EE
Fonaments
Matemàtics

EPSEB

CURS DE MATEMÀTIQUES

Àlgebra lineal i Càlcul infinitesimal

Quadern de pràctiques amb ordinador

Albert Ferrer i Biosca
Antoni Guillamon i Grabolosa
Margarida Mitjana i Riera
Joan J. Rodríguez i Jordana
Carles Serrat i Piè

Professors de la Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtica Aplicada I
Secció Escola Universitària Politècnica de Barcelona

Barcelona 1996

14004051120

A Q1A Mathématiques

Els programes de manipulació algebraica (també anomenats de *manipulació simbòlica* o *sistemes algebraics per a ordinador*) estan dissenyats amb l'objectiu d'efectuar operacions de càlcul algebraic, a més de servir com a suport gràfic i numèric i, en alguns casos, com a llenguatge de programació. Aquests programes poden estalviar-nos una enorme quantitat de temps i esforç dedicats al desenvolupament i simplificació d'expressions matemàtiques. D'altra banda, el tractament algebraic enfront del tractament numèric és molt més fiable i permet una millor interpretació dels resultats.

Actualment, els programes més utilitzats per les seves altes prestacions són el *MATHEMATICA* i el *MAPLE V*. Com és de suposar, també són molt exigents amb les característiques dels ordinadors i la preparació prèvia dels seus usuaris. De tota manera, la majoria d'ordinadors personals que avui en dia es comercialitzen són capaços de suportar aquestes demandes tècniques. Quant a la preparació dels usuaris, es tracta de familiaritzar-se amb la sintaxi que s'hi utilitza i incorporar gradualment el coneixement i l'ús de noves comandes.

D'altra banda, programes com el *DERIVE* són adaptables a qualsevol tipus d'ordinador, ocupen poca memòria de disc i ofereixen una presentació en forma de menú altament accessible i de fàcil maneig. Evidentment, hi ha mancances notables respecte als programes més sofisticats citats anteriorment, però pels objectius d'un curs bàsic de Matemàtiques d'una carrera tècnica, és també un manipulador algebraic molt aconsellable i rarament s'hi manifesten les mancances a les quals al·ludíem. Els inconvenients que un usuari a aquest nivell pot trobar-hi respecte el *MAPLE V* o el *MATHEMATICA* van gairebé sempre lligats a la presentació dels resultats, especialment els de caràcter gràfic, però no suposen un greu impediment.

Amb aquest quadern pretenem introduir l'alumne en l'ús de manipuladors algebraics, donant les pautes més elementals dels programes *DERIVE* i *MAPLE V*, així com indicacions per a la seva utilització en els temes vinculats als cursos de Matemàtiques dels estudis d'Arquitectura Tècnica i Topografia que s'imparteixen a la Escola Universitària Politècnica de Barcelona. El seu contingut està pensat també per ser utilitzat en les sessions pràctiques d'aquestes assignatures.

Hem triat el *DERIVE* i el *MAPLE V* perquè, dins del ventall de manipuladors algebraics, el primer és un clar representant dels programes de fàcil accés, amb prou prestacions per cobrir un curs elemental de matemàtiques però amb algunes limitacions a nivells superiors, i el segon ho és dels programes més sofisticats del tema, amb llibreries de *software* que contenen informació abundant i una presentació gràfica d'una alta perfecció. A part, *DERIVE* funciona sota el sistema operatiu MS-DOS, mentre que *MAPLE V* treballa en l'entorn Windows (tot i que també hi ha una versió per a MS-DOS). Creiem, doncs, que són prou il.lustratius de les diverses tendències que avui en dia ofereix el mercat.

En el Tema 0 s'expliquen els rudiments d'ambdós programes i s'hi desenvolupen alguns exercicis de mostra, tant amb un programa com en l'altre, amb el propòsit de fer paleses les diferències de procediment entre ells. En els temes posteriors, en canvi, es fa ús indistintament dels dos manipuladors. La intenció és que, per a cada tema, l'alumne tingui coneixement d'*alguna* eina de manipulació algebraica; no ambicionem, però, de mostrar amb tota exhaustivitat tot allò que es pugui fer amb *DERIVE* i tot allò que es pugui fer amb *MAPLE V*. Es tracta només que l'alumne tingui una guia d'iniciació en l'ús de l'ordinador a l'hora de fer càlculs. Més endavant, la recerca personal en punts més concrets pot ser més eficient que no pas un tractament detallat en un quadern d'aquestes característiques. I així ho esperem.

Barcelona, Octubre de 1996.

Els autors.

Índex

Tema 0

Nocions bàsiques de DERIVE i MAPLE V.

0.1 Funcionament del programa *DERIVE* .

Aquest programa va sortir al mercat l'any 1988, comercialitzat per la firma Soft Warehouse Inc. i és compatible amb tot tipus d'ordinador personal del tipus PC.

Donat que per a accedir a una operació, moltes vegades caldrà encadenar tota una sèrie d'instruccions, les separarem amb el símbol □ . Per exemple:

DECLARE □ FUNCTION □ Nom de la funció □ ...

El símbol ↩ significarà que hem de polsar la tecla "Intro". Quan quedi sobreentès, però, l'ometrem expressament.

Tal com veurem més endavant, les operacions a efectuar es poden escollir tant per via del menú de pantalla com introduint les comandes pel teclat.

Un cop establertes aquestes premisses, ens ocupem dels passos necessaris per posar en marxa el programa.

0.1.1 Instal.lació i configuració.

Per instal.lar-ho en un ordinador personal, creeu un directori C:\DERIVE i copieu-hi el programa (no cal passar per cap programa d'instal.lació específic).[1]

Executeu-lo teclejant "C:\DERIVE>derive" i prement ↩. Entrareu al menú principal del programa.

Podeu personalitzar la presentació del programa *DERIVE* esborrant el fitxer DERIVE.INI i seleccionant: OPTIONS □ DISPLAY

Amb el tabulador i la barra d'espai, aneu escollint les preferències segons les característiques del vostre ordinador. Tingueu en compte que l'opció HIGH ofereix una resolució més alta que MEDIUM, que l'opció EXTENDED permet treballar amb caràcters gràfics, i que cal seleccionar el tipus de pantalla.

Un cop introduïdes les opcions triades, torneu al menú principal i premeu:

TRANSFER □ SAVE □ STATE □ derive.ini □ ↩

[1] Els ordinadors de la sala de càlcul de l'Escola ja tenen instal.lat el programa. Al menú principal cal que trieu **1. Aplicacions MS-DOS** i després **Derive**.

0.1.2 Tasques principals.

En aquesta secció donem els consells bàsics per tal de moure's còmodament dins del programa. Començarem descrivint les funcions principals del menú.

El menú del *DERIVE* .

La presentació del *DERIVE* ofereix una barra d'opcions per tal de facilitar l'accés a les diferents tasques que pot efectuar el programa. Podem seleccionar-les destacant l'opció escollida per mitjà de la barra d'espai i prement ↩, o bé prement directament la lletra que està en majúscula a l'opció triada. A continuació, donem una orientació sobre cadascuna d'elles.

Author: S'obre una línia per a introduir-hi qualsevol expressió que després de pitjar ↩ s'incorpora a la llista d'expressions de la finestra amb el número d'ordre que li pertoca: #1, #2,... (per a més informació sobre l'edició, consulteu l'apartat sobre tasques d'edició d'aquesta secció).

Quan es tracta d'assignar un nom a un objecte matemàtic (una variable, un vector, una funció,...), l'ús de la sintaxi := és molt freqüent, tant en *DERIVE* com en tots els altres manipuladors.

Build: S'utilitza per a formar noves expressions combinant-ne d'anteriors (o de noves) amb les operacions aritmètiques i funcions elementals. Exemple:
BUILD □ #1 □ + □ # 5 □ Done □ ↩
incorpora la suma de les expressions 1 i 5 a la finestra d'expressions.

Calculus: Permet accedir a diferents procediments de càlcul: derivació, integració, límits, productes, sumes (sèries) i desenvolupaments de Taylor.

Declare: Serveix per declarar que una determinada lletra o conjunt de lletres designa o bé una funció, o una variable, o una matriu, o un vector. Exemple: Si volem que $f(x) = x^2 + x + 1$, hem de pitjar:
DECLARE □ FUNCTION □ f □ x^2 + x + 1

Si volem que "ghj" sigui, per exemple, el nom d'una variable real, farem:
DECLARE □ VARIABLE □ ghj □ DOMAIN □ REAL

Expand: La majoria d'expressions queden només indicades i no es desenvolupen si no s'escull expressament aquesta opció.

Exemple: Si tenim

#1: 1/2

#2: 3/4

i les sumem a través de BUILD o AUTHOR, aconseguirem:

#3: 1/2+3/4

Al fer EXPAND, obtindrem:

#4: 5/4

Factor: S'utilitza per a descompondre una expressió algebraica: un nombre enter en producte de primers; un polinomi en producte de factors irreductibles de grau 1 o 2;...

Help: Menú d'ajuda.

Jump: Per saltar d'una expressió a una altra. Evidentment, és més útil com més equacions s'estiguin manejant.

soLve: Soluciona de manera exacta o aproximada equacions, inequacions o sistemes d'equacions lineals. Seleccionant OPTIONS □ PRECISION, es pot determinar si les solucions seran exactes o aproximades, això com el nombre de decimals.

Manage: És útil per fer substitucions en fórmules anteriors, o bé activar les propietats d'algunes funcions elementals.

Options: Permet canviar configuracions del programa.

Plot: Amb aquesta opció s'accedeix a la part de tractament gràfic del programa.

Quit: Per sortir del *DERIVE* . Ens pregunta si n'estem segurs.

Remove: Per eliminar expressions de la finestra. Hem d'indicar dos números d'expressió i les esborra juntament amb totes les compreses entre l'una i l'altra.

Simplify: El *DERIVE* desenvolupa els càlculs, però generalment no busca simplificacions a no ser que se li demani expressament a través d'aquesta comanda.

Transfer: S'utilitza per a gestió de fitxers (gravar, carregar, imprimir,...). Vegeu l'últim apartat d'aquesta secció.

moVe: Per canviar d'ordre les expressions numerades.

Window: Hi ha la possibilitat de tenir diverses finestres obertes. En una hi podríem tenir les expressions i els càlculs que hem anat efectuant; en una altra, una gràfica;...

Aquesta comanda permet crear noves finestres i moure's entre elles. Exemple:

Si en volem crear una tot partint la pantalla horitzontalment a la línia m, fem: WINDOW □ SPLIT □ HORIZONTAL □ m □ ↩

approX: Serveix per donar aproximacions numèriques d'expressions anteriors. La precisió dels resultats es determina a través d'OPTIONS, tal com en la comanda SOLVE.

Tasques d'edició.

Ara que ja tenim una mínima idea de les funcions del *DERIVE* , anem a donar les comandes bàsiques d'edició, per tal de navegar amb desimboltura pel programa. Seran especialment útils quan escollim l'opció AUTHOR.

- Desplaçament del cursor.

  Ctrl-S: El cursor es belluga un caràcter cap a l'esquerra;
  Ctrl-D: El cursor es belluga un caràcter cap a la dreta;
  Ctrl-A: El cursor es belluga una paraula cap a l'esquerra;
  Ctrl-F: El cursor es belluga una paraula cap a la dreta;
  Ctrl-Q-S: El cursor se'n va al principi de la línia;
  Ctrl-Q-D: El cursor se'n va al final de la línia;
  Ctrl-T: Esborra una paraula a la dreta del cursor;
  Ctrl-Y: Esborra tota la línia;
  Ctrl-Q-Y: Esborra fins al final de la línia;
  Ctrl-Q-H: Esborra fins al principi de la línia;
  Esc: Avorta l'edició i torna al menú.

  Amb el cursor també es poden anar ressaltant les expressions numerades de la pantalla, així com detalls parcials. Si esteu en mode AUTHOR, podeu copiar l'expressió destacada polsant simplement **F3**. o bé **F4** si la voleu entre parèntesis.

  També es poden recórrer les expressions ressaltades d'un menú amb la barra d'espai o la tecla de "backspace", segons la direcció. En alguns menús s'ha de triar més d'una opció. Per saltar d'una a l'altra, utilitzarem el tabulador Tab o Majúscules-Tab, segons si anem endavant o endarrera. D'això darrer, en trobareu un exemple si feu OPTIONS □ PRECISION.

- Operadors i funcions predefinides.

Els operadors “=”, “<” i “>” s’escriuen de la mateixa manera, mentre que:

$\leq$ s’escriu com <=,
$\geq$ s’escriu com >=,
$\neq$ s’escriu com /=.

Els símbols per a les operacions (+,-,/,*) són els mateixos que utilitzem a mà, inclòs el de factorial (n!). Els productes, però es poden estalviar si es deixa un espai.

Altres símbols freqüents són:

Alt-e: Número e. (Prémer simultàniament les tecles “Alt” i “e”)
Alt-p: Número π.
Alt-i: Unitat imaginària, i, dels complexos.
inf: Infinit, ∞.

També podeu utilitzar algunes lletres gregues prement simultàniament la tecla “Alt” i la lletra corresponent del nostre alfabet.

El *DERIVE* també té incorporades totes les funcions elementals bàsiques. Relacionem ara la sintaxi de cadascuna d’elles, però ens estalviem explicacions:

sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x), csc(x), asin(x), acos(x), atan(x), acot(x), asec(x), acsc(x);
exp(x) (és a dir, e^x), ln(x)=log(x),
sqrt(x).

