.5

El moment flector màxim positiu d'una biga es produeix en la secció en que l'esforç tallant és nul. En el cas d'una biga contínua, igual que en el cas dels pòrtics, només cal estudiar la barra en qüestió (barra 3-4) tractant-la com una biga isostàtica en la que, a més de la càrrega hi actuen els moments finals en extrem de barra calculats prèviament. (Figura 4.1.6)

Per calcular el moment flector màxim positiu del tram 3-4 de la biga contínua, en primer lloc necessitem determinar en quina secció d'aquest tram l'esforç tallant és nul.

$T_A = 0 = 1,856 - 1 \cdot x_a \Rightarrow x_a = \frac{1,856}{1} = 1,856 \text{ m}$

El moment flector màxim positiu del tram 3-4 és:

$M_A = 1,856 \cdot 1,856 - 1 \cdot \frac{1,856^2}{2} = 1,722 \text{ mT}$

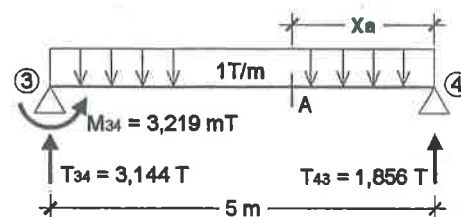


Figura 4.1.6

**EXERCICI 4.2**

Donada la biga contínua de la figura 4.2:

- Calcula els moments finals en extrem de barra.
- Calcula les reaccions en els recolzaments de la biga.
- Calcula el moment flector màxim positiu en cadascun dels trams de la biga contínua.

Dades: La secció de totes les barres és un IPE-240, d'acer A-42.

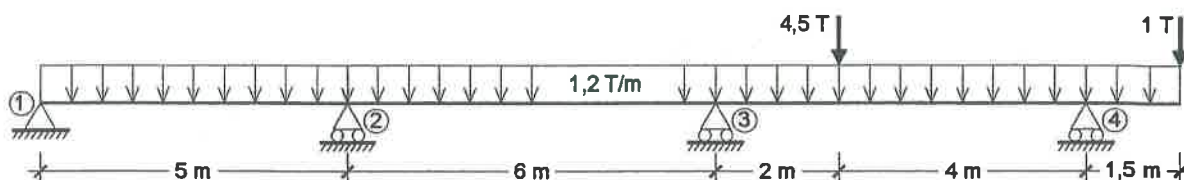


Figura 4.2

**Solució:**

Els moment finals en extrem de barra els podem calcular mitjançant el mètode matricial de les deformacions, sense tenir en compte la variació de longitud de les barres.

1a Fase - Equació matricial d'equilibri i determinació dels moviments incògnita:

Les incògnites de l'equació matricial d'equilibri són dos girs: Gir del nus 2  $\Rightarrow \theta_2$

Gir del nus 3  $\Rightarrow \theta_3$

El vector de moviments dels nusos de l'estructura és:  $[\delta] = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$

I l'equació matricial d'equilibri tindrà el següent format:  $\begin{matrix} \Sigma M_2 = 0 \\ \Sigma M_3 = 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$

El vector d'accions equivalents sobre els nusos de l'estructura s'obté valorant l'efecte de les accions quan tots els moviments són impeditos.

La biga contínua proposada no té accions directament aplicades sobre els nusos.

L'efecte de les accions aplicades sobre les barres es pot veure en la figura 4.2.1.

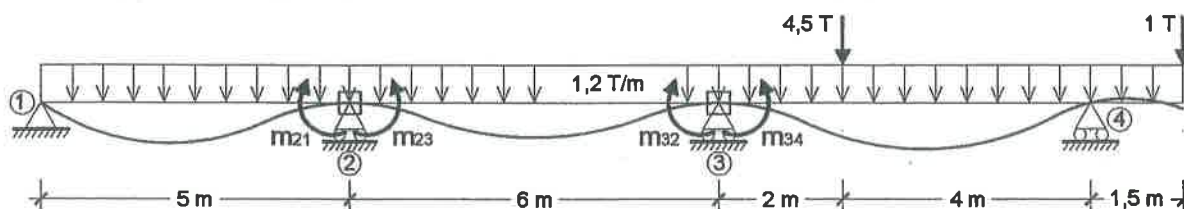
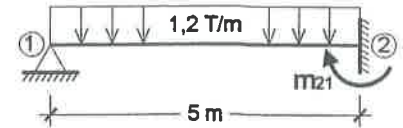


Figura 4.2.1

Càlcul dels moments d'encastament perfecte (fig. 4.2.2):

