

E.G.T
Electromagnetisme
i òptica



CO
APUNTS

Escola Universitària
Politécnica de Barcelona

Departament de
Física Aplicada

ETT IV
Física I

Apuntes de Física I de Topografía

Optica geométrica



Inma Rodríguez Cantalapiedra

Ana María Lacasta

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Biblioteca

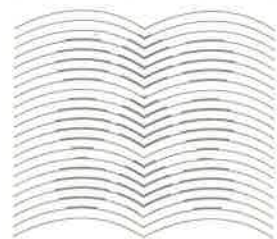


1400262325

Septiembre 1997

A 53
Rod

UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE CATALUNYA



BIBLIOTECA
EX-LIBRIS

1400262325

A 53 Rod

DEPOSITO LEGAL B-39.656./
SEPTIEMBRE 1.997.-

1. Óptica geométrica	1
1.1. La velocidad de la luz	1
1.2. Principio de Fermat	2
1.3. Consecuencias del principio de Fermat: leyes de la reflexión y la refracción.	3
1.4. Difusión de la luz	6
1.5. Marcha de la luz a través de una lámina de caras paralelas.	6
1.6. Marcha de la luz a través de un prisma	8
Problemas resueltos	10
2. Dioptrios y espejos	13
2.1. Dioptrios	13
2.1.1. Dioptrio esférico	14
2.1.2. Dioptrio plano	19
2.2. Espejos	20
2.2.1. Espejo esférico	20
2.2.2. Espejo plano	21
2.2.3. Aberraciones en los espejos esféricos	21
Problemas resueltos	23
3. Sistemas ópticos centrados	31
3.1. Sistema centrado	31
3.1.1. Elementos cardinales	31
3.1.2. Ecuaciones generales	35
3.2. Sistemas compuestos	37
3.3. Lentes.	39
3.3.1. Lentes delgadas. Acoplamiento	41
3.3.2. Sistemas convergentes y divergentes	41
Problemas resueltos	42

Índice

4. Instrumentos ópticos	47
4.1. El ojo como instrumento óptico	47
4.1.1. Defectos de convergencia y de acomodación	48
4.1.2. Ángulo aparente, agudeza visual y poder separador	49
4.2. Cámara fotográfica	49
4.3. La lupa.	50
4.4. El microscopio	51
4.5. Anteojo astronómico	52
Problemas propuestos	55
 Bibliografía	 63

1. OPTICA GEOMETRICA

La **óptica** es la ciencia que trata de las propiedades y de la naturaleza de la luz y sus interacciones con la materia.

La **luz** es una onda electromagnética visible por el ojo humano, cuyo rango de frecuencias es: $4,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < \nu < 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Un **rayo luminoso** es la trayectoria que sigue la luz desde un foco luminoso hasta un receptor. La representación de la luz como rayos constituye una rama de la óptica denominada **óptica geométrica**.

Este capítulo y el siguiente están dedicados a la óptica geométrica y tratan de fenómenos ópticos que pueden comprenderse en términos de rayos, sin recurrir explícitamente a la naturaleza ondulatoria de la luz.

Por supuesto la óptica geométrica tiene sus limitaciones, y existen fenómenos ópticos que requieren para su comprensión de modelos que incorporen las propiedades ondulatorias de la luz. Volveremos sobre estos fenómenos después de haber estudiado el movimiento ondulatorio en general.

1.1. La velocidad de la luz

La luz se mueve en el vacío con una velocidad $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. En cualquier otro medio, la velocidad es siempre menor.

La relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en un medio se denomina **índice de refracción del medio (n)**

$$n = \frac{c}{v} \quad (1.1)$$

Un medio es homogéneo e isótropo cuando la velocidad de la luz es la misma en todos los puntos y direcciones, de manera que su índice de refracción es constante.

Si c , v_1 y v_2 son respectivamente las velocidades de propagación de la luz en el vacío y en los medios 1 y 2 respectivamente y n_1 y n_2 los índices de refracción correspondientes, se

denomina **índice de refracción relativo** al cociente entre los índices de refracción del primer medio respecto al segundo.

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (1.2)$$

Un rayo de luz en un medio homogéneo sigue una trayectoria rectilínea. Sin embargo, cuando incide sobre una superficie que separa dos medios distintos, una parte se refleja y otra se refracta.

Reflexión es el retorno de la luz por el mismo medio en que se propagaba.

Refracción es la penetración en el segundo medio. Al pasar de un medio a otro, la velocidad de la luz experimenta una variación, en este caso se puede hablar de índice de refracción relativo según (1.2)

Tanto en el caso de la reflexión como en el caso de la refracción se produce un cambio en la dirección de propagación atendiendo a un principio de extremal denominado **Principio de Fermat**.

1.2 Principio de Fermat.

En un determinado medio, la luz se propaga con velocidad $v = c/n$. El espacio s recorrido en un cierto tiempo t es por tanto

$$s = v t = \frac{c}{n} t \quad (1.3)$$

Se denomina **camino óptico** δ al espacio que recorrería la luz en el vacío en igual tiempo t :

$$\delta = c t = n s \quad (1.4)$$

Si la luz atraviesa varios medios distintos, el camino óptico total es la suma de caminos **ópticos de cada medio**

$$\delta = \sum n_i s_i = c \sum t_i \quad (1.5)$$

El principio de Fermat establece que *la trayectoria que sigue la luz para ir de un punto a otro es tal que el tiempo utilizado es un extremo*. Esto es equivalente a decir que *la luz recorre siempre el camino óptico extremo (máximo o mínimo) para ir de un punto a otro*.

1.3 Consecuencias del principio de Fermat: leyes de la reflexión y la refracción

1ª) *En un medio homogéneo los rayos de luz se propagan en línea recta.*

En un medio homogéneo el índice de refracción es constante y el camino óptico será mínimo cuando lo sea la trayectoria geométrica, correspondiendo por tanto a un segmento de recta.

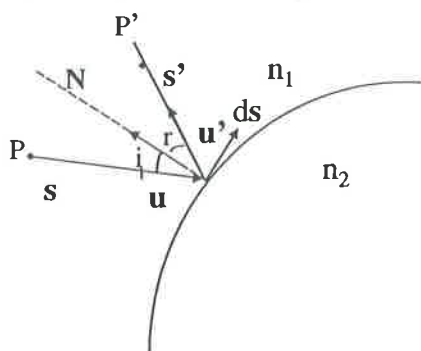


Fig. 1.1 Reflexión de la luz

El camino recorrido será aquel que hace que el tiempo utilizado por la luz en realizar dicho camino sea un extremo, esto significa

$$t = \frac{s}{v_1} + \frac{s'}{v_1} = \frac{1}{c}(n_1 s + n_1 s') \quad ; \quad \delta = n_1 s + n_1 s' \quad (1.6)$$

2ª) *Ley de la reflexión:*
Cuando un rayo se refleja en una superficie, el rayo incidente, la normal a la superficie reflectora en el punto de incidencia y el rayo reflejado están en el mismo plano y los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales.

Supongamos un rayo que parte de P, se refleja en la interfase y pasa por P'. El

y diferenciando e igualando a cero obtendremos la condición para que el tiempo transcurrido sea un extremo

$$dt=0 \Rightarrow d\delta=0 \Rightarrow d(s+s')=0 \quad (1.7)$$

llamando \vec{u} y \vec{u}' a los vectores unitarios en las direcciones de los rayos incidente \vec{s} y reflejado \vec{s}' , la condición de extremo será,

$$\begin{aligned} d(\vec{s}\cdot\vec{u}+\vec{s}'\cdot\vec{u}') &= 0 \Rightarrow \\ \vec{u}\cdot d\vec{s}+\vec{s}\cdot d\vec{u}+\vec{u}'\cdot d\vec{s}'+\vec{s}'\cdot d\vec{u}' &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$d\vec{u}$ y $d\vec{u}'$ serán perpendiculares a \vec{u} y \vec{u}' respectivamente, puesto que estos últimos son unitarios y por tanto $d\vec{u}$ y $d\vec{u}'$ serán perpendiculares a \vec{s} y \vec{s}' respectivamente, y por tanto $d\vec{u}\cdot\vec{s}=d\vec{u}'\cdot\vec{s}'=0$; si además tenemos en cuenta que $d\vec{s}=-d\vec{s}'$,

$$(\vec{u}-\vec{u}')\cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.9)$$

esto significa que $(\vec{u}-\vec{u}')$ tiene que ser perpendicular a $d\vec{s}$ y por tanto tener la misma dirección que la normal, \vec{N} , a la superficie de separación de los dos medios en el punto de incidencia del rayo. Esto sólo se verificará si los vectores \vec{u} , \vec{u}' y \vec{N} son coplanarios. Esto demuestra que el rayo incidente, el reflejado y la normal, están en un mismo plano. Además formando un triángulo isósceles con \vec{u} , \vec{u}' y \vec{N} se demuestra que los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales.

3ª) Ley de la refracción: Cuando un rayo luminoso se refracta en la superficie de separación de dos medios, el rayo incidente, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo refractado están en un mismo plano, que es el de incidencia. La relación entre los senos de los ángulos de incidencia y los de refracción es una cantidad constante, igual al cociente entre el índice de refracción del segundo medio y el índice de refracción del primero (**LEY DE SNELL**).

Supongamos un rayo que parte de P, situado en un medio homogéneo e isótropo de índice de refracción n_1 que incide sobre la superficie de separación de otro medio, análogo al anterior, con índice de refracción n_2 y se refracta pasando por P'. El camino óptico correspondiente será

$$\delta = n_1 s + n_2 s' = n_1 \vec{u} \cdot \vec{s} + n_2 \vec{u}' \cdot \vec{s}' \quad (1.10)$$

siendo \vec{s} el rayo incidente y \vec{s}' el rayo refractado. En este caso la condición de extremo implica que

$$\begin{aligned} d\delta &= n_1 d\vec{u} \cdot \vec{s} + n_1 \vec{u} \cdot d\vec{s} + n_2 d\vec{u}' \cdot \vec{s}' + n_2 \vec{u}' \cdot d\vec{s}' \Rightarrow \\ (n_1 \vec{u} - n_2 \vec{u}') \cdot d\vec{s} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

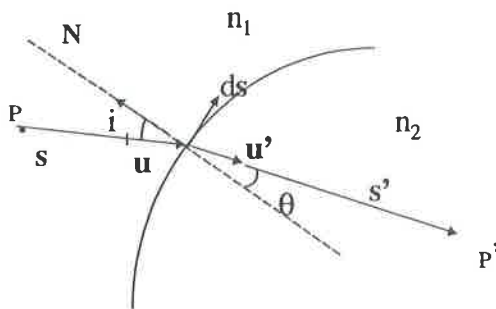


Fig. 1.2 Refracción de la luz

que forma el haz incidente con la normal y θ al ángulo que forma el rayo refractado con la normal, se obtiene la **Ley de Snell**

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \theta} = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow n_1 \text{ sen } i = n_2 \text{ sen } \theta \quad (1.12)$$

La ley de Snell indica que si el índice de refracción del segundo medio es mayor que el del primer medio ($n_2 > n_1$), el ángulo $\theta < i$, de modo que el rayo se desvía acercándose a la normal.

Por tanto el rayo incidente con la dirección y sentido del vector unitario \vec{u} , el rayo refractado con la dirección y sentido del vector unitario \vec{u}' y el vector unitario normal a la superficie de separación de ambos medios en el punto de incidencia \vec{N} , son coplanarios. Además, utilizando el teorema del seno en un triángulo de lados: \vec{N} , $n_1 \vec{u}$, $n_2 \vec{u}'$, y llamando i al ángulo

En cambio, si $n_2 < n_1$, el ángulo $\theta > i$, de modo que el rayo refractado se aleja de la normal. En esta situación, existe un ángulo a partir del cual no se produce refracción y toda la luz se refleja. Para este ángulo de incidencia, denominado **ángulo límite** i_L , el rayo refractado sale tangente a la superficie de separación de los dos medios, de modo que $\theta = 90^\circ$. Cuando el ángulo de incidencia es superior a i_L , se dice que existe **reflexión total**. La reflexión total tiene muchas aplicaciones, como son: el periscopio, los prismáticos, las fibras ópticas, etc.

1.4 Difusión de la luz

En las superficies mates, al encontrar los rayos pequeñas rugosidades en la superficie, estos salen reflejados en todas las direcciones, viéndose entonces los cuerpos regularmente iluminados y produciéndose el fenómeno conocido como la **difusión de la luz**.

