

CA DE CATALUNYA

**E.G.T**  
Electromagnetisme  
i òptica



CO  
APUNTS

# Apuntes de Física I de Topografía

## Oscilaciones y ondas

Ana María Lacasta  
Inma Rodríguez Cantalapiedra

Noviembre 1998

A Q.1  
Física I

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
Biblioteca



1400644505

Escola Universitària  
Politécnica de Barcelona

Departament de  
Física Aplicada

ETT Jr  
Fisio I  
1400644505

## Apuntes de Física I de Topografía

### Oscilaciones y ondas

Ana María Lacasta

Inma Rodríguez Cantalapiedra

Noviembre 1998



DEPOSITO LEGAL 49.055.-  
NOVIEMBRE 1.998.-

5. Oscilaciones libres .....	1
5.1. Movimiento armónico simple .....	1
5.2. Representación de Fresnel .....	4
5.3. Energía en el m.a.s. ....	4
5.4. El péndulo simple .....	5
5.5. Superposición de movimientos armónicos simples. ....	6
5.5.1. Superposición de m.a.s. en la misma dirección .....	6
5.5.2. Superposición de m.a.s. en direcciones perpendiculares .....	9
5.6. Análisis de Fourier del movimiento periódico .....	12
Problemas .....	14
6. Oscilaciones amortiguadas y forzadas .....	19
6.1. El oscilador amortiguado .....	19
6.1.1. Movimiento subamortiguado .....	20
6.1.2. Disipación de energía .....	21
6.1.3. Amortiguamiento crítico .....	22
6.1.4. Movimiento sobreamortiguado .....	23
6.2. Oscilaciones forzadas .....	23
6.2.1. Fuerza impulsora armónica .....	24
6.2.2. Resonancia .....	26
Problemas .....	28
7. Movimiento ondulatorio .....	31
7.1. Descripción matemática de la propagación .....	31
7.2. Ecuación de ondas. Generalización a tres dimensiones .....	34
7.3. Tipos de ondas. ....	35
7.4. Ondas transversales en una cuerda .....	36
7.5. Ondas de presión en un tubo de gas. ....	37
7.6. Ondas electromagnéticas .....	39
7.7. Energía e intensidad de las ondas .....	41
7.8. Sonido y sensación sonora .....	43
7.9. Efecto Doppler .....	45
Problemas .....	47

8. Superposición de ondas	51
8.1. Interferencias	51
8.2. Experiencia de Young	53
8.3. Ondas estacionarias.	55
8.4. Principio de Huygens. Difracción	57
8.5. Polarización.	58
Problemas	60
 Bibliografía	 63

## 5. Oscilaciones libres

Un movimiento *periódico* es aquel que se repite a intervalos regulares de tiempo. Existen numerosos y muy variados ejemplos de fenómenos periódicos, como las oscilaciones del péndulo de un reloj, las vibraciones de los átomos de una molécula o los latidos del corazón. Esto hace que el estudio de este tipo de movimiento sea muy importante.

Entre los movimientos periódicos, reciben el nombre de *oscilatorios* aquellos en los que una partícula se mueve alternativamente en un sentido y otro sobre la misma trayectoria. De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el *movimiento armónico simple* (*m.a.s.*). Su estudio es esencial, no solo porque constituya una buena aproximación a muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza, sino también porque, tal como veremos más adelante, cualquier movimiento periódico puede expresarse como una combinación de movimientos armónicos simples.

### 5.1. Movimiento armónico simple

Un movimiento armónico simple (*m.a.s.*) es un movimiento oscilatorio de trayectoria rectilínea alrededor de un punto central (de equilibrio), en el que la fuerza  $F$  que actúa sobre la partícula es en cada instante proporcional y de signo contrario a la distancia desde el punto de equilibrio a la posición que ocupa la partícula en ese instante.

Es el tipo de movimiento que se da en el sistema que se muestra en la figura 5.1, constituido por un cuerpo de masa  $m$  unido a un muelle de masa despreciable, sobre una superficie *sin rozamiento*. El muelle, cuando se deja libre, tiene una longitud natural para la que no ejerce ninguna fuerza sobre  $m$ ; es la posición de equilibrio. Si se desplaza la masa respecto de esa posición, el muelle ejerce una fuerza que tiende a restaurar la posición de equilibrio.