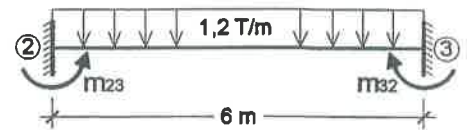
Barra 1-2:

$$m_{21} = \frac{1,2 \cdot 5^2}{8} = 3,75 \text{ mT}$$



Barra 2-3:

$$m_{23} = -m_{32} = \frac{1,2 \cdot 6^2}{12} = 3,6 \text{ mT}$$



Barra 3-4 (vegeu exercici 1.10):

$$m_{\text{vol}} = 1 \cdot 1,5 + 1,2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} = 1,5 + 1,35 = 2,85 \text{ mT}$$

$$m_{34} = \frac{1,2 \cdot 6^2}{8} + \frac{4,5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (6+4)}{2 \cdot 6^2} - \frac{2,85}{2} = 8,975 \text{ mT}$$

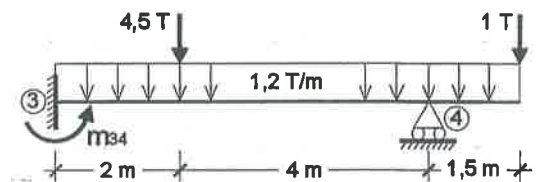


Figura 4.2.2

El vector d'accions equivalents sobre els nusos de la biga contínua queda:

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3,75 + 3,6 \\ -3,6 + 8,975 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,15 \\ -5,375 \end{bmatrix}$$

Atenent al que s'ha exposat en l'exercici 3.2 respecte a la matriu de rigidesa d'una estructura i a l'efecte del gir d'un nus genèric (fig. 3.2.3), la matriu de rigidesa de la biga contínua proposada està formada pels següents elements:

$$\begin{matrix} M_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{GG}^{12} + K_{GG}^{23} & K_{GG'}^{23} \\ K_{GG'}^{23} & K_{GG}^{23} + K_{GG}^{34} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

Càlcul de les rigideses de les barres:

Com que totes les barres tenen la mateixa secció i són del mateix material, calclem les rigideses en funció de  $EI$  (el càlcul manual resulta més senzill).

Tal i com es pot observar en la figura 4.2.2, quan hem impedit els moviments dels nusos, les barres 1-2 i 3-4 han quedat amb un extrem articulat, mentre que la barra 2-3 ha quedat biencastada. El valor de les rigideses de les barres es presenta en el següent quadre:

BARRA	L (m)	$K_{GG}$	$K_{GG'}$
1-2	5	$\frac{3 \cdot E \cdot I}{5} = 0,6 \cdot E \cdot I$	0
2-3	6	$\frac{4 \cdot E \cdot I}{6} = 0,6 \cdot E \cdot I$	$\frac{2 \cdot E \cdot I}{6} = 0,3 \cdot E \cdot I$
3-4	6	$\frac{3 \cdot E \cdot I}{6} = 0,5 \cdot E \cdot I$	0

Finalment l'equació matricial d'equilibri de la biga contínua queda:

$$\begin{bmatrix} +0,15 \\ -5,375 \end{bmatrix} = E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} 1,26 & 0,3 \\ 0,3 & 1,16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Resolent el sistema d'equacions obtenim els moviments dels nusos de l'estructura, en funció de  $E \cdot I$ :

$$\theta_2 = \frac{+1439}{E \cdot I} \qquad \theta_3 = \frac{-5,018}{E \cdot I}$$

### 2a Fase – Càlcul dels moment finals en extrem de barra:

Atenent al que s'ha exposat en l'exercici 3.3 respecte als moments finals en extrem de barra i sabent que en els nusos d'una biga contínua només es produeixen girs tindrem:

$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = -3,75 + 0,6 \cdot E \cdot I \cdot \frac{1439}{E \cdot I} = -2,887 \text{ mT}$$

$$M_{23} = +3,6 + 0,6 \cdot E \cdot I \cdot \frac{1439}{E \cdot I} + 0,3 \cdot E \cdot I \cdot \frac{(-5,018)}{E \cdot I} = +2,887 \text{ mT}$$

$$M_{32} = -3,6 + 0,6 \cdot E \cdot I \cdot \frac{(-5,018)}{E \cdot I} + 0,3 \cdot E \cdot I \cdot \frac{1439}{E \cdot I} = -6,466 \text{ mT}$$

$$M_{34} = +8,975 + 0,5 \cdot E \cdot I \cdot \frac{(-5,018)}{E \cdot I} = +6,466 \text{ mT}$$

$$M_{43} = -2,85 \text{ mT}$$

$$M_{4-\text{vol}} = +2,85 \text{ mT}$$

És important observar que en un nus d'una biga contínua només hi ha dues barres i que, per tal de que s'acompleixi l'equilibri de moments en el nus, el moment final en l'extrem lligat al nus de les dues barres ha de ésser igual i de sentit contrari.

En el cas del nus 4, el moment en l'extrem 4 del voladís només pot ésser el provocat per les càrregues que suporta, i el moment en l'extrem 4 de la barra 3-4 és el provocat pel voladís.

