E.E.
Mecànica

EPSEB

Escola Politècnica Superior d'Edificació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Grau en Enginyeria d'Edificació

Departament de Física Aplicada

Barcelona, setembre 2010

MECÁNICA

Problemas

Enunciados y soluciones

Assignatura : MECÀNICA

Curs: 1 A

José Agea
Enrique Álvarez
Carlota E. Auguet
Enric Camí
Pere Castellví
Aleix Ciudad
Blas Echebarría
Ana Lacasta
Maria Niubó
Angelina Peñaranda
Laureano Ramírez de la Piscina
Inma Rodríguez Cantalapiedra

1400754914

EE

Mecànica

DIPOSIT LEGAL: B-33060-2010

ÍNDICE

Enunciados de problemas y soluciones

1.- FUERZAS Y SISTEMAS DE FUERZAS

1.1.- Una fuerza de 100 N de módulo se encuentra aplicada en el plano XY formando 50° con el eje OX. Dad su expresión vectorial

(Sol.: F=(64.28,76.6,0) N)

1.2.- Una fuerza de 200 N se encuentra aplicada sobre una recta soporte que contiene los puntos A (1,-2,1) m y B (-1 0 2)m. Dad su expresión vectorial

(Sol: $F=\pm(-400,400,200)/3$ N)

1.3.- Hallar gráfica y analíticamente la resultante del sistema formado por las fuerzas de módulos F_1 = 20 N, F_2 = 10 N y F_3 = 20 y que forman con la horizontal, respectivamente, ángulos de 30°, 135°, 270°.

(Sol.: R = (10.25, -2.93) N)

1.4.- Una fuerza F_1 es perpendicular al plano xz. Su producto escalar por la fuerza F_2 es igual a -18 y su suma con F_2 es igual a la fuerza F_3 de componentes (13,-3,8) N . Determinar las componentes de las fuerzas F_1 y F_2.

(Sol.: F_1 = (0,3,0) N, F_2 = (13,-6,8) N o bien F_1 = (0,-6,0)N, F_2 = (13,3,8) N)

1.5.- Determinad la dirección de la fuerza F= (200,300,-100) N. Expresad los cosenos directores y los ángulos que forma con los ejes X, Y y Z respectivamente.

(Sol: $f=(2,3,-1)/\sqrt{14}$ N; $\cos\alpha= 2//\sqrt{14}$, $\cos\beta=3/\sqrt{14}$, $\cos\gamma=-1/\sqrt{14}$; $\alpha= 57.69°$; $\beta=36.7°$; $\gamma=105.5°$)

1.6.- Un paralelepípedo tiene unas dimensiones 2mx3mx1m. Calculad el ángulo que forman las diagonales de las caras de 2m x 3m y las diagonales del paralelepípedo.

(Sol: $\alpha=67,38°$; $\beta=64.62°$)

1.7.- Una fuerza de 500 N, que tiene la dirección y el sentido del semieje positivo OY, está aplicada en el punto (0,0,3) m. Escribid su expresión en componentes y dad su momento respecto al origen de coordenadas.

(Sol: F=(0,500,0) N, Mo=(-1500,0,0) N.m)

1.8.- La fuerza F=(10,-10,30) N se encuentra sobre una recta soporte que pasa por el punto A (-1,2,1) m.

a) Calculad la dirección de la recta soporte

b) Calculad la proyección de la fuerza sobre una recta cuya dirección es $r = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$

c) Calculad la dirección de una segunda recta perpendicular a la anterior y a la fuerza

(Sol: (a) $f=(1,-1,3)/\sqrt{11}$; b) $-30/\sqrt{3}$; c) $s=(1,-2,-1)/\sqrt{6}$)

1.9.- a) Calculad el momento respecto al origen de coordenadas de la fuerza F=(-5,1,4) N que pasa por el punto P (2,1,1) m.

b) determinad el momento de dicha fuerza respecto al punto D (1,0,3).

c) calculad el momento de la fuerza respecto a los ejes cartesianos.

d) calculad el momento de la fuerza respecto a un eje de dirección $(1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2)$ que pasa por D

e) calculad el momento de la fuerza respecto a un eje paralelo al anterior que pasa por P.

(Sol: (a) $M_O=(3,-13,7)$ N.m; b) $M_D=(6,6,6)$ N.m; c) $M_X=3$N.m, $M_Y=-13$ N.m $M_Z=7$ N.m ; d) Meje= $3\cdot\sqrt{2}$ N.m); e) Meje'= 0)

1.10.- Calculad el momento de la fuerza anterior respecto a un eje que pasa por los puntos D y E, tal que DE es un vector paralelo a la fuerza F.

(Sol: Meje= 0)

1.11.- Sobre el sistema de la figura se aplica una fuerza F de 100 N de módulo con la dirección y sentido indicados en la figura. Calculad :

a) La expresión vectorial de la fuerza.

b) La proyección de la fuerza en la dirección EA

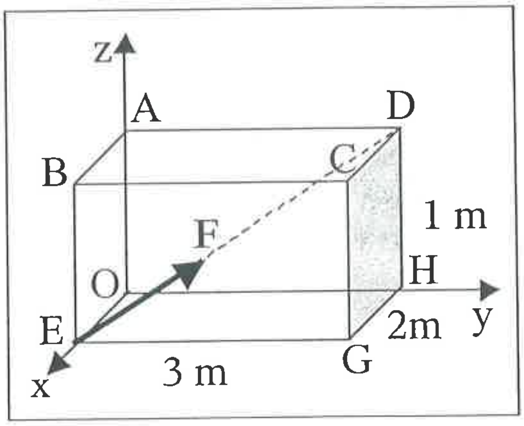
c) El momento de la fuerza respecto al punto A.

d) El momento de la fuerza respecto al punto H.

e) El momento de la fuerza respecto al eje HG.

f) El momento de la fuerza respecto a un eje paralelo al anterior que pasa por D.

g) La fuerza mínima que debería aplicarse en el punto E para obtener el mismo momento respecto al eje HG.

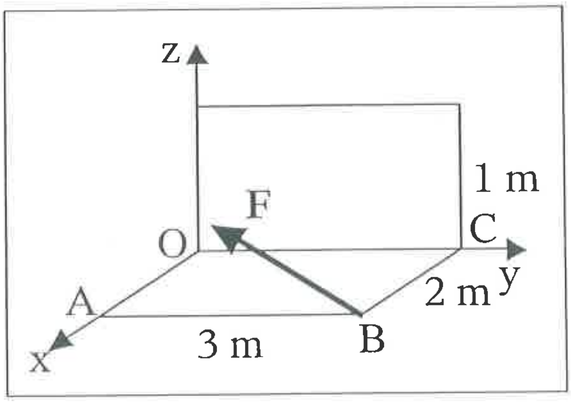


(Sol: a) F=(-200,300,100)/√14 N;   b) ±500/√70 N; c) M_A= (300,0,600)/√14 N.m ;

d) M_H= (-300,-200,0)/√14 N.m; e) M_{HG}=-300)/√14 N.m; f) M_{DC}=0;

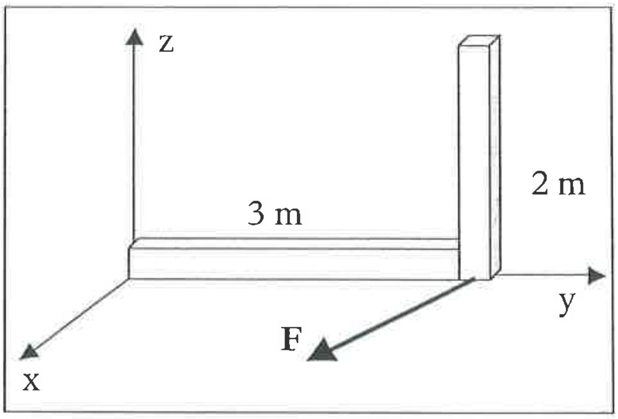
g) F'=(0,0,100)/√14 N)

1.12.-La fuerza F=(100,Fy,Fz) actúa sobre la estructura de la figura de forma que el momento con respecto al origen es M_O=(300,-200 ,-100)N.m. Calculad la fuerza F. Expresad su módulo y el ángulo que forma con cada uno de los ejes cartesianos.



*(Sol: **F**=(100,100,100) N; F=100√3; α=β=γ=54.74°)*

1.13.-Una fuerza actúa sobre la estructura de la figura de modo tal que el momento respecto a los ejes X e Y es nulo, siendo el momento respecto al eje Z de -600 N.m. Calculad la fuerza aplicada. Determinad la fuerza mínima que aplicada en el mismo punto consigue el mismo efecto.



(Sol: F= (200,Fy,0) N; Fmin= (200,0,0) N)

1.14.- Sea la fuerza F = (1,2,3) N, cuya dirección es tal que pasa por el punto A (3,4,2), en donde las distancias se miden en metros.

a) Calcular su momento respecto al origen O y con respecto a los tres ejes de coordenadas.

b) Calcular su momento con respecto a un eje e que pasa por O cuyos cosenos directores son (-1/ √ 2, 1/2, 1/2)

c) Calcular su momento respecto al punto B (3,6,0) y comprobar el teorema del momento.

d) Calcular su momento respecto al eje e' que pasa por B y es paralelo al eje **e.**

(Sol.: a) M_0= (8,-7,2)N·m, M_X= 8 N·m, M_Y = -7 N·m, M_Z = 2 N·m

b) M_e= -8.16 N·m c) M_B= (-10, 2. 2) N·m d) $M_{Be'}$ = 9.07 N·m)

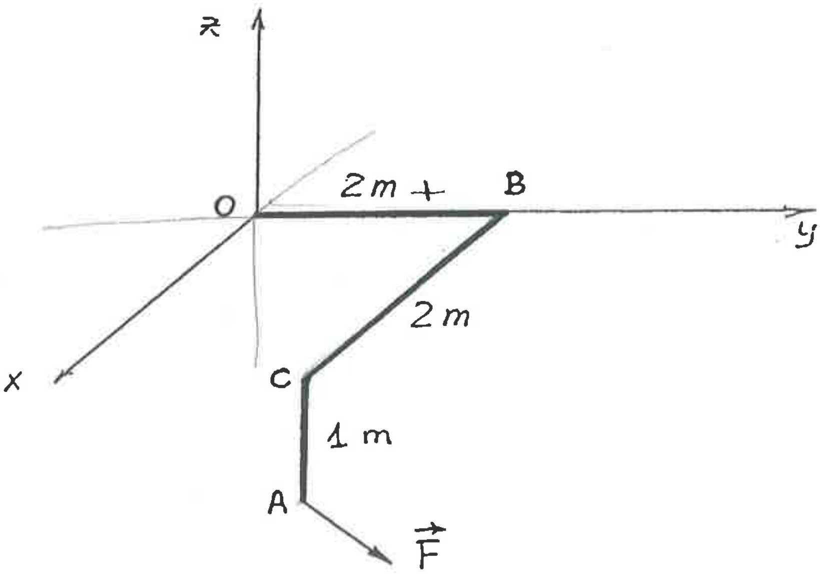
1.15. Dada la estructura de la figura, se aplica una fuerza **F** =(100, 100, -100) N en el punto A. Calcular:

a) El momento de la fuerza respecto a los puntos O, B y C.

b) La fuerza mínima **F'** que aplicada en el punto C produzca el mismo momento respecto al punto O que la del apartado anterior.

c) El momento de F respecto al eje que pasa por los puntos O y C.

d) Si F se aplicara en el punto B, calcular su nuevo momento respecto a O, M'_0.



(Sol.: a) M_0 = (-100, 100, 0) N·m, M_B = (100, 100, 200) N.m, Mc = (100, -100, 0) N·m; b) F' = (0, 0, -50) N; c) M_O = 0 N·m; d) M'_0= (-200, 0, -200) N.m)

1.16.- Un par de fuerzas está formado por **F** = (2, -3, -5) aplicada en A (3, 4, -1) y - F aplicada en B (-2, 1, 5). Si las fuerzas se expresan en N y las distancias en m, calcular el momento del par de fuerzas.

(Sol.: M = (-33, 13, -21) N.m)

1.17.- Dado el sistema de fuerzas:

$F_1 = (2,0,2)$ N aplicada en A (0,0,2)

$F_2 = (0,3,1)$ N aplicada en B (2,1,1)

$F_3 = (1,1,-2)$ N aplicada en C (1,1,0)

donde las distancias se miden en metros.

a) Dar la resultante y el momento del sistema respecto al origen de coordenadas.

b) Calcular el momento del sistema respecto al eje con dirección $e=(-1/\sqrt{2},\ 1/2,\ 1/2)$ que pasa por el origen.

c) Calcular el momento mínimo.

(Sol.: a) $R = (3,4,1)$ N, $M_0 = (-4,4,6)$ N·m b) $M_e = 7.83$ N·m c) $m = (15/13,20/13,5/13)$ N·m)

1.18.- Reducir el siguiente sistema de fuerzas concurrentes en un punto A (1,2,3) (distancias en metros) y comprobar el teorema de Varignon: $\mathbf{F_1} = (3,0,1)$ N, $\mathbf{F_2} =(2,1,1)$ N, $\mathbf{F_3}=(-1,2,0)$ N. (Calcular el momento del sistema respecto al origen de coordenadas)

(Sol.: $R = (4,3,2)$ N, $M_0 = (-5,10,-5)$ N·m)

1.19.- Reducir el siguiente sistema de fuerzas paralelas a una única fuerza. Dar el centro de vectores paralelos.

$F_1 = (1,2,3)$ aplicada en A (0,1,1)

$F_2 = (2,4,6)$ aplicada en B (0,1,2)

$F_3 = (4,8,12)$ aplicada en C (-3,0,1)

Fuerzas en N y distancias en m.

(Sol.: $R = (7,14,21)$ N; $C = (-12/7, 3/7, 9/7)$ m)

1.20.- Dado el siguiente sistema de fuerzas (fuerzas en N y distancias en m)

$F_1 = (1,3,-2)$ aplicada en A (-1,1,1)

$F_2 = (2,-1,a)$ aplicada en B (0,-1,1)

$F_3 = (0,1,3)$ aplicada en C (-1,2,1)

hallar el valor de "a" para que el sistema sea reducible a una única fuerza. Dar el módulo y los cosenos directores de dicha fuerza.

(Sol.: a = 2; R = 5.2 N. Cosenos directores iguales y de valor 0.58)

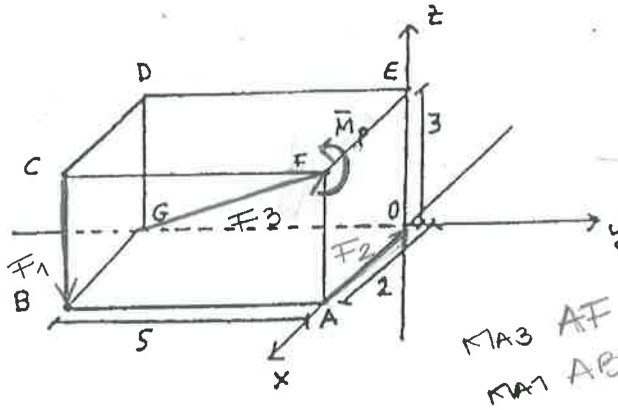
1.21.- Dado el paralelepípedo de la figura, de lados 5 m x 3 m x 2 m como se indica, considerar el sistema de fuerzas **F_1** = CB N, **F_2** = AO N y **F_3** = GF N, y el par aplicado en el plano XZ de valor **M_P** = 10 N·m en el punto F, según se indica.

a) Reducir el sistema a una fuerza y un par aplicados en el punto A.
(Resultante y momento del sistema respecto a A).

b) Calcular el momento mínimo.

c) Reducir el mismo sistema al sistema equivalente más sencillo posible.
(Resultante sobre el eje central y momento mínimo).

*(Sol.: a) **R** = (0,5,0) N, **M_A** = (0,16,0) N·m,b) **m** = (0,16,0) N·m, c) **R** aplicada en A)*



MA3 AF ∧ F3 + MA
MA1 AB ∧ F1

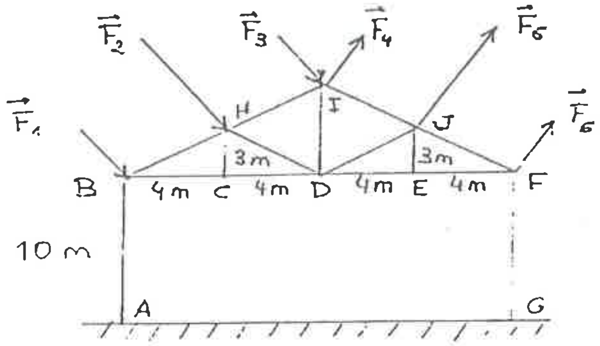
1.22. Sobre la cubierta actúan las fuerzas indicadas. Calcular:

a) El sistema equivalente aplicado en el punto A.

b) El sistema equivalente más sencillo posible.

$F_1 = F_3 = F_4 = F_6 = 200$ N; $F_2 = F_5 = 400$ N

*(Sol.: a) **R** = (960,0,0) N, **M_A** = (0,0,-7360) N·m b) **R** horizontal a una altura y = 7.67 m de la base)*



1.23.- Dado el sistema de fuerzas de la figura, en la que $F_1 = F_2 = 100$, N, F_3, $= F_4 = F_5 = 200$ N.

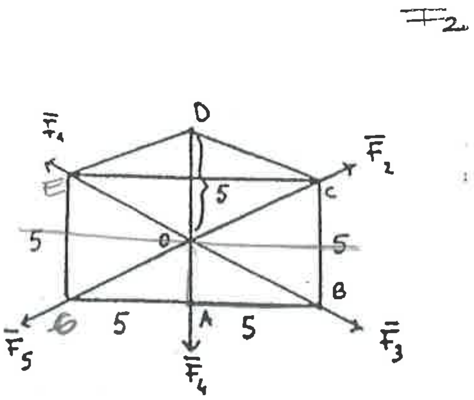
a) Reducir el sistema de fuerzas al equivalente más sencillo aplicado en O.

b) Ídem, aplicado en A.

c) Dar el momento del sistema respecto al eje definido por la recta BC.

Las distancias se expresan en m.

(Sol: a) R = 289.44 N en la dirección OA. b) Igual que en a); c) M_{BC} = 0 N·m)

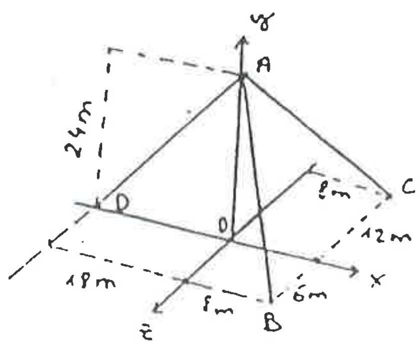


1.24.- a) Sabiendo que la tensión en el cable AC es de 3500 kp, calcular vectorialmente los valores necesarios de la tensión en los cables AB y AD para que la resultante de las tres fuerzas aplicadas en A sea vertical.

b) Calcular el momento del sistema de las tres fuerzas respecto al punto B.

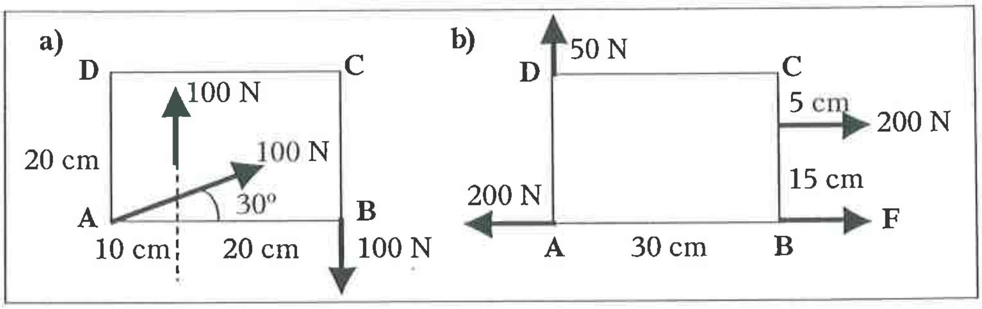
c) Calcular el momento del mismo sistema respecto al eje x.