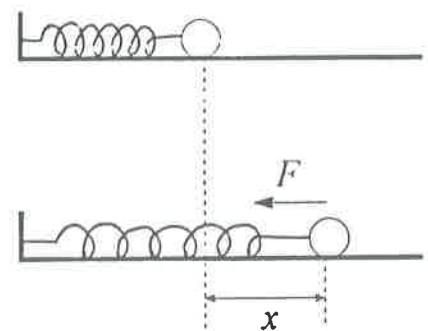


Fig.5.1

Si el muelle es elástico, se cumple la Ley de Hooke:

$$F = - k x \quad (5.1)$$

donde  $k$  es la constante recuperadora o *constante elástica* y  $x$  es la *elongación* o distancia del origen a la posición instantánea.

Aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene que

$$F = m a \Rightarrow -kx = m a = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (5.2)$$

ecuación que suele escribirse de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.3)$$

donde  $\omega$  recibe el nombre de *frecuencia angular* o *pulsación* y se mide en *rad/s*.

La expresión (5.3) es una *ecuación diferencial*, cuya solución puede escribirse como:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \quad (5.4)$$

donde la constante  $A$  es la máxima elongación y se denomina *amplitud*. El término  $\omega t + \phi_0$  se denomina *fase*, siendo  $\phi_0$  la *fase inicial* (fase en  $t=0$ ).

La ecuación (5.4) podría escribirse de forma equivalente como  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$  con  $\varphi_0 = \phi_0 - \pi/2$ . Las funciones seno y coseno se llaman armónicas, de ahí el nombre de este tipo de movimiento. Otras características del oscilador son:

- el período  $T$ : tiempo que tarda la partícula en realizar una oscilación completa
- la frecuencia  $\nu$ : número de oscilaciones efectuadas en un segundo

La relación entre ambas es  $T=1/\nu$ . Su relación con  $\omega$  se puede deducir imponiendo que en tiempo  $T$  la fase aumente en  $2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.5)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (5.4), obtenemos la expresión para la velocidad en el m.a.s.:

$$v(t) = A \omega \cos(\omega t + \phi_0) \quad (5.6)$$

Derivando nuevamente, obtenemos la expresión para la aceleración:



$$a(t) = -A \omega^2 \text{sen}(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x(t) \quad (5.7)$$

lo que indica que la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento y de sentido contrario a él. En la figura 5.2 se representa la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Observamos que los valores extremos en un m.a.s. son:

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow v = \pm A \omega &\rightarrow a = 0 \\ x = \pm A &\rightarrow v = 0 &\rightarrow a = \mp A \omega^2 \end{aligned}$$