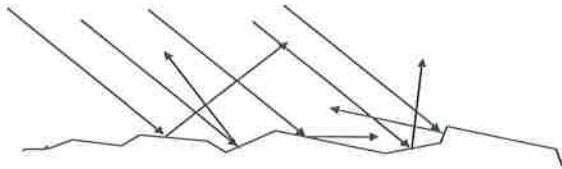


Fig 1. 3 Difusión de la luz

1.5 Marcha de la luz a través de una lámina de caras paralelas.

Sea n_r el índice de refracción relativo de la lámina respecto al medio. Se puede demostrar fácilmente que el rayo incidente forma el mismo ángulo con la normal que el que atraviesa la lámina plano paralela,

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \theta} = n_r ; \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } i'} = \frac{1}{n_r} \Rightarrow i = i' \quad (1.13)$$

El desplazamiento lateral d será

$$d = OO' \text{sen}(O'OH) = \frac{h}{\cos \theta} \text{sen}(i - \theta) \quad (1.14)$$

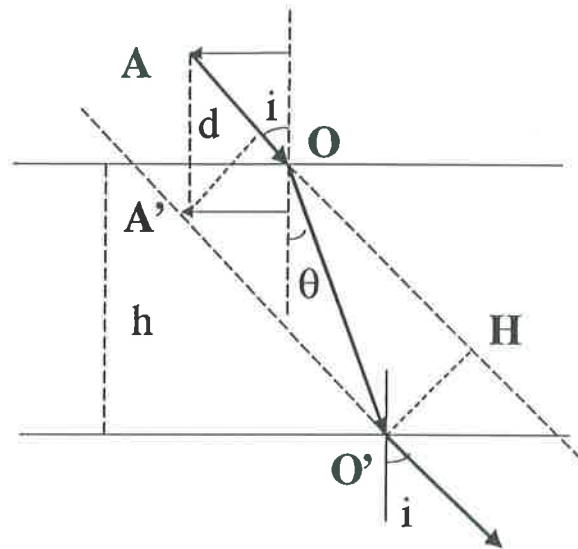


Fig 1. 4 Marcha de la luz a través de una lámina plano paralela

Si colocamos un objeto en un punto A, éste será visto a través de la lámina plano paralela a una distancia

$$AA' = \frac{d}{\text{sen } i} = \frac{h \frac{\text{sen}(i-\theta)}{\cos \theta}}{\text{sen } i} = h \left(1 - \frac{\tan \theta}{\tan i}\right) \quad (1.15)$$

si el ángulo i es pequeño, θ será todavía más pequeño, con lo que

$$\tan i \approx \text{sen } i ; \tan \theta \approx \text{sen } \theta; \frac{\tan i}{\tan \theta} = n_r \quad (1.16)$$

y por tanto

$$AA' = h \left(1 - \frac{1}{n_r}\right) \quad (1.17)$$

1.6 Marcha de la luz a través de un prisma.

Un prisma es un medio transparente limitado por dos dioptrios planos, llamados caras, que se cortan en la arista del prisma. Tomando una sección principal (plano perpendicular a la arista) se determina el ángulo refringente α .

Mirando la figura (1.5) y aplicando la ley de Snell a cada cara resulta

$$\begin{aligned}
 r + r' &= \alpha \\
 \text{sen } r &= \frac{1}{n} \text{sen } i \\
 \text{sen } e &= n \text{sen } r' = n \text{sen } (\alpha - r) \\
 \delta &= i + e - \alpha
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

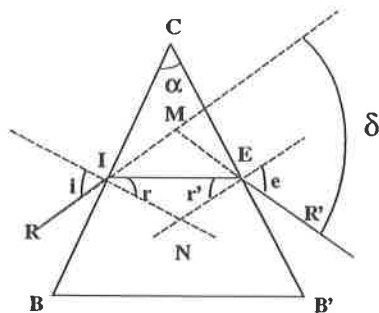


Fig 1. 5 Prisma óptico

La desviación mínima δ_m se obtiene para $i=e$.

$$\delta_m = 2i - \alpha \rightarrow i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \rightarrow r = r' = \frac{\alpha}{2}
 \tag{1.19}$$

Si conocemos δ_m y α podemos hallar n :

siendo este último el ángulo de desviación δ formado por las direcciones de propagación de los rayos incidente y emergente.

Si r' fuese superior al ángulo límite l , respecto al medio que le rodea, sufriría reflexión total y no emergería. Siendo l el valor máximo de r' y también el de r ($i=90$ por tanto $r=l$) entonces el valor máximo de α es $2l$ para que haya emergencia. En este caso un rayo incidente rasante emerge rasante.

$$n = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\text{sen } \frac{(\delta_n + \alpha)}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} \quad (1.20)$$

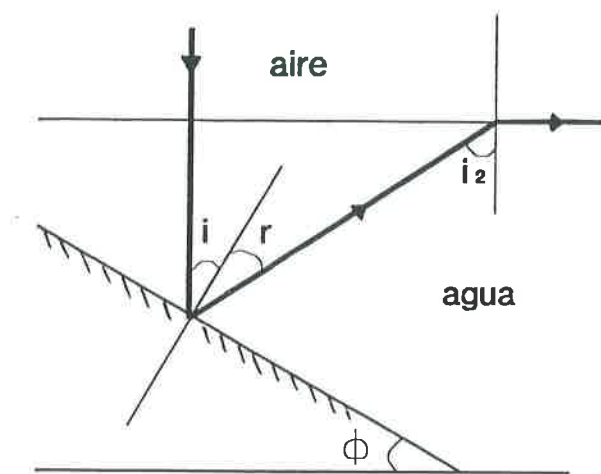
Para ángulos pequeños, $i \approx n \cdot r$ y $e \approx n \cdot r'$, de modo que

$$i + e = n(r + r') = n\alpha \quad \rightarrow \quad \delta = n\alpha - \alpha = (n - 1)\alpha \quad (1.21)$$

Si α es pequeño y la incidencia es casi normal: $n = \delta/\alpha + 1$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Un rayo de luz incide normalmente sobre el agua. Determinar el ángulo ϕ que debe formar con la horizontal un espejo plano situado en el interior del líquido para que el rayo reflejado experimente la reflexión total ($n_{\text{agua}} = 1.33$).



Tal como vemos en el dibujo, el rayo no sufre desviación al penetrar en el agua, ya que incide de forma perpendicular a la superficie de separación.

Al alcanzar el espejo plano, se refleja formando con la normal al espejo un ángulo

$$r = i = \phi$$

A continuación, el rayo llega a la superficie de separación agua-aire formando con la normal un ángulo $i_2 = i + r = 2\phi$ y se refracta.

Según la Ley de Snell: $n_{\text{agua}} \text{ sen } i_2 = n_{\text{aire}} \text{ sen } e$.

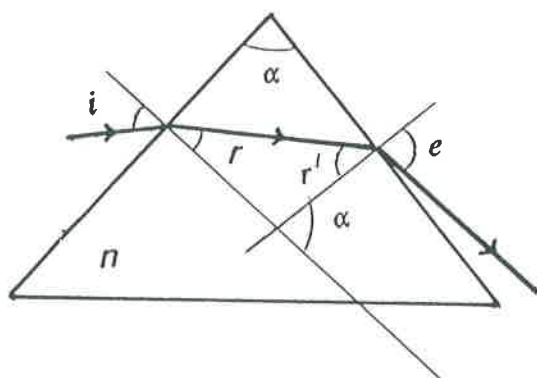
El rayo experimenta reflexión total, así que impondremos que $\text{sen } e = 1$,

con lo que se obtiene:

$$\text{sen } 2\phi = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1}{1.33} = 0.75$$

$$\phi = 24.3^\circ$$

2.- A una de las caras de un prisma de índice de refracción $n = 1.3$ llega un rayo de luz con un ángulo de incidencia de 45° . Se observa que el rayo emergente es normal a la cara de entrada. Obtener el valor del ángulo del prisma.



Que el rayo emergente sea normal a la cara de entrada es equivalente a imponer que (ver dibujo):

$$e = \alpha$$

Aplicamos la ley de Snell a las dos caras del prisma:

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r \Rightarrow \text{sen } r = \frac{\text{sen } 30^\circ}{1.3} \Rightarrow r = 32.95^\circ$$

$$n \text{ sen } r' = \text{sen } e = \text{sen } \alpha$$

Utilizando que $r + r' = \alpha$:

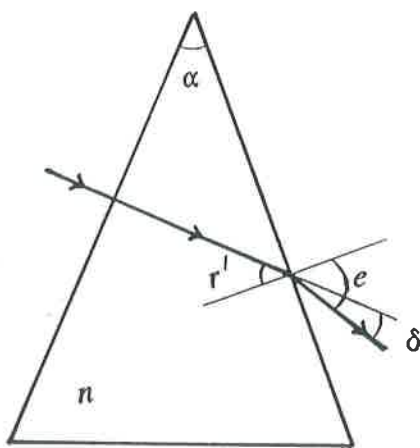
$$\text{sen } \alpha = n \text{ sen } (\alpha - r) = n \text{ sen } \alpha \cos r - n \cos \alpha \text{ sen } r$$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha (n \cos r - 1) = n \cos \alpha \text{ sen } r$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1.3 \text{ sen } r}{1.3 \cos r - 1} \Rightarrow \alpha = 82.67^\circ$$

3.- Se tiene un prisma óptico de ángulo 30° e índice de refracción desconocido. Sabiendo que el ángulo de desviación para el rayo que incide perpendicularmente en la primera cara es de 30° , determinar:

- El valor del índice de refracción del prisma.
- La desviación mínima.



En general, se cumple que:

$$\delta = i + e - \alpha \quad (\text{desviación})$$

$$r + r' = \alpha$$

En este caso concreto

$$\alpha = 30^\circ, \quad \delta = 30^\circ, \quad i = 0^\circ \Rightarrow r = 0^\circ$$

$$\text{de modo que: } e = \delta + \alpha = 60^\circ$$

$$r' = \alpha = 30^\circ$$

Aplicando la Ley de Snell a la segunda superficie del prisma:

$$n \sin r' = \sin e \Rightarrow n = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow n = \sqrt{3}$$

- b) La desviación es mínima cuando $r = r' = \frac{\alpha}{2} = 15^\circ$

$$\text{y vale } \delta_{\min} = 2i - \alpha$$

Aplicamos la Ley de Snell para determinar i :

$$\sin i = n \sin r = \sqrt{3} \sin 15^\circ \Rightarrow i = 26.64^\circ$$

$$\text{y sustituimos en } \delta_{\min}: \quad \delta_{\min} = 23.27^\circ$$

2. DIOPTRIOS Y ESPEJOS.

2.1 Dioptrios

Dioptrio es la superficie de separación de dos medios con distinto índice de refracción. Se llama **Sistema Óptico** a un conjunto de superficies de forma geométrica sencilla que separan medios transparentes de distintos índices de refracción; si están formados por superficies esféricas con los centros alineados los llamaremos **Sistema Óptico Centrado**. A la recta que une los centros la denominaremos **eje del sistema**. A partir de ahora nos referiremos a este tipo de sistemas.

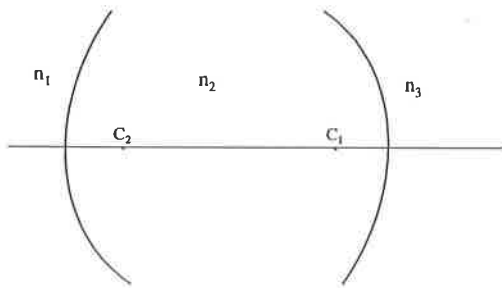


Fig. 2. 1 Sistema óptico centrado

hacen sus prolongaciones en sentido contrario al de propagación, el ojo, recogiendo el haz que sale del sistema, ve una imagen en la intersección de los rayos salientes, **imagen virtual** (Fig.2.2). Existe un **objeto virtual** cuando la luz incidente sobre el sistema óptico es convergente. Suponiendo que la luz se propaga de izquierda a derecha, el espacio anterior a la superficie del dioptrio se llama **espacio objeto real**. El espacio a partir de dicha superficie se llama **espacio objeto virtual**. El espacio a partir de la superficie que limita el sistema óptico por donde sale la luz que lo atraviesa se llama **espacio imagen real** y el espacio anterior a esta superficie **espacio imagen virtual**.

Imagen y objeto real y virtual.

Un haz de rayos procedentes de un punto **objeto real** (O en la Fig. 2.2) después de atravesar el sistema óptico, forma un haz que emerge de este. Si los rayos concurren en un punto, en él se forma una **imagen real**, (punto O' de la Fig. 2.2) la cual se puede hacer visible colocando una pantalla en dicho lugar. Si los rayos no concurren, pero lo

hacen sus prolongaciones en sentido contrario al de propagación, el ojo, recogiendo el haz que sale del sistema, ve una imagen en la intersección de los rayos salientes, **imagen virtual** (Fig.2.2). Existe un **objeto virtual** cuando la luz incidente sobre el sistema óptico es convergente. Suponiendo que la luz se propaga de izquierda a derecha, el espacio anterior a la superficie del dioptrio se llama **espacio objeto real**. El espacio a partir de dicha superficie se llama **espacio objeto virtual**. El espacio a partir de la superficie que limita el sistema óptico por donde sale la luz que lo atraviesa se llama **espacio imagen real** y el espacio anterior a esta superficie **espacio imagen virtual**.

Un sistema óptico se dice que es **estigmático** cuando la imagen real o virtual de un punto

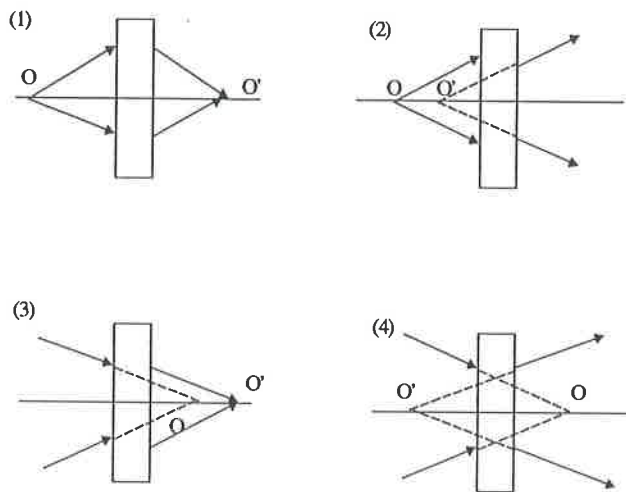


Fig. 2. 2. 1)Obj. e imag. real. 2)Obj. real e imag. virtual. 3)Obj. virtual e imag. real. 4)Obj e imag. virtual.

parta de dicho punto. En general, las figuras no son estigmáticas y sólo con determinadas restricciones consideraremos al sistema como estigmático. (La región en que el sistema es prácticamente estigmático se le llama zona paraxial o de Gauss).

es otro punto (los rayos que parten de un punto después de atravesar el sistema óptico convergen en un punto). Si la luz parte del segundo punto nos dará el primero. Esta propiedad se llama **principio de retorno inverso de los rayos**. Estos dos puntos se llaman **conjugados** respecto al sistema. Así, la condición de estigmatismo equivale a decir que el camino óptico punto luminoso-imagen sea constante para cualquier rayo que

2.1.1 Dioptrio esférico.

El **dioptrio esférico** es una superficie esférica que separa dos medios transparentes con distinto índice de refracción.