(Sol.: a) T_{AB} = 6500 kp, T_{AD} = 5000 kp,b) M_B = (-78000, 0, 104000) kp·m; c) M_X = 0 kp.m)



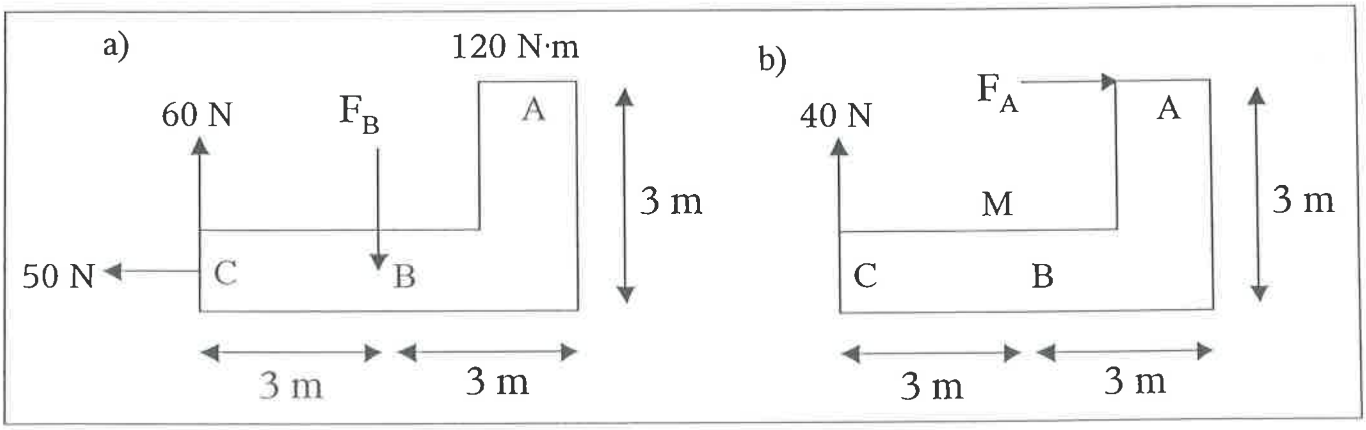
1.25.- Determinad el valor de la fuerza F y el momento que hay que aplicar en C, de la figura b), para que los sistemas representados en ambas figuras sean equivalentes.

(Sol.:F=86.6 N, M_{apC}=(0,0,1000) N cm)



1.26.- Determinad el valor de las fuerzas F_A , F_B y el momento M, que hay que aplicar en B, para que los sistemas representados en las figuras a) y b) sean equivalentes.

(Sol.: F_A=- 50 N; F_B =20 N; M=(0,0,-330) N m)



2.- ESTÁTICA

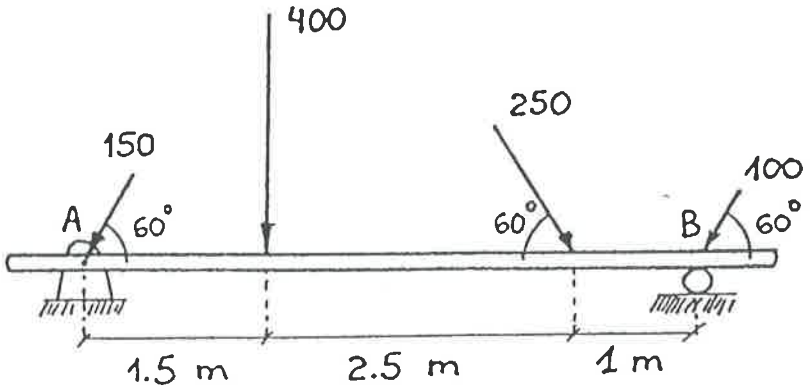
2.1.- La barra de la figura está articulada en A y se apoya en B. Si las fuerzas están dadas en kp, calcular:

a) Las reacciones en la articulación y en el apoyo liso.

b) La resultante de las fuerzas aplicadas y su recta de acción.

c) La equilibrante y su recta de acción.

(Sol.: a) $\mathbf{R_A}$ = (0, 453.2) kp, $\mathbf{R_B}$ = (0,379.8) kp. b) $\mathbf{R}$ = (0, -833) kp pasando a una distancia d = 2.3 m a la derecha del punto A. c) -R)



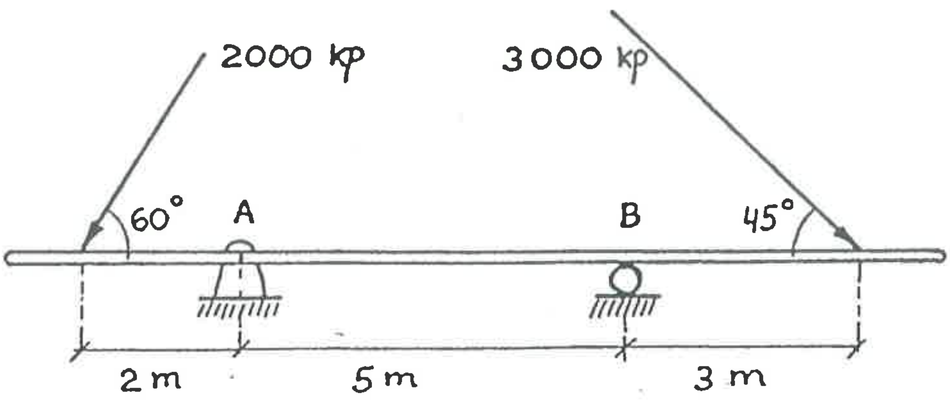
2.2.- La barra de la figura tiene una articulación en A y un apoyo liso en B. Las fuerzas aplicadas se expresan en kp y prescindimos del peso de la barra. Calcular:

a) Las reacciones en A y B.

b) La resultante de las fuerzas aplicadas y su recta de acción.

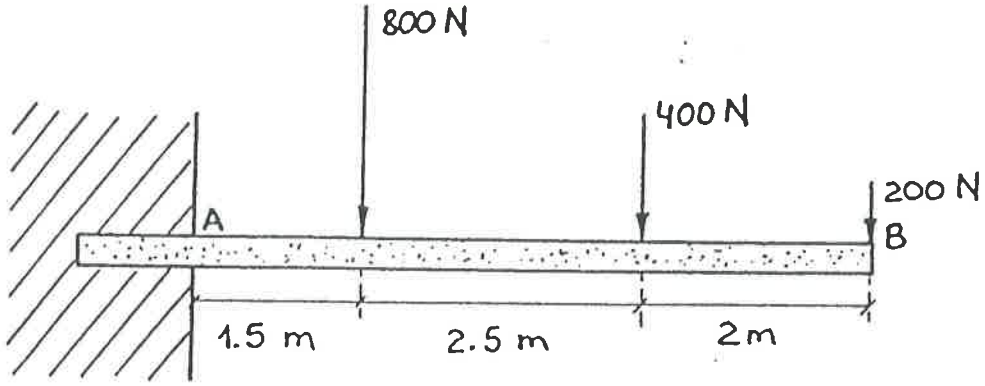
c) La equilibrante y su recta de acción.

(Sol.: a) R_A = (-1121.3, 1152.1) kp, R_B = (0,2701.3) kp ; b) R = (1121.3, -3853.4) kp pasando a una distancia d = 3.5 m a la derecha del punto A, sobre la barra c) -R)



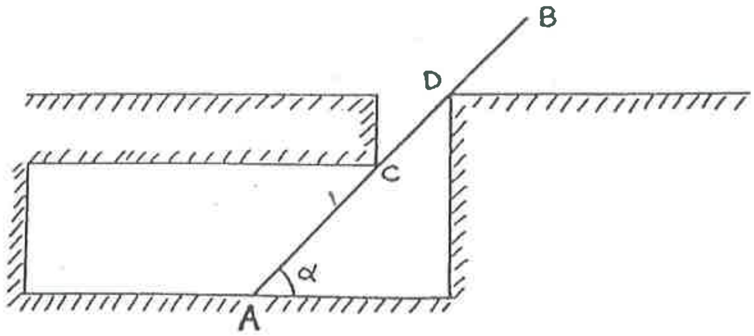
2.3.- Una viga en voladizo está cargada como se indica en la figura. La viga está empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho. Determinar la reacción en el empotramiento.

*(Sol.: **R_A** = (0, 1400) N, M = 4000 N·m en sentido antihorario)*



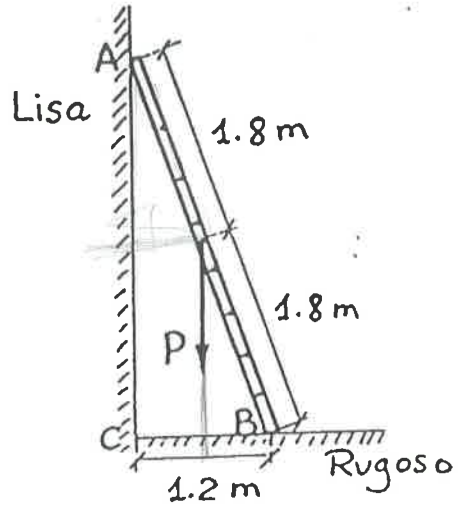
2.4.- Una barra homogénea AB, de peso P y longitud L , se apoya en el punto A, sobre un plano horizontal sin rozamiento, según la figura. Si la longitud CD = L/4 , determinar el ángulo α para que las tres reacciones R_A , R_C y R_D sean, en módulo, iguales al peso P, estando la barra en equilibrio.

(Sol.: $\alpha = 60°$)



2.5.- Una escalera de 20 kg mide 3.6 m. La escalera está apoyada contra una pared vertical lisa y su extremo inferior descansa sobre un suelo rugoso a 1.2 m de distancia de la pared (ver figura). Determinar las reacciones en ambos extremos y observar si tienen la misma inclinación que la escalera.

(Sol.: R_A = 3.54 kp, B_X = 3.54 kp, B_Y = 20 kp, $\beta = 80°$)

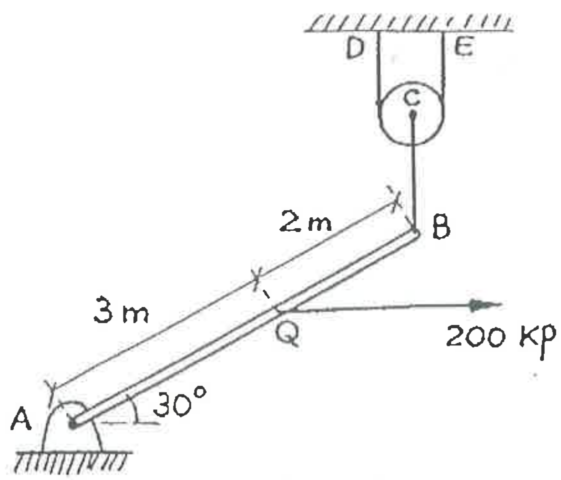


2.6.- En la escalera del problema anterior se sube una persona de 60 kg de masa. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento de la escalera con el suelo es de 0.2, calculad hasta dónde puede subirse antes de que la escalera deslice.

(Sol.: l =2.11 m sobre la escalera)

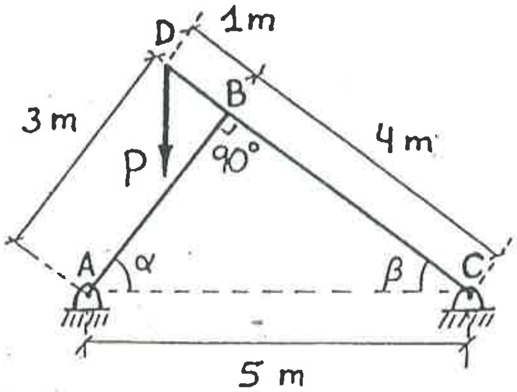
2.7.- Una barra homogénea AB de peso P = 20 kp está articulada en el punto A y forma un ángulo α = 30º con la horizontal, estando el cable BC en posición vertical. El sistema está en equilibrio aplicando en Q una fuerza horizontal de valor F = 200 kp. Hallar la tensión del cable BC y las reacciones en A, D y E.

(Sol.: T = 79.3 kp, A_X = 200 kp, A_Y = 59.3 kp, R_D = R_E = 39.65 kp)



2.8.- La varilla CD está apoyada sobre la varilla AB, como indica la figura, y ambas están articuladas en sus extremos, A y C. En D se cuelga un peso P = 100 N. Si el sistema está en equilibrio, hallar las reacciones en A y C y la acción mutua en B, indicando qué ángulo forman con la vertical.

(Sol.: $R_A = R_B = 100$ N, ángulo con la vertical = $\beta = 36.86°$, $R_C = 63.24$ N, $\phi = 71.56°$)



2.9.- Repetid el problema anterior si la fuerza P se desplaza sobre su recta soporte pasando a aplicarse en la barra AB. Razonad a partir de los resultados obtenidos, si las fuerzas aplicadas a un sistema de sólidos rígidos siguen teniendo carácter de vectores deslizantes.

2.10.- Sustituir el apoyo en B del problema anterior por una articulación. Calculad las reacciones en las ligaduras A ,B y C.

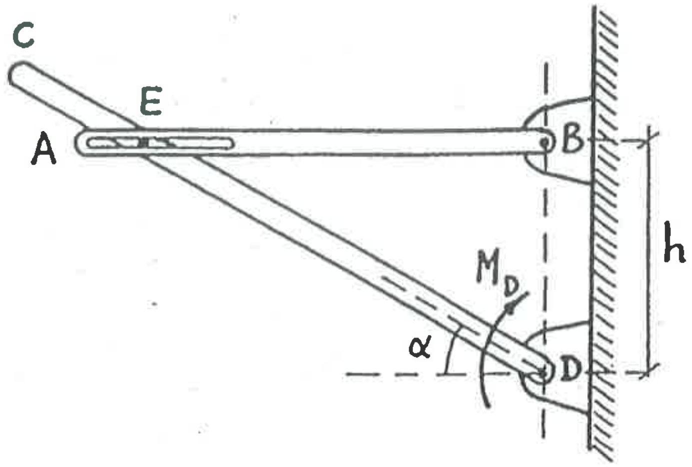
(Sol.: R_A =(26.67, 80) N; R_C=(-26.6,20) N, R_B =33.33 N)

2.11.- Dos piezas de máquina están conectadas por un pasador en el punto E. El pasador está sujeto a la pieza CD y desliza libremente en una ranura existente en el elemento AB. La pieza AB tiene una longitud L_{AB} = 6 m , y su peso es P_{AB} = 20 N ; la pieza CD tiene una longitud L_{CD} = 8 m ,y su peso es P_{CD} = 50 N. La distancia entre B y D es h = 3 m , el ángulo α es de 30° y en D se aplica un par de valor M_D = 150 m·N.

a) Hallar el valor del par M_B necesario para que haya equilibrio.

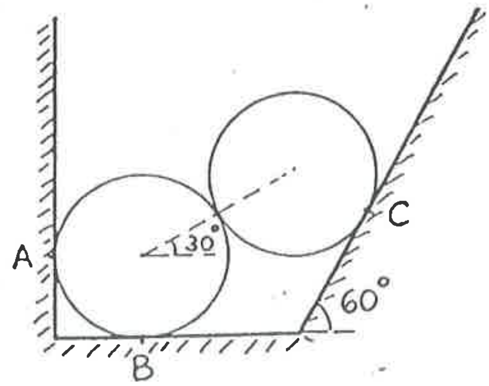
b) Hallar el valor de las reacciones en B , D y E .

(Sol.: a) M_B = 83 N·m; b) B_X = 0 N, B_Y = 24.43 N, D_X = 0, D_Y = 45.56 N, R_E = 4.43 N vertical)



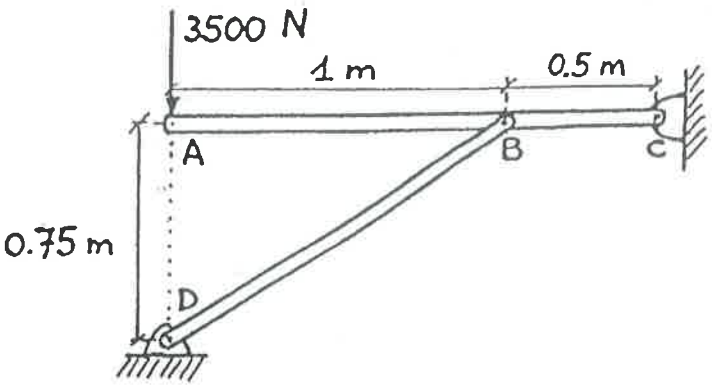
2.12.- Dos esferas de radio R y masa m quedan en equilibrio en la posición indicada, formando la línea que une los centros un ángulo de 30º con la horizontal. Calcular las fuerzas ejercidas contra el suelo en A, B y C.

(Sol.: $R_A = \sqrt{32}$ m·g, R_B = 3/2 m·g, R_C = m·g)



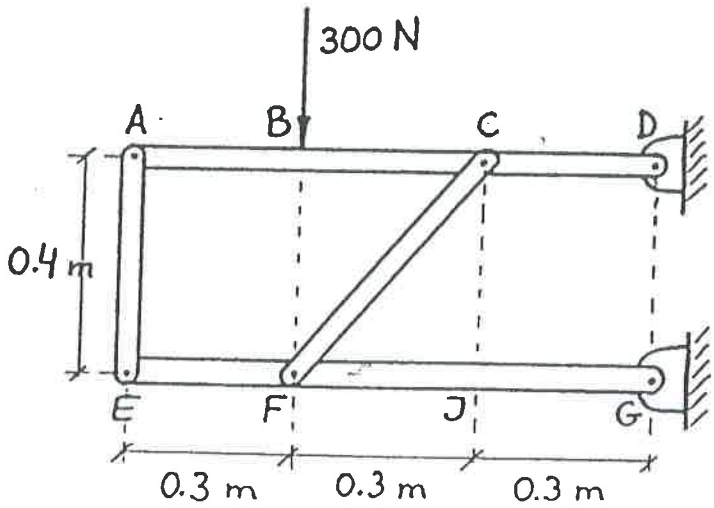
2.13.- Dada la estructura de la figura calcular las reacciones en C y D.

(Sol.: $C_X = D_X$ = 14000 N, C_Y = 7000 N, D_Y = 10500 N)



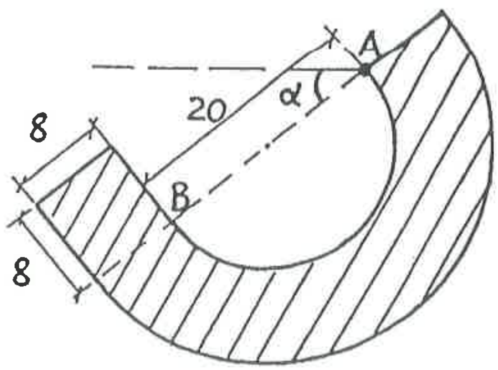
2.14.- Determinar las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la barra EFG del entramado representado en la figura.