En el cas del nus 1, com que és un recolzament simple en el que només hi està lligada una barra, el moment final en aquest extrem de la barra és nul.

En la figura 4.2.3 es poden veure els moments finals en extrem de barra, i el seu sentit de gir, de la biga contínua proposada.

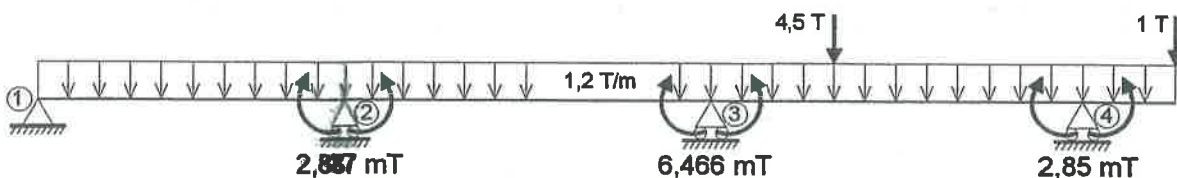


Figura 4.2.3

El mètode matricial de les deformacions ens ha permès resoldre el problema hiperestàtic, obtenint els moments finals en extrem de barra.

Per determinar les reaccions en els recolzaments de la biga contínua cal completar l'anàlisi calculant els esforços tallants en extrem de barra. Aquest càlcul el podem fer aplicant el principi bàsic d'equilibri: "Si l'estructura està globalment en equilibri, també ho estaran cadascuna de les barres i cadascun dels nusos que la conformen".

Així doncs, es tracta de imposar l'equilibri a cadascuna de les barres i a cadascun dels nusos de la biga contínua, i això ho podem fer perquè ja hem determinat els moments flectors que els nusos provoquen en els extrems de les barres, la qual cosa ens permet tractar cada barra per separat, com si fos biarticulada i aplicant els moments dels extrems com una

càrrega més. En la figura 4.2.4 podeu veure el tractament aïllat de les barres de la biga contínua.

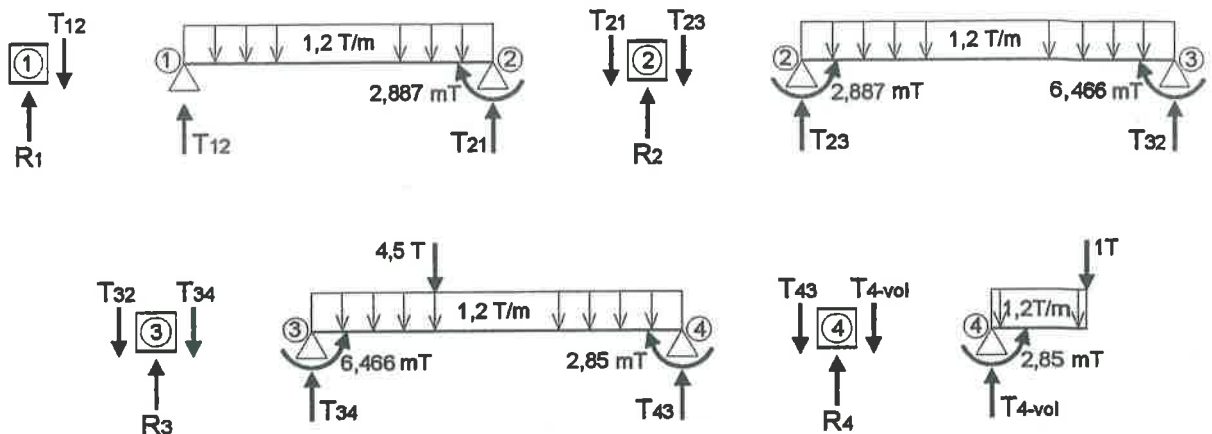


Figura 4.2.4

Càlcul dels esforços tallants en els extrems de les barres:

$$\text{Barra 1-2: } T_{12} = \frac{12 \cdot 5}{2} - \frac{2,887}{5} = 3 - 0,577 = 2,423 \text{ T}$$

$$T_{21} = \frac{12 \cdot 5}{2} + \frac{2,887}{5} = 3 + 0,577 = 3,577 \text{ T}$$

$$\text{Barra 2-3: } T_{23} = \frac{12 \cdot 6}{2} - \frac{(6,466 - 2,887)}{6} = 3,6 - 0,597 = 3,003 \text{ T}$$

$$T_{32} = \frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{(6,466 - 2,887)}{6} = 3,6 + 0,597 = 4,197 \text{ T}$$

$$\text{Barra 3-4: } T_{34} = \frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{4,5 \cdot 4}{6} + \frac{(6,466 - 2,85)}{6} = 3,6 + 3 + 0,603 = 7,203 \text{ T}$$