Convenio de signos DIN.

Vamos a suponer que la luz se propaga de izquierda a derecha. El origen de coordenadas es O , intersección del eje de simetría con la superficie esférica; a partir de este punto contaremos las distancias en sentido de la luz incidente:

-Distancias: Las distancias serán positivas si van en sentido de propagación de la luz a partir del origen. Así, puntos a la izquierda de O tienen abcisa negativa y a la derecha de O tendrán abcisa positiva. Puntos por encima del eje principal tienen ordenada positiva y por debajo negativa. El radio del dioptrio es positivo si el centro de la esfera está a la derecha del origen y negativo cuando está a la izquierda.

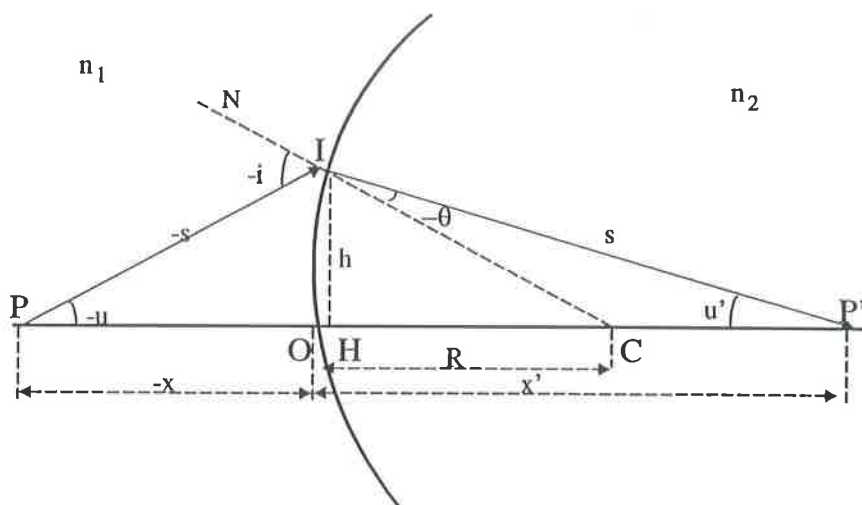


Fig. 2. 3 Marcha de los rayos en un dioptrio esférico

-Ángulos: Los ángulos que forman los rayos con una recta son positivos si al llevar la recta sobre el rayo por el menor ángulo, el sentido de giro es el de las agujas del reloj.

Toda recta que pasa por el centro y corta a la superficie esférica se llama **eje secundario**. Un plano que pase por el eje principal determina una **sección principal**. Todo rayo que tenga la misma dirección que un eje principal o secundario es normal a la superficie y no sufre desviación.

Según la aplicación del principio de Fermat a la refracción (ver Fig. 2.3):

$$\left(\frac{\vec{PI}}{|PI|} n_1 - \frac{\vec{IP}'}{|IP'|} n_2 \right) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.1)$$

Esto significa que

$$\vec{N} = \frac{\vec{IC}}{|IC|} \text{ paralelo con } \frac{\vec{PI}}{|PI|} n_1 - \frac{\vec{IP}'}{|IP'|} n_2. \quad (2.2)$$

Se puede fácilmente demostrar que la imagen de un punto P (determinada por x) depende no sólo de las características del dioptrio, sino de s y s' cuyos valores dependen de la inclinación de los rayos. Esto hace que existan infinitos puntos imagen. Por tanto, el dioptrio esférico es un sistema no estigmático. Nos restringiremos por tanto a la llamada zona paraxial o de Gauss que es aquella en que los rayos están muy próximos al eje, verificándose que la altura (IH), así como la distancia OH, son despreciables frente a los valores de x , x' y R . Podemos por tanto suponer $PI \approx PO \approx PH$; $IP' \approx HP' \approx OP'$. Así, expresando todas las magnitudes con su valor y signo, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PI}}{|PI|} &= \left(\frac{PH}{PI}, \frac{h}{PI} \right) = \left(1, \frac{h}{-x} \right) \\ \frac{\overline{IP'}}{|IP'|} &= \left(\frac{HP'}{IP'}, -\frac{h}{IP'} \right) = \left(1, \frac{h}{-x'} \right) \\ \vec{N} &= \left(-\frac{HC}{R}, \frac{h}{R} \right) = \left(-1, \frac{h}{R} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

A partir de (2.2) y (2.3) y recordando que dos vectores paralelos tienen sus componentes proporcionales, lo que significa que el cociente entre ellas se ha de mantener constante, resulta

$$n_1 - n_2 = \frac{\frac{n_1 - n_2}{x} - \frac{n_2}{x'}}{\frac{1}{R}} = R \left(\frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} \right) \quad (2.4)$$

o bien:

$$\frac{n_1 - n_2}{R} = \frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} \quad (2.5)$$

Fórmula de Gauss para el dioptrio esférico en incidencia paraxial (**estigmatismo perfecto**).

Foco objeto e imagen

Supongamos que llega al dioptrio un haz estrecho de rayos paralelos al eje principal; esto

significa que el punto objeto P está en el infinito. A su imagen P' se le llama **foco imagen F'** del dioptrio y su abcisa f' será la **distancia focal imagen**.

Sustituyendo x por infinito en la ecuación de Gauss (2.5) obtendremos el valor de la distancia focal imagen:

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \quad (2.6)$$

Si $R > 0$ y $n_2 > n_1$, entonces $f' > 0$ por tanto F' está a la derecha de O y es un foco objeto real. Cuando $n_2 < n_1$ o $R < 0$ entonces $f' < 0$ y el foco imagen es virtual.

Un punto F situado sobre el eje principal, a una distancia f del vértice O, tal que su imagen se forme en el infinito, recibe el nombre de **foco objeto** y a f se le llama **distancia focal objeto**. Esto significa que un haz estrecho de rayos que parte de F cuando atraviesa el dioptrio da un haz de rayos paralelos al eje principal. Sustituyendo en (2.5) x' por infinito:

$$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R \quad (2.7)$$

Si $R > 0$ y $n_2 > n_1$, entonces $f < 0$ siendo el foco objeto real, encontrándose por tanto, a la izquierda de O. Si $f > 0$ entonces sería foco objeto virtual. De estas relaciones podemos deducir:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n_2}; \quad (2.8)$$

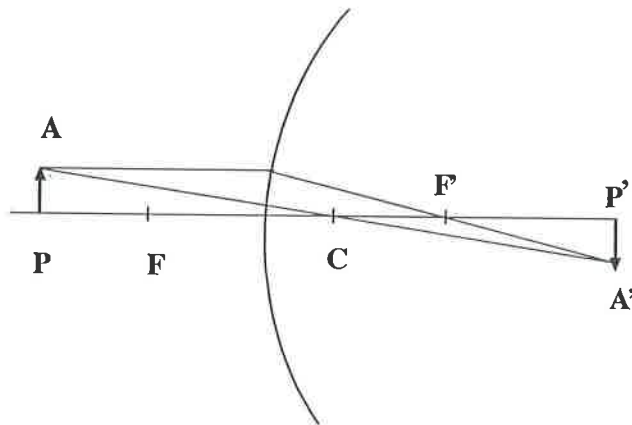
$$f + f' = R$$

A partir de la ecuación (2.8) y dividiendo la ecuación de Gauss (2.5) por n_2 tenemos:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1 \quad (2.9)$$

que es la fórmula que relaciona los puntos conjugados con las distancias focales en aproximación de Gauss.

Construcción gráfica de imágenes



Para obtener la imagen A' de un punto A , conocidos los focos del sistema, bastará trazar un rayo paralelo al eje principal, que pasará por el foco imagen una vez atraviese el dioptrio y otro rayo que pase por el foco objeto que atravesará el dioptrio paralelo al eje. La intersección de ambos rayos determina la posición de A' . Los rayos que no sufren desviación pasan por el centro del dioptrio (C).

Fig. 2. 4 Construcción gráfica de imágenes en un dioptrio esférico.

Aumento lateral y aumento angular.

Aumento lateral β es el cociente de la ordenada del punto imagen a la ordenada del punto objeto:

$$\beta = \frac{P'A'}{PA} = \frac{y'}{y} \quad (2.10)$$

Para hallar dicho aumento lateral tenemos,

$$\begin{aligned} PA = y &= x \tan i \approx x \operatorname{sen} i \\ P'A' = y' &= x' \tan \theta \approx x' \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad \beta = \frac{x' \operatorname{sen} \theta}{x \operatorname{sen} i} = \frac{x' n_1}{x n_2} = -\frac{f x'}{f' x} \quad (2.11)$$

El aumento angular γ es la relación entre los ángulos que forman con el eje un rayo que pasa por los puntos objeto e imagen, situados en el eje

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \approx \frac{u'}{u} \quad (2.12)$$

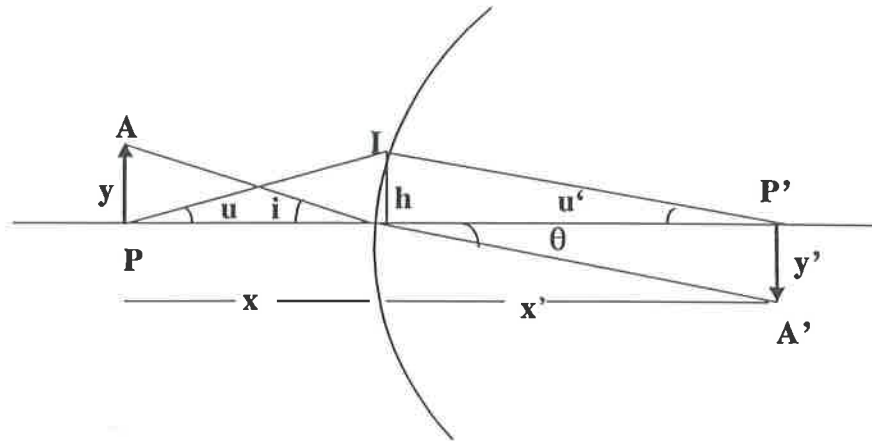


Fig. 2. 5 Aumento lateral y aumento angular

Considerando que estamos en zona paraxial

$$\operatorname{tg} u = \frac{h}{x}; \quad \operatorname{tg} u' = \frac{h}{x'} \Rightarrow \gamma = \frac{x}{x'} = \frac{u'}{u} \quad (2.13)$$

y sustituyendo en el aumento lateral

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x' n_1}{x n_2} = \frac{u n_1}{u' n_2} \Rightarrow n_2 u' y' = n_1 u y \quad (2.14)$$

obtenemos el **invariante de Helmholtz**.

2.1.2 Dioptrio plano

El **dioptrio plano** es una superficie plana que separa dos medios con distinto índice de refracción. Un dioptrio plano forma imágenes virtuales de los objetos reales. Sustituyendo en la ecuación de Gauss (2.5) para el dioptrio esférico con R infinito, obtenemos

$$\frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} = 0 \Rightarrow x' = \frac{n_2}{n_1}x \quad (2.15)$$

donde se puede comprobar que la imagen está a la izquierda y es por tanto virtual, siendo el aumento lateral

$$\beta = \frac{n_1 x'}{n_2 x} = 1 \quad (2.16)$$

La imagen es por tanto virtual derecha y del mismo tamaño que el objeto.

2.2 Espejos

Los espejos son superficies pulimentadas capaces de reflejar la luz. La ley de la reflexión, atendiendo al convenio de signos, puede expresarse como si fuera una refracción con $i = -r$

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen}(-i)} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow n_2 = -n_1 \quad (2.17)$$

De esta forma todas las fórmulas correspondientes a la refracción se pueden aplicar a la reflexión suponiendo que los medios de entrada y salida tienen índices de refracción iguales pero de signo contrario ($n_1 = -n_2$).

2.2.1 Espejo esférico.

Los espejos esféricos pueden estudiarse a partir de las expresiones obtenidas para los dioptrios esféricos, imponiendo que $n_2 = -n_1$. Así la posición y aumento de una imagen viene dada por:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}; \quad \beta = \frac{fs'}{f's} = -\frac{s'}{s} \quad (2.18)$$

y las distancias focales por

$$\begin{aligned} f' &= \frac{n_2}{n_2 - n_1} R = \frac{n_2}{n_2 + n_2} R = \frac{R}{2} \\ f &= -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R = -\frac{-n_2}{n_2 + n_2} R = \frac{R}{2} \end{aligned} \Rightarrow f = f' = \frac{R}{2} \quad (2.19)$$

En el caso de un **espejo convexo** ($R > 0$), los objetos situados a la izquierda ($s < 0$) dan la imagen a la derecha y por tanto son virtuales.

$$s' = \frac{Rs}{2s - R} \Rightarrow 0 < \beta = -\frac{R}{2s - R} < 1 \quad (2.20)$$

Las imágenes son derechas, menores que el objeto y virtuales ($s' > 0$)

En los **espejos cóncavos**, ($R < 0$) pueden distinguirse distintas situaciones: cuando el objeto está situado entre el infinito y el foco objeto, la imagen es real ($s' < 0$) e invertida y si está situada entre el foco objeto y el vértice entonces será virtual ($s' > 0$) y derecha. En cuanto al tamaño se pueden distinguir dos casos: cuando el objeto está entre el centro y el vértice la imagen será mayor que éste y si está entre el centro y el infinito será menor.