(Sol.: $C_X = D_X = F_X = G_X = 450$ N; $A_X = E_X = 0$; $C_Y = F_Y = 600$ N; $A_Y = E_Y = 400$ N; $D_Y = 500$ N; $G_Y = 200$ N)



2.15.- La pieza representada en la figura, de espesor uniforme, tiene su masa distribuida uniformemente y cuelga libremente de la articulación A, estando sometida a la acción de la gravedad. Determinar el ángulo α que la recta AB forma con la horizontal en la posición de equilibrio, si la distancia AB es de 20 m y las otras longitudes también se expresan en metros. (Utiliza las coordenadas del c.d.g. de la figura del problema 3.9)

(Sol.: $\alpha = 59.6°$)

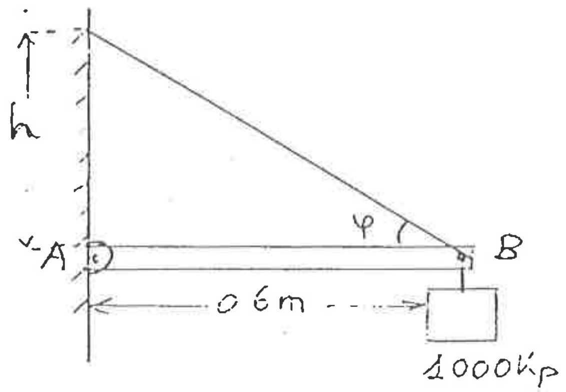


2.16.- Una barra homogénea y de peso despreciable, de longitud l = 0.6 m, está articulada en A como se indica en la figura. El otro extremo, que soporta un peso de 1000 kp, está sujeto a la pared por un cable en un punto situado en la vertical que pasa por A. La barra AB se mantiene horizontal.

a) Calcular la altura h a la que debe sujetarse el cable en la pared para que la tensión del mismo sea 2000 kp.

b) Si esta altura disminuye en 10 cm (manteniendo horizontal la barra), ¿cuál es la nueva tensión T' del cable?

(Sol.: a) h = 0.35 m. b) T'= 2600 kp.)

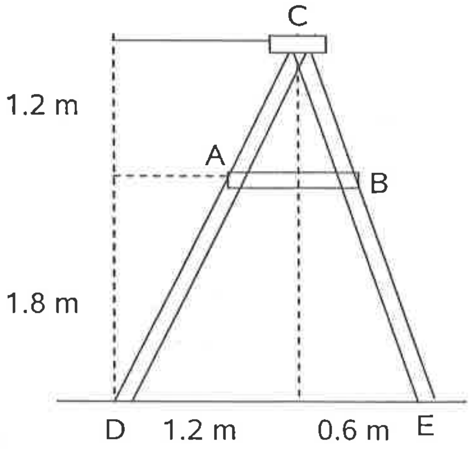


2.17.- Una escalera de tijera tiene las dimensiones indicadas en la figura.

a) Calculad las reacciones en los apoyos de las patas, suponiéndolos lisos, y la fuerza que soporta el travesaño AB cuando en la parte superior, C, se coloca una persona de 94.5 kg.

b) Si los apoyos se consideran rugosos, con un coeficiente de rozamiento de 0.2, calculad la máxima fuerza que soporta el travesaño AB, antes de que alguna de las patas deslice. Determinad len este caso el valor de las reaccionasen los apoyos.

(Sol: a) N_D= *31.5 kp;* N_E *= 63 kp*, F_{AB} = 31.5 kp ; b) N_D = *31.5 kp;* N_E = *63 kp* , F_{rD} = F_{rE} = 6.3 kp; F_{AB} = 15.75 kp)



2.18.- Un cubo de arista a = 20 cm y 4000 N de peso descansa sobre una superficie rugosa horizontal sometido a una fuerza horizontal F = 1000 N según la figura. El cubo no desliza ni vuelca.

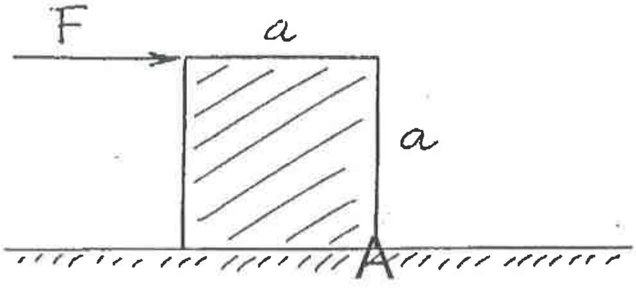
a) ¿Cuál es el valor de la fuerza de rozamiento y el de la fuerza normal entre el cubo y el plano?

b) Con los valores hallados en a) ¿podríamos calcular el coeficiente de rozamiento estático?

c) ¿En qué punto está aplicada la fuerza normal?

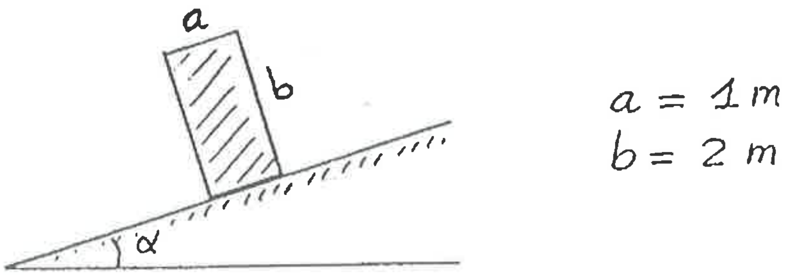
d) Si el cuerpo no deslizara, ¿cuál seria el máximo valor de F (aplicada en el mismo punto y horizontal) para el cual aún no volcaría el cuerpo?

(Sol.: a) F_r = 1000 N; N = 4000 N. b) No. c) A 5 cm a la izquierda de A. d) F_{max} = 2000 N.)



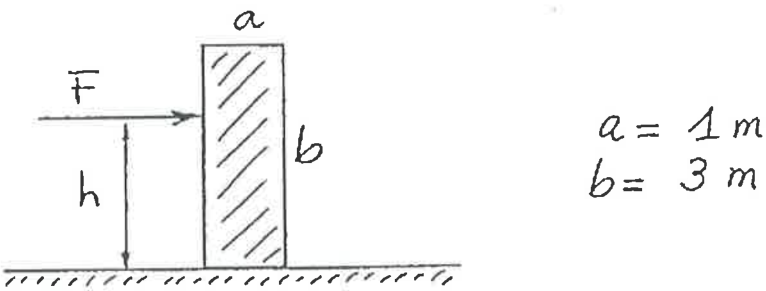
2.19.- Encuentra el ángulo máximo α_{max} a partir del cual el cuerpo volcará (suponed que el coeficiente de rozamiento es lo suficientemente grande).

(Sol.: $\alpha = 26.6°$)



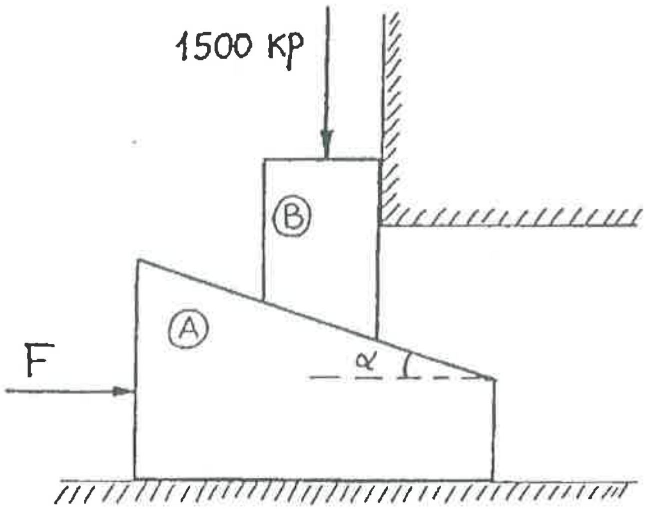
2.20.- Encuentra la altura máxima h a la que hay que aplicar una fuerza F = 1000 N sobre el cuerpo de peso P = 500 N representado en la figura, a partir de la cual el cuerpo volcará.

(Sol.: h = 0.25 m)



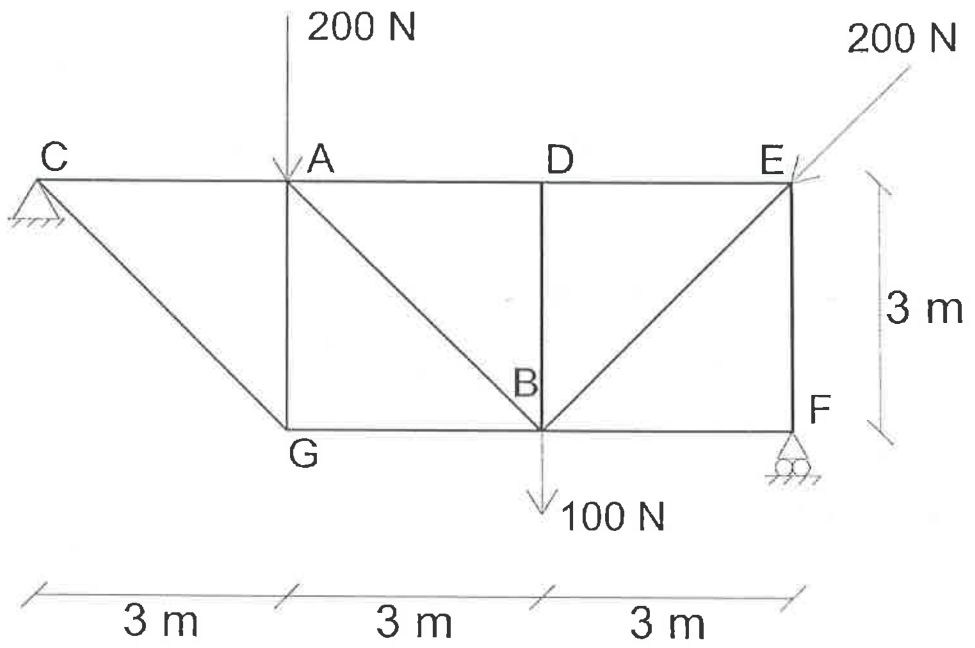
2.21.- Sobre el bloque B está aplicada una carga vertical de 1500 kp. Si los pesos de los bloques A y E son 500 y 150 kp respectivamente, calcular la mínima fuerza horizontal F que es preciso aplicar al bloque A para elevar el bloque B. Datos: α = 30°, μ_e = 0.20 para todas las superficies.

(Sol.: F = 2259.6 kp)



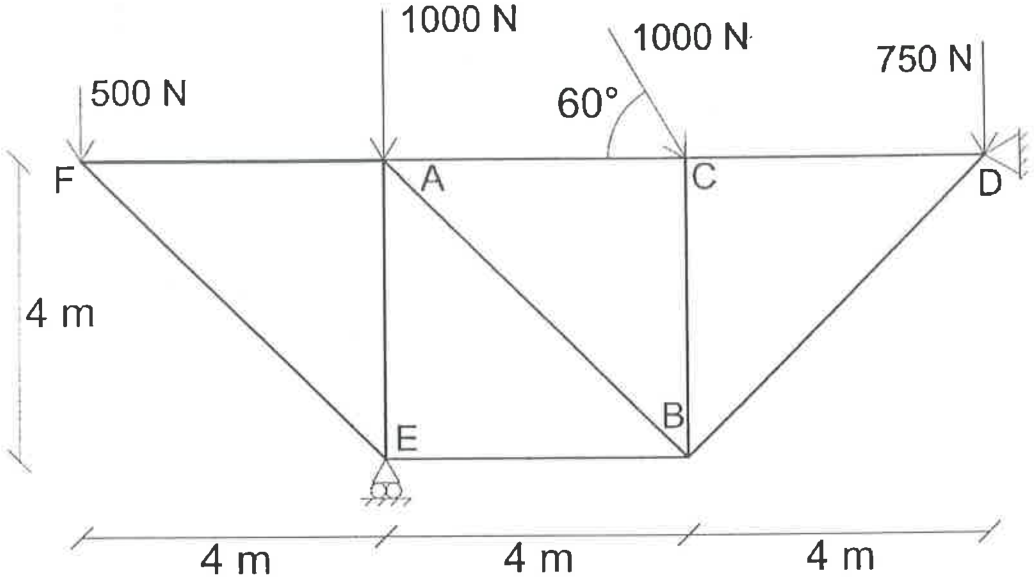
2.22.- Determinad por el método de los nudos los esfuerzos de cada barra en la armadura plana de la figura, especificando su valor y su forma (tracción o compresión).

(Sol. C_X = 141.42 N, C_Y = 166.67 N, R_F = 274.75 N; F_{BF} = O; F_{EF} = 274.75 N (C); F_{BE} =188.56 N (T); F_{DE} = 274.75 N (C); F_{AD} = 274.75 N (C); F_{DB} = O; F_{CG} = 235.71 N (T); F_{CA} = 308.1 N (C); F_{AB} = 47.16 N (C); F_{AG} = 166.65 N (C); F_{GB} = 166.67 N (T))



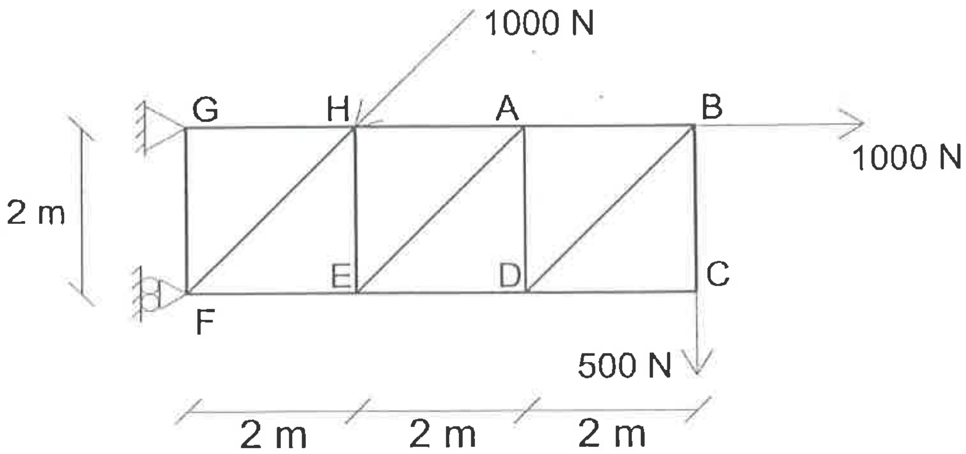
2.23.- Determinad por el método de los nudos los esfuerzos de cada barra en la armadura plana de la figura, especificando su valor y su forma (tracción o compresión).

(Sol. D_X = 500 N; D_Y = 933 N; R_E = 2183 N; F_{EF} = 707.1 N (C); F_{AF} = 500 N (T), F_{AE} = 1683 N (C); F_{BE} = 500 N (C); F_{AB} = 966 N (T); F_{AC} = 183 N (C); F_{BD} = 258.8 N (T); F_{BC} = 866 N (C), F_{CD} = 683 N (C))



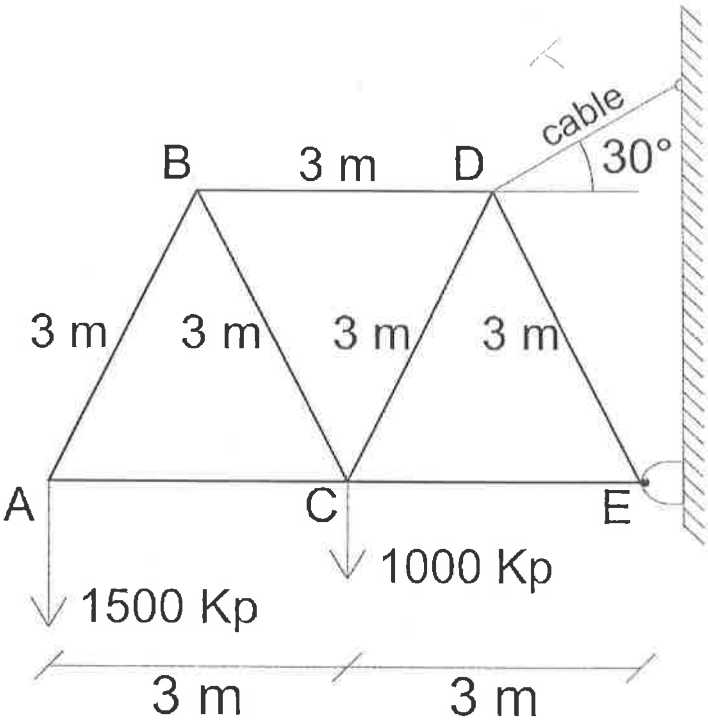
2.24.- Determinad por el método de los nudos los esfuerzos de cada barra en la armadura plana de la figura, especificando su valor y su forma (tracción o compresión).

(Sol. G_x = 2500 N, G_y = 1207,11 N, R_F = 2207,11 N; F_{CD} = 0 N; F_{BC} = F_{EH} = F_{AD} = 500 N (T); F_{BD} = F_{AE} = 707,11 N (C); F_{AB} = 1500 N (T); F_{DE} = 500 N (C); F_{AH} = 2000 N (T); F_{EF} = 1000 N (C); F_{FH} = 1707,11 N (C); F_{FG} = 1207,11 N (T); F_{GH} = 2500 N (T)



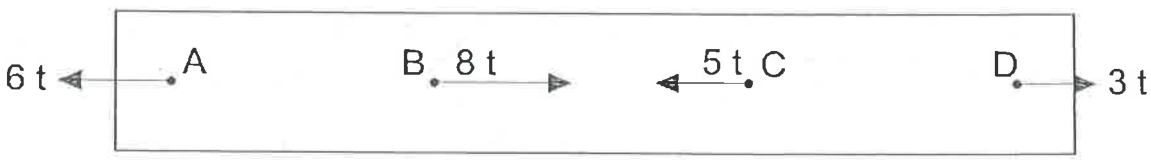
2.25.- Para la siguiente armadura calcular las fuerzas en las barras BC y CD por el método de las secciones.

(Sol: F_{BC} = 1732.05 kp (C) , F_{CD} = 2886.75 kp (T))



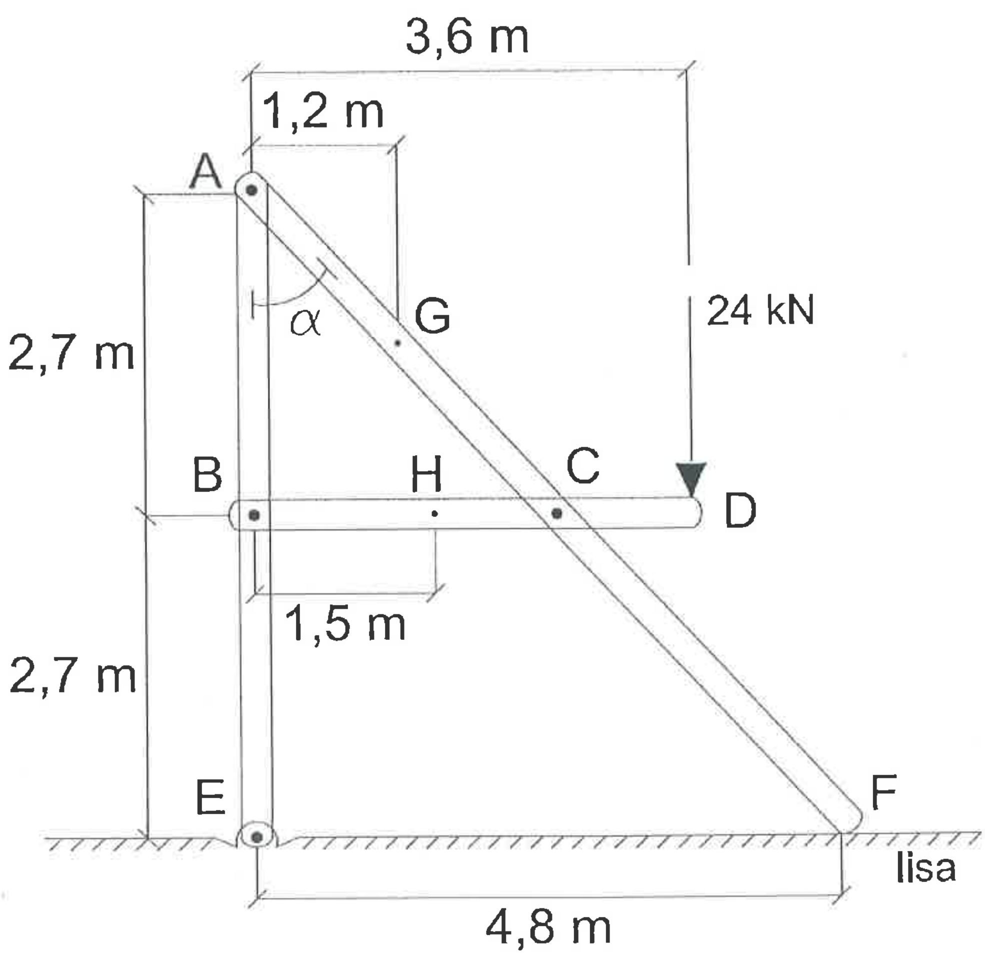
2.26.- Para la barra con las cargas axiales indicadas, determinar las fuerzas axiales que transmiten las secciones rectas en los intervalos AB, BC y CD, y representar el correspondiente diagrama de fuerza axial. (1 t = 1000 kp)

(Sol: AB: 6t ; BC: - 2 t ; CD: 3 t)



2.27.- Calcular las componentes de las fuerzas que actuan sobre cada barra del entramado de la figura siguiente, si éste sólo soporta una carga vertical en D de 24 kN.