També té incorporades les funcions hiperbòliques i algunes d’especials, com ara:

log(a,b)	logaritme d’a en base b,
sin(x deg)	sinus de x en graus,
abs(x)	valor absolut,
sign(x)	signe de x,
max(a,b,c,...)	màxim d’un conjunt de nombres,
min(a,b,c,...)	mínim d’un conjunt de nombres,
re(z)	part real d’un nombre complex z,
im(z)	part imaginària d’un nombre complex z,
conj(z)	conjugat d’un nombre complex z,
phase(z)	argument (angle) d’un nombre complex z.

Altres tipus de funcions bàsiques que inclou són: les de probabilitat, estadístiques, d’error, financeres o vectorials.

Gestió de fitxers.

La comanda TRANSFER del menú principal ofereix diverses opcions:
Load Save Merge Clear Demo Print

Load: Per recuperar (carregar) fitxers.

Save: Per guardar fitxers. El *DERIVE* també permet emmagatzemar-los, bo i adaptant-los a altres llenguatges de programació: FORTRAN, BASIC, PASCAL.

Merge: Si estem treballant dins del *DERIVE* i volem consultar un fitxer emmagatzemat sense perdre la informació actual, podem inserir-lo amb aquesta opció.

Clear: Per esborrar tot el de la finestra actual.

Demo: Per carregar programes de demostració.

Print: Permet treure una versió més acurada quant a presentació, però que no pot ser reinterpretada pel *DERIVE* .

De tota manera, si voleu imprimir el text de la pantalla, executeu la comanda:
C:\ DOS> graphics + tipus d'impressora
i entreu al *DERIVE* . Un cop a dins, polseu la tecla "Imprimir pantalla" quan així ho desitgeu.

En els fitxers que creem, hi podem afegir comentaris en alguna de les línies, simplement seleccionant AUTHOR i escrivint el que vulguem entre cometes. Així podem crear els nostres propis fitxers de demostració. Exemple:
AUTHOR □ "A continuació fem la derivada..." □ ↩

0.2 Exemples diversos amb *DERIVE* .

Utilitzarem el *DERIVE* per resoldre una llista de problemes de temes diversos. Hi afegirem alguns comentaris i interpretacions que es desprenen dels càlculs, a fi de posar de manifest la interactivitat entre l'ús del manipulador i la resposta a un enunciat.

1. Factoritza el polinomi següent:

$$x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$$

A través de la comanda AUTHOR, introduïm el polinomi:

$x\text{^}4 - 6{*}x\text{^}3 - 11{*}x\text{^}2 + 96{*}x - 80$

Utilitzem l'opció FACTOR per descompondre'l. En aquest punt, tenim la possibilitat de triar el tipus d'arrel. Nosaltres hem triat *Rational.* Amb això, si n'hi hagués alguna d'irracional o complexa, no la detectaria.

$(x-5){*}(x-4){*}(x-1){*}(x+4)$

2. Calculeu:

$$\sqrt[5]{1+i}$$

Fent AUTHOR entrem l'expressió:

(1 + î)^(1/5)

La comanda EXPAND o SIMPLIFY ens dóna el següent resultat:

$2^{1/10}\,\mathrm{COS}(\frac{\pi}{20}) + 2^{1/10}\,\hat{\imath}\,\mathrm{SIN}(\frac{\pi}{20})$.

Observeu que només dóna una solució, malgrat que una arrel cinquena d'un nombre complex sempre té 5 solucions.

3. Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs:

$$A(-3,1), B(-2,-5), C(4,-1)$$

Introduïm primer els tres punts del pla amb:

AUTHOR □ a:= $[-3,1]$ ↩
AUTHOR □ b:= $[-2,-5]$ ↩
AUTHOR □ c:= $[4,-1]$ ↩

Ens podem definir un operador "NORMA" a partir del producte escalar, que en DERIVE s'escriu amb el punt "." signe de puntuació (AUTHOR):

NORMA(u) :=SQRT($u.u$)

Apliquem la fórmula de la distància de c a la recta que passa per a i b, que serà l'altura del triangle (també amb AUTHOR i tenint en compte que el producte vectorial s'escriu CROSS):

NORMA(CROSS(c-a,(b-a)/NORMA(b-a)))

Fem EXPAND:

$$\frac{40\ \sqrt{37}}{37}$$

Ara, amb AUTHOR □ F3 copiem el darrer resultat, i el multipliquem per la base dividida per dos ($||b-a||/2$):

40*SQRT(37)/37*NORMA(b-a)/2

Altra vegada amb EXPAND, obtenim el resultat final:

20

4. Resoleu el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+2y-3z &=& -5 \\ x+y-2z &=& -4 \\ 2x+y-z &=& -1 \end{array}\right\}$$

Es pot atacar directament amb la comanda AUTHOR, escrivint-hi:

solve($[3{*}x+2{*}y-3{*}z=-5,\ x+y-2{*}z=-4,\ 2{*}x+y-z=-1],[x,y,z]$) i fent EXPAND.

També es pot amb un SOLVE de l'expressió $[3{*}x{+}2{*}y{-}3{*}z=-5,\ x{+}y{-}2{*}z=-4,\ 2{*}x+y-z=-1]$.

Es faci com es faci, torna el resultat:

$[x=@1,\ y=2-3\ @1,\ z=3-\ @1]$

En aquest cas, tenim un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat, i el símbol @1 s'utilitza per indicar la variable independent.

També teníem la possibilitat de fer-ho per reducció de matrius. Amb la comanda AUTHOR, entrem:

$A := [[3,2,-3],[1,1,-2],[2,1,-1]]$
$b := [-5,-4,-1]$
ROW_REDUCE(A,b)
EXPAND

La matriu reduïda del sistema resulta ser:

$[[1,0,1,3],[0,1,-3,-7],[0,0,0,0]]$

Del primer vector obtenim que $z=3-x$ i del segon, que $y=-7+3z$.

5. Qüestions sobre funcions trigonomètriques

a) Per a quins valors de la variable x és $\sin x > 0$? Com sempre, amb AUTHOR introduïm:

SIN(x)

Amb la comanda PLOT □ PLOT dibuixem la funció. Llavors, movent-nos per la pantalla amb el cursor, ens podem situar sobre els punts de tall amb l'eix de les x i trobar una aproximació numèrica dels llocs on $\sin x = 0$. Aquest procediment no resol la qüestió, sinó que només en dóna una idea. Per tornar al menú principal, cal prémer ALGEBRA.

b) Quins són els intervals de creixement de la funció $y = \cos x$? Introduïm (AUTHOR):

COS(x)

Derivem efectuant
CALCULUS □ DIFFERENTIATE □ Variable: x □ Order: 1 $\hookleftarrow$.

Després de fer EXPAND, obtenim:

-SIN(x)

Si ara tornem a prémer PLOT □ PLOT dibuixa primer les gràfiques que tenia emmagatzemades (en aquest cas, només la de $\sin x$) i després, la nova petició (en aquest cas, doncs, -sin x). El signe positiu de $-\sin x$ determinarà el creixement de la funció $\cos x$.

c) Trobeu les discontinuïtats de $f(x) = \tan x$. Altra vegada amb AUTHOR, entrem TAN(x) i llavors fem:

PLOT □ PLOT

podrem visualitzar les discontinuïtats de la funció. Per veure-ho més clar, podeu fer

PLOT □ DELETE □ ALL □ PLOT

Així, s'esborraran les altres gràfiques i es mostrarà només la darrera seleccionada (en aquest cas, la de la tangent).

6. Estudieu la concavitat de la funció $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Introduïm primer l'expressió amb la comanda AUTHOR i després calculem la segona derivada:

CALCULUS □ DIFFERENTIATE (no. d'expressió) □ Variable: x □ Order: 2

Sortirà indicat, només:

$$\left[\frac{d}{dx}\right]^2 \frac{x}{1+x^2}$$

Amb un SIMPLIFY, obtenim y'' simplificada:

$$\frac{2\ x\ (x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Emprem l'opció SOLVE per trobar els zeros de y'':

$$x = 0$$
$$x = -\sqrt{3}$$
$$x = \sqrt{3}$$

Aquestes solucions ens informen que caldrà analitzar el signe de la segona derivada en algun punt de cadascun dels següents intervals: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$

Triem, per exemple, un punt del primer interval ($x = -2$) i calculem la segona derivada en aquest punt. Cal fer

MANAGE □ SUBSTITUTE □ expression: (no. de l'equació on hi ha la segona derivada simplificada) □ value: (cal que escriviu "-2" damunt la "x" que hi apareixerà) ↩

Això donarà:

$$\frac{2\ (-2)\ ((-2)^2-3)}{((-2)^2+1)^3}$$

Fent EXPAND o SIMPLIFY:

$$-4/125$$

Ens diu que la segona derivada és negativa. Per tant, a l'interval $(-\infty, -\sqrt{3})$, la funció és còncava ($\cap$).

7. Estudieu i representeu $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Amb AUTHOR, introduïm la funció:

$1/(1+x$^$2)$

Fem el límit quan $x \to \infty$ per observar les asímptotes:

CALCULUS □ LIMIT □ expression: (no. d'expressió de la funció) □ Variable: x □ Point: inf ↩

Això deixarà indicat el límit (pot ser que en lloc d'infinit, l'editor del *DERIVE* escrigui ý). El resultat, després de fer EXPAND, resulta ser 0. Això siginifica que $y = 0$ és una asímptota horitzontal.

Igual que en l'exercici 6, ara cal efectuar les derivades amb CALCULUS □ DIFFERENTIATE.

Fent la de primer ordre i simplificant, obtenim:

$$-\frac{2\ x}{(x^2+1)^2}$$

I la de segon ordre, després de simplificar (SIMPLIFY), dóna:

$$\frac{2\,(3\,x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Amb la primera derivada, estudiarem creixement i decreixement, i amb la segona, la concavitat i convexitat. Caldrà fer un SOLVE de cada una d'elles, determinar els intervals en què cal discriminar, i amb MANAGE □ SUBSTITUTE, anar avaluant les derivades en els punts que ens interessin (vegeu l'exercici 6).

8. Calculeu $\int \cos^2 x dx$.

Introduïm a través d'AUTHOR la funció:

COS(x)^2

Seleccionem CALCULUS □ INTEGRATE, posant el no. d'equació que ocupa la funció que volem integrar, i premem ↩dues vegades (si es vol fer una integral definida, abans del segon ↩ tenim l'opció d'entrar els extrems d'integració).

L'operació quedarà indicada. Amb un EXPAND, obtenim el resultat de la integral:

$$\frac{\mathrm{SIN}(x)\ \mathrm{COS}(x)}{2}+\frac{x}{2}$$

0.3 Funcionament bàsic del programa *MAPLE V*

El disseny i la implementació del sistema MAPLE és un projecte del Symbolic Computation Group de la Universitat de Waterloo a Ontario, Canadà. Va sortir al mercat el 1988 i és comercialitzat actualment amb el nom *MAPLE V*, per "Waterloo Maple Software".

Maple és un programa de càlcul simbòlic que s'utilitzarà per a estudiar i resoldre problemes tractats en el "Curs de Matemàtiques". Per a accedir al programa cal activar la icona MapleV que es troba a la finestra de Windows que té el mateix nom.

El marc de treball és l'habitual en Windows. Així, a l'entrar a *MAPLE V*, apareix un menú en la part superior de la pantalla. Amb el ratolí, feu "clic" sobre el menú "Archivo" -File- i escolliu l'opció "Nuevo" -New- per a crear un full de treball nou. És important recordar que, com sempre, cal anar guardant el document de treball, fent "Archivo" "Guardar Como" -Save As- la primera vegada [2] que es guarda el document i "Archivo" "Guardar" els altres cops.

D'entre els avantatges que representa el poder disposar d'un programa d'aquestes característiques, cal destacar la capacitat de càlcul tant simbòlic com numèric que *MAPLE V* proporciona, a més de la visualització molt còmoda i ràpida - en funció de l'aparell que utilitzem- de les gràfiques tant 2D com 3D.

MAPLE V consta de tres parts fonamentals: el *nucli*, constitueix la part fonamental del programa i conté les rutines i procediments per a realitzar tots els càlculs; la *interface* permet la comunicació entre l'ordinador i l'usuari i finalment les *llibreries* que constitueixen la part més important del programa i que contenen un conjunt d'aplicacions, funcions i procediments que complementen les funcions i rutines que llegeix el programa en començar a ser executat. El contingut de les llibreries es llegeix en el moment que es necessiten, de forma que queda el màxim de memòria lliure possible perquè puguin ser executats els diferents processos sol.licitats per l'usuari.

Hi ha tres tipus de regions en un document *MAPLE V*: de *text*, on s'escriuen els comentaris; d'*input*, on s'escriu la instrucció que s'executarà en la regió d'*output*. Les regions de text i d'*input* poden ser definides per l'usuari fent servir la opció "Format" del menú, o la tecla F5. Perquè una acció s'executi cal prémer la tecla **INTRO**. Si escrivim ":" en acabar una instrucció, en prémer INTRO s'executarà, però no s'escriurà el resultat; en canvi, si s'acaba la instrucció amb ";" , en prémer

[2] O si es vol canviar de nom el document.

INTRO, a més d'executar-se, s'escriu el resultat a la regió d'*output*.

0.3.1 Notació

D'ara endavant, escriurem en negreta i amb el símbol > al començament, les instruccions tipus *input* de *MAPLE V*.