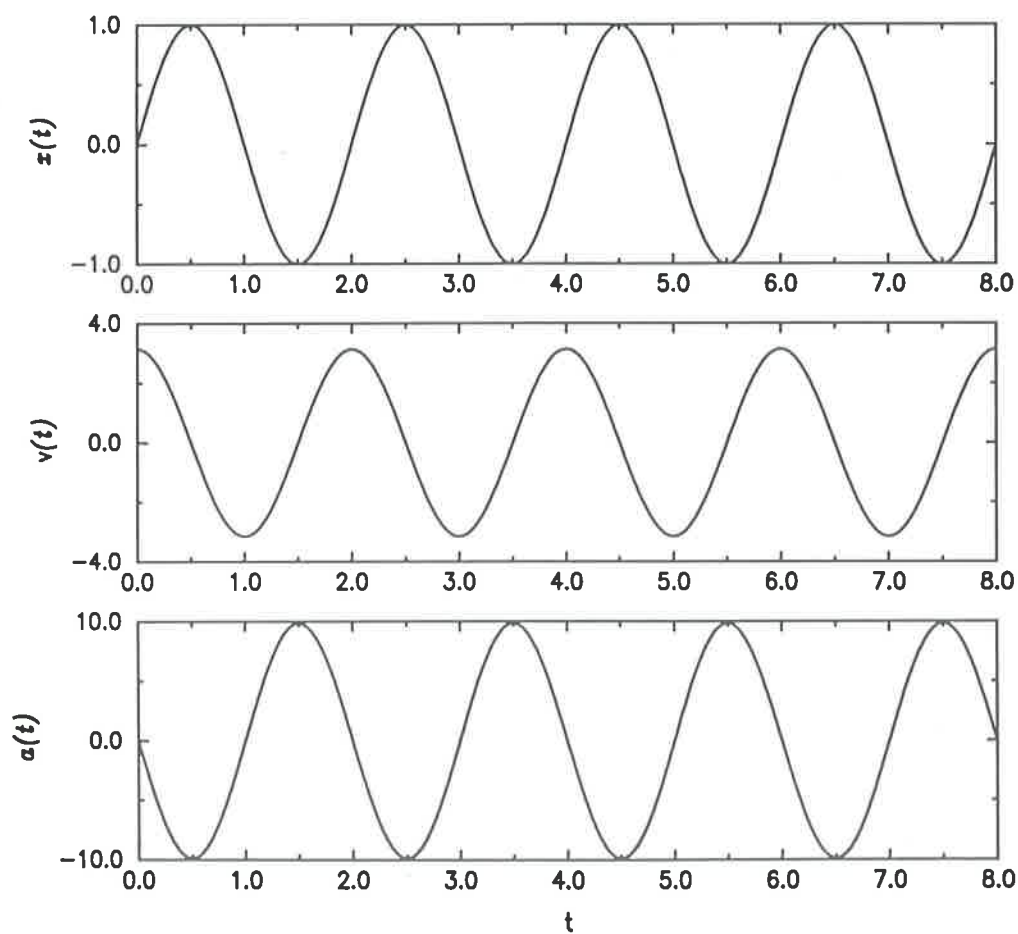


Fig. 5.2 Elongación, velocidad y aceleración para un m.a.s. con  $T=2s$  y  $\phi_0=0$

## 5.2. Representación de Fresnel

Puede darse una interpretación geométrica a las ecuaciones que describen un m.a.s., considerándolo como la proyección de un movimiento circular uniforme sobre uno de sus diámetros. Esta representación resulta útil para describir algunas características del m.a.s., y para determinar el resultado de superponer dos m.a.s., como veremos más adelante.

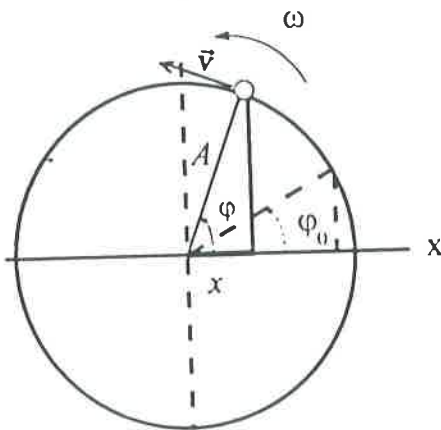


Fig. 5.3

En la representación de Fresnel se considera un punto que gira con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de una circunferencia de radio  $A$ . El vector que va del centro de la circunferencia hasta la posición instantánea del punto sobre la circunferencia se denomina *vector rotatorio*. Mientras el vector rotatorio gira con velocidad angular  $\omega$ , su proyección sobre un diámetro de la circunferencia sigue un m.a.s. En efecto, según vemos en la figura 5.3, cuando la partícula ha recorrido un ángulo  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , la proyección sobre el eje de las  $x$  es:  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

## 5.3. Energía en el m.a.s.

En una determinada posición, la energía total de una partícula que oscila con m.a.s. es la suma de la energía cinética y la potencial, ya que la fuerza elástica es conservativa. La energía cinética es

$$E_c(x) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2) \quad (5.8)$$

Por otro lado, la energía potencia es igual al trabajo necesario para desplazar la partícula desde la posición de equilibrio hasta la posición considerada

$$E_p(x) = \int_0^x kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.9)$$

de modo que la energía total es constante, de valor:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} k A^2 \quad (5.10)$$

La expresión anterior nos confirma que, en ausencia de fuerzas de rozamiento, la energía total se conserva.