(Sol: $A_x = B_x = C_x = E_x = 0$, $A_y = 18$ kN, $B_y = 12$ kN, $C_y = 36$ kN, $E_y = 6$ kN ↑, $R_F = 18$ kN ↑)



2.28.- Utilizando los datos y los resultados del problema anterior, calcular la fuerza axial N, la fuerza cortante T y el momento flector M en los puntos G (barra ACF) y H (barra BCD).

(Sol: En G , $N = 13.45$ kN , $T = 11.96$ kN , $M = 21'60$ kN.m
En H , $N = 0$, $T = 12$ kN, $M = 18$ kN.m)

2.29.- Utilizando los datos y los resultados del problema 2.14, calcular la fuerza axial N, la fuerza cortante T y el momento flector M en el punto J.

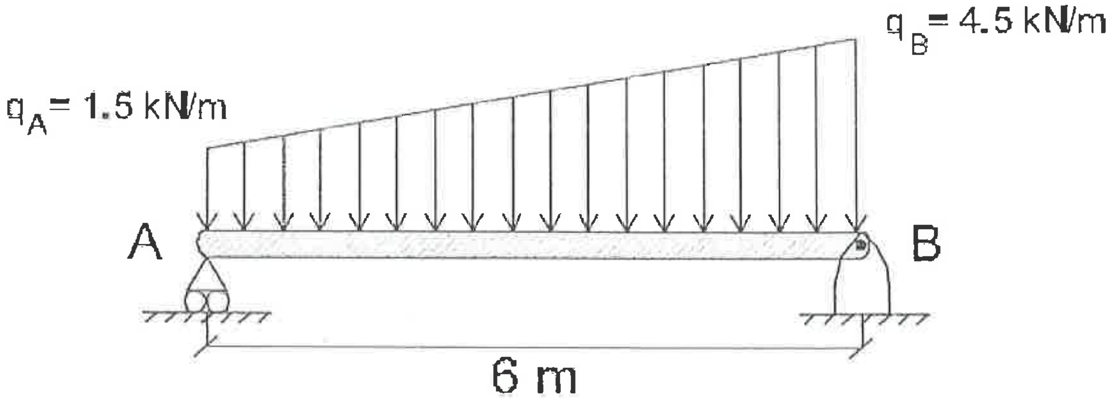
(Sol: sobre EJ, $N = 450\ N \leftarrow$, $T = 200\ N \downarrow$, $M = 60\ N.m$)

2.30.- Una viga AB de longitud L (m), articulada en A y apoyada en B soporta una carga vertical dirigida hacia abajo y uniformemente distribuida de q N/m. Calcular el módulo y la posición de la carga concentrada equivalente, y las reacciones en A y B.

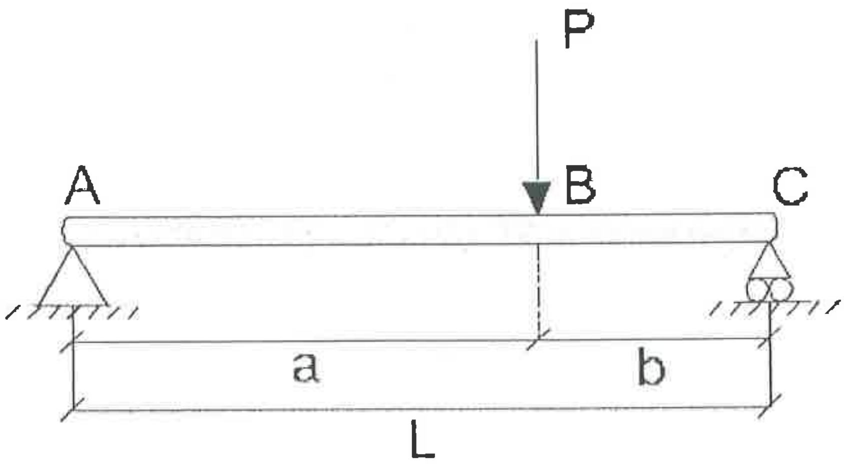
(Sol: $F = q\,L$, $x = L/2$, $A_x = 0$, $A_y = R_B = q\,L/2$)

2.31.- La viga de la figura soporta una carga distribuida lineal de q N/m. Calcular el módulo y la posición de la carga concentrada equivalente, y las reacciones en A y B.

(Sol: $F = 18\ kN \downarrow$, $x = 3.5\ m$ a la derecha de A ,
$R_A = 7.5\ kN \uparrow$, $B_x = 0$, $B_y = 10.5\ kN \uparrow$)



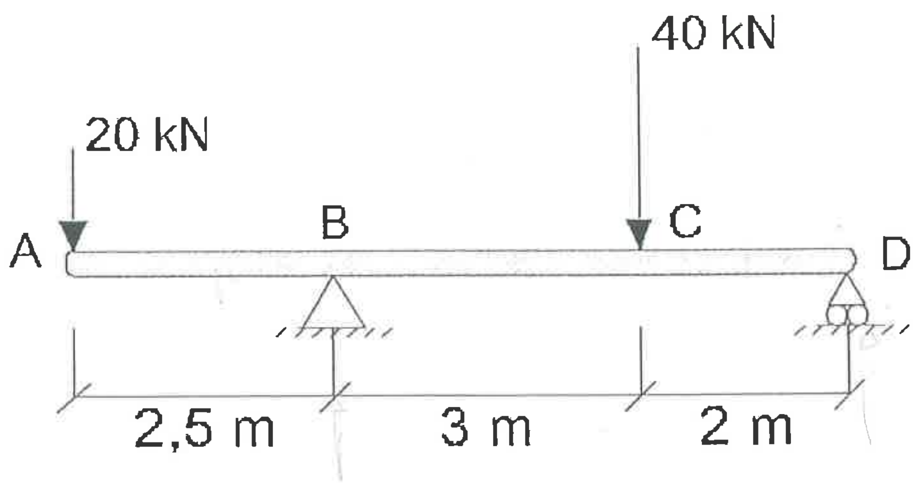
2.32.- Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga y la carga indicada.



2.33.- Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga y la carga indicada en el problema anterior, con los datos:

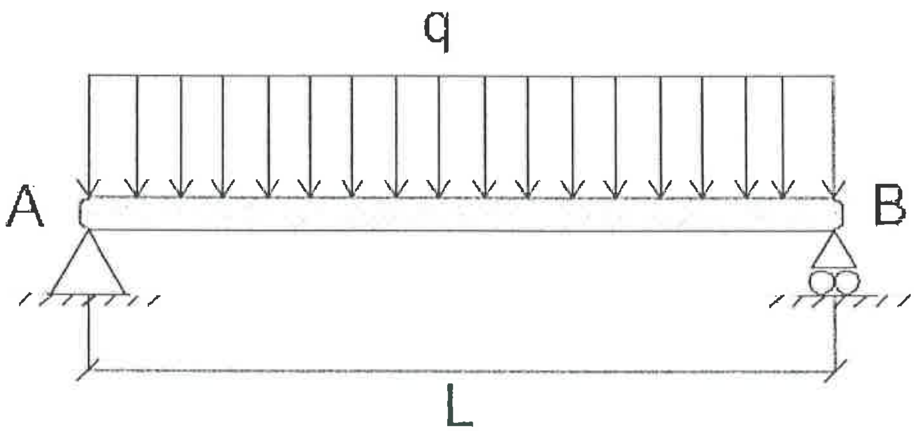
L = 5 m , a = 3 m . b = 2 m , P = 15 kN

2.34.- Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga y la carga indicada.



2.35.- Una viga horizontal AB tiene su extremo izquierdo A libre y su extremo derecho está empotrado en una pared vertical. B es el punto donde la viga se encuentra con la pared. En un punto intermedio C de la viga está aplicada una carga vertical y dirigida hacia abajo de 24 kN. Si AC = 1 m y CB = 3 m, representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores correspondientes.

2.36.- Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga y la carga indicada.



2.37.- Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga y la carga indicada en el problema anterior con L = 6 m y q = 4 kN/m.

2.38.- Una viga horizontal AB de 5 m de longitud tiene una articulación en A y un apoyo liso en B y está cargada con una distribución uniforme de 20 kN/m (vertical y dirigida hacia abajo) en el intervalo AC, siendo C un punto de la viga intermedio entre A y B y tal que AC = 3 m y CB = 2 m.

a) Hallad las reacciones en A y B.

b) Representad los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores correspondientes a esta viga cargada.

c) Determinad a qué distancia del punto A se produce el momento flector máximo y cuanto vale éste.

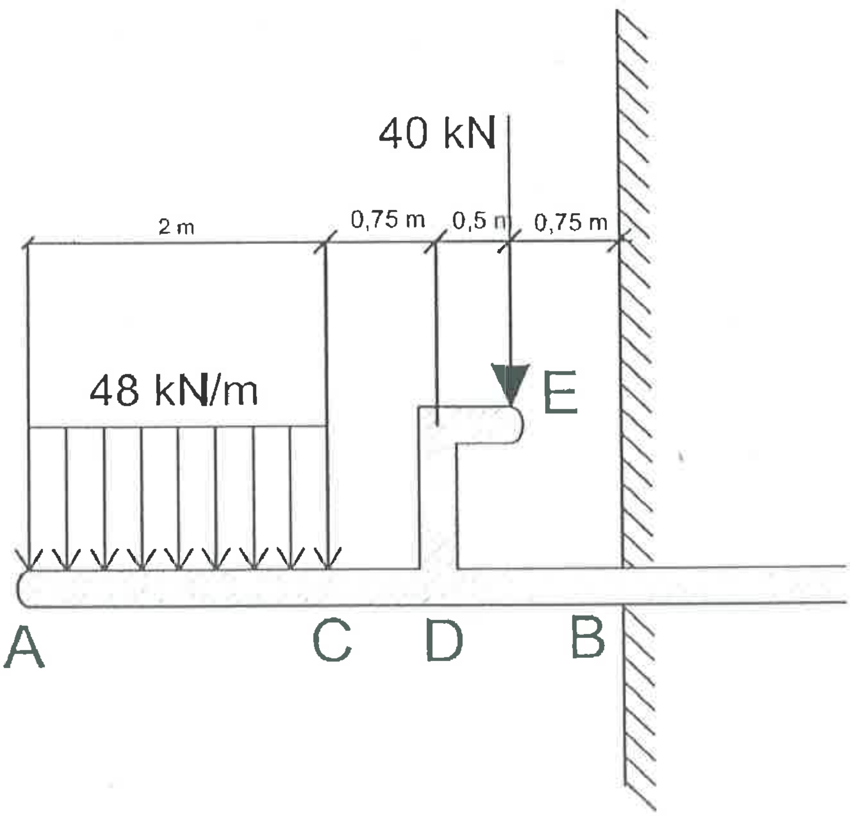
(Sol: a) Reacciones verticales: en A, 42 kN↑ ; en B, 18 kN↑ ; c) 2.1 m , 44.1 kN.m)

2.39.- En el problema 2.32 se substituye la carga P por un par antihorario de momento G aplicado en B. Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores correspondientes.

2.40.- Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para la situación descrita en el problema anterior, con los datos:

$L = 5$ m , $a = 3$ m . $b = 2$ m , $G = 18$ kN.m

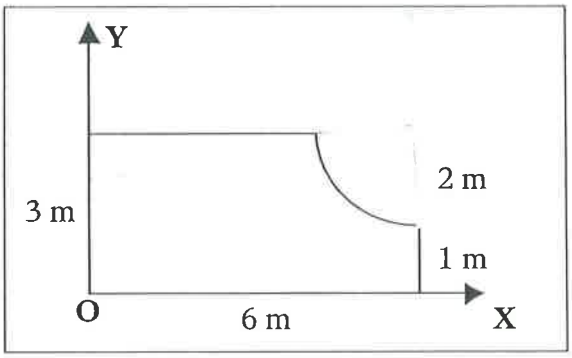
2.41.- Representad los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga y la carga indicada.



3.- CENTRO DE GRAVEDAD Y MOMENTO DE INERCIA

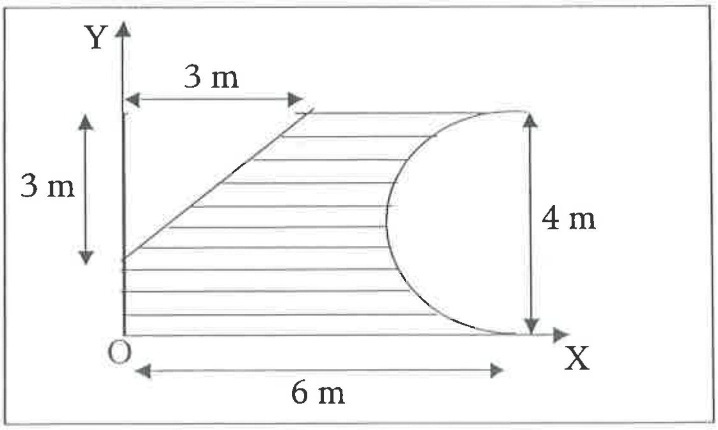
3.1.- Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura

(Sol: G = (2.54, 1.36) m)



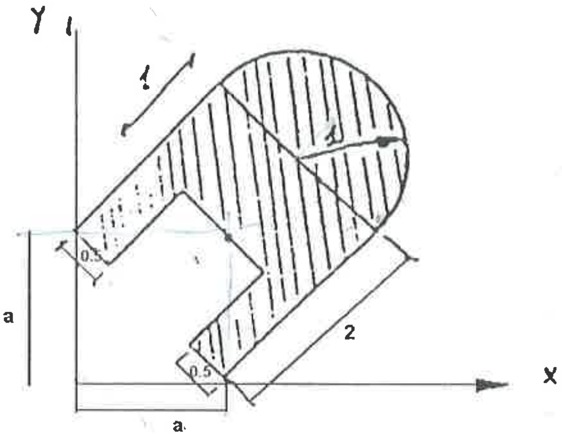
3.2 - Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura

(Sol: G = (2.66,1.66)m)



3.3.- Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura (distancias en m)

(Sol: G = (1.84,1.84) m)



3.4.- Calcular la posición del centroide de la figura.

AC = 1/2 AB, CD = ½, AC, AO=4, BO =3 (Distancias en m).

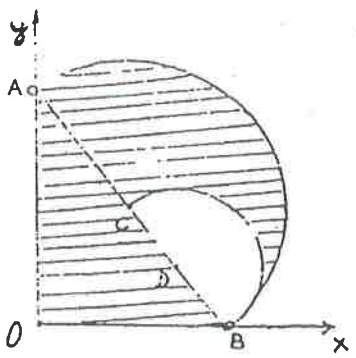
(Sol: G = (1.69,2.30)m)

AC = 1/2 AB

CD = 1/2 AC

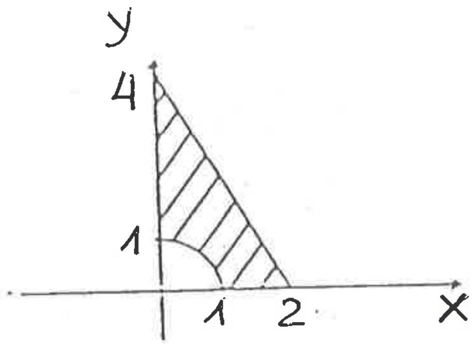
AO = 4

BO = 3



3.5.- Determinar, por el teorema de Pappus-Guldin, el volumen engendrado por la figura sombreada al girar 270º alrededor del eje "X" (distancias en cm).

(Sol: $V = 23.6\ cm^3$).

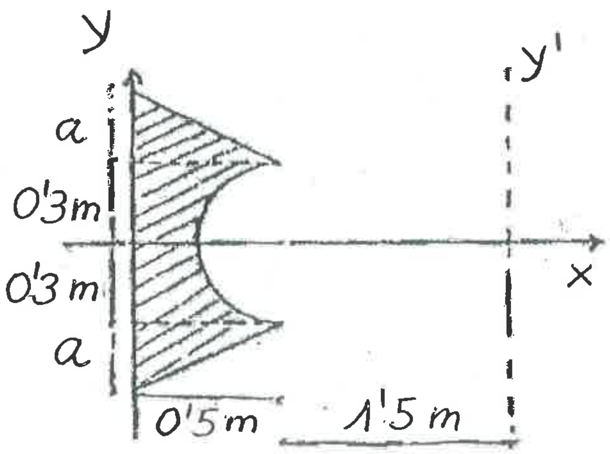


3.6.- Dada la pieza plana y homogénea de la figura (distancias en m , a = 0.5 m).

a) Situar el centro de gravedad de la misma.

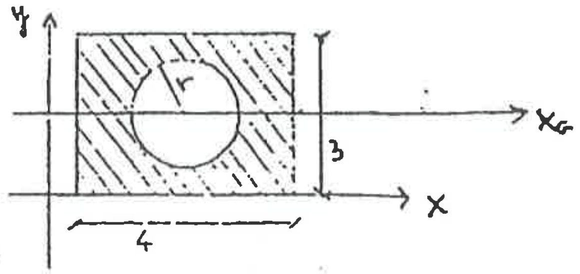
b) Hallar el momento de inercia geométrico de la figura respecto al eje Y' situado a 2 m a la derecha del eje Y.

(Sol: $G = (0.16,0)$ b) $I_{Y'} = 1.39m^4$).



3.7.- Determinar el momento de inercia de la figura sombreada respecto al eje "X" y respecto al eje "Xg", en la que las distancias están en m, y r = 1m.

(Sol: $I_x = 28.15\ m^4$, $I_{Xg} = 8.21\ m^4$).



3.8.- En la placa plana, homogénea y uniforme que se muestra en la figura las dimensiones están en metros.

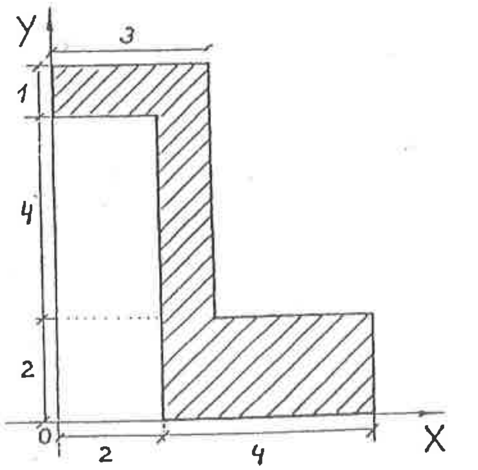
a) Calcular las coordenadas del centro de gravedad G de la placa relativas a los ejes X e Y.

b) Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes X e Y.

c)Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes X_G e Y_G, que están contenidos en el plano de la figura, pasan por G y son *paralelos* a los ejes X e Y respectivamente.

d)Calcular los productos de inercia respecto a los ejes X e Y y respecto a los ejes X_G e Y_G.