$$T_{43} = \frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{4,5 \cdot 2}{6} - \frac{(6,466 - 2,85)}{6} = 3,6 + 1,5 - 0,603 = 4,497 \text{ T}$$

$$\text{Voladís: } T_{4\text{-vol}} = 1 + 12 \cdot 1,5 = 2,8 \text{ T}$$

Càlcul de les reaccions de la biga contínua:

$$R_1 = T_{12} = 2,423 \text{ T}$$

$$R_2 = T_{21} + T_{23} = 3,577 + 3,003 = 6,58 \text{ T}$$

$$R_3 = T_{32} + T_{34} = 4,197 + 7,203 = 11,4 \text{ T}$$

$$R_4 = T_{43} + T_{4\text{-vol}} = 4,497 + 2,8 = 7,297 \text{ T}$$

En la figura 4.2.5 es pot veure el valor i el sentit de les reaccions de la biga contínua proposada.

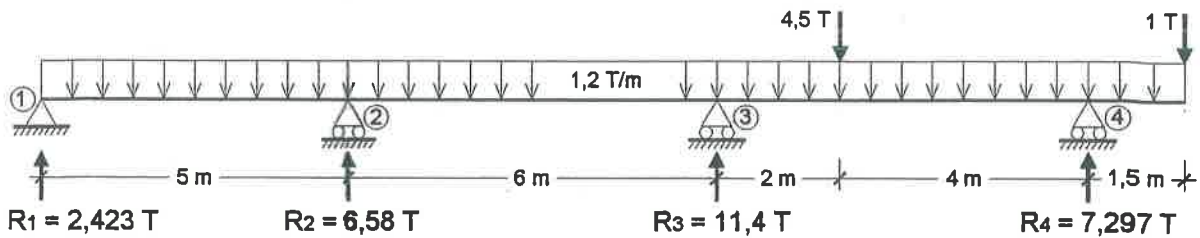


Figura 4.2.5

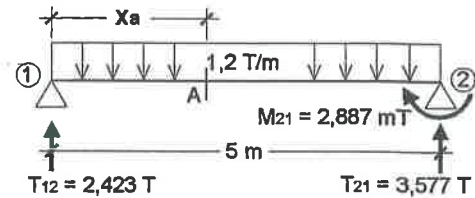
El moment flector màxim positiu d'una biga es produeix en la secció en que l'esforç tallant és nul. En el cas d'una biga contínua, igual que en el cas dels pòrtics, només cal estudiar la barra en qüestió, tractant-la com una biga isostàtica en la que, a més de la càrrega hi actuen els moments finals en extrem de barra calculats prèviament. (Figura 4.2.6)

Barra 1-2:

$$T_A = 0 = 2,423 - 1,2 \cdot x_a \Rightarrow x_a = \frac{2,423}{1,2} = 2,019 \text{ m}$$

El moment màxim positiu d'aquest tram és:

$$M_A = 2,423 \cdot 2,019 - 1,2 \cdot \frac{2,019^2}{2} = 2,446 \text{ mT}$$



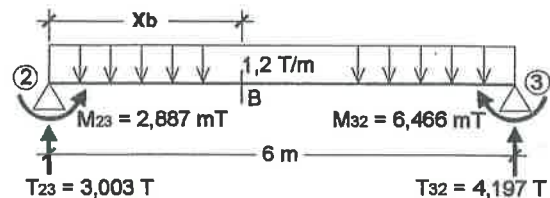
Barra 2-3:

$$T_B = 0 = 3,003 - 1,2 \cdot x_b \Rightarrow x_b = \frac{3,003}{1,2} = 2,5025 \text{ m}$$

El moment màxim positiu d'aquest tram és:

$$M_B = 3,003 \cdot 2,5025 - 1,2 \cdot \frac{2,5025^2}{2} - 2,887$$

$$M_B = 7,515 - 3,7575 - 2,887 = 0,87 \text{ mT}$$



Barra 3-4:

$$T_C = 0 = 4,497 - 1,2 \cdot x_c \Rightarrow x_c = \frac{4,497}{1,2} = 3,7475 \text{ m}$$

El moment màxim positiu d'aquest tram és:

$$M_C = 4,497 \cdot 3,7475 - 1,2 \cdot \frac{3,7475^2}{2} - 2,85$$

$$M_C = 16,852 - 8,426 - 2,85 = 5,576 \text{ mT}$$

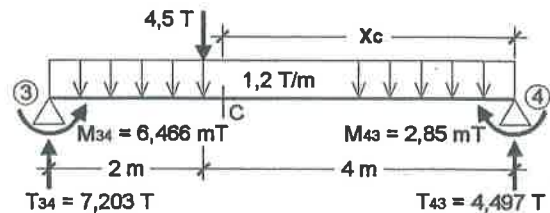


Figura 4.2.6