En general, el programa NO distingeix majúscules i minúscules pel que fa a paraules "clau" de *MAPLE V* (expand, subs, solve, $\cdots$), però sí quan es tracta de variables definides per l'usuari: f $\neq$ F, vector $\neq$ Vector, o en el cas de Pi (en majúscula) per a escriure π.

Per a definir o assignar s'utilitza ":=". Per exemple, per definir la funció $f(x,y) = \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$, s'escriu > **f := (2 * x + 3 * y)/(x ∧ 2 + y ∧ 2)**.

Els productes s'han d'escriure sempre utilitzant el símbol $*$. Per exemple:

> **$(2 * x - 3)^4$**, o també

> **(2 * x + 3 * y)/(x ∧ 2 + y * y)**

0.3.2 Utilització de l'ajuda

Es pot accedir a l'ajuda (HELP) de dues formes: des d'una regió d'*input* o des del menú. Si volem obtenir informació directa d'una comanda, per exemple MATRIX, cal fer:

>**?matrix;**

D'altra banda, hi ha l'opció d'accedir al menú general, seleccionant la combinació HELP+BROWSER, o bé, prement directament la tecla F1. Proveu de cercar la informació sobre matrius d'aquesta manera anant a MATHEMATICS+LINEAR ALGEBRA+MATRICES.

0.3.3 Càrrega de llibreries

A més de les funcions que es poden fer servir en executar *MAPLE V*, hi ha algunes funcions que només poden ser utilitzades si són carregades explícitament per l'usuari amb la instrucció **readlib**. Per exemple, la funció **extrema** és d'aquest tipus i si es vol utilitzar, prèviament s'escriu:

> **readlib(extrema)**;

En alguns casos, les funcions estan agrupades en paquets i es poden carregar via la funció **with**, per exemple el paquet d'àlgebra lineal:

> **with(linalg)**;

0.4 Exemples diversos amb *MAPLE V*

Utilitzarem el *MAPLE V* per resoldre la mateixa llista de problemes que hem resolt amb el *DERIVE* a la Secció 0.2. El procediment per resoldre els exercicis no varia i, per tant, no els comentarem tan exhaustivament. Es tracta, simplement, que observeu les diferències de funcionament entre ambdós manipuladors i aneu coneguent les comandes principals de *MAPLE V*.

1. Factoritza el polinomi següent:

$$x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$$

> solve(x^4 − 6*x^3 − 11*x^2 + 96*x − 80 = 0,x);

2. Calculeu:

$$\sqrt[5]{1+i}$$

> evalc((1 + I)^(1/5));

3. Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs:

$$A(-3,1), B(-2,-5), C(4,-1)$$

Per fer el producte vectorial ("crossprod"), cal que els vectors siguin de $\mathbb{R}^3$. Per això, introduïm una tercera coordenada zero en les definicions de a, b i c. Primer de tot, no obstant, s'ha de carregar el paquet "linalg":

> with(linalg):
> a:= vector([−3, 1, 0]);b:=vector([−2, −5, 0]);c:=vector([4, −1, 0]);
> ab:=b − a;ac:=c − a;
> h:=eval(norm(crossprod(ac, ab/norm(ab, 2)),2));
> eval(h*norm(ab, 2)/2);

4. Resoleu el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+2y-3z & = & -5 \\ x+y-2z & = & -4 \\ 2x+y-z & = & -1 \end{array}\right\}$$

> solve({3*x + 2*y − 3*z = −5, x + y − 2*z = −4, 2*x − y − z = −1});

5. Qüestions sobre funcions trigonomètriques

a) Per a quins valors de la variable x és $\sin x > 0$.

> plot(sin(x),x = 0..2*3.1415926535);

b) Quins són els intervals de creixement de la funció $y = \cos x$.

> plot(cos(x),x = 0..2*3.1415926535);

c) Trobeu les discontinuïtats de $f(x) = \tan x$.

> plot(tan(x),x = 0..2*3.1415926535, -10..10);

6. Estudieu la concavitat de la funció $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

> f:=x/(1 + x^2);
> $f2$:=diff($f, x\$2$); (segona derivada)
> $sf2$:=simplify($f2$);
> solve($sf2 = 0$);
> subs($x = -2, sf2$);
> subs($x = -1, sf2$);
> subs($x = 1, sf2$);
> subs($x = 2, sf2$);

7. Estudieu i representeu $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

> g:=1/(1 + x^2);
> diff(g, x);
> $sg2$:=simplify(diff($g, x\$2$));
> solve($sg2 = 0$);
> subs($x = -1, sg2$);
> subs($x = 0, sg2$);
> subs($x = 1, sg2$);
> limit(g, x = +infinity);
> limit(g, x = −infinity);

8. Calculeu $\int \cos^2 x dx$.

> integrate(cos(x)^2, x);

0.5 Exercicis de repàs.

Aquests exercicis estan pensats per ser resolts utilitzant manipuladors simbòlics, tot i que alguns d'ells són fàcils de fer manualment.

1. Factoritzeu els polinomis següents:

a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$,

b) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$.

2. Resoleu les equacions següents:

a) $6x^5 - 37x^4 - 31x^3 - 30x^2 + 13x + 7 = 0$,

b) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

3. Donats els punts $A(-3, 1)$, $B(-2, -5)$ i $C(4, -1)$, calculeu:

a) l'equació de la recta **r** que passa pels punts A, B.

b) el punt simètric del C respecte de la recta **r**,

c) la distància del punt C a la recta **r**.

4. Determineu:

a) el valor d'a de manera que els punts $A(a, 3); B(-5, 1); C(1, 2)$ estiguin alineats.

b) el vèrtex C d'un triangle si coneixeu els vèrtexs $A(4, 3), B(10, -5)$ i el baricentre G(5, -1).

5. Resoleu els següents sistemes d'equacions:

a) $\left\{\begin{array}{rcr} 4x + y - 2z & = & -5 \\ 3x + 2y - 5z & = & -4 \\ x - y + 3z & = & -1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + z + 2t & = & 0 \\ -x - 2y + 3z + 2t & = & 1 \\ 8x + 16y - 4z + 4t & = & -3 \end{array}\right.$

6. Representeu gràficament les funcions:

a) $y = a \sin bx$, per $a = 2$, $b = 1$ i per $a = 1$, $b = 2$;

b) $y = a^x$ i $y = 2^{-ax}$, per $a = 2$ i 4;

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{4x^k - 3}{x^3 + 5}$, per a $k = 2, 3, 4$.

Tema 1

Àlgebra Lineal

1.1 Àlgebra Lineal amb *DERIVE*

1.1.1 Declaració de vectors i matrius.

Per entrar un vector $(v1, ..., vm)$, tenim tres opcions:

AUTHOR □ $[v1, \ldots, vm]$ □ ↩

AUTHOR □ vector$(v(k), k, 1, m)$ □ ↩.

Per exemple, vector$(k^2, k, 1, 5)$ donaria (1, 4, 9, 16, 25).

DECLARE □ VECTOR □ dimension: m □ $v1$ □ ↩ □ ... □ vm □ ↩

Es pot aïllar la k-èsima component del vector v fent ELEMENT(v, k)

La norma $\sqrt{v1^2 + ... + vm^2}$ del vector v es calcula simplement amb ABS(v).

Per entrar una matriu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

cal extendre la definició de vector. Així, podem optar per una de les següents tres solucions:

AUTHOR □ $[[a_{11}, ..., a_{1m}], [a_{21}, ..., a_{2m}], ..., [a_{n1}, ..., a_{nm}]]$ □ ↩

AUTHOR □ vector(vector$(a(k, j), k, 1, m), j, 1, n)$ □ ↩

DECLARE □ MATRIX □ Rows: n □ Columns: m □ ↩ □ a_{11} □ ↩ □ a_{12} □ ↩ □ ... □ a_{nm} □ ↩

Llavors, per introduir la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

farem:

A (Author) □ $[[2, 1, -1], [1, 5, 3], [1, 0, 3]]$ ↩

Els vectors i les matrius es poden emmagatzemar amb un nom, fent us del símbol ":=". Per exemple, fent

A (Author) □ $M := [[2, 1, -1], [1, 5, 3], [1, 0, 3]]$ ↩

ens podrem referir a aquesta matriu més endavant emprant el nom M.

1.1.2 Operacions amb vectors.

- Suma/Resta amb el símbols "+" o "−" respectivament.
- Producte/Divisió per un escalar amb l'operador "*" o "/".
- Producte escalar amb l'operador "." (el punt de signe de puntuació).
- Producte vectorial amb la funció cross(v,w), on v i w són els vectors.

Exemples:

Calculeu $(12,-3,15)/3+2(2,3,-1)-5(1,a,b-1)$ fent:
A (Author) ☐ $[12,-3,15]/3+2*[2,3,-1]-5*[1,a,b-1]$ ↩
S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

Feu-ho també assignant noms als diferents vectors:
A (Author)
$u := [12,-3,15]$
A (Author)
$v := [2,3,-1]$ ↩
A (Author)
$w := [1,a,b-1]$ ↩
A (Author)
$u/3+2*v-5*w$ ↩
S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

Determineu quan són perpendiculars els vectors $(x,1-y,1)$ i (y,x,y) fent:
A (Author)
$[x,1-y,1]\ .\ [y,x,y]$ ↩
S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.
L (soLve) per a buscar les arrels de l'equació que resulta d'igualar l'expressió seleccionada a zero (s'haurà de declarar la variable independent).
↩ (dos cops) per a acceptar el número d'expressió i la variable. Obtindrem la relació que han de satisfer x i y.

Calculeu el producte vectorial de $(2.-a,3)$ i $(b,-2,5)$ fent:
A (Author)
$v := [2,-a,3]$ ↩
A (Author)
$w := [b,-2,5]$ ↩

A (Author)

cross(v,w) ↩, o bé u :=cross(v,w) ↩

(en el segon cas el resultat s'emmagatzemarà amb el nom u)

S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

Comproveu que l'anterior producte vectorial és perpendicular als dos vectors.

1.1.3 Operacions amb matrius.

Les operacions més habituals amb matrius són, en la sintaxi del *DERIVE* :

Suma:	$A+B$	
Producte per un escalar:	$a\ B$	$(a \in \mathbb{C})$
Producte:	$A\,.\,B$	
Determinant:	det(A)	
Traça:	trace(A)	
Transposta:	A‘	(accent obert)
Inversa:	A^(−1)	
Matriu$A^n, n \in \mathbb{Z}$:	A^n	
Norma de la matriu:	abs(A)	

Es pot escollir l'element a_{kl} de la matriu A amb la comanda ELEMENT(A, k, l)

Combinant les comandes VECTOR i ELEMENT es poden aïllar també files i columnes senceres.

A part d'això, també podem aconseguir que el *DERIVE* calculi matrius adjuntes, vectors propis i valors propis, que pivoti sobre un element, que faci únicament el producte d'una determinada fila d'una matriu per una determinada columna d'una altra, que permuti files i columnes, que faci operacions entre columnes, que elimini files o columnes (amb tot 0 menys un 1, per exemple), que trobi els menors de la matriu,...

Exemples:

Calculeu

$$2\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

fent:

A (Author)

$m1 := [[-1, 5, 1], [0, 2, -1], [2, 3, 5]] \hookleftarrow$
A (Author)
$m2 := [[5, -1, 3], [1, 1, -1], [2, 1, 3]] \hookleftarrow$
A (Author)
$m3 := 2 * m1 - m2 \hookleftarrow$
S (Simplify) i $\hookleftarrow$ per a acceptar el número d'expressió.

Resteu-li 5 vegades la identitat fent:
A (Author)
$m4 := m3 -$ 5*identity_matrix(3) $\hookleftarrow$
S (Simplify) i $\hookleftarrow$ per a acceptar el número d'expressió.

Calculeu-ne el determinant fent:
A (Author)
det $m4$ $\hookleftarrow$
S (Simplify) i $\hookleftarrow$ per a acceptar el número d'expressió.

Trianguleu la matriu anterior fent:
A (Author)
row_reduce m4 $\hookleftarrow$
S (Simplify) i $\hookleftarrow$ per a acceptar el número d'expressió.

Observeu que el programa fa la màxima reducció possible. Per tant, si la matriu és no singular (determinant no nul), el resultat serà la identitat.

1.1.4 Resolució de sistemes d'equacions.

Vegem les diferents maneres de tractar un sistema d'equacions lineals a partir del següent exemple:

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 3, \\ 2x + y + 3z &= 5, \\ x - 2y + 3z &= 4. \end{cases}$$

si sistema determinat

Entreu la matriu del sistema fent:
A (Author)
$ma := [[1, -1, 2], [2, 1, 3], [1. -2, 3]] \hookleftarrow$

Entreu el terme independent fent:
A (Author)
$mb := [3, 5, 4] \hookleftarrow$

Calculeu el determinant, per veure si el sistema és determinat, fent:

A (Author)
det *ma* ↩
S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió (i veiem que sí).

En aquest cas la solució es pot calcular fent:

A (Author)
ma^(−1) . *mb* ↩
S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

Evidentment, aquest mètode només val per a sistemes compatibles determinats:
nombre d'equacions = nombre d'incògnites = rang de la matriu del sistema.

També podem calcular el rang de la matriu del sistema fent:

A (Author)
row_reduce *ma*
S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

i resoldre el sistema fent:

A (Author)
row_reduce(*ma*, *mb*)
S (Simplify) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

Aquest mètode es pot usar per a resoldre sistemes indeterminats amb infinites solucions o per a detectar sistemes incompatibles. Per exemple, repetiu el procediment amb el mateix sistema canviant la tercera equació un cop per $3x+5z = 8$ i l'altre per $-3y + z = 4$ (fent A (Author), seleccionant una expressió amb les tecles de cursor ↑↓ i fent F3, podrem recuperar les matrius *ma* o *mb* i modificar-les com vulguem a la línia d'edició).