2.2.2 Espejo plano.

Las imágenes de los objetos reales en estos espejos son siempre virtuales, del mismo tamaño y simétricas al objeto en relación al plano del espejo,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 0, \quad s < 0 \Rightarrow s' > 0 \quad (2.21)$$

2.2.3 Aberraciones en los espejos esféricos

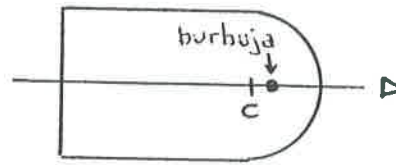
En general, cuando no se consideran rayos paraxiales, la convergencia de los rayos paralelos al eje principal no se produce sobre un punto (foco) sino sobre una línea. La longitud de esa línea se llama **aberración esférica longitudinal**. Si en el foco colocamos una pantalla se

observa una imagen circular cuyo radio se llama **aberración transversal**.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Una varilla cilíndrica de vidrio de índice de refracción 1.5 tiene un extremo con forma semiesférica de 3 cm de radio. En el eje del cilindro y a 2 cm del vértice, hay dentro del vidrio una burbuja de aire de 1 mm de diámetro. Determinar:

- La posición de la imagen que se forma de la burbuja.
- El tamaño de la imagen.



- Según la expresión para dioptrios esféricos:

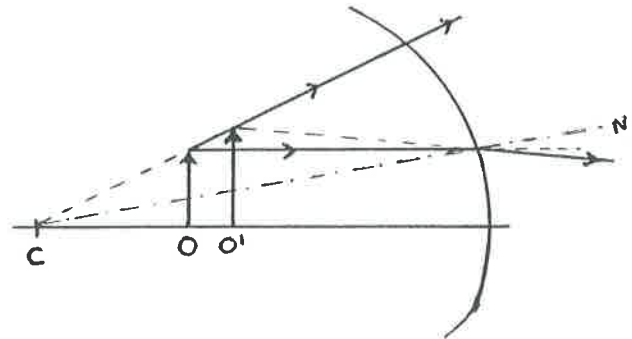
$$\frac{n_1 - n_2}{R} = \frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'}$$

donde $n_1 = n_{\text{vidrio}} = 1.5$ $x = -2 \text{ cm}$

$n_2 = n_{\text{aire}} = 1$ $R = -3 \text{ cm}$

Sustituyendo:

$$\frac{1.5 - 1}{-3} = \frac{1.5}{-2} - \frac{1}{x'} \Rightarrow x' = -1.71 \text{ cm}$$



De modo que la imagen se forma detrás del objeto, 1.71 cm a la izquierda de la superficie semiesférica. Esto quiere decir que al observar la burbuja desde la derecha, se verá **aparentemente** como si estuviera más cerca del extremo de la barra de lo que **realmente** está.

- Para calcular el tamaño de la imagen, aplicamos la fórmula del aumento lateral

$$\frac{y'}{y} = \frac{x' n_1}{x n_2}$$

Sustituyendo:

$$y' = \frac{n_1 x'}{n_2 x} y = \frac{1.5 \cdot 1.71 \text{ cm}}{1 \cdot 2 \text{ cm}} 1 \text{ mm} = 1.3 \text{ mm}$$

2.- Un objeto de 1 mm de altura se observa a través de una esfera de vidrio de 10 cm de radio. Hallar la posición y tamaño de la imagen, si la distancia del objeto al centro de la esfera es de 60 cm. ($n_{\text{vidrio}} = 1.5$).

Para determinar la posición de la imagen final, utilizaremos la imagen formada por la primera superficie refractora como el objeto de la segunda superficie.

Al atravesar la 1ª superficie los rayos pasan de aire a vidrio. Tenemos que:

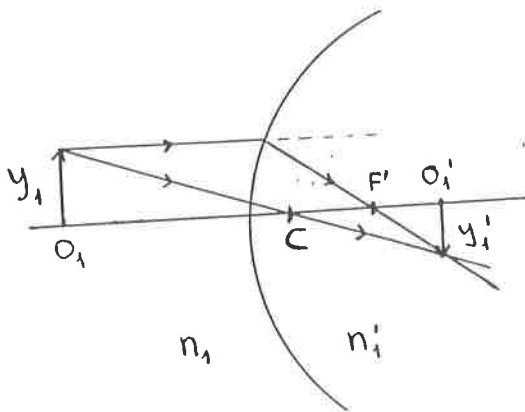
$$\frac{n_1 - n_1'}{R_1} = \frac{n_1}{x_1} - \frac{n_1'}{x_1'}$$

con $n_1 = n_{\text{aire}} = 1$ $x_1 = -50 \text{ cm}$

$n_1' = n_{\text{vidrio}} = 1.5$ $R_1 = 10 \text{ cm}$

sustituyendo: $\frac{1 - 1.5}{10} = \frac{1}{-50} - \frac{1.5}{x_1'} \Rightarrow x_1' = 50 \text{ cm}$

con tamaño: $y_1' = \frac{n_1 x_1'}{n_1' x_1} y_1 = \frac{1 \cdot 50 \text{ cm}}{1.5 \cdot (-50) \text{ cm}} 1 \text{ mm} = -0.67 \text{ mm}$



Este resultado nos indica que la imagen para la 1ª superficie está 50 cm a la derecha de ésta. Sin embargo no llegará a formarse, ya que a 20 cm se encuentra la 2ª superficie, que provocará una nueva refracción de los rayos. La imagen que hemos encontrado servirá de **objeto virtual** al hallar la imagen para la 2ª superficie.

Al atravesar la 2ª superficie, la luz pasa de vidrio a aire, de modo que utilizaremos la expresión:

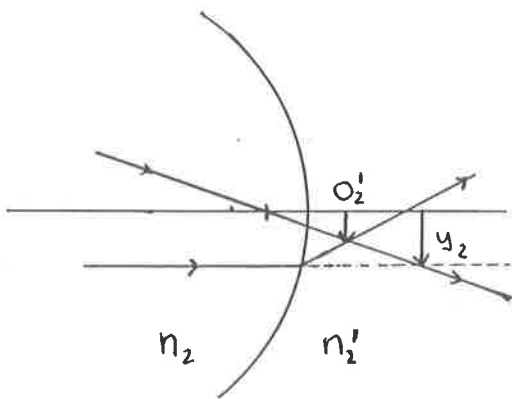
$$\frac{n_2 - n_2'}{R_2} = \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_2'}{x_2'}$$

con $n_2 = n_{\text{vidrio}} = 1.5$ $x_2 = x_1' - e = 30 \text{ cm}$ $e = \text{diámetro de la esfera}$

$n_2' = n_{\text{aire}} = 1$ $R_2 = -10 \text{ cm}$ $y_2 = y_1' = -0.67 \text{ mm}$

sustituyendo: $\frac{1.5 - 1}{-10} = \frac{1.5}{30} - \frac{1}{x_2'} \Rightarrow x_2' = 10 \text{ cm}$

con tamaño: $y_2' = \frac{n_2 x_2'}{n_2' x_2} y_2 = \frac{1.5 \cdot 10 \text{ cm}}{1 \cdot (30) \text{ cm}} (-0.67) \text{ mm} = -0.33 \text{ mm}$



Estos resultados indican que la imagen final se forma 10 cm a la derecha de la esfera. Por tanto es **real**. y_2' nos indica que es **menor** que el objeto inicial y que está **invertida**.

NOTA: En los dibujos no se han pintado las superficies con el tamaño real a fin de que resulten más ilustrativos.

3.- Un pequeño objeto en forma de flecha, de 1 cm de altura, está situado a 20 cm del vértice de un espejo esférico. Delante del espejo, y a 60 cm de su vértice, hay una pantalla sobre la que quiere formarse la imagen del objeto. Determinar:

a) El tipo de espejo.

b) El tamaño y naturaleza de la imagen.

- a) Para poder formar una imagen real, el espejo tiene que ser **cóncavo**. Además, para que se forme donde dice en el enunciado, el objeto tiene que estar situado entre el centro C y el foco F.

Vamos a calcular el radio R del espejo. Según la ecuación para los espejos:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

donde $s = -20 \text{ cm}$

$s' = -60 \text{ cm}$

sustituyendo: $-\frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = -30 \text{ cm}$

El signo negativo de R indica que efectivamente el espejo es cóncavo. Por otro lado, calculando la distancia focal f

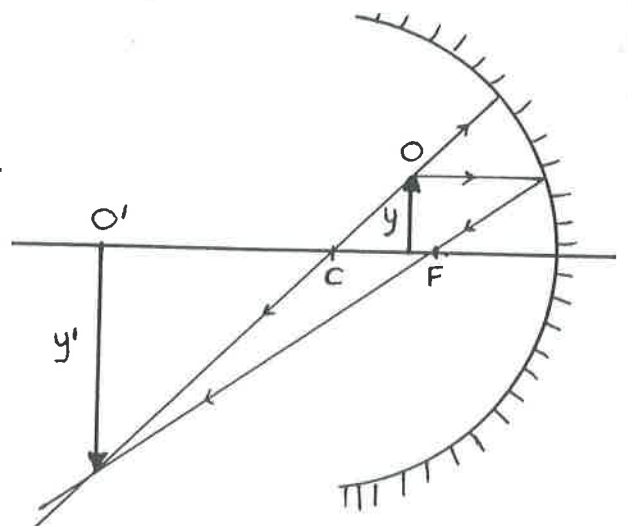
$$f = f' = \frac{R}{2} = -15 \text{ cm}$$

vemos que el objeto está entre el centro y el foco.

- b) Calculamos el tamaño de la imagen:

$$y' = -\frac{s'}{s} y = -\frac{60}{20} \cdot 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

de modo que la imagen es **real, invertida**
y **mayor** que el objeto.



4.- Se tiene un espejo esférico convexo de distancia focal 15 cm. Se coloca un objeto de 5 mm de altura a una distancia de 20 cm del espejo. Determinar el tamaño y la naturaleza de la imagen.

Utilizaremos la ecuación para los espejos:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

con: $s = -20 \text{ cm}$

$$R = 2f = 30 \text{ cm}$$

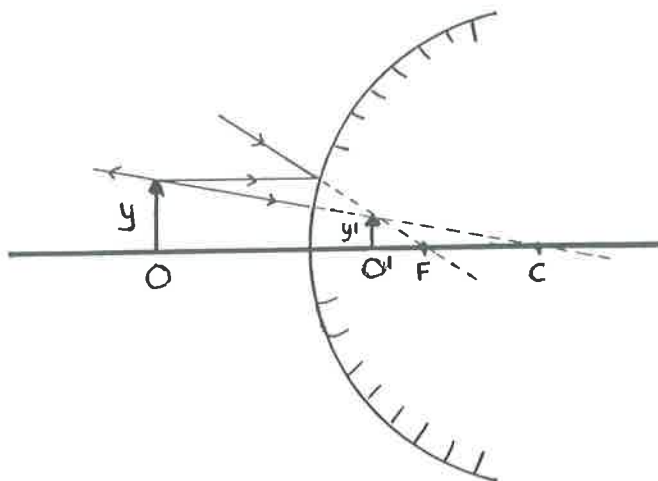
Despejando s' :

$$-\frac{1}{20} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{30} \Rightarrow s' = 8.57 \text{ cm}$$

El signo positivo de s' indica que la imagen se forma a la derecha del espejo, de modo que es virtual. Calculamos el tamaño:

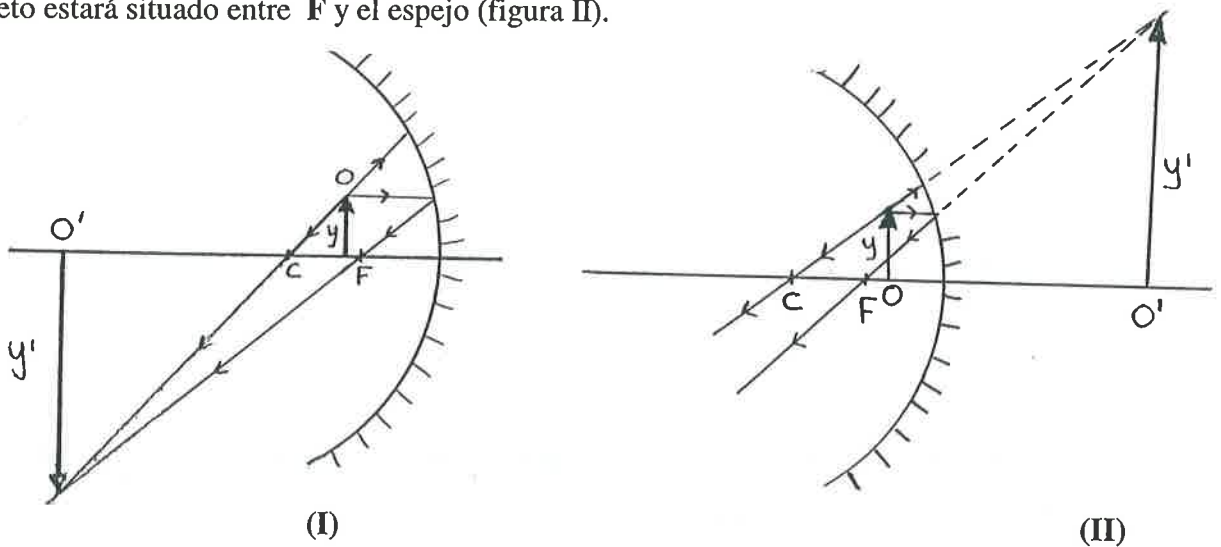
$$y' = -\frac{s'}{s} y = \frac{8.57 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} \cdot 5 \text{ mm} = 2.14 \text{ mm}$$

Por tanto, la imagen es **virtual, positiva y menor** que el objeto.



5. Un objeto colocado frente a un espejo esférico cóncavo forma una imagen real, aumentada cuatro veces. Acercando el objeto 10 cm al espejo se forma una imagen virtual con el mismo aumento. Encontrar la distancia focal del espejo.

Por lo que se indica en el enunciado, inicialmente el objeto tiene que estar situado entre el centro C y el foco F (figura I). Al desplazar el espejo 10 cm, se habrá sobrepasado el foco, y el objeto estará situado entre F y el espejo (figura II).