#### 5.4. El péndulo simple

El péndulo simple es un sistema ideal constituido por una partícula de masa  $m$  suspendida de un punto fijo  $O$  mediante un hilo inextensible y sin peso de longitud  $l$ , como el mostrado en la figura 5.4.

Si se desplaza la partícula de su posición de equilibrio ( $\theta=0$ ) hasta una posición  $\theta=\theta_0$  y luego se suelta, el péndulo oscilará en un plano vertical bajo la acción de la gravedad, siguiendo un movimiento periódico. Las oscilaciones tendrán lugar entre los ángulos  $-\theta_0$  y  $\theta_0$ , a lo largo de un arco de circunferencia de radio  $l$ . Vamos a relacionar este movimiento con un m.a.s.

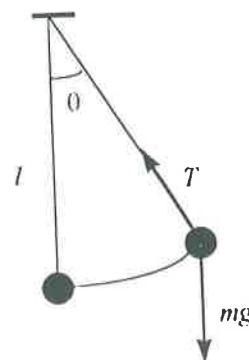


Fig. 5.4

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son: el peso ( $mg$ ) y la tensión de la cuerda ( $T$ ). Solo el peso tiene una componente tangencial a la trayectoria que vale:

$$P_t = -m g \operatorname{sen} \theta \quad (5.11)$$

donde el signo negativo indica que el sentido de la fuerza  $P_t$  es siempre contrario al desplazamiento. Como que el movimiento de la partícula es circular, podemos poner  $a_t = l \alpha$  donde  $\alpha = d^2\theta / dt^2$  es la aceleración angular. Por tanto, tendremos que:

$$-m g \operatorname{sen} \theta = m l \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (5.12)$$

Esta expresión difiere de la ecuación diferencial del m.a.s. (5.2) debido a la presencia de la función *seno*. Esto indica que en general el movimiento que sigue un péndulo *no es armónico simple*. Sin embargo, si se consideran oscilaciones de pequeña amplitud, para las que puede tomarse  $\sin \theta \approx \theta$ , la ecuación del movimiento se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (5.13)$$

que es idéntica a la ecuación correspondiente a un m.a.s.. La solución por tanto será

$$\theta(t) = \theta_0 \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (5.14)$$

con

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.15)$$

Es importante observar que *el período del péndulo simple es independiente de la masa de la partícula suspendida y de la amplitud de las oscilaciones*, siempre que estas sean lo bastante pequeñas como para que la aproximación  $\sin \theta \approx \theta$  sea aceptable.

## 5.5. Superposición de movimientos armónicos simples

Cuando sobre una partícula actúan diversos m.a.s., la ecuación del movimiento resultante puede hallarse sumando las posiciones de los movimientos individuales (principio de superposición).

### 5.5.1. Superposición de m.a.s. en la misma dirección

Vamos a determinar en primer lugar, el movimiento de una partícula sometida a la acción conjunta de dos m.a.s, de frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , que actúan en la misma dirección. Las elongaciones para cada movimiento por separado serían:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \psi_1) \\ x_2(t) &= A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \psi_2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

El resultado de la superposición de estos dos movimientos armónicos es:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \psi_2) \quad (5.17)$$

Distinguiremos entre los casos en que las frecuencias son iguales y aquellos en que no lo son.

a) de igual período

En este caso,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , y las expresiones (5.16) pueden desarrollarse como

$$x_1(t) = A_1 \text{sen}(\omega t + \psi_1) = A_1 \text{sen} \omega t \cos \psi_1 + A_1 \cos \omega t \text{sen} \psi_1 \quad (5.18)$$

$$x_2(t) = A_2 \text{sen}(\omega t + \psi_2) = A_2 \text{sen} \omega t \cos \psi_2 + A_2 \cos \omega t \text{sen} \psi_2$$