Una altra forma de resoldre sistemes d'equacions consisteix en entrar el sistema com un vector on cada component és una equació. Per resoldre'l es fa L (soLve) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

Resoleu el sistema inicial fent:

A (Author)
$[x - y + 2\ z = 3, 2\ x + y + 3\ z = 5, x - 2\ y + 3\ z = 4]$ ↩
L (soLve) i ↩ per a acceptar el número d'expressió.

Modifiqueu el sistema canviant la tercera equació per $3x + 5z = 8$ i per $-3y + z = 4$, tal com hem fet abans, i observeu el resultat en aquests casos. En particular, observeu com indica la variable que actua com a paràmetre en el cas indeterminat.

1.2 Exercicis proposats.

1. Resoleu l'equació $((2, a, -1) - 5(1, 3, 1)) \cdot (1, -1, a) = -2$

2. Sigui $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, -1, 1)$ una base de $\mathbb{R}^3$ i sigui l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(u) = u$, $f(v) = v$, $f(w) = -w$. Trobeu la matriu de f en la base usual de $\mathbb{R}^3$, així com les coordenades del vector $x = (1, 1, 1)$ en la base (u, v, w).

3. Discutiu i resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z &= 1, \\ x + \alpha\beta y + z &= \alpha, \\ x + \alpha y + z &= 1, \end{cases}$$

segons els valors dels paràmetres α i β.

4. Donada l'aplicació

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x - y - z + t, x + t),$$

trobeu les antiimatges del vector $(4, 0, 2)$, així com una base el nucli i l'espai imatge.

b: = [[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, -1, 1]]

$f(u) = (1\ 0\ 0) =$
$f(v) = (0\ 1\ 0) =$
$f(w) = (0\ 0\ -1) =$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.3 Àlgebra Lineal amb *MAPLE V*

En aquesta secció repetim els exercicis fets a la Secció 1.1, però ara amb el programa *MAPLE V*.

El primer que cal fer és carregar el paquet "linalg" amb:
> with(linalg):

1.3.1 Operacions amb vectors i matrius.

Per introduir la matriu, fem:
> m:=array([[2, 1, −1], [1, 5, 3], [1, 0, 3]]);

Per calcular $(12, -3, 15)/3 + 2(2, 3, -1) - 5(1, a, b - 1)$, ho podem fer directament utilitzant la comanda "evalm" i la notació habitual dels vectors:
> evalm([12, −3, 15]/3 + 2∗[2, 3, −1] − 5∗[1, a, b − 1]);

També podem definir i *batejar* prèviament els vectors i després treballar amb els nous noms de variable:
> u := [12, −3, 15]; v := [2, 3, −1]; w := [1, a, b − 1];
> evalm(u/3 + 2∗v − 5∗w);

Si volem determinar quan són perpendiculars els vectors $(x, 1 - y, 1)$ i (y, x, y), procedirem així:
> pe:=dotprod([x, 1 − y, 1], [y, x, y]);

Hem definit el producte escalar com a "pe" i ara simplificarem i igualarem a zero:
> simplify(pe);
> solve(pe = 0);

Per calcular el producte vectorial de $(2, -a, 3)$ i $(b, -2, 5)$, per exemple, cal fer:
> v:=[2, −a, 3];w:=[b, −2, 5];
> u:=crossprod(v, w);

Després podem comprovar que aquest nou vector és perpendicular als dos anteriors:
> simplify(dotprod(u, v));
> simplify(dotprod(u, w));

Quant a manipulació de matrius, comencem calculant

$$2\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Introduïm primer les matrius, definint $m3$ i $m4$ a partir de $m1$ i $m2$:
> $m1$:=array([[−1, 5, 1], [0, 2, −1], [2, 3, 5]]);
> $m2$:=array([[5, −1, 3], [1, 1, −1], [2, 1, 3]]);
> $m3$:=2*$m1$ − $m2$;$m4$:=$m3$ − 5*array(identity,1..3, 1..3);

Avaluem ara la matriu que ens interessa i en calculem el determinant:
> evalm($m4$);
> det($m4$);

La següent comanda efectua una reducció pel mètode de Gauss de la matriu (semblant al "row_reduce" del *DERIVE*):
> gausselim($m4$,'r');

Altres comandes útils en la manipulació de matrius són, per exemple:
> transpose(matrix(m)); (defineix la transposada de m)
> evalm(transpose(matrix(m))); (avalua la transposada de m)
> transpose(inverse(m)); (avalua la inversa de m)

1.3.2 Resolució de sistemes d'equacions.

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 3, \\ 2x + y + 3z &= 5, \\ x - 2y + 3z &= 4. \end{cases}$$

Si el volem resoldre utilitzant el llenguatge de matrius, primer definim les matrius associades:
> ma:=matrix([[1, −1, 2], [2, 1, 3], [1, −2, 3]]); mb:=[3, 5, 4];

Ens assegurem ara que el determinant no s'anul.li.
> det(ma);

Si no s'anul.la, podem solucionar directament el sistema multiplicant per la inversa el vector mb:
> evalm(inverse(ma)*mb);

També ho podríem haver fet definint la matriu ampliada i triangulant-la per Gauss:
> $mamb$:=matrix([[1, −1, 2, 3], [2, 1, 3, 5], [1, −2, 3, 4]]);
> gausselim($mamb$);

Un cop fet això, podem observar-hi les solucions. Els altres dos casos que es proposaven també a la Secció 1.1 eren el mateix sistema canviant la tercera equació un cop per $3x + 5z = 8$ i l'altre per $-3y + z = 4$. Podeu procedir tal com hem fet al darrer cas:
> $mamb1$:=matrix([[1, −1, 2, 3], [2, 1, 3, 5], [3, 0, 5, 8]]);
> gausselim($mamb1$);
> $mamb2$:=matrix([[1, −1, 2, 3], [2, 1, 3, 5], [0, −3, 1, 4]]);
> gausselim($mamb2$);

De tota manera, la manera més ràpida de resoldre els sistemes amb *MAPLE V* és usant la instrucció "solve". Per als tres sistemes que acabem de citar, podríem fer, respectivament:
> solve($\{x - y + 2*z = 3, 2*x + y + 3*z = 5, x - 2*y + 3*z = 4\}$, $\{x, y, z\}$);
> solve($\{x - y + 2*z = 3, 2*x + y + 3*z = 5, 3*x + 5*z = 8\}$. $\{x, y, z\}$);
> solve($\{x - y + 2*z = 3, 2*x + y + 3*z = 5, -3*y + z = 4\}$, $\{x, y, z\}$);

Recordeu, per a qualsevol aclariment sobre les comandes, que el HELP del *MAPLE V* us proporcionarà la informació necessària. Pel que fa a aquest tema, la major part està recollida dins del HELP a MATHEMATICS + LINEAR ALGEBRA.

1.4 Diagonalització d'endomorfismes, transformacions ortogonals i tensors.

El programa *DERIVE* ofereix dues funcions útils per a aquest tipus d'exercicis:

- charpoly(matriu, x): polinomi característic de la matriu, amb variable x.
- eigenvalues(matriu,x): valors propis x de la matriu.

Ambdues funcions es poden calcular a partir del determinant i de la funció soLve.

Anem a estudiar si diagonalitza l'endomorfisme

$$T = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Entrem la matriu i calculem el polinomi característic i els valors propis sense fer ús d'aquestes funcions funcions:

A (Author)
det(matriu - x $*$ identity _ matrix(3))↩(x serà la variable independent)
S (Simplify)
L (soLve)

Efectivament, comprovem que

A (Author)
charpoly(matriu,x)↩
S (Simplify)
A (Author)
eigenvalues(matriu,x)↩
S (Simplify)

ofereixen els mateixos resultats.

Calculem si diagonalitza (per a cada valor propi fem):

A (Author)
row_reduce(matriu - *valor propi* $*$ identity_matrix(3)) ↩
S (Simplify)

Aprofitant les matrius ja triangulades que hem obtingut. podem calcular els espais de vectors propis:

A (Author)

matriu ja triangulada . $[x, y, z]\hookleftarrow$
S (Simplify)
L (soLve)
♯ *núm de la matriu* $\hookleftarrow$

Anotem els vectors que generen les solucions i formem la matriu de canvi de base. Entrem la matriu i fem el canvi de base per tal de comprovar que la matriu resultant és diagonal:

A (Author)
C :=*matriu del canvi de base* $\hookleftarrow$
$C^{-1}.T.C$ $\hookleftarrow$
S (Simplify)

1.5 Transformacions ortogonals.

Estudiem ara l'endomorfisme

$$T = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -25 & 8 & 20 \\ 8 & -25 & 20 \\ 20 & 20 & 17 \end{pmatrix}.$$

Entrem la matriu i comprovem si és transformació ortogonal:

A (Author)
$m := [[-25, 8, 20], [8, -25, 20], [20, 20, 17]]/33$ $\hookleftarrow$
A (Author)
m . $m`$ $\hookleftarrow$
S (Simplify)

Si fem el determinant, tindrem informació sobre si conté simetries o no.

A (Author)
det(m) $\hookleftarrow$
S (Simplify)

Així doncs, sabem que es tracta d'un gir al voltant d'una recta.

Calculem el subespai de vectors fixos (unidimensional).

A (Author)
(m - identity_matrix(3)) . $[x, y. z]$ $\hookleftarrow$
L (soLve)

Recollim el vector solució $(2, 2, 5)$, i prenent-ne un de perpendicular a ell (per exemple, $(1, -1, 0)$), obtenim la matriu del canvi, diguem-ne C, en una base "privilegiada":

A (Author)
cross([2, 2, 5],[1, −1, 0]) ↩
S (Simplify)
C := [[2, 2, 5]/sqrt(33),[1, −1, 0]/sqrt(2),F3/sqrt(66)]‘ ↩
S (Simplify)

Observeu que F3 significa que hi hem de copiar el resultat que ens ha sortit del producte vectorial.

Comprovem que aquesta matriu és ortogonal:

A (Author)
F3.F3‘ ↩
S (Simplify)

Podem calcular l'angle de gir fent:

A (Author)
acos((trace(C)−1)/2) ↩
S (Simplify)

Sabem, doncs, la forma classificada de la nostra transformació ortogonal i la podem obtenir fent el canvi de base corresponent:

A (Author)
C‘ . T . C ↩
S (Simplify)

Efectivament, recuperem la matriu:

$$\overline{T} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.6 Exercicis proposats.

1. Estudieu si diagonalitzen els següents endomorfismes, i en cas afirmatiu obte-

niu les formes diagonals després de fer el canvi de base corresponent:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 5 & 10 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Classifiqueu la transformació,

$$T = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 25 & -8 & -20 \\ -8 & 25 & -20 \\ -20 & -20 & -17 \end{pmatrix},$$

i doneu-ne els elements característics.

3. Trobeu les equacions de la simetria rotacional d'eix $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ i angle $\frac{\pi}{6}$.

4. Determineu si les següents formes quadràtiques són definides positives, definides negatives o no definides.

$$q(x, y, z) = x^2 + xy + z^2 - 3xz - 2y^2$$
$$q(x, y, z) = 2x^2 - xy - zy - xz$$
$$q(x, y, z, t) = x^2 + xy - 3t^2 + tz + 5xz$$
$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2zy + 2xy$$

5. Sigui

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

la matriu d'un endomorfisme simètric f a la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Trobeu una base ortonormal orientada positivament, $\{\vec{v}_i\}$, en la qual f tingui una matriu diagonal. Escriviu en la base canònica i en la base $\{\vec{v}_i\}$ l'expressió de $q_f(\vec{u})$, essent q_f la forma quadràtica associada a f.

Tema 2

Eines bàsiques del càlcul

Seguidament, exposem les possibilitats pràctiques del *DERIVE* relacionades amb els conceptes més elementals del càlcul. Al principi facilitem una miscel.lània d'operacions usuals, però que no reben un tractament explícit en el temari de l'assignatura.

2.1 Fonaments diversos.

- Aïllar una variable.

  Amb la comanda SOLVE es pot aïllar una variable d'una equació d'una o diverses variables. Exemple:
  AUTHOR □ $xy + x\verb|^|2y\verb|^|2 + x = 0$ □ SOLVE □ #1 □ x □ ↵
  Això aïllarà la variable x de l'equació #1, i ens donarà les solucions $x = -(y+1)/(y^2)$ i $x = 0$.

- Factoritzar o trobar les arrels d'un polinomi.

  La comanda AUTHOR □ FACTOR descompon tant un nombre natural en producte de primers com un polinomi en producte d'irreductibles. En aquesta descomposició del polinomi, es visualitzaran les arrels si ens fixem en els termes de grau 1 o 2. A més, podem escollir el tipus d'arrel que volem que aparegui triant entre:
  Trivial Squarefree Rational raDicals Complex

  Exemple:

  A (per activar Author)
  $x\verb|^|6 - 3x\verb|^|5 + 3x\verb|^|3 + 3x\verb|^|2 - 4 = 0$ ↵.

  Veureu que apareix l'expressió en la part superior. Després feu F (de FACTOR) i ↵, i el polinomi quedarà descompost.