Para la situación I: $\frac{y_I'}{y_I} = -\frac{s_I'}{s_I} = -4 \Rightarrow s_I' = 4 s_I$

$$\frac{1}{s_I} + \frac{1}{s_I'} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{s_I} + \frac{1}{4 s_I} = \frac{2}{R} \Rightarrow s_I = \frac{5R}{8}$$

Para la situación II: $\frac{y_{II}'}{y_{II}} = -\frac{s_{II}'}{s_{II}} = 4 \Rightarrow s_{II}' = -4 s_{II}$

$$\frac{1}{s_{II}} + \frac{1}{s_{II}'} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{s_{II}} - \frac{1}{4 s_{II}} = \frac{2}{R} \Rightarrow s_{II} = \frac{3R}{8}$$

Se pasa de la situación I a la II acercando 10 cm el objeto a la lente, por tanto:

$$s_{II} = s_I + 10$$

Sustituyendo las expresiones que hemos obtenido para s_I y s_{II} :

$$\frac{3R}{8} = \frac{5R}{8} + 10 \quad \Rightarrow \quad R = -40 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad f = -20 \text{ cm}$$

3. SISTEMAS OPTICOS CENTRADOS.

3.1 Sistema centrado

Es un conjunto de dioptrios esféricos cuyos centros están alineados. A la recta que une los centros se le llama eje del sistema o eje principal del sistema. Se dice que el sistema es estigmático perfecto si a cada punto del espacio objeto le corresponde un solo punto imagen, y la imagen de un plano es un plano.

En todo el estudio de los sistemas centrados, consideraremos rayos en la zona paraxial o de Gauss.

3.1.1 Elementos cardinales.

Existen en los sistemas ópticos tres pares de puntos y otros tres pares de planos que tienen especial importancia: focos y planos focales, puntos y planos principales y puntos y planos nodales.

Focos y planos focales.

Foco objeto es un punto del eje del sistema (F), cuya imagen está en el infinito y sobre el eje.

Plano focal objeto es un plano perpendicular al eje en el foco objeto cuya imagen es otro plano perpendicular al eje y situado en el infinito. Todo haz de rayos procedente de un punto situado en el plano focal objeto forma un haz de rayos paralelos entre sí en el espacio imagen.

Foco imagen (F') es un punto del eje del sistema que es la imagen de un punto situado en el infinito y sobre el eje.

Plano focal imagen es un plano perpendicular al eje en el foco imagen que es la imagen de otro plano perpendicular al eje, situado en el infinito.

Se llama colimador al dispositivo que transforma rayos divergentes en haces paralelos.

Planos y puntos principales.

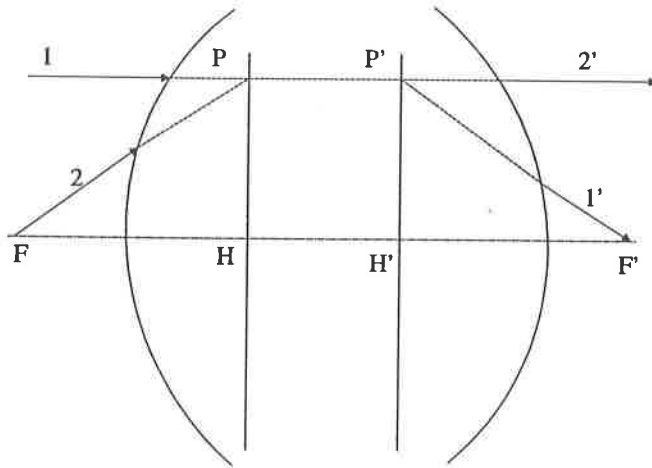


Fig. 3. 1 Planos y puntos principales

misma distancia del eje.

Para construir los planos principales, basta con trazar un rayo paralelo al eje principal, el cual, a la salida pasará por el foco imagen F' . La intersección de las prolongaciones de los rayos

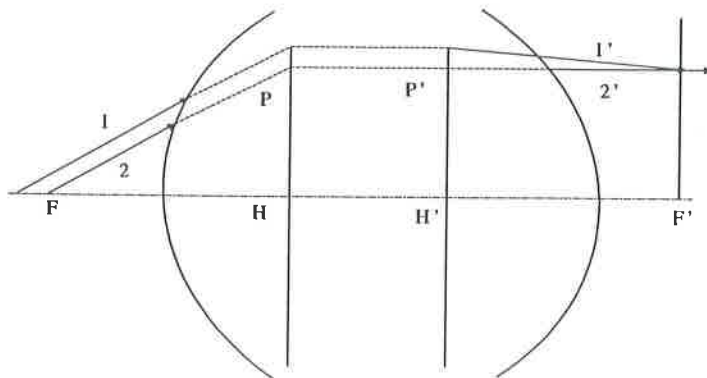


Fig. 3. 2 Utilidad de los planos principales

entrante y saliente será un punto perteneciente al plano principal imagen. La intersección del plano normal al eje que pasa por P' será el punto principal imagen H' . De la misma manera, pero con un rayo de sentido contrario, podremos hallar el plano principal objeto y el punto principal objeto H .

Se llaman planos principales, dos planos conjugados (uno imagen del otro) normales al eje, con aumento lateral $\beta=+1$. Los puntos de intersección con el eje, H y H' son los puntos principales y pueden ser reales o virtuales.

Por tanto, todo haz de rayos que parta de un punto P del plano principal objeto, emergerá concurrendo en un punto P' del plano principal imagen que esté a la

La utilidad de conocer los planos principales y focales reside en que sabiendo su posición podemos determinar la imagen de cualquier punto y su aumento.

Relación entre las distancias focales en un sistema.

Tomemos un punto Q en el plano focal objeto. Todos los rayos que salgan de él serán

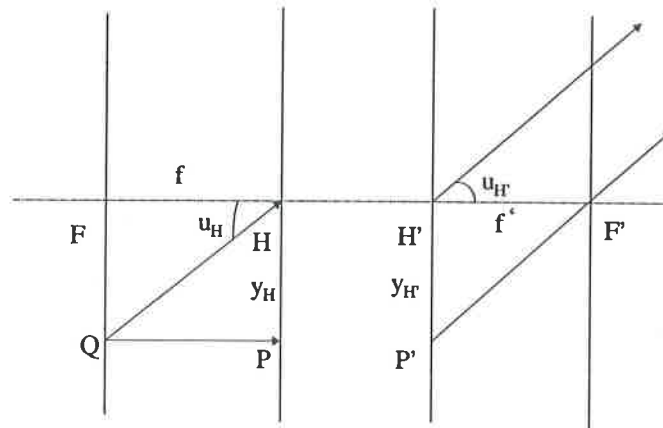


Fig. 3. 3 Relación entre las distancias focales

paralelos entre sí a la salida del sistema óptico. Aplicando el invariante de Helmholtz (2.15) a los puntos H y H', en los que consideramos el objeto y_H y la imagen $y_{H'}$, por cuyos pies pasan los rayos con ángulos u_H , $u_{H'}$ (<0) y considerando que los índices extremos son n_1 y n' , se tendrá

$$n y_H u_H = n' y_{H'} u_{H'} \quad (3.1)$$

pero

$$u_H = -\frac{y_H}{f}; \quad u_{H'} = \frac{y_{H'}}{f'}; \quad y_H = y_{H'} \quad (3.2)$$

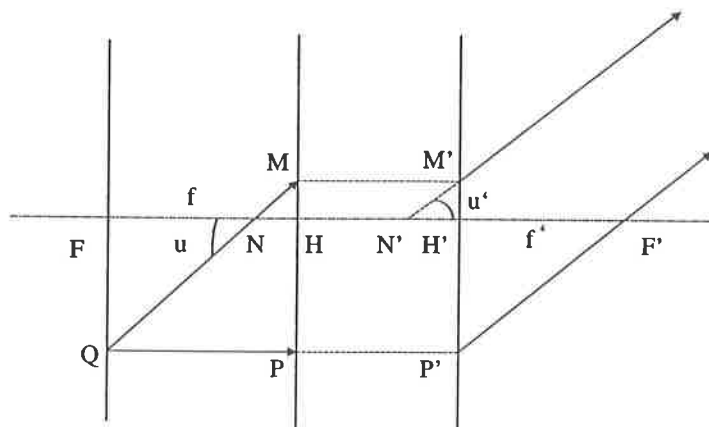
finalmente

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad (3.3)$$

Puntos nodales.

Se llaman así dos puntos conjugados en el eje, N y N', para los cuales el aumento angular

es la unidad, lo que significa que $u=u'$. Para hallarlos, buscaremos la imagen de un punto situado



en el plano focal, Q, que sabemos que se fomarará en el infinito, esto es, todos los rayos que salen del sistema son paralelos entre sí. Tracemos el rayo QP paralelo al eje; el emergente será P'F'. Si ahora trazamos QM paralelo a P'F', su emergente saldrá paralelo a sí mismo, por tanto, este par de rayos determina los puntos nodales N y N', ya que

Fig. 3. 4 Puntos nodales
 $u=u'$.

De la figura se deduce por paralelismo e igualdad de triángulos que $NH=N'H'$, $NN'=HH'$ y también que $FN=f'$ y que $F'N'=f$, ya que los triángulos NHM y N'H'M' son iguales, como QFN y P'H'F'

$$\begin{aligned} NN' &= NH' - N'H' = NH' - NH = HH' \\ F'N' &= N'H' + H'F' = NH + f' = f - f' + f' = f \\ FN &= f - NH = f - N'H' = f - N'F' + f' = f' \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si los índices extremos son iguales, entonces $f=-f'$, $FN=-f'$ y H coincide con N y H' con N'.

Potencia y poder refractor.

Se define la potencia de un sistema, φ , como la recíproca de la distancia focal:

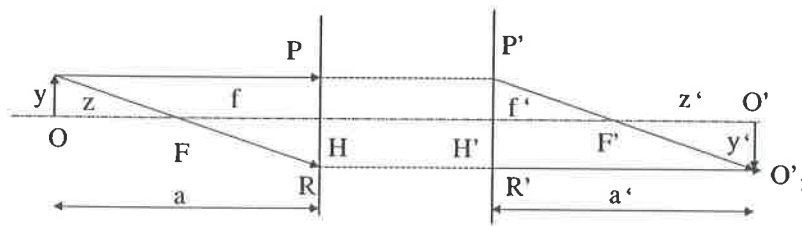
$$\varphi = \frac{1}{f} \quad (3.5)$$

cuando f se mide en metros, entonces φ se mide en dioptrías.

Se denomina poder refractor al cociente del índice del medio por la correspondiente

distancia focal $\mathfrak{F} = n/f$, $\mathfrak{F}' = n'/f'$; así: $\mathfrak{F} = n \varphi$.

3.1.2 Ecuaciones generales.



Si designamos por z y z' las distancias FO y $F'O'$ y por a y a' las HO y $H'O'$ en los sentidos que indica el orden de las letras (la focal se toma siempre del plano principal al foco), teniendo en cuenta que $HR=y'$ y que $H'P'=y$, de la semejanza de los triángulos OO_1F y FHR , y de los $P'H'F'$ y $F'O'O'_1$, se deducen,

Fig. 3. 5 Ecuaciones generales

considerando signos, las siguientes ecuaciones

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{f}{a-f} = -\frac{z'}{f'} = -\frac{a'-f'}{f'} \quad (3.6)$$

(1) (2) (3) (4) (5)

Estas ecuaciones resuelven todos los problemas que puedan plantearse.

Orígenes en los focos.

Igualando las ecuaciones (2) y (4) de (3.6) se obtiene $zz' = ff'$ que es la ecuación de correspondencia de Newton.

Cuando $n=n'$ entonces $f=-f'$, $zz'=-f^2$ y entonces z y z' siempre son de signo contrario.

Orígenes en los puntos principales.

Igualando las ecuaciones (3) y (5) de (3.6) se tiene:

$$\frac{f}{a-f} = \frac{a'-f'}{f'} \Rightarrow \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \quad (3.7)$$

y como $f = -\frac{n}{n'} f'$:

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} \quad (3.8)$$

si $n=n'$ (Como veremos más adelante, esto es lo que sucede normalmente con las lentes delgadas) entonces:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \quad (3.9)$$

como los planos principales están confundidos con la lente, a y a' son las distancias del objeto e imagen, respectivamente, a la lente.

Aumento lateral en función de a y a' .

De (5) de (3.6) tenemos

$$\beta' = \frac{f'-a'}{f'} = 1 - \frac{a'}{f'} \quad (3.10)$$

multiplicando (3.8) por a' y dividiendo por n' se obtiene a'/f' y sustituyendo en (3.10) da

$$\beta' = \frac{n}{n'} \frac{a'}{a} \quad (3.11)$$

Si los índices extremos son iguales

$$\beta' = \frac{a'}{a} \quad (3.12)$$

3.2 Sistemas compuestos.

Acoplemos dos sistemas de los cuales se conocen sus focos y puntos principales. Sea t la distancia de acoplamiento $F_1'F_2$ llamado intervalo óptico, positivo si va en dirección de la luz y negativo en caso contrario (en el caso de la figura positivo). Sea e la distancia de acoplamiento entre los planos principales $H_1'H_2$.