Sumándolas:

$$x(t) = (A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2) \text{sen} \omega t + (A_1 \text{sen} \psi_1 + A_2 \text{sen} \psi_2) \cos \omega t \quad (5.19)$$

La expresión (5.19) puede escribirse como

$$x(t) = A \text{sen}(\omega t + \psi) \quad (5.20)$$

donde

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos|\psi_1 - \psi_2|$$

$$\tan \psi = \frac{A_1 \text{sen} \psi_1 + A_2 \text{sen} \psi_2}{A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2} \quad (5.21)$$

de modo que *el movimiento resultante es también un m.a.s. con la misma frecuencia  $\omega$* . Este resultado puede comprobarse desarrollando (5.20), comparando con (5.19) y operando, aunque también puede obtenerse de forma más simple, utilizando la representación de Fresnel. Para ello, se representa cada m.a.s. por un vector rotatorio que gira con velocidad angular constante igual a la frecuencia angular del m.a.s. El vector resultante, obtenido por la regla del paralelogramo, representa la amplitud y la fase inicial del movimiento resultante. Los dos vectores giran con velocidad  $\omega$ , de modo que el vector suma también girará con  $\omega$ .

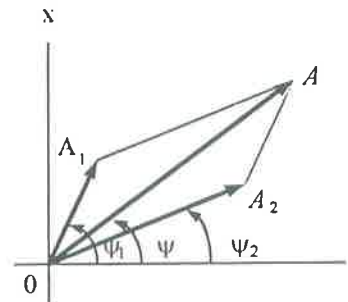


Fig. 5.5

## b) de períodos diferentes

En el caso general en que  $\omega_1 \neq \omega_2$  el movimiento resultante no será un m.a.s. Tomaremos por simplicidad  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ , y supondremos  $\omega_2 > \omega_1$  ( $T_1 < T_2$ )

$$x(t) = A_1 \text{sen } \omega_1 t + A_2 \text{sen } \omega_2 t \quad (5.22)$$

Pensando en la representación de Fresnel, los vectores rotatorios estarán inicialmente alineados. Al transcurrir el tiempo, los vectores girarán con diferentes velocidades angulares y el paralelogramo que forman se irá haciendo cada vez más abierto. La diagonal de ese paralelogramo irá cambiando con el tiempo y como que esta longitud, de acuerdo con la construcción de Fresnel, es la amplitud del movimiento resultante, se deduce que dicho movimiento no será un m.a.s.

En general el movimiento resultante no será ni siquiera periódico. Para que lo sea, es necesario que los períodos  $T_1$  y  $T_2$  sean *commensurables*, es decir, que existan dos números naturales  $n_1$  y  $n_2$ , tales que

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 \quad (5.23)$$

El período del movimiento resultante es entonces el mínimo común múltiplo de los períodos de los movimientos resultantes. En la figura 5.6 se muestra el resultado de la composición de dos m.a.s. de este tipo, de períodos  $T_1=1$  s y  $T_2=2.5$  s.

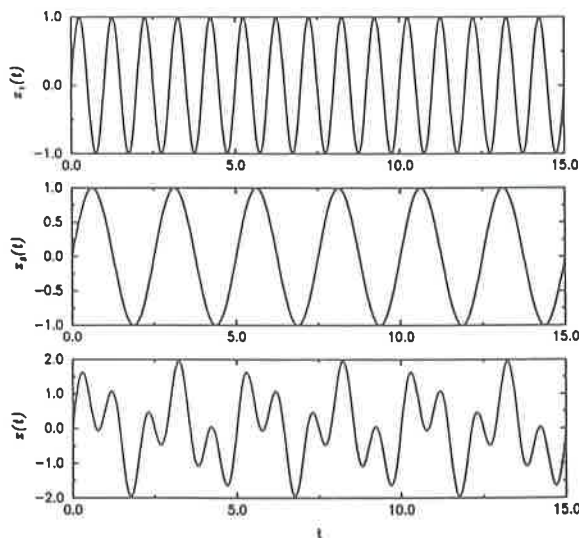


Fig 5.6

Si los dos períodos de los movimientos son *poco diferentes*, el movimiento será rigurosamente periódico solo si  $T_1$  y  $T_2$  son conmensurables, pero su amplitud experimentará variaciones rítmicas o *pulsaciones*. En efecto, si  $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$  y tomamos por simplicidad  $A_1 = A_2 = A$ , la expresión (5.22) queda:

$$x(t) = A (\text{sen } \omega_1 t + \text{sen } \omega_2 t) = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \text{ sen } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (5.24)$$

que indica que el fenómeno puede describirse como una oscilación armónica cuya frecuencia es igual al valor medio de las dos componentes, pero cuya amplitud está modulada por una función periódica de frecuencia mucho mayor. En la figura 5.7 se muestra la superposición de dos m.a.s de períodos  $T_1 = 1$  s y  $T_2 = 0.9$  s (conmensurables). El período de pulsación es:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \quad (5.25)$$

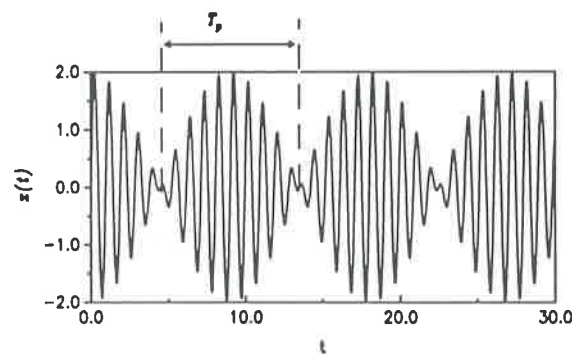


Fig. 5.7

### 5.5.2. Superposición de dos m.a.s. en direcciones perpendiculares

Vamos a considerar a continuación la superposición de dos m.a.s. que tienen lugar en direcciones perpendiculares entre sí, de modo que el movimiento resultante es bidimensional. Al igual que en la sección anterior, distinguiremos primero el caso en que los períodos (o frecuencias) son iguales.

#### a) de igual período

Las ecuaciones de movimiento son en este caso:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 \operatorname{sen} \omega t \\y(t) &= A_2 \operatorname{sen} (\omega t + \delta)\end{aligned}\tag{5.26}$$

La expresión para  $y(t)$  puede desarrollarse como

$$y(t) = A_2 \operatorname{sen} \omega t \cos \delta + A_2 \cos \omega t \operatorname{sen} \delta\tag{5.27}$$

mientras que a partir de la ecuación para  $x(t)$  se tiene que

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{x}{A_1} \quad \rightarrow \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}\tag{5.28}$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.27) y operando, se obtiene:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \delta = \operatorname{sen}^2 \delta\tag{5.29}$$

que es la ecuación general de una elipse, inscrita en un rectángulo de lados  $2A_1$  y  $2A_2$ . La forma de la elipse depende del desfase  $\delta$ .

a) Cuando  $\delta = 0$  ó  $\delta = \pi$  ( $\operatorname{sen} \delta = 0$  y  $\cos \delta = \pm 1$ ), la ecuación (7.14) se reduce a una recta de pendiente  $A_2/A_1$  y  $-A_2/A_1$ , respectivamente. La partícula realiza un m.a.s. rectilíneo.

b) Cuando  $\delta = \pm \pi/2$  ( $\operatorname{sen} \delta = \pm 1$  y  $\cos \delta = 0$ ) se obtiene una elipse horizontal:  $x^2/A_1^2 + y^2/A_2^2 = 1$ . La partícula recorre la elipse en sentido *antihorario* si  $\delta = +\pi/2$  y *horario* si  $\delta = -\pi/2$  (para comprobarlo basta con ver el sentido de las velocidades).

c) Cuando  $\delta$  tiene un valor distinto a los anteriores, el movimiento es elíptico, pero los ejes de la elipse están girados respecto de los ejes coordenados.

En la figura 5.8 se muestra diferentes trayectorias.