  Podeu construir exemples buscant polinomis amb coeficients enters que tinguin arrels de tot tipus: racionals, radicals i complexes no reals, bàsicament. Després, factoritzeu segons cada una de les opcions. També es poden trobar arrels de polinomis a través de l'operació SOLVE.

- Nombres reals.

  - Expressió decimal amb n xifres significatives:

    Sempre que haguem d'efectuar càlculs aproximats (per exemple, quan usem el valor numèric d'un nombre racional periòdic infinit o d'un irracional), cal triar la precisió prement:
    OPTIONS □ PRECISION □ n □ ↵.

on n és el nombre de dígits correctes que exigim. Per exemple, si volem conèixer els 20 primers dígits del número e, farem:
OPTIONS □ PRECISION □ Approximate → 20 □ Alt-e □ APPROX: #1
i obtindrem: 2.71828182845904523 53.

- De l'expressió decimal a l'expressió racional:

  Podem convertir un nombre escrit en forma decimal en un de racional, simplement polsant FACTOR sobre l'expressió desitjada. Exemple:
  AUTHOR □ 2.1345 □ FACTOR: #1 □ ↩,
  i apareix: (31423)/(2453). Amb un SIMPLIFY aconseguiríem 4269/2000.

- Nombres complexos.

  Ja hem presentat prèviament (a la Secció 0.1) les funcions part real, part imaginària, conjugat i argument.

  Penseu que l'operació SOLVE també us pot servir per trobar arrels n-èsimes o solucions complexes d'equacions. Exemple:
  AUTHOR □ z^5 + 2 = 0 □ SOLVE □ #1 □ ↩
  donaria les arrels quintes de −2 (però potser no totes!).

2.2 Successions.

Per definir una successió com ara $x_n = n^5 + n - 1$, caldria teclejar:
AUTHOR □ $x(n) := n$^5 $+ n - 1$ □ ↩

També podríem haver declarat x com una funció de n fent:

DECLARE □ Function □ DECLARE FUNCTION Name: x □ DECLARE FUNCTION Value: n^5 $+ n - 1$
Apareixeria: #1: $X(n) := n^5 + n - 1$.

Si més endavant volem calcular el límit d'aquesta successió quan n tendeix a infinit, caldrà seleccionar:
CALCULUS □ LIMIT □ #1 □ Variable: n □ Point: inf

En el darrer pas, també es pot seleccionar si es vol límit global, límit per l'esquerra o límit per la dreta. El límit quedarà indicat i n'obtindrem el valor prement EXPAND.

D'altra banda, també es podria fer aquesta operació a través de la funció AUTHOR i entrant la comanda: lim ($x(n)$,n,inf).

2.3 Funcions.

Per definir (declarar) funcions, es procedeix igual que en el cas de successions:
DECLARE □ FUNCTION □ ...,
o bé,
AUTHOR □ $f(x) := \ldots$

El *DERIVE* també permet fer ús de les propietats més bàsiques de les funcions transcendents (exponencials, logarítmiques i trigonomètriques). L'opció que cal escollir és:
MANAGE □ EXPONENTIAL, LOGARITHM o TRIGONOMETRY □ AUTO, COLLECT o EXPAND

La darrera opció s'escull segons les posteriors operacions que es desitgin fer. Exemple:

> #1: exp(2) exp(3)
> MANAGE □ EXPONENTIAL □ EXPAND
> EXPAND □ #1
> #2: exp(5) (el programa escriu $\hat{e}^5$)

Dins de l'opció MANAGE, també trobem la possibilitat d'avaluar una expressió anterior per a un determinat valor d'una determinada variable. Suposem que tenim prèviament:
#5: $a^5 + 4ab + c$,
i volem substituir a per 12. Farem el següent:
MANAGE □ SUBSTITUTE □ # 5 □ SUBSTITUTE Value: a (escrivim '12 ' damunt de 'a ') □ ↩ SUBSTITUTE Value: b □ ↩ SUBSTITUTE Value: c □ ↩
i ens torna l'expressió que volem. Per arrodonir el càlcul podem prémer EXPAND.

És clar que també es pot avaluar una funció a través de AUTHOR i escrivint $f(12, b, c)$, si abans hem denotat l'expressió per $f(a, b, c)$.

Les funcions definides per casos es poden donar per recurrència en el programa *DERIVE* . Ho explicarem amb un exemple:

Suposem que tenim la funció $f(x)$ definida per:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1, \\ |x| & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ \sin x & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

En aquest cas, podríem definir el primer interval i anar-lo lligant amb els altres. Tingueu en compte que if(cond,A,B) indica que si "cond" és certa, es faci A, i si és falsa, que es faci B.

#1: f1(x):=if(x >= −1, abs(x), $x + 2$)
#2: f2(x):=if(x >= 0, sin(x) , f1(x))
#3: f3(x):=if(x >= 2, sqrt(x), f2(x))

La funció f3(x) inclou, gràcies a la recurrència, tota la funció f(x).

Un darrer punt especial d'aquest tema és la composició de funcions. De fet, només cal introduir la seqüència que volem a través de la comanda AUTHOR. Per exemple: $f(g(h(j(x))))$. De tota manera, si estan definides per casos, us podeu trobar amb dificultats.

2.4 Límits de funcions.

Els límits de funcions es fan de la mateixa manera que els de successions. Aquí, és clar, hi haurà més diversitat a l'hora d'entrar el punt al voltant del qual es fa el límit. Per exemple, a l'hora de calcular

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 14x}{x^3 - 8},$$

faríem:

AUTHOR □ (x^3 − 9x^2 + 14x)/(x^3 − 8)
(sortirà escrita la fracció a #1)
CALCULUS □ LIMIT □ #1 □ x □ Point: 2 □ ↩
(sortirà indicat el límit a #2).
EXPAND □ #2 □ ↩
#3: -5/6

Com en el cas de successions, el tercer pas es podria substituir per lim(#1,x,2).

Per fer el límit per l'esquerra s'afegiria un "-1": lim(#1,x,2,-1)

Calculem, per exemple, els límits laterals de la funció $f(x) = e^{1/(x-1)}$ en $x = 1$.

A per activar Author

AUTHOR expression: Alt-e^$(1/(x-1))$ ↩

CALCULUS □ LIMIT □ CALCULUS LIMIT Expression: (nombre de l'expressió) ↩ CALCULUS LIMIT variable: (variable respecte a la qual s'ha de calcular) ↩ CALCULUS LIMIT Point 1. Premeu la tecla de tabulació ($\rightarrow|$) per anar a From... Feu "L"(Left) per indicar límit per l'esquerra i premeu ↩.

Veureu que apareix l'expressió a calcular en la part superior, i el menú principal en la part inferior. Feu Simplify ↩. Apareixerà el resultat del càlcul: 0.

Per calcular el límit per la dreta s'ha de prémer "r" en la opció CALCULUS LIMIT From... El resultat ha de ser infinit.

Observació:

DERIVE no és un programa infal.lible. L'algorisme amb què s'organitza internament els càlculs de vegades falla i no sap resoldre problemes senzills com és el cas dels límits laterals en $x = 1$ de la funció $f(x) = e^{1/(x^2-1)}$. Repetiu l'últim procés per a aquesta funció i observareu que respon amb un interrogant indicant que no ha sabut resoldre el problema. Torneu a fer-ho usant la forma alternativa $f(x) = e^{\frac{1}{(x+1)(x-1)}}$ d'escriure la mateixa funció i veureu que, en aquest cas, sí que ho sap fer. Tanmateix, val a dir que els casos en què *DERIVE* té problemes són excepcionals i que, en general, el programa és molt fiable.

2.5 Derivació.

Per efectuar una derivada d'una funció $f(x)$ (que suposem que està definida a l'expressió #1) cal fer:
CALCULUS □ DIFFERENTIATE □ #1 □ Variable: x □ Order: 1 ↩

Evidentment, fent-ho successives vegades, es van obtenint les derivades d'ordre superior. Amb tot, però, si es vol portar a terme una derivada d'un ordre més gran que 1 sense passar per les anteriors, es pot indicar a la subopció "Order" o introduir directament:
AUTHOR □ dif(#1,x,n) ↩ (si n=1, es pot obviar el darrer paràmetre).

Exemple: Reflectim les diferents fases del procés de cercar els extrems relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

AUTHOR □ x^3 $- 2x + 1$ ↩.
#1: $x^3 - 2x + 1$
C (Calculus) □ D (Diff.) □ #1 □ Variable: x □ Order: 1 ↩
#2: d/dx($x^3 - 2x + 1$)
EXPAND □ #2
#3: $3x^2 - 2$
C (Calculus) □ D (Diff.) □ #3 □ Variable: x □ Order: 1 ↩
#4: d/dx($3x^2 - 2$)
EXPAND □ #4
#5: $6x$

Cerquem els possibles extrems i punts d'inflexió:
SOLVE □ #3 ↩
#6: $x =^1 6/3$
(en lloc de l'arrel quadrada, algunes versions de *DERIVE* dibuixen un exponent "1" a l'esquerra)
#7: $x = -^1 6/3$
SOLVE □ #5 ↩
#8: $x = 0$

Podem comprovar que f'' no s'anul.la als possibles extrems i que f''' no s'anul.la al possible punt d'inflexió, avaluant a través de MANAGE □ SUBSTITUTE.

Si carregueu (LOAD) l'arxiu DIFF-APPS.MTH, podreu disposar d'altres aplicacions de la derivada, especialment de caire geomètric.

2.6 Desenvolupaments de Taylor.

L'opció CALCULUS també ofereix la possibilitat d'efectuar desenvolupaments de Taylor de grau n de la funció $f(x)$ al voltant d'un punt a. La seqüència que cal escollir és:
CALCULUS □ TAYLOR □ $f(x)$ □ Variable: x □ Degree: n Point: a □ ↩
Acabaríem amb un EXPAND de la darrera expressió.

Això és factible sempre i quan aquests paràmetres prenguin valors raonables; és a dir, no podem demanar el desenvolupament a l'entorn d'un punt on la funció no sigui succesivament derivable, ni fins a un ordre excessivament gran.. A més, com que *DERIVE* conserva els dibuixos que va fent, podem demanar que dibuixi les successives aproximacions per a veure com van millorant l'aproximació a la funció.

Començarem, per exemple, amb la funció y = e^x al voltant de $x = 0$:

AUTHOR □ AUTHOR expression: $\hat{e}^x$ ↩.

PLOT □ PLOT. Un cop visualitzada la gràfica:

ALGEBRA per a tornar al menú principal.

CALCULUS □ TAYLOR □ CALCULUS TAYLOR expression: (nombre de l'expressió) ↩ □ CALCULUS TAYLOR variable: x ↩ □ CALCULUS TAYLOR degree: (ordre de l'aproximació. Començarem per ordre 1) Point: (Punt a l'entorn del qual fem l'aproximació. Començarem per $x = 0$). NOTA: Premeu la tecla de tabulació (→|) per passar de "degree" a "point", si així ho voleu. Feu ↩.

Veureu que apareix l'expressió Taylor($\hat{e}^x$,x,0,1) a la part superior, i el menú principal a la part inferior. Feu

SIMPLIFY

SIMPLIFY expression:(nombre de l'expressió que voleu calcular) ↩.

Ara apareixerà $1 + x$ a la part superior, donat que la tangent de e^x a l'origen és la recta $y = 1 + x$. Feu PLOT dues vegades consecutives per a dibuixar la funció. Veureu que apareixen les gràfiques de e^x i de $1 + x$ superposades. Feu ALGEBRA i torneu al menú principal.

A continuació, efectueu:

AUTHOR, i utilitzeu les tecles ↑, ↓ per seleccionar (il.luminar) l'expressió Taylor($\hat{e}^x$,x,0,1).

F3 (per copiar l'expressió a la línia d'Author). Canvieu l'ordre 1 per ordre 2 ↩.

Veureu que apareix l'expressió Taylor($\hat{e}^x$,x,0,2) a la part superior, i el menú principal a la part inferior. Feu:

SIMPLIFY

SIMPLIFY expression: (nombre de l'expressió que voleu calcular) ↩. Veureu que apareix $x^2/2 + x + 1$ a la part superior, ja que aquesta és la segona aproximació de Taylor de la funció e^x a l'origen.

PLOT □ PLOT, i apareixeran les gràfiques de e^x , $x^2/2 + x + 1$ i $x + 1$ superposades.

Repetiu el procés fins a l'aproximació d'ordre 4.

2.7 Gràfiques de funcions.

Quan vulguem realitzar la gràfica d'una funció, cal entrar-la per la comanda AUTHOR i després seleccionar PLOT. Així, entrem al submenú de gràfics, el qual anem a comentar en els aspectes més generals.

Les principals comandes són:

Algebra: Per a tornar al menú principal.

Center: Per a situar el centre de la pantalla en el punt on estem situats.

Delete: Les noves gràfiques de funcions es van sobreposant damunt les anteriors, a no ser que fem ús d'aquesta opció per tal d'esborrar-ne.

Options: Permet adequar la presentació, la precisió, el detall dels dibuixos, canviar a coordenades polars,...

Plot: Per a executar el dibuix.

Scale: Per a adequar l'escala a la nostra funció.

Ticks: Permet canviar el nombre de marques sobre cada eix.

Zoom: Permet fer ampliacions i reduccions dels gràfics.

El *DERIVE* també permet de fer gràfics en tres dimensions, generalment procedents de funcions de dues variables.

2.8 Corbes parametritzades i corbes en coordenades polars.

També podem dibuixar corbes en el pla donades paramètricament o en forma polar.