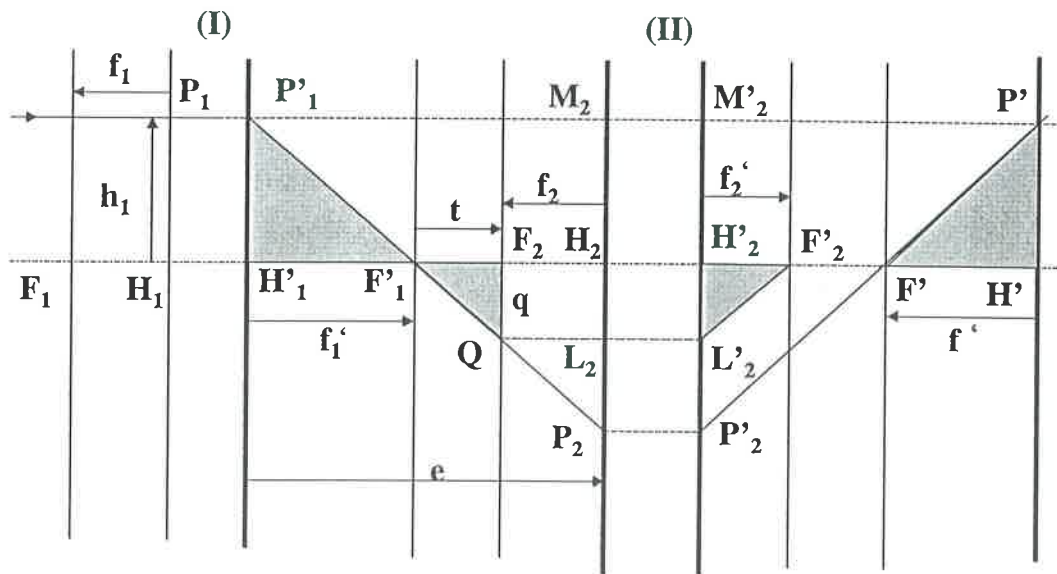


Fig. 3. 6 Sistemas ópticos compuestos

El conjunto funcionará como un sistema único, teniendo que determinar sus elementos cardinales: F, F' y H, H' . Para ello tracemos un rayo paralelo al eje a altura h_1 . Este rayo saldrá del sistema (I) pasando por F_1' y del (II) pasando por F' . Para saber qué dirección toma a partir del sistema (II), tracemos un rayo auxiliar QL_2 , paralelo al eje, que saldrá por F_2' , por tanto el rayo $P_1'P_2$ saldrá del sistema (II) paralelo a $L_2'F_2'$ y determinará F' . Además su intersección con el rayo entrante dará el punto P' del plano principal imagen del sistema compuesto con lo que queda determinado H' .

Para hallar la focal del sistema global, f' , consideremos los siguientes triángulos y sus semejanzas:

$$P_1' H_1' F_1' \approx F_1' Q F_2 \approx P_1' M_2 P_2 \quad (3.13)$$

de los dos primeros y de los dos últimos podemos escribir

$$\frac{h_1}{f_1'} = -\frac{q}{t}, \quad \frac{M_2 P_2}{e} = \frac{q}{t} \quad (3.14)$$

Análogamente

$$H_2' L_2' F_2' \approx F_2' H' P' \approx M_2' P_2' P' \quad (3.15)$$

de los dos primeros y de los dos últimos deducimos

$$\frac{q}{f_2'} = \frac{h_1}{f_1'}, \quad \frac{M_2' P_2'}{M_2' P'} = \frac{q}{f_2'} \quad (3.16)$$

de (3.14) y (3.16) deducimos

$$-\frac{f_1'}{t} = \frac{f_1'}{f_2'} \Rightarrow f_1' = -\frac{f_1' f_2'}{t} \quad (3.17)$$

De la misma manera, considerando que

$$M_2 P_2 = M_2' P_2'; \quad M_2' P' = H_2' H \quad (3.18)$$

podemos deducir

$$H_2' H' = \frac{f_2' e}{t} = -\frac{f_1' e}{f_1'} \quad (3.19)$$

Razonamientos análogos con un rayo por la derecha da:

$$f = \frac{f_1' f_2'}{t}; \quad H_1 H = \frac{f_1' e}{t} = \frac{f e}{f_2'} \quad (3.20)$$

Si en vez de utilizar t , utilizamos $e: t = e - f_1' + f_2'$, podemos obtener la distancia focal y la posición de los planos principales en función de la distancia de acoplamiento

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{e - f_1' + f_2'}; \quad H_2' H' = \frac{e f_2'}{e - f_1' + f_2'}; \quad H_1 H = \frac{e f_1'}{e - f_1' + f_2'}; \quad (3.21)$$

Los sistemas que tienen $F_1' \equiv F_2$ o $t=0$ tienen sus focos en el infinito ($f' = \infty$); entonces se llaman sistemas afocales o telescópicos.

Acoplamiento en aire.

Si los sistemas se acoplan en el aire, que es el caso más corriente,

$$f_1 = -f_1'; \quad f_2 = -f_2'; \quad f = -f' \quad (3.22)$$

por tanto

$$\begin{aligned} f' &= \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e} \\ H_1 H &= \frac{e f_1'}{f_1' + f_2' - e} \\ H_2' H' &= \frac{-e f_2'}{f_1' + f_2' - e} \end{aligned} \quad (3.23)$$

y las distancias de los planos principales a los planos focales serán

$$H_1 F = \frac{f_1'(e - f_2')}{f_1' + f_2' - e}; \quad H_2' F' = \frac{f_2'(f_1' - e)}{f_1' + f_2' - e} \quad (3.24)$$

3.3 Lentes

Podemos considerar una lente como un sistema compuesto formado por dos superficies (dioptrios) de radios r_1 y r_2 . Los puntos principales coinciden en los vértices. La distancia sobre el eje principal de las dos superficies, d , se llama espesor. Si suponemos que la lente está en aire: $n_1 = n_2 = 1$, y que su índice de refracción es n , sustituyendo en lo hallado para dioptrios, ecuación (2.6) y (2.7), tendremos

$$f_1' = \frac{n}{n-1} r_1; \quad f_2' = -\frac{1}{n-1} r_2; \quad (3.25)$$

siendo por tanto la potencia de los dioptrios

$$\frac{1}{f_1'} = \phi_1' = \frac{n-1}{nr_1}; \quad \frac{1}{f_2'} = \phi_2' = -\frac{n-1}{r_2} \quad (3.26)$$

y la potencia del sistema compuesto

$$\phi' = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} \quad (3.27)$$

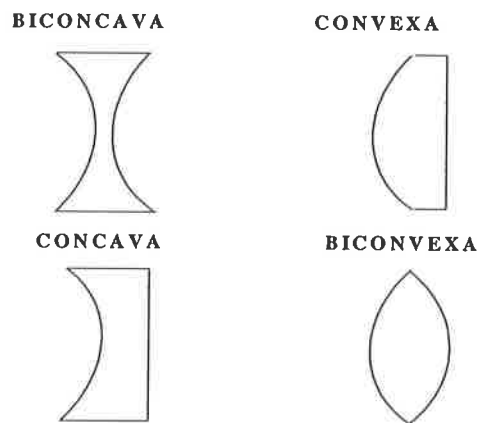


Fig. 3. 7 Tipos de lentes

Para hallar la posición de los planos principales bastará tener en cuenta las ecuaciones (3.19) y (3.20)

$$H_2' H' = -\frac{(n-1)f'd}{nr_1} = \frac{r_2 d}{n(r_1 - r_2) - (n-1)d} \quad (3.28)$$

$$H_1 H = -\frac{(n-1)f'd}{nr_2} = \frac{r_1 d}{n(r_1 - r_2) - (n-1)d} \quad (3.29)$$

3.3.1 Lentes delgadas. Acoplamiento

Una lente se dice que es delgada cuando su espesor es despreciable frente a cada uno de sus radios de curvatura y puede despreciarse el último sumando de (3.27)

$$\frac{1}{f'} = \varphi' = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (3.30)$$

Así pues, se pueden confundir los vértices de las dos superficies y los planos principales; es por ello que se puede representar la lente delgada por un segmento de recta normal al eje y acabado en flecha. Para hallar la imagen a partir del objeto se aplicará la ecuación (3.9). Para su acoplamiento se utilizarán las ecuaciones (3.23) si está acoplado en aire y si no

$$\varphi' = \varphi_1 \frac{n_2}{n_1'} + \varphi_2' - e \varphi_1' \varphi_2' \quad (3.31)$$

3.3.2 Sistemas convergentes y divergentes.

Cuando un haz de rayos incidente paralelo al eje converge realmente en el foco imagen, se dice que el sistema es convergente (foco imagen real). Si el foco imagen es virtual, el sistema es divergente.

PROBLEMAS RESUELTOS

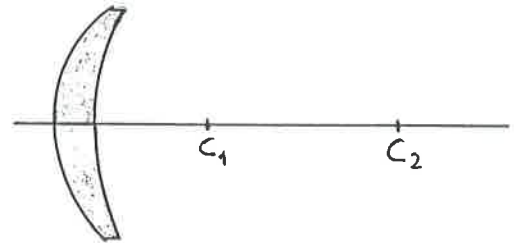
1.- Se tiene una lente delgada convexo-cóncava con radios de 20 y 40 cm respectivamente.
Determinar:

- La distancia focal de la lente
- La posición y tamaño de la imagen de un objeto de 1 cm de altura, situado a 50 cm de la lente y perpendicular al eje óptico.
- Mostrarlo gráficamente.

Índice de refracción del vidrio: $n = 1.4$.

- a) La distancia focal imagen de una lente delgada, depende de los radios de las dos caras según la expresión:

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



En nuestro caso r_1 y r_2 son positivos, ya que los dos centros de curvatura se encuentran a la derecha de las superficies.

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{40} \right) \Rightarrow f' = 100 \text{ cm}$$

f' es positivo, lo que significa que la lente es **convergente**.

- b) La posición de la imagen que una lente forma de un determinado objeto, puede calcularse mediante la ecuación:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}$$

En este caso con $a = -50 \text{ cm}$. Sustituyendo:

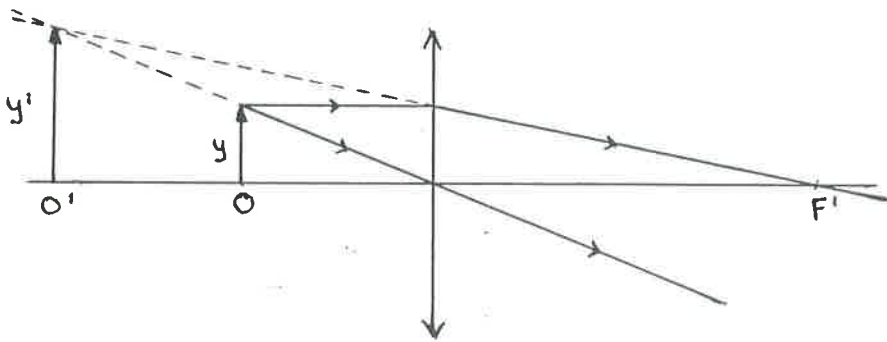
$$\frac{1}{50} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{100} \Rightarrow a' = -100 \text{ cm}$$

de modo que la imagen se forma delante de la lente (es virtual). Su tamaño será:

$$y' = \frac{a'}{a} y = \frac{-100 \text{ cm}}{-50 \text{ cm}} \cdot 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

La imagen es **virtual, positiva y mayor** que el objeto.

c) Gráficamente:



2.- Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas convergentes iguales, de distancia focal de 10 cm cada una de ellas. Un objeto de 1 mm de altura está situado 15 cm a la izquierda de la primera lente. Si la imagen final es real, positiva y cuatro veces mayor que el objeto,

- Determinar la posición de la imagen final.
- Determinar la separación entre las dos lentes.
- Dibujar la marcha de los rayos.
- Calcular la potencia del sistema equivalente.
- Determinar la posición de los planos principales del sistema equivalente. Mostrarlo gráficamente, indicando la posición de los focos imagen y objeto.

a) Para la primera lente, tenemos que: $a_1 = -15 \text{ cm}$

$$y_1 = -1 \text{ mm}$$

$$f_1' = +10 \text{ cm}$$

La 1ª lente forma una imagen a distancia a_1' dada por la expresión

$$-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{15} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{10} \Rightarrow a_1' = 30 \text{ cm}$$

de tamaño

$$y_1' = \frac{a_1'}{a_1} y_1 = -\frac{30}{15} \cdot 1 \text{ mm} = -2 \text{ mm}$$

Ahora, esta imagen hace de objeto para el estudio a través de la 2ª lente:

$$a_2 = a_1' - e$$

$$y_2 = y_1' = -2 \text{ mm}$$

$$f_2' = +10 \text{ cm}$$

Tenemos que imponer que $y_2' = 4 \text{ mm}$, de modo que:

$$y_2' = \frac{a_2'}{a_2} y_2 \Rightarrow a_2' = -2a_2$$

Para esta segunda lente, se tiene que:

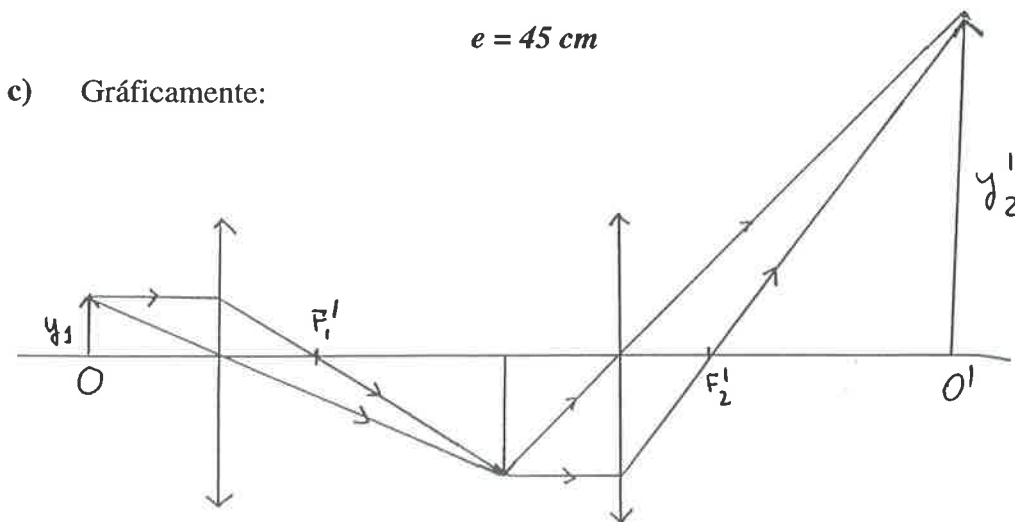
$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow -\frac{1}{a_2} - \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{10} \Rightarrow a_2 = -15 \text{ cm}$$

$$a_2' = -2a_2 \Rightarrow a_2' = 30 \text{ cm}$$

Así pues, la **imagen final** se formará **30 cm a la derecha de la segunda lente**.