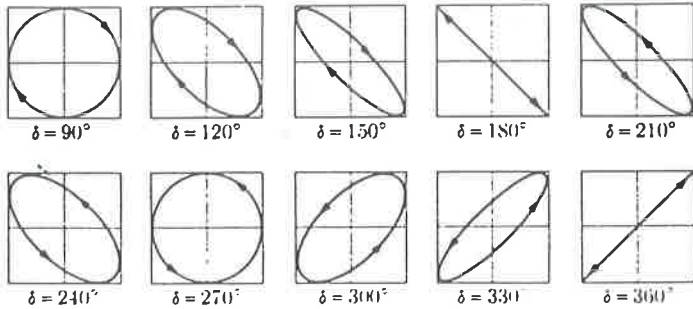


Fig. 5.8. Trayectorias seguidas por una partícula sometida a dos m.a.s. perpendiculares de igual frecuencia, para varios desfases.

**b) Con períodos diferentes. Figuras de Lissajous**

En el caso en que los períodos sean distintos, se tiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \text{sen}(\omega_x t + \alpha) \\ y(t) &= A_2 \text{sen}(\omega_y t + \beta) \end{aligned} \tag{5.30}$$

Las trayectorias resultantes en general son curvas complicadas. Cuando los períodos están en una relación sencilla (1/2, 1/3, 2/3, ...) se obtiene una curva fija cuya forma depende de la relación entre períodos y de las fases iniciales de los dos movimientos. Se denominan Figuras de Lissajous.

Las Figuras de Lissajous se pueden dibujar utilizando la representación de Fresnel. En la Figura 5.9 se muestra un caso como ejemplo.

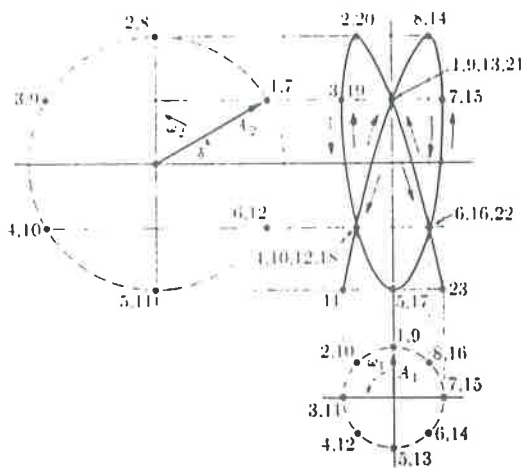


Fig. 5.9. Construcción de la Figura de Lissajous que corresponde a:  $\omega_y/\omega_x=4/3$ ,  $\alpha=0$  y  $\beta=\pi/6$ .