Les corbes paramètriques s'introdueixen fent:
AUTHOR $\Box$ $[x(t), y(t)]$ $\Box$ $\hookleftarrow$

Introduïu, per exemple, la corba següent: $[t^2, (t+1)/(t-1)]$.

Observeu que a sota dóna informació de les coordenades de la petita creu que hi ha a la pantalla i de l'escala (nombre d'unitats que corresponen a cada marca dels eixos).

Si activeu Plot, a la línia de comandes se us demanaran tres dades:

1. Valor mínim i màxim del paràmetre t per als quals voleu que calculi punts de la corba. Per defecte hi ha $-\pi$ i π, respectivament.
2. Si voleu una línia contínua o si voleu que apareguin els punts calculats en forma discreta. Per defecte hi ha l'opció *contínua.*
3. Nombre de punts que voleu calcular. Per defecte n'hi ha 20.

Feu $\hookleftarrow$ per acceptar els valors per defecte i veure què passa.

Observeu que apareix una sola branca. Ens preguntem si els 20 punts que hem demanat que calculi entre $t = -\pi$ i $t = \pi$ estan sobre aquesta branca o bé, si la corba té alguna altra branca que no ha dibuixat o que roman oculta fora de pantalla.

Demanarem que apareguin els punts calculats en forma discreta per veure quants n'ha calculat. Prèviament, esborrarem la gràfica que hem dibuixat per tal que no se sobreposi amb la següent. Feu:
DELETE □ ALL □ PLOT Amb la tecla $\rightarrow\!|$ aneu a l'opció adequada i activeu Discrete. Feu $\hookleftarrow$ per acceptar els nous valors.

Observeu que hem demanat 20 punts i només n'ha dibuixat 8. Evidentment, hem obrat precipitadament en acceptar els valors per defecte de l'escala, i la pantalla ha quedat definida de forma inadequada per a aquesta corba.

Observeu que, per defecte, l'escala (Scale) és $x = y = 1$ i que hi ha 4 marques (Ticks) a l'eix x i 3 marques a l'eix y. Això vol dir que la pantalla abasta, aproximadament, la regió del pla de coordenades $-4 \leq x \leq 4$ i $-3 \leq y \leq 3$. Però nosaltres hem demanat $-\pi \leq t \leq \pi$ i, per tant, la coordenada x prendrà un valor màxim de $x = t^2 = \pi^2 \approx 9.8$, mentre que la coordenada $y = (t+1)/(t-1)$ creix indefinidament en valor absolut quan t s'acosta a 1, amb valors negatius quan $t < 1$ i positius quan $t > 1$. Evidentment, molts punts han quedat fora de la pantalla.

Activeu Scale i establiu la nova escala $x = y = 2.5$. Ara la pantalla abasta, aproximadament, la regió del pla de coordenades $-10 \leq x \leq 10$ i $-7.5 \leq y \leq 7.5$. Feu $\hookleftarrow$ per acceptar els nous valors. Tornarà a dibuixar automàticament els punts en la nova escala.

Si compteu els punts que ha dibuixat, veureu que encara en falten 2, que correspondran als valors de t més propers a 1. Repetiu el procés anterior canviant a l'escala $y = 5$ i sortiran els 20 els punts.

Noteu que, si haguéssim escollit un altre rang de variació del paràmetre t, haguéssim hagut de definir una altra pantalla.

Esborreu la corba i torneu a dibuixar-la amb l'opció contínua. L'última branca tarda més en sortir que amb l'opció punts discrets.

Torneu a esborrar i dibuixeu les diferents branques de la corba corresponents als següents rangs de variació del paràmetre t:

1. $-\pi \leq t \leq 0$
2. $0 \leq t \leq 1$
3. $1 \leq t \leq \pi$

Les *corbes* donades explícitament *en forma polar* es manegen igual, per bé que s'ha d'avisar al programa d'aquesta circumstància, a través de:
PLOT □ OPTIONS □ STATE □ Polar □ PLOT Proveu de dibuixar $r = \sin(2\theta)$, amb θ entre 0 i 2π.

També es pot dibuixar un *núvol de punts* del pla introduint-los a través de AUTHOR □ $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3], \ldots]$ i triant PLOT □ PLOT.

2.9 Integració.

La manera d'integrar amb el *DERIVE* és similar a la de derivar. La seqüència que cal seguir és:
AUTHOR □ $f(x)$ □ CALCULUS □ INTEGRATE □ Expression: #1 □ Variable: x ...
... i en aquest punt:

premem ↩ si la INTEGRAL és INDEFINIDA (càlcul de primitives),

o bé, introduïm els valors dels límits d'integració si la INTEGRAL és DEFINIDA (càlcul d'àrees, volums, etc.).

Com sempre, hi ha l'alternativa d'introduir directament una comanda:

AUTHOR □ int($f(x)$,x) □ ↩ (indefinida)

AUTHOR □ int($f(x)$,x,a,b) □ ↩ (definida)

El programa també disposa d'arxius on hi ha definides operacions addicionals, com ara integració per parts o per canvi de variable. Podeu accedir-hi carregant l'arxiu MISC.MTH.

També es poden resoldre integrals impròpies (quan algun extrem d'integració és infinit o la funció té asímptotes en l'interval d'integració).

Finalment, hem de destacar l'existència d'un arxiu anomenat INT-APPS.MTH, on s'hi han introduït les aplicacions més usuals de la integral, com ara:

- Càlcul de longituds de corbes donades, o bé explícitament, o bé paramètrica, o bé en polars:
  ARC-LENGTH, PARA-ARC-LENGTH, POLAR-ARC-LENGTH
- Àrees de cossos generats per revolució al voltant d'un eix:
  AREA-OF-REVOLUTION, VOLUMEY-OF-REVOLUTION
- Volum de cossos generats per revolució al voltant d'un eix:
  VOLUMEY-OF-REVOLUTION, VOLUMEX-OF-REVOLUTION

També hi trobem aplicacions de la integració de funcions en més d'una variable.

En el següent exemple, tractem de veure com *DERIVE* pot calcular integrals definides, fins i tot si els límits d'integració no són numèrics sinó que depenen d'un o més paràmetres.

Calcularem $\int_0^{a\sqrt{c}} \left(c - \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2} dx$.

AUTHOR □ AUTHOR expression: $(c - x\text{^}2/a\text{^}2)\text{^}(3/2)$ □ ↩.
CALCULUS □ INTEGRATE □ CALCULUS INTEGRATE expression: (nombre de l'expressió a integrar) ↩ CALCULUS INTEGRATE variable: x ↩ □ CALCULUS INTEGRATE Lower limit: 0 →| Upper limit: sqrt(c)a ↩.
SIMPLIFY □ SIMPLIFY expression: (nombre de l'expressió a integrar) ↩.

Apareixerà el resultat de la integral. Ha de ser $3\pi ac^2/16$. Surt també "sign(0)" degut a la incertesa en el signe de la constant a.

2.10 Exercicis proposats

1. Treballeu amb el polinomi $x^3 + x + 1$. En aquest cas, quan tingueu les arrels, feu x per activar l'opció approX i obtenir una aproximació decimal als nombres que apareixen indicats en cada expressió seleccionada (il luminada). Sortirà APPROX expression: (nombre de la expressió a aproximar). Heu de fer $\hookleftarrow$ per obtenir l'aproximació.

2. Calculeu derivades de diferent ordre de la funció $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ NOTA: Recordem que per entrar la funció $\arccos x$ s'ha d'escriure "acos(x)".

3. Una empresa porta a terme un estudi dels efectes de la inversió en publicitat en les seves vendes, i s'observa que el nombre d'articles venuts, $A(d)$, es relaciona amb la despesa publicitària, d, a través de la funció

$$A(d) = \frac{150(e^{d/20} - 1)}{e^{d/20} + 1}.$$

   Tenim també les següents dades:

   (a) Preu unitari de venda per article: 235000

   (b) Cost unitari per article: 120000

   (c) Costos fixos totals: 2000000

   - Construïu una funció $B(d)$ que dongui els beneficis en relació a la despesa publicitària.
   - Demostreu que $B(d)$ és una funció monòtona no decreixent i comproveu-ho gràficament.
   - Quina és la despesa mínima en publicitat que cal fer per no tenir un balanç deficitari?
   - Quin volum de beneficis s'aconseguiria si la despesa publicitària fos il.limitada?
   - Calculeu $\lim_{d \to +\infty} B'(d)$ i doneu una interpretació realística del resultat obtingut.

4. Calculeu i representeu gràficament els desenvolupaments de Taylor d'ordres 1, 3, i 5 de la funció $f(x) = \sin x$. Observeu que a mesura que augmenta l'ordre, hi ha més semblança amb la funció. Repetiu el procés amb les funcions $\tan x$ ~~i~~ $\arctan x$ i compareu els resultats. i ln(1+x).

5. Calculeu $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx$; $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

6. Feu la representació gràfica d'aquestes dues funcions que acabeu d'integrar per compendre millor el resultat obtingut. Preneu una escala llarga per a la x i curta per a la y. Per exemple, $x = 5$ i $y = 0.2$.

7. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x-1)^{1/4}}\,dx$; $\int \sqrt{x^2 - 6x - 7}\,dx$

8. Practiqueu amb les corbes
   $x(t) = \frac{2t}{t^2+1}$, $y(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$;
   $x(t) = \frac{t}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$;
   i amb les corbes en coordenades polars $r = 1 + \cos\theta$ i $r = e^{\theta}$ (directament o passant-les prèviament a paramètriques amb paràmetre t).

Tema 3

Geometria

3.1 Corbes a l'espai

3.1.1 Triedre de Frénet. Curvatura i torsió.

Exemple 1 *Trobeu la curvatura i la torsió de la corba*

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^{2t})$$

en el punt que correspon al valor del paràmetre $t = 0$.

En primer lloc s'inicialitza el sistema escrivint la instrucció:

> **Restart** :

Cal informar el programa que treballarem amb alguns "paquets" o "llibreries". S'escriu la instrucció:

> **with(linalg)** :

Ja es pot definir la corba

$> \mathbf{r1 := exp(t) * cos(t);}$

$> \mathbf{r2 := exp(t) * sin(t);}$

$> \mathbf{r3 := exp(2 * t);}$

I tenim el vector posició

$> \mathbf{vpos := [r1, r2, r3];}$

Es calcula el vector en la direcció tangent per a qualsevol t derivant el vector posició (vpos) respecte t

$> \mathbf{vt := diff(vpos, t);}$

si es substitueix $t = 0$ en l'expressió anterior ($subs(t = 0, vt)$) i es fan operacions (value):

$> \mathbf{vt0 := value(subs(t = 0, vt));}$

es calcula el vector tangent [1] dividint el vector anterior per la seva norma [2]. i es substitueix en el punt corresponent a $t = 0$

> **nat := vt/norm(vt, 2);**

> **nat0 := value(subs((t = 0, nat));**

com es pot comprovar, el vector **vt** no era unitari i per tant la corba no està parametritzada pel paràmetre arc.

El vector derivada segona és $vseg$ i en $t = 0$ $vse0$, es calculen:

> **vseg := diff(vt, t);**

> **vse0 := value(subs(t = 0, vseg));**

el vector binormal és $b = \dfrac{r' \wedge r''}{\|r' \wedge r''\|}$

> **nib := crossprod(vt, vseg)/norm(crossprod(vt, vseg), 2);**

> **nib0 := value(subs(t = 0, "));** [3]

La curvatura $\kappa = \dfrac{\|r' \wedge r''\|}{\|r'\|^3}$

> **cur := norm(crossprod(vt0, vse0), 2)/norm(vt0, 2) ∧ 3;**

El vector normal és $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$

> **ron := crossprod(nib, nat);**

i en $t = 0$

> **ron0 := value(subs(t = 0, evalm(ron)));**

Per a calcular la torsió $\tau = -\dfrac{(r' \wedge r'') \cdot r'''}{\|r' \wedge r''\|^2}$ cal trobar el vector derivada tercera, vter, que en $t = 0$ és vt0.