(Sol.: a) G = (3.1, 2.9) m; b) $I_X = 207\ m^4$, $I_Y = 173\ m^4$; c) $I_{xg} = 80.85\ m^4$, $I_{yg} = 28.85\ m^4$; d) $I_{XY} = 101.25\ m^4$, $I_{XgYg} = -33.60\ m^4$)



3.9.- La pieza representada en la figura tiene espesor uniforme y sus dimensiones están expresadas en metros.

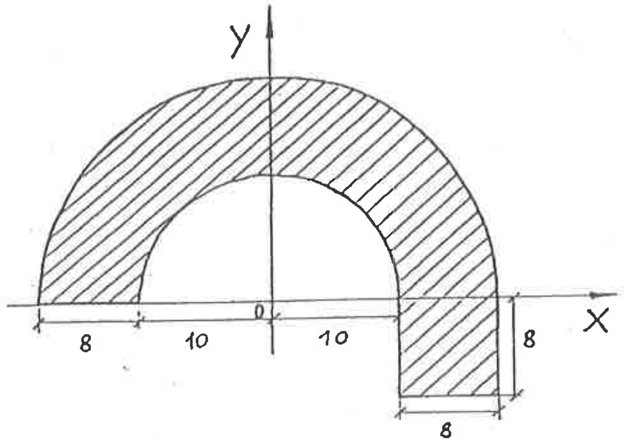
a) Calcular el centro de gravedad G de la pieza (relativo a los ejes X e Y).

b) Calcular los momentos de inercia y el producto de inercia respecto a los ejes X e Y.

c) Si llamamos X_G e Y_G a unos ejes que están contenidos en el plano de la figura, son *paralelos* a los ejes X e Y, y pasan por G, calcular los momentos de inercia y el producto de inercia para estos ejes.

(Sol.: a) G = (2.15, 7.13) m ; b) $I_X = 38662.32\ m^4$, $I_Y = 50182.32\ m^4$, $I_{XY} = -3584\ m^4$;

c) $I_{Xg} = 17522.30\ m^4$, $I_{Yg} = 48260.10\ m^4$ $I_{XgYg} = -9958.62\ m^4$)



3.10.- Hallar el radio de giro para las superfícies siguientes:

a) un rectángulo de base b y altura h respecto a un eje que pasa por su base

b) un círculo de radio R para un eje que pasa por su centroide.

Comparar los resultados anteriores con la coordenada del centro de gravedad de la superfície respecto al eje indicado.

(Sol: a) $i_x = h/\sqrt{3}$, $y_G = h/2$; b) $i_{XG} = R/2$, $y_G = 0$)

3.11.- Utilizando los datos y resultados del problema 3.8, hallar el radio de giro de la superfície respecto a los ejes X i X_G

(Sol: $i_x = 3.71\ m$, $i_{XG} = 2.32\ m$)

3.12.- La pieza plana representada en la figura es homogénea y uniforme. Si las dimensiones vienen dadas en metros:

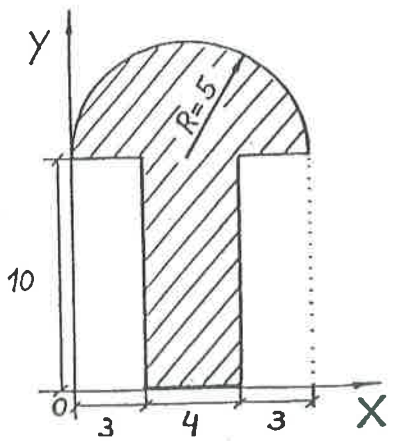
a) Calcular los momentos de inercia y el producto de inercia respecto a los ejes X e Y.

b) Calcular los momentos de inercia y el producto de inercia respecto a los ejes u y v, que están contenidos en el mismo plano de la figura, pasan por O, son perpendiculares entre sí y están *girados* +30º respecto a los ejes X e Y.

c) Calcular los momentos principales de inercia y los ejes principales de inercia (con origen en O)

d) Comprobar los resultados en el círculo de Mohr.

(Sol.: a) $I_X = 7170.47\ m^4$, $I_y = 2280.51\ m^4$, $I_{XY} = 3379.75\ m^4$ b) $I_u = 3021\ m^4$, $I_V = 6429.9\ m^4$, $I_{UV} = +3807.3\ m^4$; c) $I_m = 8896.9\ m^4$, $\varnothing_m = -27.1^o$; $I_m = 554.1\ m^4$, $\varnothing_m = 62.9^o$)



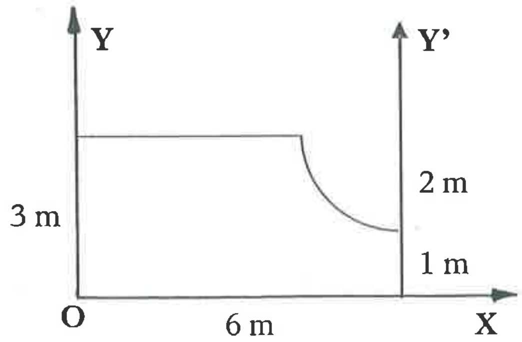
3.13.- Para la placa plana homogénea de la figura del problema 3.1, calculad:

a) los momentos de inercia de la placa respecto a los ejes X e Y.

b) El producto de inercia respecto a los mismos ejes.

c) El volumen generado al girar la placa 30º respecto al eje Y' indicado.

(Sol: I_X=38,58 m^4; I_y=131.76 m^4 ; P_{XY} = 46.45 m^4 ; V= 26.88 m^3)



$\bar{I}_{xy} = \frac{r^4}{8}$

$\bar{I}_{xy} = \frac{1}{24} b^2 \cdot h^2$

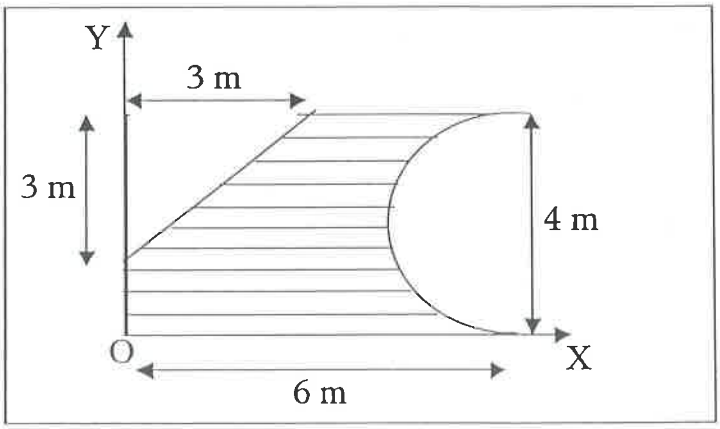
3.14.- Para la placa plana homogénea de la figura correspondiente al problema 3.2, calculad:

a) El momento de inercia de la placa respecto al eje Y.

b) El momento de inercia respecto al eje Y_G, paralelo al Y, que pasa por el centro de gravedad

c) El producto de inercia respecto a los ejes XY.

(Sol: a) I_y=112.85 m^4 ; b) I_{YG}=19.31 m^4)



3.15.- Sea la placa del problema 3.8 y consideramos dos ejes, u y v, que están contenidos en el plano de la figura, son perpendiculares entre sí, pasan por G (centro de gravedad de la placa) y estan girados + 30° respecto a los ejes x_G e y_G. Calcular los momentos de inercia I_u e I_v y el producto de inercia I_{uv} para estos ejes.

(Sol: I_u = 96.95 m^4 , I_v = 12.75 m^4 , I_{uv} = +5.72 m^4)

3.16.- Para la placa del problema 3.8 calcular los momentos principales de inercia y las direcciones principales (para ejes que pasan por G)

(Sol: $I_M = 97.33\ m^4$, $\phi_M = 26.1°$; $I_m = 12.37\ m^4$, $\phi_m = 116.1°$ *)*

3.17.- Construir el círculo de Mohr para la placa del problema 3.8. Utilizar los resultados correspondientes a los ejes que pasan por G.

3.18.- Consideremos la pieza del problema 3.9 y unos ejes u y v, contenidos en el plano de la figura, que pasan por G. El eje u forma un ángulo de -60° con el eje x_G mientras que el eje v determina uno de +30° con x_G (u y v son perpendiculares entre sí). Calcular los momentos de inercia y el producto de inercia respecto a los ejes u y v.

(Sol: $I_u = 31951.23\ m^4$, $I_v = 33831.17\ m^4$, $I_{uv} = +18289.17\ m^4$ *)*

3.19.- Calcular los momentos centrales principales de inercia y las direcciones principales para la pieza del problema 3.9.

(Sol: $I_M = 51204.5\ m^4$, $\phi_M = 73.5°$; $I_m = 14577.9\ m^4$, $\phi_m = 163.5°$ *)*

3.20.- A partir de los momentos de inercia y del producto de inercia para los ejes x_G e y_G hallados en el problema 3.9, construir el círculo de Mohr correspondiente y comprobar los resultados de los problemas 3.18 y 3.19.

4.- ESTATICA DE FLUIDOS Y FENÓMENOS SUPERFICIALES

4.1- Un tubo de 1 cm^2 de sección está unido a la parte superior de un recipiente de 1 cm de altura y 100 cm^2 de sección. Se vierte agua dentro del sistema, llenándolo hasta una altura de 100 cm por encima del fondo del depósito.

a) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el agua sobre el fondo del depósito?

b) ¿Cuál es el peso del agua contenida en el sistema?

c)Explicar por qué no coinciden los resultados de los apartados anteriores.
(Sol.: a) F = 98 N   b) P = 1.95 N)

4.2.- a) Se sabe que sólo una pequeña parte de un iceberg sobresale del agua y que el 90% está por debajo de la superficie. Determinar la densidad del hielo.

b) Un trozo de hielo se encuentra flotando en un vaso totalmente lleno de agua. Cuando el hielo se derrita ¿se derramará agua? ¿descenderá el nivel del vaso?

(Sol.: a) $\rho = 900\ kg/m^3$)

4.3.- Un trozo de hierro pesa 267 N en el aire y 178 N en el agua. ¿Cual es el volumen del trozo de hierro?

(Sol: $9.1\ 10^{-3}\ m^3$)

4.4.- Un bloque de madera flota con los 2/3 de su volumen sumergidos en agua. En aceite tiene el 90% de su volumen sumergido. Encontrad la densidad de la madera y del aceite

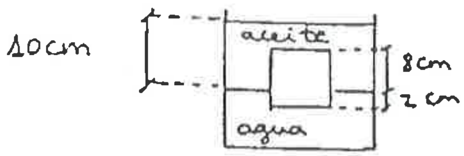
(Sol: ρ_{madera}= 666.67 Kg/m^3; ρ_{aceite}= 741 Kg/m^3)

4.5.- Un bloque cúbico de madera de 10 cm de arista flota entre dos capas de aceite y agua, estando su cara inferior 2 cm por debajo de la superficie de separación. La densidad del aceite es 0.6 g/cm^3. Las dos capas de líquido tienen una altura de 10 cm.

a) ¿Cuál es la masa del bloque?

b) ¿Cuál es la presión manométrica en la cara inferior del bloque?

(Sol.: a) m = 680 g b) p_m *= 7840 din/cm^2)*

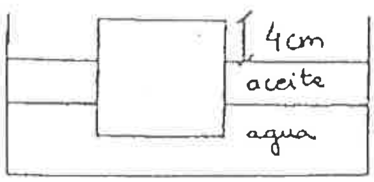


4.6.- Un bloque cúbico de madera de 10 cm de arista y de densidad 0.5g/cm^3 flota en un recipiente con agua. Se vierte en el recipiente aceite de densidad 0.8 g/cm^3 hasta que la superficie superior de la capa de aceite se encuentra 4 cm por debajo de la cara superior del bloque.

a) ¿Qué espesor tiene la capa de aceite?

b) ¿Cuál es la presión manométrica en la cara inferior del bloque?

(Sol.: a) x = 5 cm b) p_m *= 4900 din/cm^2)*



4.7.- Un cubo introducido en mercurio tiene sumergida la cuarta parte de su volumen. Si se agrega agua suficiente para cubrir el cubo ¿Qué fracción del volumen quedará sumergida en el mercurio? ¿Depende de la forma del cuerpo?

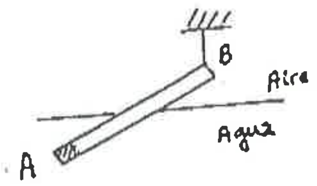
(Sol: 19%)

4.8.- Una barra uniforme AB, de 3.6 m de longitud y de masa 12 kg, está sujeta en el extremo B por una cuerda flexible, y lastrada en el extremo A por una masa de 6 kg. La barra flota como se indica en la figura, con la mitad de su longitud sumergida. Puede despreciarse el empuje sobre el lastre.

a) Hallar la tensión de la cuerda.

b) Calcular el volumen total de la barra.

(Sol.: a) T = 19.6 N b) V = 0.032 m³)



4.9.- Un trozo de cera de densidad 0.9 g/cm³ lleva incrustado en su interior un trozo de plata de densidad 10.59 g/cm³. El conjunto pesa 58 g y, al sumergirlo en agua salada de densidad 1.03 g/cm³ permanece en equilibrio totalmente sumergido. ¿Qué cantidad de plata está incrustada en la cera?

(Sol.: m = 8 g)

4.10.- Dos tubos comunicantes del mismo diámetro 1 cm se colocan verticalmente y se llenan en parte de mercurio. En una de las dos ramas se vierten 30 g de agua y en la otra 57.2 g de alcohol. Si la densidad de este último es 0.8, ¿cuál es la diferencia de nivel en ambas ramas?

(Sol.: Δl = 50.29 cm)

4.11- Un bloque de madera de 1 kg de masa y densidad 0.7 se deja flotar en agua, cargándolo con un plomo para que el bloque sólo sobresalga del agua 1/10 de su volumen. ¿Cuál es la diferencia en el peso de plomo que hay que cargar, según se coloque arriba o debajo?

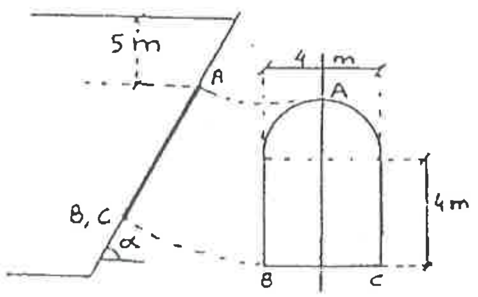
(Sol.: $m_{abajo} - m_{arriba}$ = 27.7 g)

4.12.- Una pieza de aleación de Al y Au pesa 5 kp. Si se suspende de una balanza de resorte y se sumerge en agua, la balanza indica 4 kp. sabiendo que la densidad relativa del aluminio es 2.5 y la del oro 19.3, calcular la masa de oro en la aleación.
(Sol.: m_{Au} = 2.87 kg)

4.13.- ¿Cuál es la superficie de un bloque de hielo de 2 m de espesor, que flota en el agua y soporta justamente un bloque de masa 500 kg?
(Sol.: S = 3.13 m^2)

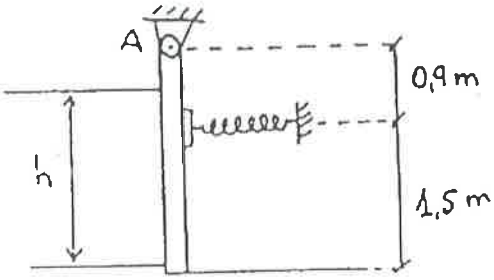
4.14.- La sección transversal de una presa es un rectángulo de 3 m de anchura y 6 m de alto. La profundidad del agua, situada detrás de la presa, es de 6 m, y la longitud de la presa 150 m.
a) ¿Cuál es el momento que tiende a volcar la presa?
b) Si el material del que está hecha la presa pesa 1700 kp/m^3, determínese el valor del par recuperador debido al peso de la misma.
(Sol.: a) $M = 5.292 \cdot 10^7$ N·m b) $M' = 6.747 \cdot 10^7$ N·m)

4.15.- Dada la ventana de la figura, en una piscina, y que puede abrirse girando alrededor del eje BC, calcular:
a) el empuje del agua sobre la ventana,
b) el centro de empuje,
c) la fuerza que habría que aplicar en A para abrir dicha ventana. α = 60°
(Sol.: a) $F = 1.7 \cdot 10^6$ N b) Y_E= 9.26 m c)$F_{A'}$ = $7.1 \cdot 10^5$ N)



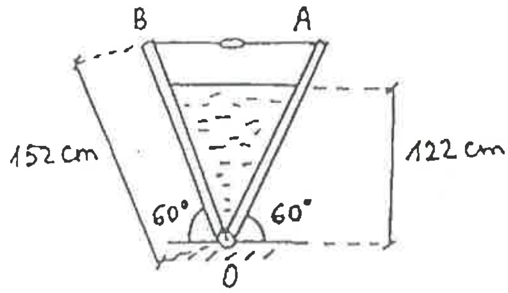
4.16.- La compuerta vertical accionada por resorte está engoznada por su borde superior A según un eje horizontal, y cierra el extremo de un canal rectangular de agua dulce de 1.2 m de anchura (normal al plano del papel). Calcular la fuerza F que debe ejercer el resorte para limitar la profundidad del agua a h =1.8 m.

(Sol.: F = 38.1·10³ N)



4.17.- Las caras de un cangilón en V para agua dulce, representado en sección, están articuladas por su intersección común que pasa por O y unidas por un cable y un torniquete colocados cada 183 cm a lo largo del cangilón. Calcular la tensión T que soporta cada torniquete.

(Sol.: T = 5500 N)



4.18.- Para determinar la tensión superficial de un líquido se forma una burbuja del mismo, de 3 cm. de diámetro, en el extremo de un tubo de vidrio, y se comunica después con un manómetro diferencial, cuyo líquido tiene una masa específica de 800 kg/m³, produciéndose un desnivel entre ramas de 2.5 mm. Calcular el coeficiente de tensión superficial.

(Sol.: σ = 7.35·10⁻² N/m)

4.19.- Una pompa de jabón tiene en el aire a presión normal un radio de 1 cm. Hállese el radio que tendría dicha pompa cuando se colocara en un recinto donde se ha hecho el vacío, admitiendo que no se rompiera. $\sigma = 6.8 \cdot 10^{-2}$ N/m.

(Sol.: r' = 61 cm)

4.20.- Introduciendo verticalmente un tubo de 0.2 mm de diámetro en un líquido se produce una elevación de éste, dentro del tubo, de h = 12.5 cm, siendo el ángulo de contacto $\phi = 25°$. Calcular la tensión superficial. (Densidad = 1125 kg/m^3.)

(Sol.: $\sigma = 7.6 \cdot 10^{-2}$ Nlm)

4.21.- Un líquido colocado en un depósito en el que hay dos tubos capilares de 25 y 100 μ de diámetro se halla en el primero 8 cm por debajo del segundo. Si la tensión superficial es de 400 dinas/ cm y la densidad 2.5, calcúlese el ángulo de contacto.
(Sol.: $\alpha = 92.3°$)

5.- ELASTICIDAD

5.1.- Calcula el esfuerzo normal, la deformación unitaria y el alargamiento de una barra cilíndrica de acero de 2 m de largo en los siguientes casos: (módulo de Young del acero 2.1 10^{11} Pa)

(a) sección 50 cm^2, tracción de 500 N; (b) radio 3 cm, compresión de 2. 10^4 N; (c)radio 5 cm, tracción de 1.5 10^5 N; (d) diámetro 3 cm, compresión de 15 kN; (e) sección 0.1 dm^2, tracción de 3 toneladas; (f) radio 33 mm, compresión de 1.2 10^{11} dyn.