- b) Tal como hemos escrito antes, $a_2 = a_1' - e$

Sustituyendo los valores de a_2 y de a_1' , se obtiene:



- d) La distancia focal imagen del sistema equivalente, f' , viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' f_2'} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{45}{100} = -0.25 \text{ cm}^{-1}$$

$$f' = -4 \text{ cm}$$

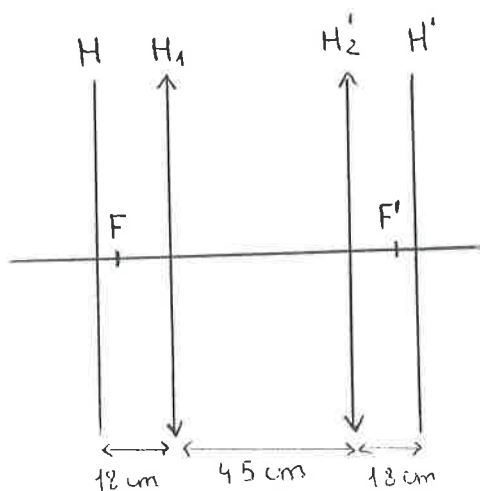
La potencia del sistema equivalente es:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{0.04 \text{ m}} = -25 \text{ dioptrías}$$

e) Planos principales objeto (H) e imagen (H') del sistema equivalente:

$$H_1 H = \frac{e f_1'}{f_1' + f_2' - e} = \frac{45 \cdot 10}{10 + 10 - 45} = -18 \text{ cm}$$

$$H_2' H' = -\frac{e f_2'}{f_1' + f_2' - e} = -\frac{45 \cdot 10}{10 + 10 - 45} = 18 \text{ cm}$$



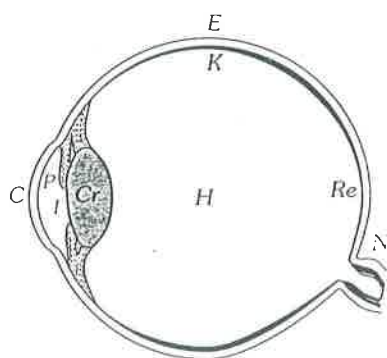
F' : 14 cm a la derecha de la 2ª lente

F : 14 cm a la izquierda de la 1ª lente

4. INSTRUMENTOS ÓPTICOS

4.1 El ojo como instrumento óptico.

El ojo humano es sensiblemente esférico, recubierto por una envoltura externa llamada **esclerótica (E)**. En la parte anterior es transparente y se llama **córnea (C)**. La esclerótica está revestida interiormente por una membrana oscura llamada **coroides (K)**, que en su parte anterior, al llegar a la córnea, se separa de la esclerótica y queda formado el diafragma **iris (I)**, con una abertura circular llamada **pupila (P)**, la cual regula la intensidad de la luz entrante, al variar su diámetro de 2 a 8mm.



Detrás del iris se encuentra el **cristalino (Cr)**, lente convergente, no del todo homogénea, cuyo índice de refracción medio es 1.42 y su espesor 3.6 mm. Esta lente, elástica, cambia de curvatura por la acción del músculo ciliar: esto significa que puede variar la distancia focal. El fondo del ojo está recubierto por la **retina (Re)**, en la cual terminan gran número de fibras del nervio óptico. En la retina se forman las imágenes de los objetos exteriores.

Entre la córnea y el cristalino existe un líquido transparente llamado **humor acuoso (H)**, cuyo índice de refracción es de 1.336; entre el cristalino y la retina existe un líquido transparente y viscoso de índice de refracción prácticamente igual al anterior.

Cuando el ojo está enfocado al infinito la relación entre las distancias focales y la distancia entre los planos principales será:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} = -\frac{22.74\text{mm}}{-17.06\text{mm}} = 1.336 \quad (4.1)$$

$$HH' = 0.25\text{mm}$$

estando el plano principal objeto, H , a 1.35mm detrás de la córnea. Podemos suponer que los planos principales se confunden, $H=H'$, pudiendo considerar al ojo humano como un dioptrio esférico de índice $n=1.33$ colocado en el aire, cuyo vértice estará 2mm detrás de la córnea y su distancia focal objeto será, $f=-17\text{mm}$, y la distancia focal imagen, $f=23\text{mm}$. También puede considerarse como una lente delgada en el aire cuyo centro óptico C estará a 6mm por detrás de la córnea y con distancia focal, $f=17\text{mm}$.

La imagen de objetos alejados se forman directamente sobre la retina donde está el foco. En esta se encuentran células llamadas *conos* y *bastones*, obteniéndose una visión tanto más detallada cuantas más células abarca la imagen. La densidad de elementos sensible es máxima en una zona denominada *la mancha amarilla*. Las células más sensibles a la luz son los conos.

El campo de visión del ojo se extiende a todos los objetos situados dentro de un cono de vértice la pupila y de abertura 130° . Pero la visión nítida es para las imágenes formadas sobre la mancha amarilla; entonces el campo de visión es mucho menor, siendo el ángulo de unos 45° . Sin mover la cabeza, sólo con el movimiento ocular, el campo de visión nítida es de unos 40° .

Cuando queremos ver con nitidez objetos cercanos debemos acomodar, es decir, variar la curvatura del cristalino de modo que la imagen se forme en la retina. Cuando el objeto está a distancia inferior a 20 o 25cm, un ojo normal no puede verlo con nitidez. A esta distancia se le llama **distancia mínima de visión distinta**, el punto situado a esta distancia se le llama **punto próximo** y en general lo tomaremos a una distancia de 25 cm. Al lugar más lejano que el ojo distingue con nitidez se le llama **punto remoto**. Para un ojo normal este punto está en el infinito.

4.1.1 Defectos de convergencia y de acomodación.

Los defectos de convergencia son debidos a que la curvatura del cristalino es distinta de la normal. Estos defectos son:

Miopía.

Cuando la curvatura del cristalino sin acomodar es demasiado elevada entonces F' se encuentra delante de la retina y para corregirlo es necesaria una lente divergente. El ojo miope no ve con nitidez los objetos situados del infinito al punto remoto.

Hipermetropía.

Cuando el cristalino sin acomodar es poco convergente, entonces F' se encuentra detrás de la retina y hacen falta lentes convergentes para corregirlo. El ojo hipermetrope tiene el punto próximo más lejano que el ojo normal.

Presbicia.

La presbicia o vista cansada es un defecto adquirido con la edad. El cristalino pierde flexibilidad y los músculos ciliares se debilitan y, por tanto, el poder de acomodación disminuye alejándose el punto próximo. El defecto se corrige con lentes convergentes.

Astigmatismo.

Es debido a que las superficies no son de revolución teniendo por tanto distinta curvatura. Se corrige con lentes cilíndricas.

4.1.2 Ángulo aparente, agudeza visual y poder separador

Ángulo aparente de un objeto es el ángulo bajo el cual se ven sus extremos. Cuanto mayor es el ángulo aparente, tanto mayor es la imagen que se forma en la retina.

Ángulo de **agudeza visual** es el mínimo ángulo bajo el cual se pueden ver dos puntos separadamente ; a la inversa de tal ángulo se le llama **poder separador**.

Siguiendo el criterio de Rayleigh, la agudeza visual toma el valor

$$\varphi \geq \frac{1,22\lambda}{Dn} \quad (4.2)$$

siendo λ la longitud de onda en el vacío de la luz que penetra en el ojo, D el diámetro de la pupila y n el índice de refracción del ojo. Suponiendo para la pupila un diámetro de 2 mm, resulta

$$\varphi \geq 91,5\lambda \quad (4.3)$$

4.2 Cámara fotográfica

La misión de la cámara fotográfica es formar imágenes reales y menores, que proyectadas

sobre una placa sensible a la luz, reproduzcan el objeto. Consta de una lente o un sistema de lentes convergentes (objetivo), una pantalla (placa fotográfica), un sistema de apertura variable y un obturador que puede abrirse durante un tiempo corto. El objeto está colocado entre el doble de la distancia focal y el infinito, dando así imágenes menores e invertidas. Cualquier dispositivo modificador de la distancia entre el objetivo y la placa, permite enfocar (imagen en la placa sensible a la luz).

El tamaño máximo de la apertura está limitado por el sistema de lentes y sus aberraciones. El tamaño de apertura viene dado por el **número f**, que es el cociente entre la distancia focal y el diámetro de apertura

$$\text{Número } f = \frac{f}{D} \quad (4.4)$$

Las posiciones de apertura de una cámara suelen marcarse $f/22$, $f/16$, $f/11$, $f/8$,... Un *número f* menor representa una mayor apertura. Como la cantidad de luz es proporcional al cuadrado del diámetro, una reducción del *número f* representa una disminución del tiempo de exposición (una mayor velocidad de apertura del obturador).

4.3 La lupa

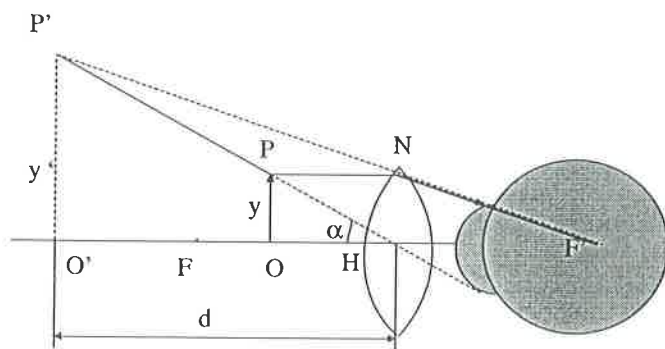


Fig. 4. 1 Lupa

La lupa es una lente convergente destinada a formar imágenes que perciba el ojo con un ángulo aparente mayor que el correspondiente a la visión del objeto colocado en el punto próximo.

La imagen debe ser virtual, por tanto, el objeto debe colocarse entre el foco y la lente.

Se llama **aumento visual** al cociente de dividir la altura de la imagen retiniana formada con el instrumento, por

la altura de la imagen retiniana visto el objeto sin el instrumento. Si el objeto es pequeño, la imagen retiniana sin aparato, corresponde a la del objeto situado en el punto próximo del ojo. Como la altura de la imagen retiniana es proporcional a la tangente del ángulo de la visión, podremos definir el aumento visual de la lupa como

$$A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{y' / (-d)}{y' / (-l)} = \frac{y' l}{y d} \quad (4.5)$$

siendo y' e y , las alturas de la imagen y el objeto respectivamente, d la distancia del centro óptico a la imagen y l la mínima distancia de la visión directa. Considerando los triángulos semejantes $P'O'F'$ y NHF' obtenemos

$$\frac{y'}{y} = \frac{-d + f'}{f'} = \frac{-d}{f'} + 1 \quad (4.6)$$

por sustitución obtenemos

$$A = \left(\frac{-d}{f'} + 1 \right) \frac{l}{d} = \frac{-l}{f'} + \frac{l}{d} \quad (4.7)$$

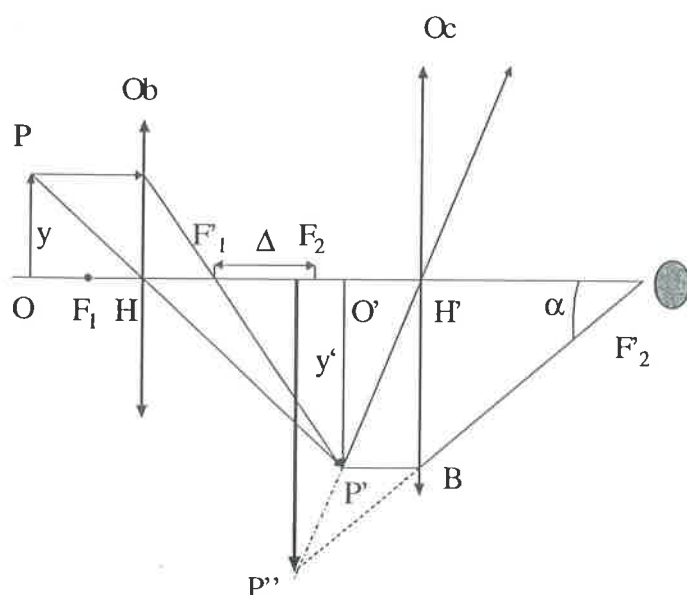


Fig. 4. 2 Microscopio

Si el objeto se encuentra en el plano focal, la imagen se forma en el infinito $d = \infty$ y no necesitamos acomodación para observarla; considerando que la distancia mínima de visión neta es $l = 0.25$ m, hace que el aumento visual sea la cuarta parte de su potencia en dioptrías.

4.4 El microscopio

La finalidad del microscopio es formar imágenes que perciba el ojo

con un ángulo aparente mayor que el correspondiente a la visión del objeto en el punto próximo.

Consta de dos sistemas de lentes llamados objetivo y ocular. La misión del objetivo es formar imágenes reales y mayores; el objeto ha de colocarse entre el foco objeto y el doble de la distancia focal. La misión del ocular es idéntica a la de la lupa: formar imágenes virtuales.

4.5 Anteojo astronómico.

El anteojo astronómico tiene por finalidad observar los objetos situados en el infinito con un mayor ángulo que en la visión directa.