> **vter := diff(vseg, t);**

---

[1]Com que **tan,bin,nor** són paraules "reservades" de MAPLE. els vectors del Triedre de Frénet els escrivim al revés :nat,nib,ron

[2]La norma d'un vector $\vec{v}$ es troba amb la instrucció > **norm(v. 2)**

[3]les cometes fan referència a l'expressió trobada en la sentència anterior

> $\mathbf{vter0 := expand(subs(t = 0, vter));}$

i la torsió

> $\mathbf{tor := -dotprod(crossprod(vt0, vse0), vter0)/}$

> $\mathbf{norm(crossprod(vt0, vse0), 2) \wedge 2}$

3.1.2 Representació gràfica

Exemple 2 *Representeu gràficament la corba anterior*

Cal fer ús de la llibreria de dibuixar:

> $\mathbf{with(plots):}$

Com que ja s'havia definit la corba utilitzem la mateixa notació i ja es pot escriure la instrucció per a dibuixar corbes:

> $\mathbf{spacecurve([r1, r2, r3], t = -2 * Pi..2 * Pi);}$

En activar la finestra on hi ha el gràfic, apareix una caixa en lloc del dibuix. Si es mou el ratolí a l'hora que es prem el botó , s'obtenen diferents angles d'observació del gràfic, que torna a aparèixer en fer **Return**

3.2 Extrems de funcions de vàries variables.

3.2.1 Càlcul d'extrems relatius

Exemple 3 *Trobeu els extrems relatius de* $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

En primer lloc s'inicialitza el sistema i es carreguen les llibreries:

> $\mathbf{Restart:}$

> $\mathbf{with(linalg):}$

Ja es pot definir la funció que es vol optimitzar:

$> \mathbf{f := 2 * x \wedge 2 + y \wedge 2 + 8 * x - 6 * y + 20;}$

Diem Px i Py a les derivades parcials, respecte x i y, de f, que es calculen amb les instruccions:

$> \mathbf{Px := diff(f, x); > Py := diff(f, y);}$

Construïm el sistema d'equacions:

$> \mathbf{equ := \{Px = 0, Py = 0\};}$

El resolem i, alhora, guardem el punt singular a la variable *sol*

$> \mathbf{sol := solve(equ);}$

Es calcula la matriu hessiana de la funció $f(x, y)$:

$> \mathbf{A := hessian(f, [x, y]);}$

que en aquest cas és constant —no depèn del punt. Es comprova si és definida (positiva o negativa) amb la instrucció

$> \mathbf{definite(A, 'positive\_def');}$

Com que el resultat d'aquesta última sentència és *true*, vol dir que la matriu obtinguda és definida positiva i que, per tant, el punt $(-2, 3)$ correspon a un mínim de la funció f. Notem que en aquest cas, la matriu A és constant, no depèn de x ni y. Si la matriu hessiana A no és constant, recordem que cal substituir el punt (o punts) singular (x_0, y_0) a la matriu A. Aquest procés es fa mitjançant la instrucció

$> \mathbf{subs([x = x_0, y = y_0], eval(A));}$

Tot aquest procés es pot fer directament utilitzant la funció **extrema** de *MAPLE V*. Per a utilitzar-la cal carregar una llibreria:

$> \mathbf{readlib(extrema):}$

Notem que després de la funció cal escriure unes claus {} on s'escriu la(les) restricció(ons). La instrucció **extrema** dóna el valor de la funció en el màxim o mínim. Per a conèixer les coordenades de l'extrem es fa servir el paràmetre 's', del qual es pot conèixer el seu valor escrivint > s;

$> \mathbf{extrema(f, \{\}, \{x, y\}, 's');}$

3.2.2 Extrems de funcions de vàries variables amb restriccions.

Exemple 4 *Trobeu els punts de la corba* $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ *que estan a distància màxima i mínima de l'origen.*

$> \mathbf{extrema(x \wedge 2 + y \wedge 2, \{5 * x \wedge 2 + 6 * x * y + 5 * y \wedge 2 = 8\},}$

$\{\mathrm{x, y}\}, '\mathrm{s}')$

Analitzeu el resultat, segons les indicacions donades a l'apartat anterior.

3.3 Representació de superfícies

Per a dibuixar superfícies o corbes sempre es carrega primer el paquet de dibuix amb la instrucció

$> \mathrm{with(plots)}:$

3.3.1 Superfícies en forma implícita.

Exemple 5 *Trobeu el pla tangent a la superfície* $x^2 + 2z^2 = 3y^2$ *en el punt de coordenades* $(2, -2, -2)$. *Comproveu el resultat gràficament.*

Per a dibuixar superfícies en forma implícita, es fa:

$> \mathbf{implicitplot3d(x \wedge 2 + 2 * z \wedge 2 = 3 * y \wedge 2, x = -5..5, y = -5..5}$

$\mathbf{, z = -5..5, axes = framed);}$

Comproveu que el pla tangent a la superfície en el punt $(2, -2, -2)$ és $x+3y-2z = 0$, que es pot dibuixar simultàniament amb la superfície anterior:

$> \mathbf{implicitplot3d(\{x \wedge 2 + 2 * z \wedge 2 = 3 * y \wedge 2, x + 3 * y - 2 * z = 0\}}$

$\mathbf{, x = -5..5, y = -5..5, z = -5..5, axes = framed);}$

Cal fer moure el dibuix, tal com s'ha explicat per a les corbes, per a visualitzar correctament aquest gràfic.

3.3.2 Superfícies en forma explícita.

Exemple 6 *Estudieu la continuïtat de les funcions*

- $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
- $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-y)^2}$

Estudiem-les gràficament

> **plot3d(ln(x ∧ 2 + y ∧ 2), x = −2..2, y = −2..2);**

> **plot3d(1/(x − y) ∧ 2, x = −6..6, y = −6..6);**

Exemple 7 *Representeu gràficament la funció de l'Exemple 3. Verifiqueu l'extrem obtingut.*

3.3.3 Superfícies en forma paramètrica.

Exemple 8 *Trobeu el pla tangent a la superfície donada en forma paramètrica per*

$$\Phi(u,v) = (u, v, uv),$$

en el punt $(2,-1,-2)$

Es pot començar representant gràficament la superfície

> **plot3d([u, v, uv], u = −2..2, v = −2..2);**

Proveu de moure la caixa del dibuix als valors theta=22.phi=82

Per a representar dues superfícies donades en forma paramètrica alhora, cal que s'utilitzi el mateix paràmetre. Comproveu que l'equació paramètrica del pla tangent en el punt demanat es pot escriure: $(x,y,z) = (0,0,2) + u(1,0,-1) + v(0,1,2)$.

Diem $s1$ i $s2$ a les equacions paramètriques de la superfície i del pla respectivament.

> **s1 := [u, v, u * v];**

> **s2 := [u, v, 2 − u + 2 * v];**

i les representem, primer per separat i finalment de forma simultània.

> **plot3d(s1, u = 0..4, v = −3..1);**

> **plot3d(s2, u = 0..4, v = −3..1);**

> **plot3d({s1, s2}, u = 0..4, v = −3..1);**

Ara, proveu de moure la caixa als valors theta=11 i phi=80 i d'afegir-hi els eixos.

3.4 Exercicis proposats

1. Donada la corba
$$\alpha(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, 3)$$
   - Demostreu que la corba és plana i trobeu el pla que la conté.
   - Busqueu el triedre de Frénet d'aquesta corba per $t = \pi/2$
2. Representeu gràficament la corba anterior.
3. La corba
$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, kt)$$
és l'hèlix circular.
   - Demostreu que el vector tangent en un punt qualsevol de l'hèlix, forma un angle constant amb l'eix OZ.
   - Comproveu que el vector binormal en un punt qualsevol de l'hèlix, forma un angle constant amb l'eix OZ.
4. Trobeu els extrems de la funció
$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3 - y^2 - 3x - 2y + 1.$$
Visualitzeu els extrems dibuixant la gràfica d'aquesta funció.
5. Calculeu els extrems de la funció $f(x, y, z) = 2x + 4y - z$, sobre l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Digueu en quins punts f té un màxim i en quins un mínim.

Tema 4

Equacions diferencials

4.1 Introducció.

La pràctica que treballarem en aquest apartat se centra en el plantejament d'un problema (en el nostre cas una equació diferencial) i en el seu estudi a partir de les possibilitats d'un manipulador simbòlic, Maple V. Més concretament, l'estudi del problema i la seva resolució se centraran en les possibilitats de simulació que ens permet el programa sobre els paràmetres que puguin intervenir en un problema.

De fet, la pràctica es basa en el seguiment de dos fitxers associats (PRACT1-1.MS i PRACT1-2.MS) que ja contenen, a més de text que serveix per a introduir els diferents passos, les instruccions principals que poden intervenir en la resolució del problema. Aquests fitxers es troben al directori de treball que per defecte té el Maple i permeten, quan fa falta, l ús i coneixement d'instruccions més complexes.

4.1.1 Càrrega d'un fitxer.

Per a llegir o carregar un fitxer a la memòria farem servir l'opció **File/Open**, seleccionarem l'arxiu en qüestió i polsarem OK. Si ja tenim un fitxer obert, veurem que abans de carregar-ne un de nou el sistema ens permetrà guardar en disc els últims canvis introduits. Quan es tracta de pràctiques que han de fer servir diversos usuaris, com és el cas, cal contestar **NO** a la pregunta **"Save current changes?"**.

Una vegada el document de Maple és en pantalla podem identificar dos tipus de text: a) el que correspon a la zona de *text* (en negre), que són explicacions que serveixen per a introduir els passos de la pràctica i que faciliten ajuda per a l'execució de les successives etapas de la mateixa, i el de la zona d'*input* (en vermell i presentat pel símbol ">") o instruccions executable de Maple.

4.1.2 Navegació pel document i execució d'instruccions.

Per a un correcte moviment pel document de Maple que hem carregat i que tenim en pantalla i una correcta execució de les instruccions de Maple que hi ha preparades en el document o les que podem editar en qualsevol moment, cal tenir en compte les següents indicacions:

1. El moviment per la pantalla es fa de la forma habitual fent servir **les tecles del cursor**, o bè, **les tecles d'avançar o d'endarrerir pàgina**.

2. Les instruccions s'executen **seqüencialment**. Només cal tenir el cursor en la instrucció i prémer **Return** (*no cal estar al final de la línia*).

3. Les instruccions poden estar agrupades de manera que un grup de línies puguin executar-se amb una única pulsació de Return i això permet l'organització de la pràctica en Etapes. La visualització d'aquests grups d'instruccions s'activa i desactiva amb la tecla de funció **F9**. En qualsevol cas, no fa falta que el cursor estigui a l'última línia del grup per a poder executar amb un sol Return totes les instruccions del grup.

4. L'execució seqüencial de les instruccions és molt important ja que les variables de Maple són globals i a cada pas de la pràctica aquestes variables queden assignades per als passos següents.

5. El contingut d'una variable s'actualitza editant el valor actual de la mateixa i executant la instrucció amb Return. Aquest és el cas de la simulació per a diferents valors d'una variable.

6. Si per qualsevol motiu ens interessa tornar a iniciar la pràctica hem d'executar la instrucció **restart** de l'etapa inicial que **reinicialitza totes les variables**.

4.2 Presentació de la pràctica.

En aquesta pràctica volem formular un model matemàtic que descrigui la variació de temperatura a l'interior d'un edifici, en un cert interval de temps, en funció de la temperatura exterior, de la calor que es genera dins de l'edifici i del sistema de regulació de temperatura.

Un plantejament natural per a modelar la temperatura interior d'un edifici consisteix en l'anàlisi compartimental que considera l'edifici com un únic compartiment.

Si $ti(t)$ representa la temperatura interior de l'edifici en el moment t, la variació de la temperatura respecte del temps és la diferència entre la variació amb què augmenta i la variació amb què disminueix.

Simplificant el model, tindrem en compte els tres factors principals que afecten a la variació de temperatura i la pràctica consistirà en la simulació d'aquests factors:

1. L'efecte de la temperatura exterior que la indicarem per $te(t)$. Aquest efecte seguirà la Llei de variació tèrmica de Newton, d'acord amb la constant de

variació tèrmica, k, de l'edifici.

2. La calor produïda per les persones, llums, màquines,... que hi ha a l'interior de l'edifici. Denotarem per $h(t)$ la variació de temperatura respecte el temps deguda a aquesta calor.

3. La variació de calor produïda per l'aparell regulador de temperatura (calefactor o aire condicionat que aportarà calories o frigories segons convingui, d'acord amb el termostat del regulador). Denotarem per $u(t)$ la corresponent variació respecte el temps.

Per a facilitar el progrés en la pràctica, aquesta està dividida en dues parts:

1a Part En aquest primer cas, suposarem que la temperatura exterior, $te(t)$, és una funció constant (per exemple, la temperatura mitjana d'un cert període) i que no disposem de cap sistema de regulació de temperatura (és a dir, $u(t) = 0$).

2a Part En el segon cas, suposarem que $te(t)$ segueix un model sinusoidal d'acord amb les variacions de temperatura degudes a les hores de llum solar, del tipus

$$te(t) = m0 - b\cos\frac{\pi}{12}t$$

on t és el temps expressat en hores, i que l'edifici disposa d'un sistema de regulació que ens permet fixar la temperatura desitjada, td, i amb un rendiment d'acord amb la Llei de Newton i la constant de variació tèrmica de l'aparell, ku,

$$u(t) = ku(td - ti(t)).$$

En els dos casos, la funció $ti(t)$ ha de satisfer l'equació diferencial lineal

$$\frac{d\ ti(t)}{dt} = k(te(t) - ti(t)) + h(t) + u(t).$$

4.3 Desenvolupament de la pràctica.

4.3.1 Primera Part. Fitxer PRACT1-1.MS

Pas 0.
Carrega el fitxer PRACT1-1.MS i executa l'ETAPA INICIAL per a inicialitzar les variables globals del programa.

Pas 1.
Executa l'ETAPA PRIMERA que activa l'equació diferencial que configura el model matemàtic del nostre problema i observa l'expressió diferencial resultant que queda emmagatzemada a la variable *eq*.

$\Longrightarrow$1.1 Per què podem afirmar que és una equació diferencial lineal?

▷

$\Longrightarrow$1.2 Identifica $P(t)$ i $Q(t)$ de l'expressió general d'una equació diferencial lineal $\frac{d\ ti(t)}{dt} + P(t)ti(t) = Q(t)$ per al nostre cas:

$\boxed{P(t) = \qquad}$ i $\boxed{Q(t) = \qquad}$

$\Longrightarrow$1.3 Formula l'equació diferencial lineal homogènia associada.

▷

Pas 2.
Assigna amb l'ETAPA SEGONA els valors de les constants de la següent taula:

k	$te(t)$	$h(t)$	$u(t)$	$ti0$
$\frac{1}{5}$	24	0	0	40

$\Longrightarrow$1.4 Quina és la constant de temps del problema? $\boxed{tc = \qquad}$

$\Longrightarrow$1.5 Explica el significat de la constant de temps.