(Sol: (a) σ=1. 10^5 Pa, ε=4.76 10^{-7}, Δl=9.52 10^{-7}m; (b) σ= -7.07 10^6 Pa, ε= -3.4 10^{-5}, Δl= -0.067 mm; (c) σ =1.91 10^7 Pa, ε=9.09 10^{-5}, Δl= 0.182 mm; (d) σ= -2.12 10^7 Pa, ε = -1.01 10^{-4},Δl= -0.202 mm; (e) σ =2.94 10^7 Pa, ε=1.4 10^{-4}, Δl=0.280 mm; (f) σ= -3.51 10^8 Pa, ε= -1.67 10^{-3}, Δl= -3.34 mm)

5.2.- Un alambre de acero de 3 m de longitud y 63 mm^2 de sección se alarga 3 mm cuando se somete a una tensión de 1260 kp.

a) ¿Cuál es el módulo de Young de este acero?

b) ¿Cuánto vale la energía elástica almacenada por unidad de volumen?

(Sol: a) $Y = 2\cdot 10^4$ kp/mm^2. b) $W = 9.8\cdot 10^4$ J/m^3)

5.3.- Un alambre de cobre de 8 m de longitud, y un alambre de acero de 4 m de longitud, cada uno con una sección transversal de 62.5 mm^2, se sujetan por los extremos y se someten a una tensión de 50 kp.

a) ¿Cuál es la variación de longitud de cada alambre?

b) ¿Cuál es la energía potencial elástica del sistema?

$Y_{acero} = 2 \cdot 10^4$ kp/mm^2

$Y_{cobre} = 1,1 \cdot 10^4$ kp/mm^2

(Sol: a) $\Delta l_{cobre} = 0.58$ mm; $\Delta l_{acero} = 0.16$ mm ; b) $U = 0.18$ J)

5.4.- Un hilo de 80 cm de largo y 3 mm de diámetro se estira 0.3 mm mediante una tuerza F de 20 N. Si otro hilo del mismo material, temperatura e historia previa tiene una longitud de 180 cm y un diámetro de 8 mm ¿qué fuerza F' se requerirá para alargarlo hasta una longitud de 180.1 cm?

(Sol: F' = 210.7 N)

5.5.- Un alambre de cobre de 31 cm de largo y 0.5 mm de diámetro está unido a un alambre de latón de 108 cm de largo y 1 mm de diámetro. Si una determinada fuerza deformadora produce un alargamiento de 0.5 mm al conjunto total, ¿cuál es el alargamiento de cada parte?

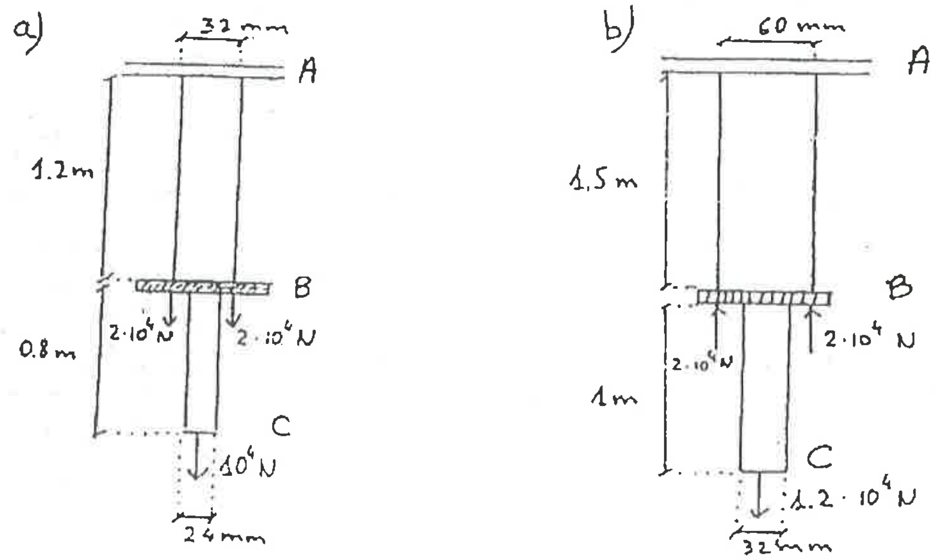
$Y_{cobre} = 11 \cdot 10^{10}$ Pa

$Y_{latón} = 9 \cdot 10^{10}$ Pa

(Sol: $\Delta l_{cobre} = 0.24$ *mm;* $\Delta l_{latón} = 0.26$ *mm)*

5.6.- Dos varillas sólidas de sección circular están soldadas en B como se muestra en la figura a). Determinar el esfuerzo normal en el punto medio de cada varilla.

(Sol: $\sigma_{AB} = 6.2 \cdot 10^7$ N/m^2; $\sigma_{BC} = 2.21 \cdot 10^7$ N/m^2 *)*



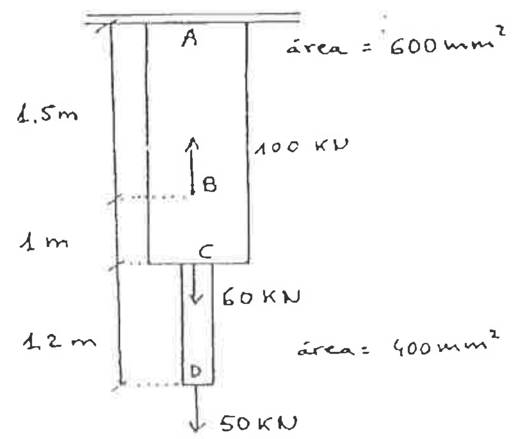
5.7.- Dos varillas sólidas de sección circular están soldadas en B como se muestra en la figura b). Si la varilla AB es de aluminio, con módulo de Young $Y_a = 7{\cdot}10^{10}$ Pa, y la varilla BC es de cobre, con $Y_c = 12{\cdot}10^{10}$ Pa, determinar la variación de longitud de ambas varillas y el desplazamiento del punto C.

(Sol: $\Delta l_{AB} = -2.12 \cdot 10^{-4}$ m; $\Delta l_{BC} = 1.24 \cdot 10^{-4}$ m; desplazamiento de C = $-0.88 \cdot 10^{-4}$ m)

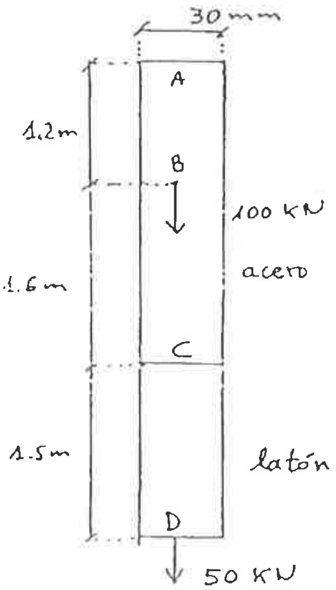
5.8.- La varilla ABCD (figura c) está hecha de una aleación de aluminio con Y = 70 GPa. Para la carga mostrada, y despreciando el peso propio de la varilla, hallar la variación de longitud del conjunto.

(Sol: $\Delta l_D = 5.12$ mm)

c)



d)



5.9.- La varilla de acero ABC, de 30 mm de diámetro, y la varilla de latón CD, del mismo diámetro, están unidas en el punto C para formar la varilla de longitud ABCD (figura d). Para la carga mostrada, y despreciando el peso propio de la varilla, hallar la variación de longitud del conjunto.

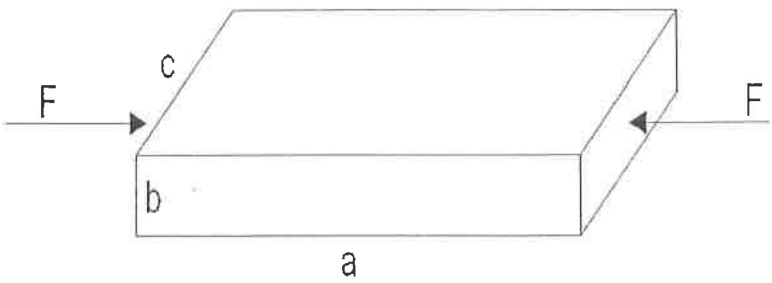
$Y_{acero} = 2.1\ 10^{11}$ N/m²

$Y_{latón} = 1.05\ 10^{11}$ N/m²

(Sol: $\Delta l_D = 2.762$ mm)

5.10.- Se aplican fuerzas de compresión a dos caras opuestas de un bloque rectangular de volumen V = a·b·c. La disminución relativa de la longitud del bloque es 0.001, y la disminución relativa de volumen 0.0005. Calcúlese el coefiente de Poisson del material del que está hecho el bloque.

(Sol: $\mu = 0.25$)



5.11.- En cada extremo de una barra horizontal de 1.5 m de largo, 1.6 cm de ancho y 1 cm de alto se aplica una fuerza de tracción de 2800 N. El módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material de la barra son $Y = 2\cdot10^{10}$ Pa y $\mu = 0.3$. Calcular:

a) La deformación unitaria longitudinal de la barra.

b) La variación de la anchura y la altura.

c)La variación relativa de volumen.

d)La energía potencial elástica almacenada en la barra.

(Sol: a) $\varepsilon = 8.75\cdot10^{-4}$; b) $\Delta l_{ancho} = -4.2\cdot10^{-6}$ m ; $\Delta l_{alto} = -2.63\cdot10^{-6}$ m ;
c) $\Delta V / V = 3.5\cdot10^{-4}$; d) U = 1.84 J)

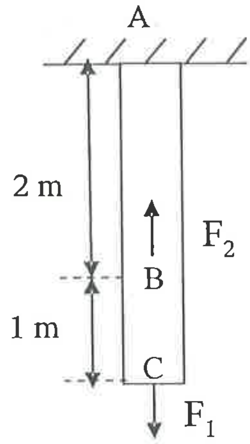
5.12.- Una barra AC de 3 m de longitud y 50 cm^2 de sección se encuentra empotrada en su extremo A y soporta la acción de dos fuerzas, una F_1 de 10^5 N de módulo aplicada en el extremo libre C y otra F_2 en el punto B a 1 m de distancia del extremo libre, tal como indica la figura El material del que está fabricada la barra tiene un módulo de Young de 10^{11} Pa y un coeficiente de Poisson de valor 0.3. Sabiendo que la barra sufre un acortamiento de 0.6 mm, calculad:

a) La fuerza F_2 que actúa sobre la barra.

b) La variación de volumen.

c)La energía elástica almacenada en la barra.

(Sol: a) $F_2 = 3\ 10^5$ N ; b) $\Delta V = -1.2\ cm^3$; c) E=90 J)



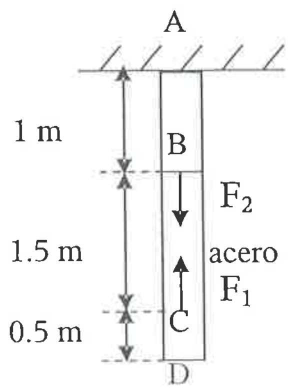
5.13.- Una barra AD, de 3 m de longitud y 10 cm^2 de sección, está formada por una parte, BD, de acero de 2 m de longitud y otra de 1 m de un material desconocido. La barra se suelda a una pared rígida por el extremo A manteniéndose su otro extremo libre. Se somete a la acción de dos fuerzas, una $F_1=2\cdot10^4$ N en el punto C y otra $F_2=10^4$ N en el punto B, tal como indica la figura, midiéndose una variación de la longitud de la barra de –0.25 mm. Sabiendo que el acero tiene un módulo de Young $Y=2\cdot10^{11}$ Pa, y un coeficiente de Poisson de 0.25, siendo éste último de 0.20 para el material desconocido, calculad:

a) El módulo de Young del material desconocido.

b) La variación de volumen de la barra.

c) La energía elástica almacenada en la barra.

(Sol: a) $Y= 10^{11}$ Pa; b) $\Delta V= -\ 0.135$ cm^3 : c) E=2 J)



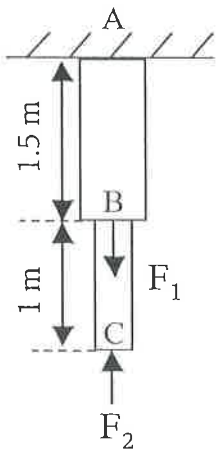
5.14.- Una barra AC, de 2,5 m de longitud, está formada por una parte, AB, de 1.5 m de longitud y 10 cm^2 de sección ($Y_{AB}=10^{11}$ Pa) y otra BC de acero de 1 m de longitud ($Y_{BC}=2\cdot10^{11}$ Pa). La barra se suelda a una pared rígida por el extremo A manteniéndose su otro extremo libre. Se somete a la acción de dos fuerzas, una F_1 en el punto B y otra $F_2=10^4$ N en el punto C, tal como indica la figura. El material de la parte AB puede soportar como máximo un esfuerzo de 10^7 Pa. Calculad:

a) La fuerza máxima F_1 que se puede aplicar para que la barra AB trabaje a tracción en condiciones de esfuerzos máximos.

b) La sección que debe tener la barra BC para que el alargamiento total del conjunto sea de 0.05 mm.

c) La energía elástica almacenada en el proceso.

(Sol: a) $F_1 = 2\ 10^4$ N ; b) $S_{BC}= 5\ cm^2$; c) E=1.25 J)



5.15.- Un cubo de gelatina de 30 cm de arista tiene una cara sujeta mientras que a la cara opuesta se le aplica una fuerza tangencial de 1 N. La superficie a la que se aplica la fuerza se desplaza 1 cm.

a) ¿Cuál es el esfuerzo tangencial o tensión de cizalladura?

b) ¿Cuál es la deformación de cizalladura?

c) ¿Cuál es el módulo de cizalladura o de rigidez?

(Sol: a) τ = 11. 1 Pa ; b) γ = 0.03 rad ; c) G = 333 Pa)

5.16.- Dos bandas metálicas se mantienen unidas mediante cuatro remaches que tienen cada uno un diámetro de 6 mm. ¿cuál es la tensión máxima que puede ejercerse por la banda remachada, si el esfuerzo cortante sobre los remaches no ha de exceder de 7.2 kp/mm^2? Supóngase que cada remache soporta *una* cuarta parte de la carga.

(Sol: 814.3 kp)

5.17.- En la fabricación de un tipo de cable se utiliza hilo de tungsteno ($Y_t = 35 \cdot 10^{10}$ Pa) de 40 cm^2 de sección rodeado por una cobertura de aluminio ($Y_a = 7 \cdot 10^{10}$ Pa), de manera que la sección total del cable es de 120 cm^2. Un cable muestra de 80 m de longitud es sometido a una fuerza de tracción de 490 kN. Calculad:

a) la fuerza soportada por el núcleo de tungsteno

b) el alargamiento total del cable

c) la energía potencial elástica almacenada en el cable.

(Sol: a) 350 kN , b) 2 cm , c) 4900 J)

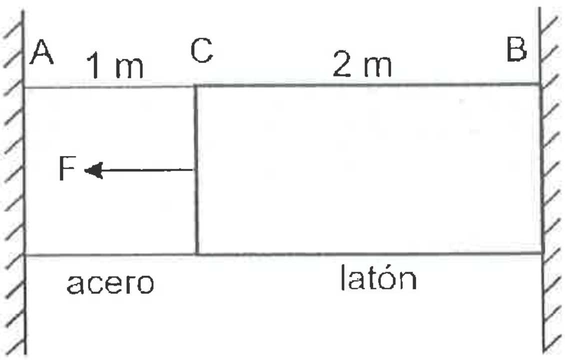
5.18.- Una barra de 3 m de longitud y 10 cm^2 de sección transversal está unida por sus extremos A y B a dos paredes rígidas. La barra consta de un tramo AC, 1 m de acero ($Y_a = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\mu_a = 0{,}25$), y de un tramo BC, 2 m de latón ($Y_l = 10^{11}$ Pa, $\mu_l = 0{,}30$), ambos con la misma sección y unidos en el punto C. Cuando en este punto se aplica una fuerza axial $F = 5 \cdot 10^5$ N tal como se indica en la figura, el módulo de la reacción de la pared sobre la barra en el extremo B es de 10^5 N. Calculad:

a) el desplazamiento del punto C

b) la energía elástica almacenada en la barra

c) la variación de volumen del tramo de acero.

(Sol: a) 2 mm ← , b) 500 J , c) -1000 mm^3)



5.19.- El ortoedro de la figura está sometido a tres fuerzas normales: F_1 paralela al eje *x* y de 7 kN (tracción), F_2 paralela al eje *y* y de 3.2 kN (tracción), y F_3 paralela al eje *z* y de módulo y sentido desconocidos. Bajo estas tres fuerzas, se observa que el incremento relativo de longitud según el eje *y* es el doble del incremento relativo de longitud según el eje *x*. El material utilizado en la fabricación del ortoedro tiene un módulo de Young $Y = 12 \cdot 10^{10}$ Pa y un coeficiente de Poisson $\mu = 0.4$. Calculad:

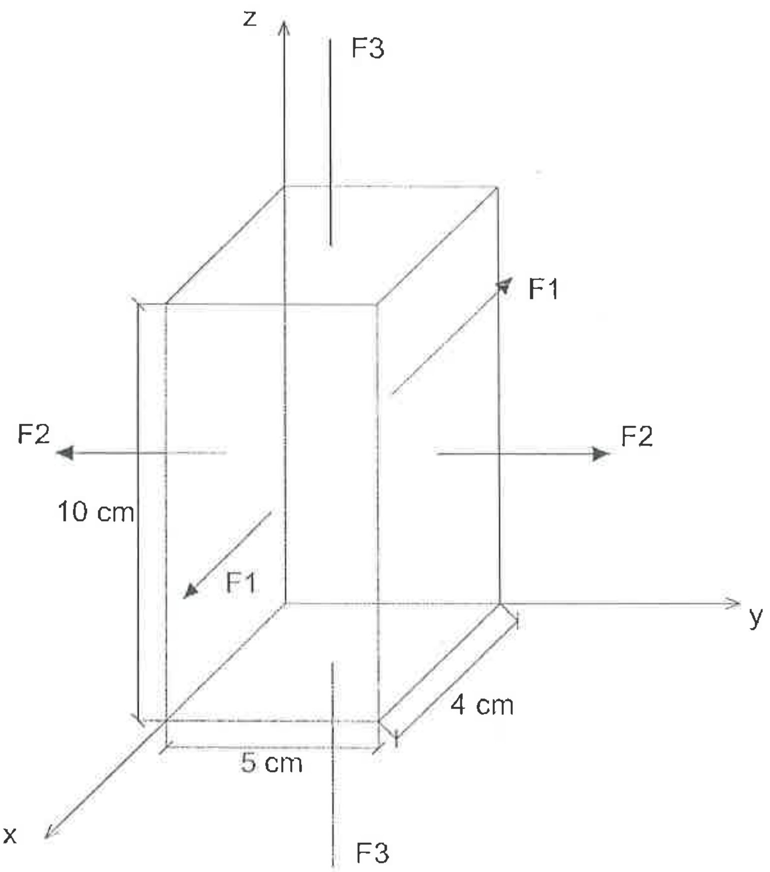
a) el módulo de la fuerza F_3

b) el incremento de longitud en la dirección del eje *x*

c) el incremento de longitud en la dirección del eje *z*

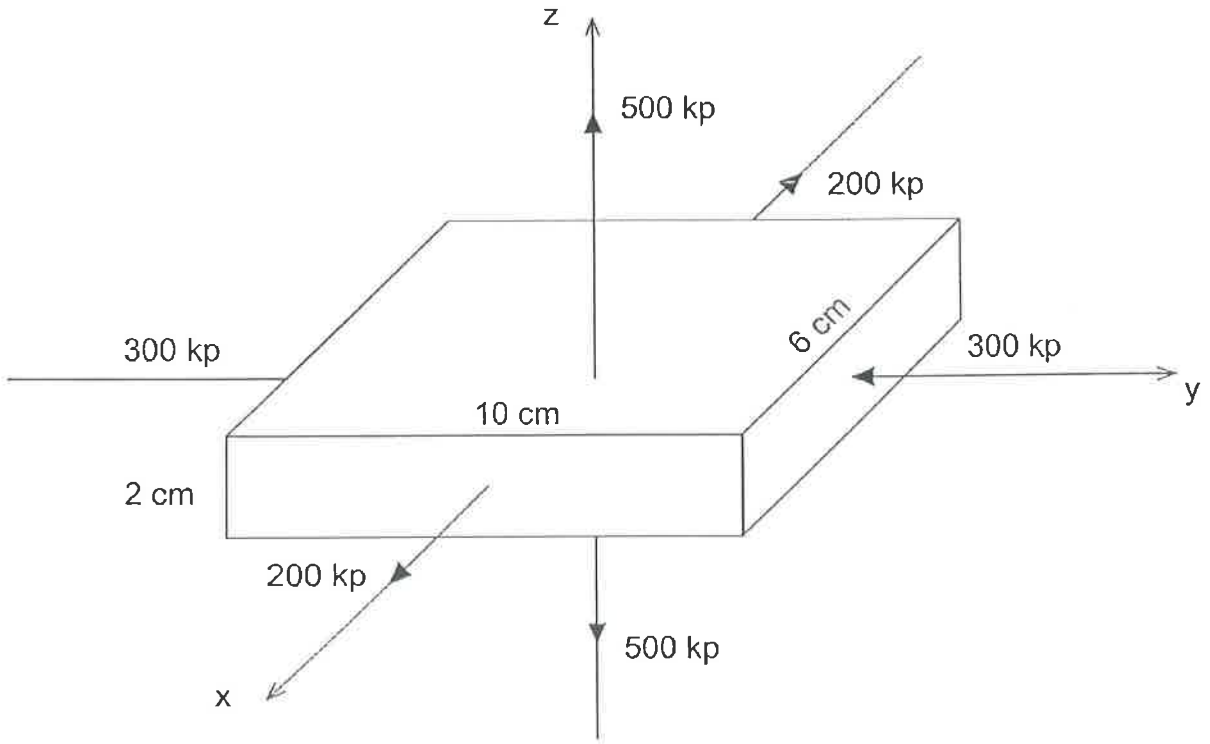
d) el incremento relativo de volumen.