Los rayos procedentes de un punto situado en el borde superior de un objeto muy lejano,

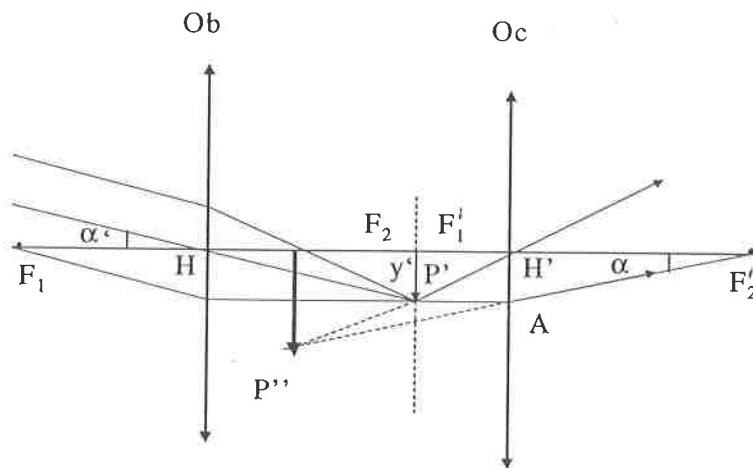


Fig. 4. 3 Anteojo astronómico

llegan al anteojo paralelos entre sí y con una cierta inclinación con respecto al eje. Recibidos en un sistema convergente, objetivo, forman una imagen real en un punto situado en el plano focal. Esta imagen se observa a través del ocular y actúa como la lupa o el microscopio. La pupila del ojo se coloca en un punto muy próximo al foco del ocular,

para captar el mayor flujo luminoso posible que parte del punto objeto.

La montura del objetivo es la **pupila de entrada del sistema**, limitando el flujo luminoso entrante en el anteojo; la imagen de tal abertura en el ocular, determina la **pupila de salida**, que da paso a todo el flujo luminoso.

El aumento es directamente proporcional a la potencia del ocular, e inversamente proporcional a la potencia del objetivo. Sea el triángulo $H'F'_2A$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{H'A}{H'F'_2} = \frac{-y'}{f'_2} \quad (4.8)$$

y en el triángulo HF'_1P'

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{F'_1P'}{HF'_1} = \frac{-y'}{f'_1}$$

(4.9)

Por tanto el aumento visual será

$$A = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

(4.10)

El valor negativo nos indica que las imágenes están invertidas.

Para obtener grandes aumentos el objetivo debe ser de pequeña potencia y el ocular de gran potencia. El anteojo astronómico es uno de los llamados sistemas telescópicos.

PROBLEMAS PROPUESTOS**ÓPTICA GEOMÉTRICA**

- 1.- Sobre una de las caras de un cubo de vidrio incide luz con un ángulo de incidencia de 60° . Parte de la luz es refractada y parte reflejada. Si estos dos haces forman un ángulo de 90° , ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio?
Sol.: 1.73
- 2.- Se quiere construir una piscina circular de 8 m de diámetro con un foco luminoso en el centro del fondo. ¿Qué profundidad tiene que tener la piscina para que, cuando esté llena de agua, toda la luz salga de ésta? ($n_{\text{agua}}=4/3$).
Sol.: ≥ 3.5 m
- 3.- Una lámina de vidrio cuyo índice de refracción vale 1.75 tiene forma de cuña. Calcular el ángulo α que forman las dos caras de la lámina entre sí, sabiendo que un rayo de luz que incide sobre una de las caras con un ángulo de 30° se refracta sobre la otra según el ángulo límite. El medio que rodea a la lámina es aire.
Sol.: $18,25^\circ$ ó $51,45^\circ$
- 4.- Un rayo de luz incide perpendicularmente sobre una de las caras laterales de un prisma óptico de índice de refracción $n = 1.5$ y un ángulo de refringencia $\alpha = 30^\circ$. Calcular:
a) El ángulo de desviación en este caso.
b) Calcular el ángulo de desviación mínima para este prisma.
Sol.: a) 16.6° ; b) 15.7
- 5.- Determinar el índice de refracción de un prisma, cuyo ángulo de refringencia es 30° , sabiendo que el ángulo de mínima desviación es 16° .
Sol.: 1.51

- 6.- Un avión y un submarino están en un instante dado en la misma vertical. El avión vuela a 100 m. de altura. Sabiendo que la distancia aparente desde el avión al submarino es de 108 m. Calcular la profundidad del submarino y la distancia aparente vista desde el submarino al avión.
Sol.: 10.67 m; 144 m
- 7.- Un pez se encuentra a 10 cm de la superficie delantera de una pecera de radio 20 cm.
a) ¿Dónde parece que está el pez para una persona que lo ve mirándolo de frente a la pecera?
b) ¿Dónde parecerá que está el pez cuando se encuentre a 30 cm de la superficie delantera de la pecera?
Sol.: a) -8.6 cm b) -36 cm
- 8.- El extremo de una varilla cilíndrica de vidrio, de índice de refracción 1.6, está limitado por una superficie semiesférica de 2 cm de radio. A la izquierda del vértice de esta superficie y a 8 cm de ella, se coloca un objeto de 1 mm de altura, perpendicular al eje y apoyado sobre él.
a) Hallar las distancias focales objeto e imagen de dicho dioptrio
b) Determinar la posición de la imagen y decir si es real o virtual
c) Determinar el tamaño de la imagen
d) Mostrarlo gráficamente
Sol.: a) $f'=5.33$ cm; $f=-3.33$ b) 9.14 cm; real; c) -0.71 mm
- 9.- Un objeto de 1 mm de altura se observa a través de una esfera de vidrio de 10 cm de radio. Hallar la posición y tamaño de la imagen, si la distancia del objeto al centro de la esfera es de 40 cm ($n_{\text{vidrio}} = 1.5$).
Sol.: 24 cm a la derecha del centro de la esfera; -0.6 mm
- 10.- Un pequeño objeto se encuentra sobre el eje de un espejo cóncavo de radio 30 cm y a 25 cm de su vértice. Hallar la posición de la imagen.
Sol.: -37.5 cm

- 11.- Un pequeño objeto en forma de flecha de 4 mm de altura, está situado a 20 cm del vértice de un espejo esférico. Delante del espejo, y a 5 m de su vértice, hay una pantalla sobre la que quiere formarse la imagen del objeto.
- a) ¿De qué tipo de espejo se trata?
- b) Determinar el tamaño y la naturaleza de la imagen.
- Sol.: a) cóncavo b) -100 mm; real, invertida, mayor*
- 12.- Hallar la distancia focal de un espejo esférico sabiendo que, al alejar 15 cm un objeto colocado inicialmente a 50 cm del mismo, la distancia entre el espejo y la imagen se reduce a la mitad.
- Sol.: -40.6 cm*
- 13.- Un objeto colocado frente a un espejo esférico cóncavo forma una imagen real, aumentada cuatro veces. Acercando el objeto 10 cm al espejo se forma una imagen virtual con el mismo aumento.
- Encontrar la distancia focal del espejo.
- Sol.: -20 cm*
- 14.- Un punto luminoso está situado sobre el eje de un espejo cóncavo de 3 m de radio, entre dicho espejo y otro espejo plano normal al eje del primero. La distancia entre los espejos es de 4 m. ¿Cuál debe ser la posición del punto para que, reflejándose sucesivamente los rayos sobre los dos espejos, la imagen coincida con el punto objeto?
- Sol.: a 2 m del espejo cóncavo*
- 15.- Dos espejos esféricos cóncavos iguales, de 4 cm de radio, están colocados uno enfrente de otro, de tal manera que el centro de uno coincide con el vértice del otro. Un punto luminoso se encuentra sobre el eje óptico, entre los dos espejos, a 1 cm del primero de ellos. Determinar la posición de las imágenes dadas por los rayos reflejados sucesivamente en los dos espejos. Mostrarlo gráficamente.
- Sol.: coincide con el objeto*

- 16.- Se tiene una lente convexo-cóncava de radios 40-50 cm respectivamente, e índice de refracción 1.4
- a) Hallar su distancia focal.
- b) Determinar la posición y el tamaño de la imagen de un objeto situado a 60 cm de la lente, de 1 cm de altura y perpendicular al eje óptico.

Sol.: a) 5 m; b) 68.18 cm a la izquierda de la lente; 1.136 cm

- 17.- Una lente biconvexa de vidrio de $n = 1.5$ tiene sus dos caras de la misma curvatura. Si situamos un objeto a 20 cm de la lente se produce una imagen virtual de tamaño 5 veces mayor que el objeto. Hallar el radio de curvatura de la lente y la distancia focal.

Sol.: 25 cm; 25 cm

- 18.- Un objeto está situado 40 cm delante de una lente que da una imagen virtual y más pequeña del objeto. Detrás de esta lente y a 30 cm de ella se coloca una lente convergente de focal 15 cm, formándose la imagen final 90 cm a la derecha del objeto. Hallar la distancia focal de la 1ª lente.

Sol.: -120 cm

- 19.- Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas, una convergente y otra divergente de potencia $P_1=20$ dioptrías y $P_2=-20$ dioptrías respectivamente, dispuestas con el eje óptico común y separadas 10 cm. Determinar la posición y el aumento de la imagen que dicho sistema forma de un objeto situado perpendicularmente al eje óptico, 20 cm a la izquierda de la lente convergente. Dibujar la marcha de los rayos.

Sol.: 2 cm a la izquierda de la lente divergente; -0.2

- 20.- Un objeto está situado a una distancia de 20 cm delante de una lente divergente, cuya distancia focal es 20 cm. Detrás de la lente divergente se coloca una convergente de 30 cm de distancia focal, formándose la imagen final del objeto en el infinito. Determinar la distancia entre ambas lentes.

Sol.: 20 cm

21.- Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas que distan entre sí 40 cm. La primera es plano-convexa de radio 8 cm e índice de refracción $n = 1.8$. La segunda es biconvexa de radios 4 y 6 cms e índice de refracción $n = 1.6$. Se coloca un objeto de 2 mm de tamaño a 20 cm de la primera lente.

a) Determinar la posición y naturaleza de la imagen final.

b) Determinar el tamaño de la imagen final.

c) Dibujar la marcha de los rayos.

Sol.: a) 5 cm. Real b) 0.5 mm

22.- Un objeto de 7 cm de altura está situado a 60 cm a la izquierda de una lente convergente de focal 20 cm. A la derecha de esta lente hay otra lente divergente de focal 30 cm. Hallar:

a) La posición de la imagen final si su tamaño es de 1.2 cm y está invertida respecto al objeto.

b) La distancia entre lentes.

c) Dibujar la marcha de los rayos e indicar la naturaleza de la imagen final.

Sol.: a) -19.7 cm b) 87.5 cm

23.- Se tiene un sistema óptico centrado formado por dos lentes convergentes iguales de 10 cm de distancia focal. Un objeto de 1 mm de altura está situado 15 cm a la izquierda de la 1ª lente. Calcular cuál debe ser la separación entre las lentes para que la imagen final sea real, derecha y cuatro veces mayor que el objeto.

Sol.: 45 cm

INSTRUMENTOS ÓPTICOS

- 24.- Calcular en cuánto debe variar la distancia focal del ojo cuando un objeto que está originariamente a 5 m se acerca a 30 cm del ojo.
Sol.: 0.15 cm
- 25.- Una persona hipermetrope tiene un punto próximo de 50 cm. ¿Qué potencia tienen que tener sus gafas para acercar el punto próximo a 25 cm?
Sol.: 2 dioptrías
- 26.- Una persona miope no puede ver claramente objetos que están a una distancia superior a 2 m de su ojo. ¿Qué potencia deberán tener sus lentes para poder ver claramente los objetos distantes?
Sol.: -0.5 dioptrías
- 27.- Una persona con un punto próximo de 25 cm utiliza una lupa de 30 dioptrías de potencia. ¿Qué amplificación se obtiene?
Sol.: 7.5
- 28.- ¿Cuál es el diámetro de una lente $f/1.4$ si su distancia focal vale 50 mm?
Sol.: 35.7 mm
- 29.- La cámara A, con una lente $f/8$ de 2.5 cm de diámetro, fotografía un objeto utilizando un tiempo de exposición correcto de $1/100$ s. ¿Qué tiempo de exposición debería utilizarse para fotografiar el mismo objeto con una cámara B, si ésta tiene una lente $f/4$ de 5 cm de diámetro?
Sol.: $1/400$ s
- 30.- Un teleobjetivo tiene una distancia focal de 200 mm. ¿En cuánto deberá trasladarse para cambiar su enfoque desde un objeto situado en el infinito a otro que se encuentra a una distancia de 30 m?

Sol.: 13 mm

31.- Un antejo simple tiene un objetivo de 100 cm de distancia focal y un ocular de 5 cm de distancia focal. Se utiliza para mirar la Luna, que subtende un ángulo de 0.009 rad.

a) ¿Cuál es el diámetro de la imagen formada por el objetivo?

b) ¿Cuál es el poder amplificador del antejo?

Sol.: a) 0.9 cm; b) -20

32.- El objetivo de un telescopio refractor del observatorio de Yerkes tiene una distancia focal de 19.5 m. ¿Cuál será el diámetro de la imagen de la Luna?

Sol.: 17.6 cm

36.- Un antejo astronómico tiene un poder amplificador de 7. Las dos lentes están separadas 32 cm. Hallar la distancia focal de cada lente

Sol.: 28 cm, 4 cm



Bibliografía

S.Burbano, E. Burbano y C. Gracia, *Física General*
Mira editores, 1993.

J. Casas, *Óptica*.
Universidad de Zaragoza, 1992.

J. Fernández y M. Pujal, *Iniciación a la Física*
Ed. Reverté, Barcelona, 1992.

M. S. Millan y otros, *Óptica geométrica*
Ed. U.P.C, Aula práctica 21, Barcelona, 1993

P. A. Tipler, *Física*
Ed. Reverté, Barcelona, 1994.