▷

Pas 3.
Executa l'ETAPA TERCERA de resolució de l'equació diferencial del supòsit i observa la funció resultant.

$\Longrightarrow$1.6 Hi ha algun sumant de la funció que resulti poc significatiu a mesura que passa el temps? En cas afirmatiu, anota'l i explica el perquè.

▷

⟹1.7 Identifica les constants que apareixen en l'expressió de la funció i interpreta el seu significat.

Constant	Descripció

Pas 4.
L'ETAPA QUARTA representa gràficament la solució de l'equació diferencial. Exëcuta l'etapa i maximitza el gràfic resultant.

Identifica les dues funcions representades i, fent servir el cursor per a situar punts en el gràfic, respon les següents preguntes:

⟹1.8 A quina hora (en hores i minuts), aproximadament, la temperatura interior de l'edifici serà de 30°? [hores i minuts]

⟹1.9 Quina és la temperatura interior després de 10 hores? [graus]

Tanca el gràfic.

Pas 5.
⟹1.10 Fent servir l'ETAPA CINQUENA d'avaluació de resultats completa la taula següent:

Temps transcorregut	Temperatura interior
2 hores	
	35°

Pas 6.
⟹1.11 Pren com a valor de la constant k, $k = \frac{1}{2}$ i després $k = \frac{1}{10}$ i, executant les corresponents etapes, completa les taules següents:

Per a $k = \frac{1}{2}$

Temps transcorregut	**Temperatura interior**
2 hores	
	35°

Per a $k = \frac{1}{10}$

Temps transcorregut	**Temperatura interior**
2 hores	
	35°

$\Longrightarrow$1.12 Explica de quina manera intervé la constant k en la gràfica resultant i perquè.

▷

Pas 7.

$\Longrightarrow$1.13 Com afecta a la solució de la temperatura interior, $ti(t)$, i a la corresponent gràfica el que per a un valor determinat de la constant k la temperatura inicial interior, $ti0$, sigui de 15°? Raona les respostes.

L'expressió de $ti(t)$:

▷a)

La gràfica de $ti(t)$:

▷b)

Pas 8.

Per a $k = \frac{1}{3}$ i $ti0 = 15$, suposa que la calor produïda per persones i màquines provoca una variació de 2 graus per hora ($h(t) = 2$). Actualitza les constants i

⟹1.14 Calcula el valor límit de la temperatura interior i justifica la resposta.

▷

⟹1.15 Explica, en funció de la constant de temps i de $h(t)$, la diferència que hi ha entre la temperatura límit interior i la temperatura exterior.

▷

Pas 9.

⟹1.16 En el supòsit anterior, en quin moment la temperatura interior coincideix amb l'exterior? $\boxed{\quad\text{hores}}$

I si $ti0 = 40°$?

▷

Pas 10.

La solució general d'una equació diferencial es pot obtenir variant la condició inicial que permet tenir les diferents solucions particulars. Observa com canvia la funció solució de l'equació diferencial quan fem una perturbació, s, a la condició inicial:

Condició inicial	**Solució per a $ti(t)$**
$ti0 = 40$	
$ti0 = 40 + s$	

⟹1.18 Resol d'equació diferencial lineal homogènia de l'apartat 1.3.

▷

⟹1.19 A la vista dels resultats obtinguts en els apartats 1.17 i 1.18, quin resultat sobre l'expressió de la solució general d'una equació diferencial lineal has pogut comprovar?

▷

Tanca l'arxiu PRACT1-1 i surt de Maple o passa a la segona part de la pràctica.

4.3.2 Segona Part. Fitxer PRACT1-2.MS

Com ja haviem dit a la presentació de la pràctica, en aquesta part estudiarem un cas més versemblant en el que la temperatura exterior, $te(t)$, i la funció de regulació de temperatura, $u(t)$, tenen les expressions

$$te(t) = m0 - b\cos\frac{\pi}{12}t \qquad \text{i} \qquad u(t) = ku(td - ti(t))$$

on t és el temps expressat en hores.

Pas 0.
Carrega l'arxiu PRACT1-2.MS. Executa l'ETAPA INICIAL per a inicialitzar les variables globals del programa. Activa l'equació diferencial de l'ETAPA PRIMERA i fixa la constant de variació tèrmica a $\frac{1}{4}$.

Pas 1.
Tenint en compte que $te(t) = m0 - b\cos\frac{\pi}{12}t$, determinarem el valors de les contants, $m0$ i b a partir dels valors màxim i mínim que pren la temperatura exterior al llarg del dia. Amb aquesta intenció contesta:

$\Longrightarrow$2.1 Quant ha de valer la funció trigonomètrica que intervé en la funció $te(t)$ per tal que aquesta prengui els valors màxim o mínim i quins valors són aquestos?

valors mínims	$\cos\frac{\pi}{12}t =$	$temin =$
valors màxims		$temax =$

$\Longrightarrow$2.2 Interpreta el significat de les constants $m0$ i b de l'expressió $te(t)$:

$\boldsymbol{m0}$	
$\boldsymbol{b}$	

En el nostre cas suposarem que la temperatura mínima ($temin$) és 17 graus i que la temperatura màxima ($temax$) és 37 graus.

$\Longrightarrow$2.3 Utilitza aquestos valors per a determinar $m0$ i b executant l'ETAPA SEGONA.

$m0 =$	$b =$

Contrasta les respostes de l'apartat 2.2 amb el gràfic resultant d'executar la següent instrucció d'aquesta etapa i respon:

$\Longrightarrow$2.4

Temperatura exterior a les 12 hores (exacta): a) graus

Temperatura exterior a les 20 hores (aproximada): b) graus

Hora aproximada, dins de les primeres 12 hores, a la qual la temperatura exterior és de 30°: c) hores

Pas 2.

Tanca el gràfic i assigna, a les respectives variables, els valors del supòsit 1 de la següent taula:

Supòsit	$h(t)$	ku	td	$ti0$
1	0	0	0	40
2	2	0	0	40
3	0	$\frac{1}{2}$	21	30
4	2	3	21	30

Taula de constants

Resol l'equació diferencial, observa la funció resultant i contesta les següents preguntes:

$\Longrightarrow$2.5 Hi ha algun sumant de la funció $ti(t)$ que resulti poc significatiu a mesura que passa el temps? En cas afirmatiu indica quin és i explica perquè.

▷ a)

Quins sumants introdueixen una component periòdica en la funció $ti(t)$?

▷ b)

Interpreta el terme constant en relació a la temperatura exterior.

▷ c)

Pas 3.

Fes el gràfic de l'ETAPA QUARTA i, després de maximitzar-lo, observa el desfasement entre la temperatura exterior, $te(t)$, i la interior, $ti(t)$, quan deixa de ser significatiu el terme exponencial.

$\Longrightarrow$2.6

Calcula, gràficament, el valor aproximat del desfasement (en hores) | a) h. |

Entre quins valors màxim i mínim tendeix a oscilar la temperatura interior?

b) Temperatura interior mínima: graus
c) Temperatura interior màxima: graus

Pas 4.

$\Longrightarrow$2.7 A quina hora, entre les 40 h i les 50 h, la temperatura exterior i interior coincideixen, cadascuna, amb la temperatura mitjana exterior?

a) **te(t)=Temp. mitjana exterior**	**ti(t)=Temp. mitjana exterior**
t= hores	t= hores

Utilitza el resultat anterior per a obtenir una aproximació numèrica del desfasement.

b) desfasement= hores

Calcula l'instant en el qual la temperatura exterior i interior coincideixen per primera vegada.

c) Primer ti(t)=te(t)	t= hores

Pas 5.

A partir d'ara, suposarem constants els valors calculats anteriorment per a h, $m0$ i b, referents a les condicions generals de l'edifici i el seu entorn, i simularem sobre els elements $h(t)$ i $u(t)$. Suposarem que l'expressió de $u(t)$ queda definida a partir de la constant de l'aparell, ku, i de la temperatura a la que fixem el termostat, td.

Tingues ara en compte les variacions de temperatura degudes a les persones i a la maquinària de l'edifici del supòsit 2 de la taula de constants.

Actualitza els valors anteriors i resol l'equació diferencial.

$\Longrightarrow$2.9 Al voltant de quin valor oscila la temperatura interior? | a) graus |

Afageix aquest valor al conjunt de funcions que representem a la funció *plot*$(\cdots)$ i observa el gràfic resultant.

Calcula la diferència entre els valors mitjos de la temperatura exterior i la interior. Formula la igualtat general que ens permet calcular el valor d'aquesta diferència a partir dels corresponents valors de k i de $h(t)$.

▷ b)

Interpreta el resultat anterior:

▷ c)

Substitueix en la representació gràfica el valor fix d'abans per l'expressió que acabes d'obtenir.

Pas 6.
Suposa ara que en l'edifici hem instal.lat un termostat per a regular la temperatura amb les característiques del supòsit 3.

Actualitza les ETAPES SEGONA i TERCERA de la pràctica. Incorpora la funció constant *td* a la gràfica de l'ETAPA QUARTA i comprova, gràficament, que el valor mitjà de la temperatura resultant està condicionat per la temperatura *td*.

$\Longrightarrow$2.9 A la vista de la gràfica, en quin moment aproximadament, dins de les primeres 24 hores, la temperatura interior coincideix amb la del termostat? | a) hores |

Utilitzant l'ETAPA CINQUENA, calcula amb exactitud el temps anterior. | b) hores |

Imagina't que treballes en aquest edifici en règim de jornada intensiva des de les 8 del matí fins a les 3 de la tarda.

$\Longrightarrow$2.10 Quina opinió et mereix l'aparell regulador, a la vista de la gràfica de la temperatura interior resultant?

▷

⟹2.11 Completa la taula següent:

ku	**temp. int. mitj.(exacta)**	**temp. int. màx.(aprox.)**	**temp. int. mín.(aprox.)**	**primer instant $ti(t) = td$**
$\frac{1}{2}$				
3				

⟹2.12 Interpreta el paper de la constant ku en termes de l'eficàcia de l'aparell regulador de la temperatura interior.

▷

⟹2.13 Calcula la constant de temps, tcu, de l'aparell regulador, en cadascun dels casos anteriors i explica el seu significat.

ku	tcu	**Significat**
$\frac{1}{2}$		
3		

Pas 7.
Situa't en el supòsit 4 de la taula de constants. En aquest cas, estem considerant també la contribució tèrmica de les persones i màquines de l'edifici.

⟹2.14 Calcula la nova temperatura interior mitja i justifica'n la variació

a) **Temp. mitjana interior**	**Justificació**

Quina seria la temperatura interior mitjana si no disposéssim de cap aparell regulador?

b) Temperatura interior mitjana= graus

$\Longrightarrow$2.15 Identifica cadascuna de les gràfiques resultants.

Funció	**Significat**

Transcriu o imprimeix el gràfic resultant. L'opció d'impressió és a **File/Print** de la finestra gràfica. Trasllada les anteriors anotacions al resultat en suport paper.

$\Longrightarrow$2.14 Desactiva l'aparell regulador ($ku = 0$) i comprova la variació de la gràfica corresponent a la temperatura interior. Transcriu o imprimeix el gràfic resultant i comenta les diferències existents entre els dos.

▷

Si surts de Maple i de Windows ja pots donar la pràctica per acabada.

4.4 Exercicis proposats.

Seguint els passos desenvolupats a la pràctica anterior, resol les següents situacions:

Situació 1: En un matí d'estiu, mentre les persones estan treballant, l'acondicionador de l'aire manté la temperatura interior a 20° C. Al migdia tanquem l'aire i la gent torna a casa. La temperatura exterior és de 30° C durant la resta de la tarda. Si la constant de temps de l'edifici és de 4 hores,

1. quina serà la temperatura interior a les dues de la tarda?

2. I a les sis de la tarda?

3. En quin moment la temperatura serà de 22^o C?

Situació 2: En un matí d'un dissabte de tardor, durant les hores de feina, el calefactor manté la temperatura interior d'un edifici a 21^o C. Al migdia s'atura l'activitat i s'apaga el calefactor. La temperatura exterior és de 12^o C durant la resta de la tarda. Si la constant de temps de l'edifici és de 3 hores,

1. en quin moment la temperatura interior de l'edifici serà de 16^o C?
2. Si algunes finestres han quedat obertes, de manera que la constant de temps es redueix a 2 hores, en quin moment la temperatura interior serà de 16^o C?

Bibliografia

[1] J.S. Barry, E. Graham, A.J.P. Watkins. *Learning mathematics through DERIVE* Ellis Horwood. 1993.

[2] A. Carrillo de Albornoz et al. *MAPLE V . Aplicaciones matemáticas para PC.* RA-MA Editorial. 1995.

[3] I. Castro Chadid. *Cómo hacer matemáticas con DERIVE .* Editorial Reverté Colombiana, s.a. 1992

[4] B.W. Char et al. *MAPLE V Library Reference Manual.* Springer-Verlag. 1991

[5] J. Getán, E. Pociello, J. Varea. *Problemas de matemáticas aplicados a la economía y a la empresa.* Romanyà/Valls, s.a. 1994.

[6] C. Paulogorrán, C. Pérez. *Cálculo matemático con DERIVE para PC.* RA-MA Editorial. 1994.

[7] A. Rich, J. Rich, D. Stoutemyer *DERIVE : A mathematical assistant program.* Soft Warehouse, Inc. 1989