(Sol: a) 9.6 kN tracción , b) $-2.8 \cdot 10^{-5}$ cm , c) $32.67 \cdot 10^{-5}$ cm , d) $11.67 \cdot 10^{-6}$)



5.20.- Un paralelepípedo rectangular de aluminio ($Y = 7.1 \cdot 10^{10}$ Pa , $\mu = 0.34$), de dimensiones 10 cm x 6 cm x 2 cm, está sometido a fuerzas normales tensoras de 500 kp y 200 kp sobre sus caras de 10 x 6 cm^2 y 10 x 2 cm^2 respectivamente, y compresoras de 300 kp sobre las caras de 6 x 2 cm^2. Calculad las variaciones de longitud de las aristas y el cambio de volumen del paralelepípedo.

(Sol: $\Delta x = 1.29 \cdot 10^{-4}$ cm ; $\Delta y = -4.31 \cdot 10^{-4}$ cm ; $\Delta z = 0.37 \cdot 10^{-4}$ cm
$\Delta V = -3.6 \cdot 10^{-4}$ cm^3)



5.21.- Sea el tensor de tensiones siguiente:

$\sigma_x = 10$ $\sigma_y = 15$ $\sigma_z = 30$

$\tau_{xy} = 20$ $\tau_{yz} = -10$ $\tau_{zx} = -30$

Calculad:

a) la tensión asociada a la superfície normal al vector (1,1,-1)

b) la tensión normal asociada a la misma superfície

c) la tensión tangencial máxima

d) la tensión tangencial de la misma superfície en la dirección dada por el vector (0,1,1).

(Sol: a) $(\psi) = (34.64, 25.98, -40.41)$

b) $\sigma_n = 58.33$, $(\sigma_n) = 33.68\,(1,1,-1)$

c) $(\tau_{nm}) = (0.96, -7.7, -6.74)$, $\tau_{nm} = 10.27$

d) $\tau_{nt} = -10.21$, $(\tau_{nt}) = -7.22\,(0,1,1)$ *)*

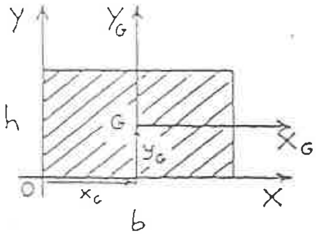
Apéndice I

Tablas

TAULES

CENTRES DE GRAVETAT I MOMENTS D'INÈRCIA DE SUPERFÍCIES PLANES

Rectangle (de costats b i h)



$$x_G = \frac{b}{2}$$
$$y_G = \frac{h}{2}$$
$$S = b.h$$

$$I_X = \frac{1}{3}\, b\, h^3 \qquad I_{X_G} = \frac{1}{12}\, b\, h^3$$
$$I_Y = \frac{1}{3}\, h\, b^3 \qquad I_{Y_G} = \frac{1}{12}\, h\, b^3$$
$$I_O = \frac{1}{3}\, bh\,(b^2+h^2) \qquad I_G = \frac{1}{12}\, bh\,(b^2+h^2)$$

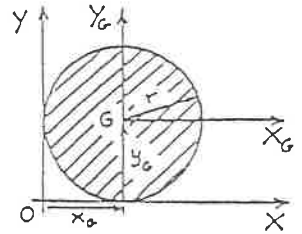
Quadrat (de costat ℓ)

Cas particular del rectangle: $b = h = \ell$

$$x_G = y_G = \frac{\ell}{2}, \qquad S = \ell^2$$

$$I_X = \frac{1}{3}\,\ell^4 \qquad I_{X_G} = \frac{1}{12}\,\ell^4$$
$$I_Y = \frac{1}{3}\,\ell^4 = I_X \qquad I_{Y_G} = \frac{1}{12}\,\ell^4 = I_{X_G}$$
$$I_O = \frac{2}{3}\,\ell^4 \qquad I_G = \frac{1}{6}\,\ell^4$$

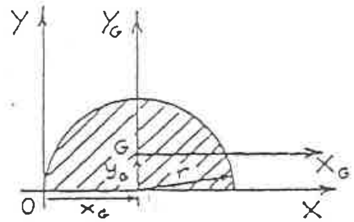
Cercle (de radi r)



$$x_G = y_G = r$$
$$S = \pi r^2$$

$$I_X = \frac{5}{4}\pi r^4 \qquad I_{X_G} = \frac{1}{4}\pi r^4$$
$$I_Y = \frac{5}{4}\pi r^4 = I_X \qquad I_{Y_G} = \frac{1}{4}\pi r^4 = I_{X_G}$$
$$I_O = \frac{5}{2}\pi r^4 \qquad I_G = \frac{1}{2}\pi r^4$$

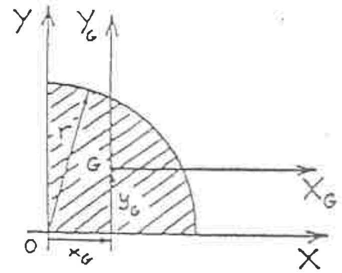
Semicercle (de radi r)



$$x_G = r$$
$$y_G = \frac{4r}{3\pi}$$
$$S = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$I_X = \frac{1}{8}\pi r^4 \qquad I_{X_G} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$$
$$I_Y = \frac{5}{8}\pi r^4 \qquad I_{Y_G} = \frac{1}{8}\pi r^4$$
$$I_O = \frac{3}{4}\pi r^4 \qquad I_G = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$$

<u>Quadrant</u> (de radi r)



$$x_G = y_G = \frac{4r}{3\pi}$$

$$S = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$I_X = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$I_Y = \frac{1}{16}\pi r^4 = I_X$$

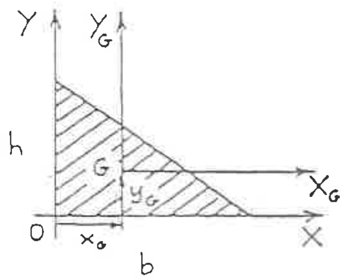
$$I_o = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_{X_G} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$$

$$I_{Y_G} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4 = I_{X_G}$$

$$I_G = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$$

<u>Triangle rectangle</u> (de bax b i altura h)



$$x_G = \frac{b}{3}$$

$$y_G = \frac{h}{3}$$

$$S = \frac{b.h}{2}$$

$$I_X = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_Y = \frac{1}{12} h b^3$$

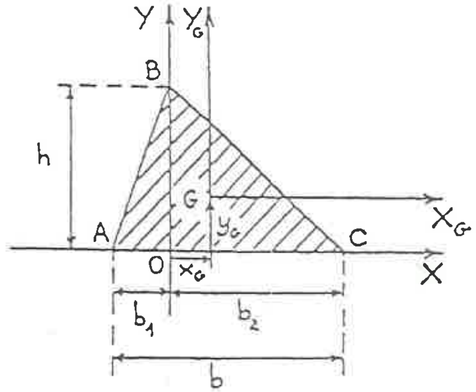
$$I_o = \frac{1}{12} bh(b^2+h^2)$$

$$I_{X_G} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_{Y_G} = \frac{1}{36} h b^3$$

$$I_G = \frac{1}{36} bh(b^2+h^2)$$

<u>Triangle</u> (de baxe b i altura h)



$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{b_2 - b_1}{3} \quad , \quad b_1 \geq 0 \, , \; b_2 \geq 0$$

$$y_G = \frac{y_A + y_O + y_C}{3} = \frac{h}{3}$$

$$S = \frac{b.h}{2}$$

$$I_X = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_Y = \frac{1}{12} h (b_1^3 + b_2^3)$$

$$I_o = \frac{1}{12} h (b h^2 + b_1^3 + b_2^3)$$

$$I_{X_G} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_{Y_G} = \frac{1}{36} h (b_1^3 + 2 b_1^2 b_2 + 2 b_1 b_2^2 + b_2^3)$$

$$I_G = \frac{1}{36} bh (h^2 + b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2)$$

densidades

Sustancia	g/cm^3	kg/m^3
aire (0 °C, 1 atm)	$1.3 \cdot 10^{-3}$	1.3
agua (4 °C, 1 atm)	1	1000
agua de mar	1.03	1030
aluminio	2.7	2700
hierro/acero	7.8	7800
latón	8.6	8600
plomo	11.3	11300
mercurio	13.6	13600

unidades de presión

1 atm = 101'325 kPa

Pascal (Pa) = N/m^2

baria ó

baría = dyn/cm^2

atmósfera

mm Hg (tor)

bar

milibars (mb)

1 atm = 1013.3 mb

kp/cm^2 (atmósfera técnica) = 98060 N/m^2

mm columna de agua

$1\ N/m^2 = 10\ dyn/cm^2$

$1\ atm = 1.0133 \cdot 10^5\ N/m^2 = 1.0333\ kp/cm^2$

$1\ atm = 760\ mm\ Hg$

$1\ bar = 10^5\ N/m^2 = 10^6$ baria

$1\ mbar = 100\ N/m^2$ = 100 Pa = 1 hPa

hecto

1 hPa = 100 Pa = 1 mbar

1 mm c.a. = 9.81 Pa

Tabla 14.1 *Constantes elásticas de diversos materiales a temperatura ambiente. (Todos los valores son aproximados, puesto que estas constantes dependen de modo crítico de la historia previa y de la composición exacta de las muestras utilizadas en los ensayos)*

material	*Módulo de Young Y* 10^{10} *Pa*	*Límite elástico a tracción* 10^{10} *Pa*	*Compresibilidad volumétrica, B* 10^{10} *Pa*	*Módulo de cizalla G* 10^{10} *Pa*
aluminio, laminado	7,0	0,013	7,5	2,4
latón, laminado en frío	9,0	0,038	11,0	3,5
cobre, laminado	12,0–13,0	0,015	14,0	4,2
hierro, fundido	8,4–9,8	0,0035–0,0040	9,6	5,3
magnesio	4,2	—	3,4	1,7
plata, estirada en frío	7,7	—	—	2,0
acero, dulce	21,0	0,017–0,021	16,0	8,0
acero, de muelles templado	20,0	0,076–0,12	17,0	7,6
tungsteno, estirado en frío	35,0	—	37,0	15,0

Nota: 1 Pa = 1 N/m²

Coeficients de Poisson (μ)

acer	0,19
alumini	0,16
coure	0,32
ferro	0,27
llautó	0,26
níquel	0,36
plom	0,43
vidre	0,19
tungstè	0,20

Apéndice II

Problemas suplementarios

Problemas Suplementarios de
FÍSICA I

1 Sistemas de fuerzas

1.1 Dado el vector $A = 3i + j + 2k$, responder a las siguientes cuestiones. (a) Hallar la longitud de A y la longitud de la proyección de A sobre el plano xy. (b) Buscar un vector B en el plano xy perpendicular a A. (c) Lo mismo que en el apartado anterior pero con B unitario. (d) Determinar la expresión de A en un sistema de referencia obtenido a partir del anterior mediante una rotación de $\pi/2$ rad a lo largo del eje z positivo. (e) Si $C = 2i$, calcular $A \times C$ y comprobar que es perpendicular a A y a C.

1.2 Calcular el momento de $F = (1, 1, 1)$ aplicada en el punto $P(0, 0, 1)$ respecto al origen O y respecto al punto $O'(1, 0, -1)$.

Sol: $M_O = (-1, 1, 0)$, $M_{O'} = (-2, 3, -1)$

1.3 Calcular el momento de $F = (2, -1, 1)$ aplicada en $P(1, -1, 2)$ respecto a la recta

$$\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}.$$

Sol: $M = 8/\sqrt{14}$ o bien $M = -8/\sqrt{14}$

1.4 Dada la fuerza $F = 2i - 3j + 2k$, cuyo momento respecto al origen es $M_O = 5i + 6j + M_z k$, determinar M_z y la ecuación de la recta de acción de F.

1.5 Un sistema de fuerzas está definido por sus momentos respecto a tres puntos del espacio en la forma siguiente:

$$\begin{array}{lcl} M_1 = (1, 2, -1) & \text{respecto} & P_1(2, 0, 1) \\ M_2 = (a, 4, 3) & " & P_2(0, 0, 1) \\ M_3 = (b, -1, c) & " & P_3(1, -1, 0) \end{array}$$

Hallar la resultante del sistema y completar las expresiones de los momentos.

Sol: $a = 1$, $b = -2$, $c = 5$. $R = (-4, 2, -1)$

1.6 Determinar el trinomio invariante del sistema de vectores deslizantes que se encuentran aplicados en el punto que se indica.

$$\begin{array}{lcl} v_1 = (0, 1, 0) & \text{en} & P_1(2, 1, 1) \\ v_2 = (1, 0, 2) & " & P_2(0, 1, -1) \\ v_3 = (-1, -2, 1) & " & P_3(1, 0, 0) \end{array}$$

Sol: $T = -1$

1.7 Hallar el eje central del sistema constituido por los siguientes vectores deslizantes aplicados en el punto indicado

$$\begin{array}{lcl} v_1 = 2i + j & \text{en} & P_1(1, 0, 2) \\ v_2 = -k & " & P_2(-1, 1, 0) \end{array}$$

Sol: $\frac{x-2/3}{2} = \frac{y-1/6}{1} = \frac{z-3/2}{-1}$

1.8 Determinar el momento mínimo del sistema constituido por los vectores

$$\begin{array}{lcl} v_1 = i + 2j + k & \text{en} & P_1(0, 0, 0) \\ v_2 = j - k & " & P_2(1, 0, 1) \end{array}$$

y el par de momento $M = 2i$.

Sol: $M_{min} = 4/\sqrt{10}$

1.9 Verificar que los sistemas de fuerzas

$$\begin{array}{lcl} F_1 = (2, 0, 1) & \text{en} & P_1(1, 0, 0) \\ F_2 = (0, 3, 0) & " & P_2(0, 1, 0) \\ F_3 = (0, 1, -1) & " & P_3(0, 0, 1) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lcl} F'_1 = (2, 0, -1) & \text{en} & P'_1(1, 0, -1) \\ F'_2 = (0, 4, 1) & " & P'_2(0, -1, 0) \end{array}$$

son equivalentes y calcular el momento de ambos respecto al punto $P(1, 1, 1)$

Sol: $M_P = (3, -3, -2)$

1.10 Verificar que los sistemas de fuerzas

$$\begin{array}{lll} F_1 = (2,3,0) & \text{en} & P_1(1,0,0) \\ F_2 = (0,-1,5) & " & P_2(0,1,0) \\ F_3 = (-2,-2,-5) & " & P_3(0,0,1) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lll} F'_1 = (0,3,2) & \text{en} & P'_1(1,2,-1) \\ F'_2 = (0,-3,-2) & " & P'_2(0,0,0) \end{array}$$

son equivalentes.

1.11 Sabemos que el sistema

$$\begin{array}{lll} F_1 = (1,-5,8) & \text{en} & P_1(2,0,-6) \\ F_2 = (-3,6,0) & " & P_2(4,-1,-9) \\ F_3 = (0,-11,15) & " & P_3(1,1,1) \end{array}$$

admite una resultante. Hallar dicha resultante y su recta de acción.

2 Centro de masas

2.1* Calcular el centro de masas del cuadrante de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

limitado por los semiejes positivos.

Sol: $(\bar{x},\bar{y}) = \frac{4\pi}{3}(a,b)$

3 Tensor de inercia

3.1 Calcular el momento de inercia de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

respecto al eje x.

Sol: $I_x = (\pi/4)ab^3$

3.2 Calcúlese el producto de inercia de un cuadrante circular respecto a unos ejes coincidentes con sus radios y respecto a unos ejes paralelos a los anteriores que pasen por el centro de masas.

Sol: $P_{xy} = R^4/8$, $P_{x_G y_G} = (9\pi - 32)R^4/72\pi$

3.3 Los productos de inercia de la superficie de la figura 1 respecto a los ejes x, y y x', y' son $490\ \text{cm}^4$ y $-920\ \text{cm}^4$, respectivamente. Calcular el área de la figura sabiendo que su centroide se encuentra en C.

Sol: $A = 78.3\ \text{cm}^2$

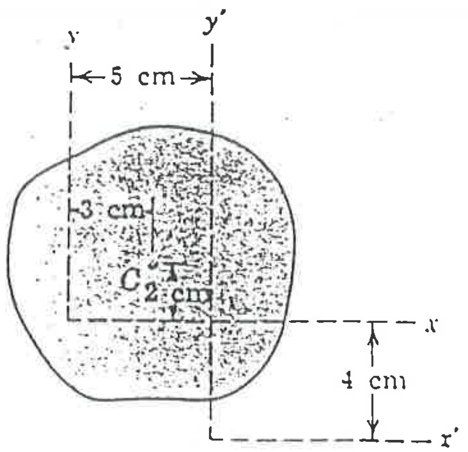


Figura 1: Problema 3

3.4 El tensor de inercia de una figura plana respecto a unos ejes de coordenadas x, y está dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 3658.13 & -3696.64 \\ -3696.64 & 6640.98 \end{pmatrix}$$

donde las unidades son cm^4. Hallar el tensor de inercia respecto unos ejes u, v con el mismo origen que los anteriores i girados 47° en sentido antihorario.

Sol: $I_{uu} = 1565.96\ \text{cm}^4$, $I_{vv} = 8733.16\ \text{cm}^4$
$I_{uv} = 1745.66\ \text{cm}^4$

3.5 Determinar los momentos y el producto de inercia de un rectangulo de base 6 cm y altura 4 cm respecto a unos ejes x', y' con origen en el centro del rectángulo y girados +60° respecto a otros ejes x, y paralelos a los lados del rectángulo.

Sol: $I_{x'} = 62\ \text{cm}^4$, $I_{y'} = 42\ \text{cm}^4$
$P_{x'y'} = -17.3\ \text{cm}^4$

3.6* Un triángulo rectángulo tiene la base b y la altura h sobre los semiejes positivos x y y respectivamente de un sistema de ejes ortogonales. Si es $b = 7.3$ cm y $h = 5.9$ cm calcular el tensor de inercia respecte a unos ejes u, v con el mismo origen que los anteriores y girados 30°.

Sol: $I_{uu} = 74.583\ \text{cm}^4$, $I_{vv} = 241.62\ \text{cm}^4$
$I_{uv} = -9.926\ \text{cm}^4$

3.7 Diagonalizar el endomorfismo representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

en una base e_1, e_2. Existen infinitas soluciones. Una de las posibles tiene por matriz de cambio de base

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.8 Diagonalizar el tensor simétrico representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mediante una rotación de los ejes de coordenadas.

Sol: $\alpha = -52°$

3.9 Una superficie tiene los momentos de inercia $I_x = 28$ cm^4 e $I_y = 12$ cm^4 respecto a un sistema de ejes x, y con origen en O. El ángulo medido en sentido horario del eje x al eje de máximo momento de inercia que pasa por O es de 20°. Determinar el momento de inercia mínimo de la superficie respecto a un eje que pase por O.

Sol: $I_{min} = 9.56$ cm^4

3.10 Los momentos de inercia máximo y mínimo de una superficie plana son 15 cm^4 y 5 cm^4, respectivamente, respecto a unos ejes que pasan por su centro de masas, y el producto de inercia respecto a los ejes x, y que también pasan por el centro de masas es $-5\sqrt{3}/2$ cm^4. Calcular I_x y el ángulo α que forma el eje de momento de inercia máximo con el eje x.

4 Estática

4.1 La bola lisa homogenea de la figura pesa 50 kp y descansa sobre el plano inclinado 30° en A, apoyándose contra la superficie vertical en B. Calcular las fuerzas de contacto en A y B.

Sol: $F_A = 57.7$ kp, $F_B = 28.9$ kp

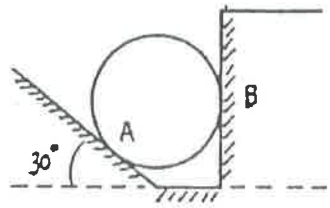


Figura 2: Problema 4.1

4.2 ¿Con qué fuerza hay que tirar de la cuerda para mantener el peso de 250 kp en la posición de la figura?

Sol: $F = 111.6$ kp

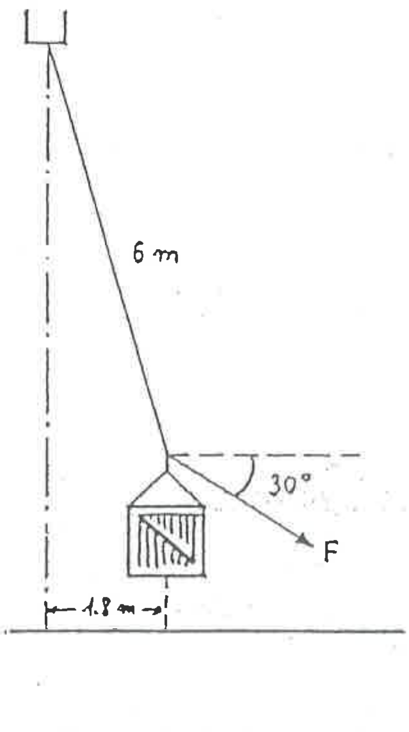


Figura 3: Problema 4.2

4.3 Un jardinero utiliza una carretilla que pesa 50 N para transportar una bolsa de fertilizante de 200 N. ¿Qué fuerza deberá ejercer sobre el extremo de cada manilla? Si desea transportar una segunda bolsa de 200 N al mismo tiempo que la primera determínese la máxima distancia horizontal permisible desde el eje A de la carretilla al centro de gravedad de la segunda bolsa si solamente puede cargar 60 N con cada brazo.

Sol: $F = 33.75$ N, $d = 0.26$ m

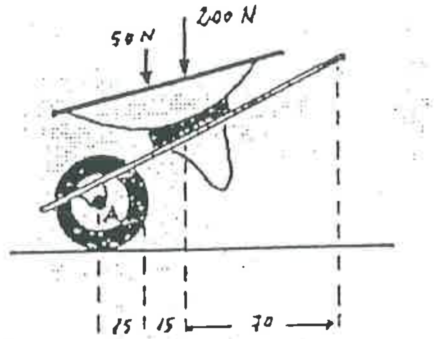


Figura 4: Problema 4.3

4.4 Determinar el intervalo de valores que puede tener el peso P para que el bloque de 50 kg de la figura ni inicie su movimiento plano arriba ni se deslice plano abajo. El coeficiente de rozamiento estático para las superficies en contacto es 0.3.

Sol: 30 kp $< P <$ 31.2 kp

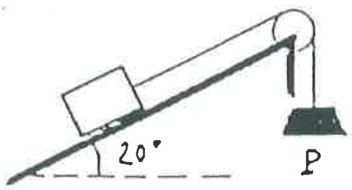


Figura 5: Problema 4.4

4.5 Determinar el valor y sentido de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque de 50 kg si $Q = 25$ kp. Lo mismo cuando $Q = 5$ kp. El coeficiente de rozamiento estático es 0.20 y el de rozamiento cinético 0.17.

Sol: $F_R = -6.4$ kp; $F_R = 8.3$ kp

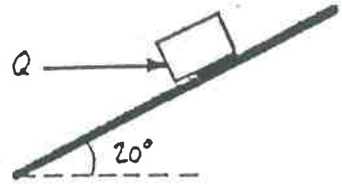


Figura 6: Problema 4.5

4.6 Una persona de masa m intenta mover un mueble de masa M. Si el coeficiente de rozamiento de la persona con el suelo es μ y el del mueble μ' hallar la condición que han de satisfacer m, M, μ y μ' para que consiga mover el mueble.

Sol: $\mu m > \mu' M$

4.7 Una cuerda está arrollada en un cilindro de peso W y ambos están en equilibrio sobre un plano inclinado de ángulo α quedando la cuerda completamente horizontal. Hallar (a) la tensión de la cuerda, (b) la fuerza normal ejercida por el plano sobre el cilindro y (c) el coeficiente de rozamiento estático mínimo para que el cilindro no caiga.

Sol: (a) $T = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} W$, ($b$) $N = W$
(c) $\mu = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

5 Elasticidad

5.1 Un hilo de cobre de 3 m de longitud y otro de acero de 2 m, cada uno de los cuales tiene una sección recta de 1 mm^2, se unen entre sí por uno de sus extremos y el conjunto se suspende verticalmente de un punto fijo por uno de los extremos libres. Se cuelga un peso W del estremo inferior del conjunto de los dos hilos. (a) ¿Cuál debe ser el valor de W para que se produzca un aumento de longitud total de 2 mm? (b) ¿Cuál será entonces el aumento de longitud de cada hilo? (c) ¿Qué energía elástica queda alamcenada en cada hilo? (d) Calcular el módulo de Young de un hilo simple equivalente al sistema de dos hilos en serie.

Sol: (a) 6.1 kg; (b) 1.4 mm; 0.6 mm
(c) 42 mJ; 18 mJ; (d) 14.95×10^{10} N/m^2

5.2* Un hilo de acero de 1 m de longitud y 1 mm^2 de sección recta está extendido horizontalmente entre dos soportes rígidos unidos a sus extremos. Entonces, se cuelga un peso de 5 kg en el punto medio del hilo. (*a*) Calcular el descenso que experimenta el punto medio del hilo, así como el esfuerzo tensor que soporta el mismo. (*b*) Calcular la energía elástica almacenada en el hilo tensado.

Sol: (*a*) 3.1 cm; 39.2×10^7 N/m^2; (*b*) 0.38 J

5.3 Una viga rígida que pesa 10 kg está suspendida del techo mediante tres cables, dos de acero que la sujetan por los extremos y uno de cobre que la sujeta por el centro. La vigeta está en posición horizontal. Los diámetros de los cables son de 2 mm para los de acero y de 3 mm para el de cobre. (*a*) Calcular las tensiones y esfuerzos que soporta cada cable. (*b*) Calcular el aumento unitario de longitud que experimenta cada cable.

Sol: (*a*) acero: 2.91 kg; 0.91×10^7 N/m^2
cobre: 4.19 kg; 0.58×10^7 N/m^2
(*b*) 45.3 μm

5.4* Calcular el aumento de longitud que experimenta un cable de acero ordinario de 100 m de longitud cuando se le suspende verticalmente por uno de sus extremos, de modo que se estira elásticamente bajo la acción de su propio peso (despreciar las variaciones originadas en la sección recta y en la densidad como consecuencia del alargamiento). ¿Se supera el límite elástico en alguna sección recta del cable suspendido? ¿Qué longitud máxima de cable puede suspenderse sin que ocurra su ruptura? Calcular la energía elática almacenada en el cable.

Sol: 1.93 mm; no; 6.5 km; 10 mJ

5.5* Sobre la cima de una columna se apoya una estatua de peso W. Si la sección recta de la columna en la cima es A_m, el módulo de Young Y, la densidad del material ρ y la altura l, ¿cómo debe variar la sección en función de la altura para que todas las secciones soporten el mismo esfuerzo? Determinar el decremento total de altura.

Sol: $A(y) = A_m \exp\left(\frac{\rho g A_m}{W}(l-y)\right)$; $\Delta l = \frac{Wl}{YA_m}$

6 Estática de fluidos

6.1* En 1654 Otto von Guericke, burgomaestre de Magdeburgo e inventor de la máquina neumática, presentó una demostración ante la Dieta Imperial, en la que, dos tiros de ocho caballos no pudieron separar dos hemisferios de latón en los cuales se había hecho el vacío. (*a*) Demostrar que la fuerza F que se requiere para separar los hemisferios es $F = \pi R^2 P$, siendo R el radio exterior de los hemisferios y P la diferencia de presiones exterior e interior de la esfera. (*b*) Tomando $R = 30.5$ cm y la presion interior igual a 0.1 atm, ¿qué fuerza hubiera tenido que ejercer el tiro de caballos para separar los hemisferios? (*c*) ¿Por qué se emplearon dos tiros de caballos? ¿No hubiera bastado uno solo para demostrar el mismo fenómeno?

6.2 En el siglo XVII, Pascal realizó el siguiente experimento. Se llenó con agua un barril de vino y se cerró. A continuación se le conectó un tubo largo vertical a través de un orificio practicado en la tapa superior del barril y se fue añadiendo agua por el tubo hasta que reventó el barril. (*a*) Si el radio de la tapa era 20 cm y la altura del agua en el tubo era de 12 m, calcular la fuerza ejercida sobre la tapa. (*b*) Si el tubo tenia un radio interior de 3 mm, ¿qué masa de agua en el tubo produjo la presión que reventó el barril?

6.3 Un recipiente de masa 1 kg contiene 2 kg de agua y descansa sobre el plato de una balanza. Un bloque de 2 kg de aluminio de densidad 2.7 g/cm^3 suspendido de un dinamómetro se sumerge en el agua. Determinar la lectura de la balanza y del dinamómetro.

6.4 Una piscina tiene 24.4 m de largo, 9.15 m de ancho y 2.44 m de largo. Cuando está llena de agua, ¿cuál es la fuerza total sobre el fondo? ¿y en las caras laterales?

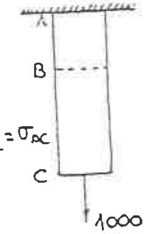
Apéndice III

Problemas adicionales

PROBLEMA 1 **PA1**

Trobeu les tensions o esforços σ_{AB} i σ_{BC} en cada cas si la secció recta de cada barra té una àrea de 10^{-6} m^2 i les forces s'expressen en N.

①

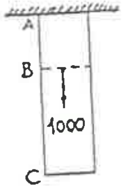


$\sigma_{AB}=\sigma_{BC}=\sigma_{AC}$

$\sigma_{BC} = \frac{10^3}{10^{-6}} = +10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{10^3}{10^{-6}} = +10^9\ Pa$

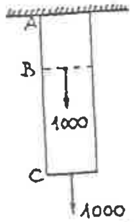
②



$\sigma_{BC} = 0$

$\sigma_{AB} = \frac{10^3}{10^{-6}} = +10^9\ Pa$

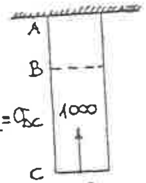
③



$\sigma_{BC} = \frac{10^3}{10^{-6}} = +10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{2\cdot10^3}{10^{-6}} = +2\cdot10^9\ Pa$

④

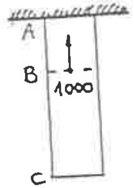


$\sigma_{AB}=\sigma_{BC}=\sigma_{AC}$

$\sigma_{BC} = \frac{-10^3}{10^{-6}} = -10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{-10^3}{10^{-6}} = -10^9\ Pa$

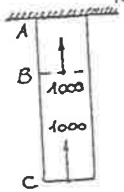
⑤



$\sigma_{BC} = 0$

$\sigma_{AB} = \frac{-10^3}{10^{-6}} = -10^9\ Pa$

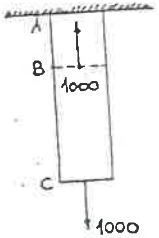
⑥



$\sigma_{BC} = \frac{-10^3}{10^{-6}} = -10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{-2\cdot10^3}{10^{-6}} = -2\cdot10^9\ Pa$

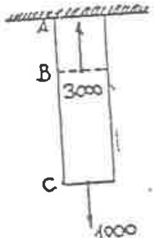
⑦



$\sigma_{BC} = \frac{10^3}{10^{-6}} = +10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = 0$

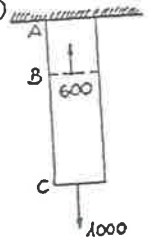
⑧



$\sigma_{BC} = \frac{10^3}{10^{-6}} = +10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{-2\cdot10^3}{10^{-6}} = -2\cdot10^9\ Pa$

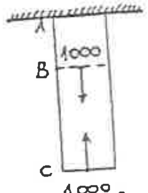
⑨



$\sigma_{BC} = \frac{10^3}{10^{-6}} = +10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{400}{10^{-6}} = +0'4\cdot10^9\ Pa$

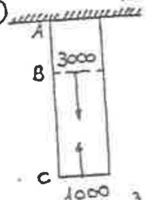
⑩



$\sigma_{BC} = \frac{-10^3}{10^{-6}} = -10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = 0$

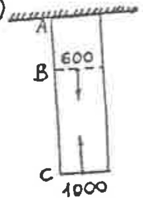
⑪



$\sigma_{BC} = \frac{-10^3}{10^{-6}} = -10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{+2\cdot10^3}{10^{-6}} = +2\cdot10^9\ Pa$

⑫



$\sigma_{BC} = \frac{-10^3}{10^{-6}} = -10^9\ Pa$

$\sigma_{AB} = \frac{-400}{10^{-6}} = -0'4\cdot10^9\ Pa$

A17

PROBLEMA 2 **PA2**

Una barra de acero AC tiene 3 m de longitud y una sección transversal de 10 cm². Sobre ella actúan dos fuerzas, $F_1 = 2\cdot10^5$ N aplicada en su extremo libre C y $F_2 = 10^5$ N aplicada en el punto B, tal como indica la Figura 1. Sabiendo que su módulo de Young es de $Y = 2\cdot10^{11}$ N/m² contestar las dos cuestiones siguientes:

1.- El incremento de longitud de la barra es

A) -0.5 mm
B) 3.10 mm
C) 1.25 mm
D) -2.5 mm
E) Ninguna de las anteriores

2.- La energía elástica almacenada en la barra toma el valor

A) 225 J
B) 345 J
C) 150 J
D) 75 J
E) Ninguna de las anteriores

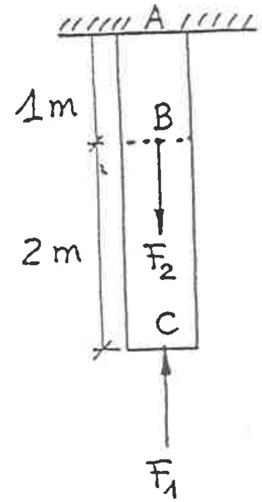


FIGURA 1

PA3

Juny 91

(1)

Un hilo de acero, de 2 m de longitud y 1.2 mm de diámetro, está sujeto por su extremo superior y cuelga verticalmente. Datos: límite proporcionalidad para el acero es $25.0\cdot10^7$ N/m², el módulo de Young es $Y=20.0\cdot10^{10}$ N/m² y el coeficiente de Poisson es $\mu=0.28$. Contestar las 3 cuestiones siguientes:

11.- ¿Qué carga puede soportar en su extremo inferior sin sobrepasar el límite de proporcionalidad?

a) 145.5 N
b) 267.5 N
c) 130.7 N
d) 355.3 N
e) 282.5 N

12.- Los cambios de longitud y de volumen que experimenta el hilo bajo la acción de dicha carga son

a) $\Delta l=1.9$ mm $\Delta V=2.56$ mm³
b) $\Delta l=1.4$ mm $\Delta V=8.55$ mm³
c) $\Delta l=2.5$ mm $\Delta V=4.33$ mm³
d) $\Delta l=2.5$ mm $\Delta V=1.24$ mm³
e) $\Delta l=3.6$ mm $\Delta V=1.26$ mm³

A18

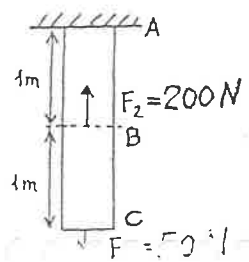
13.- La energía elástica (W) almacenada en el mismo bajo la acción de dicha carga es

a) W=0.35 J
b) W=3.74 J
c) W=2.99 J
d) W=1.45 J
e) W=0.22 J

Ampliació

Si sobre el hilo del problema anterior aplicamos ahora dos fuerzas F_1 = 50 N y F_2 = 200 N tal como se muestra en la figura, calcular: (suponer que el hilo no se dobla)

a) El cambio en longitud que experimenta el hilo.
b) La energía elástica total acumulada.



a) $\Delta l_{AC} = -0'443$ mm

b) $U_{AC} = 0'056$ J

Setembre 95 PA4

(2)

Una barra de longitud 1 m y sección rectangular de 3 cm x 5 cm está sometida a una tracción en la dirección longitudinal de la barra, que produce una deformación unitaria transversal de $-1.2\cdot10^{-4}$ y un aumento de volumen de 0.24 cm³. El módulo de Young de la barra vale $2\cdot10^{11}$ Pa, y el coeficiente de Poisson vale 0.3. Con estos datos, responder a las dos cuestiones siguientes:

1.- El valor de la fuerza de tracción aplicada es, en kN

A) 50
B) 90
C) 200
D) 120
E) Ninguna de las anteriores.

2.- La energía potencial elástica almacenada es, en J

A) 240
B) 2.4
C) 2400
D) 24
E) Ninguna de las anteriores.

Juny 95 PA5

(3)

Una barra AD de 3.5 m de longitud y 5 cm² de sección está sometida a la acción de dos fuerzas F_1 = 100 KN y F_2 = 200 KN tal como indica la Figura 1. Sabiendo que el Módulo de Young es 2.10^{11} N/m² y el coeficiente de Poisson vale 0.3, contestar las dos cuestiones siguientes:

1.- La variación de longitud que sufre la barra expresada en mm es:

A) -1
B) -2
C) 2.5
D) -2.5
E) Ninguna de las anteriores.

2.- La variación de volumen de la barra expresada en cm³

A) 0.50
B) - 0.17
C) - 0.20
D) - 0.40
E) Ninguna de las anteriores.

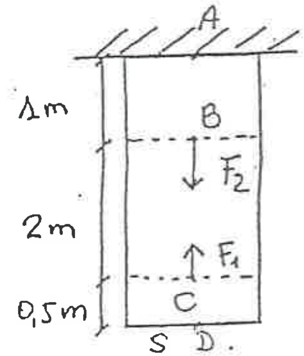


Figura 1