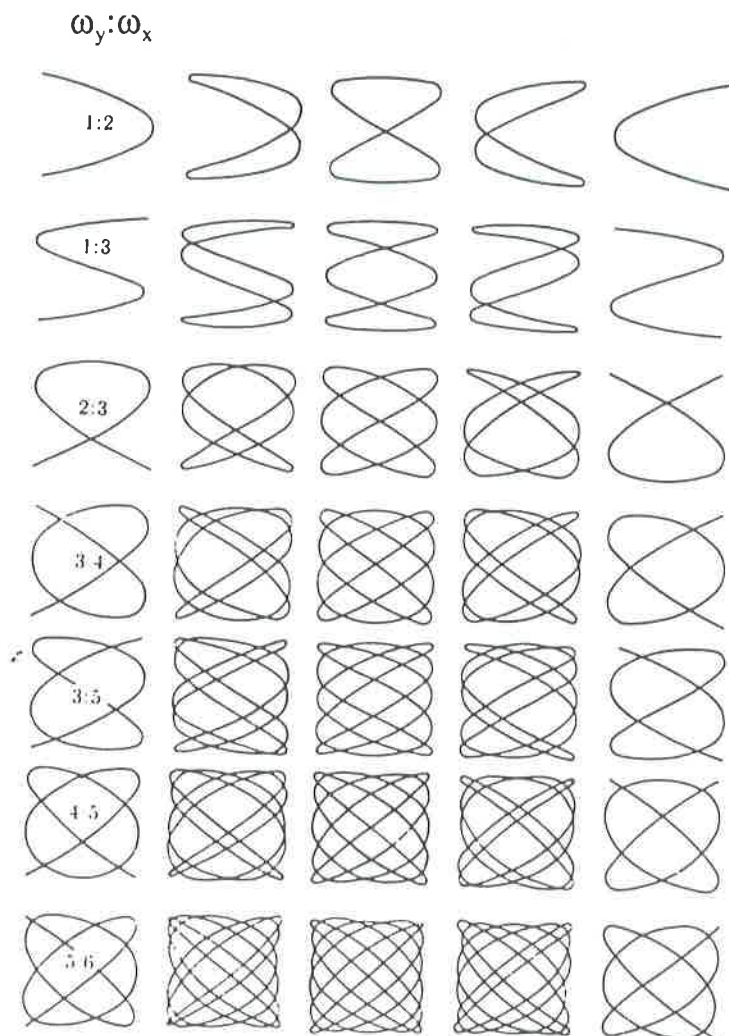


Fig. 5.9. Figuras de Lissajous para varias relaciones entre los periodos.

Se ha tomado  $\alpha = 0$  y diversos valores de  $\beta$ .

### 5.6. Análisis de Fourier del movimiento periódico

Un movimiento periódico es aquel que se repite cada cierto tiempo  $T$ , de modo que  $x(t) = x(t+T)$ . Este tipo de movimiento, siempre puede expresarse como una combinación de movimientos armónicos simples. Por ejemplo, consideremos un desplazamiento dado por:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen} 2\omega t \quad (5.31)$$

que es la suma de dos m.a.s. de frecuencias  $\omega$  y  $2\omega$ . El resultado es un movimiento periódico,

armónicos con frecuencia múltiplo de  $\omega$ , la función resultante seguiría siendo periódica. El teorema de Fourier establece que una función periódica cualquiera  $f(t)$ , de período  $T=2\pi/\omega$  tal que para todo tiempo  $t=\xi$  es  $f(\xi) = f(\xi+T)$ , puede escribirse como la suma:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t \quad (5.32)$$

donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  ( $n=1, 2, \dots, \infty$ ) reciben el nombre de coeficientes de Fourier.

La serie (5.23) se denomina *serie de Fourier*. La frecuencia más baja ( $\omega$ ) es la *frecuencia fundamental*, mientras que a las frecuencias  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$ , ... se las denomina *frecuencias armónicas o sobretonos*. Los coeficientes de Fourier se obtienen mediante las expresiones siguientes, deducidas a partir de la integración de la función  $f(t)$  en un periodo tras multiplicarla por el seno o coseno del término que se quiere obtener :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{\xi}^{\xi+T} f(t) dt & a_n &= \frac{2}{T} \int_{\xi}^{\xi+T} f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{\xi}^{\xi+T} f(t) \operatorname{sen} n\omega t dt \end{aligned} \quad (5.33)$$

El cálculo de los coeficientes de Fourier se simplifica bastante si  $\xi = -T/2$  y la función  $f(t)$  es par o impar en el intervalo  $(-T/2, T/2)$ .

a) Si  $f(t)$  es impar:

$$a_n = 0 \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega t dt \quad (5.34)$$

b) Si  $f(t)$  es par:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad b_0 = 0 \quad (5.35)$$

### Problemas

- 1.- El movimiento de una partícula está descrito por la ecuación

$$x(t) = 5 \operatorname{sen}(0.5t + \pi/3)$$

donde todas las cantidades están expresadas en el sistema c.g.s.

- Determinar la amplitud, el período y la fase inicial.
- Escribir las ecuaciones de la velocidad y la aceleración.
- Determinar las condiciones iniciales.

*Sol.: a) 5 cm, 12.57 s,  $\pi/3$  rad/s; c)  $x(0)=4.33$  cm,  $v(0)=1.25$  cm/s,  $a(0)=-1.08$  cm/s<sup>2</sup>*

- 2.- Una partícula está sujeta a un muelle y puede oscilar en un plano horizontal sin rozamiento. En el instante  $t=0$  está en su posición de equilibrio y tiene una velocidad de 6 cm/s hacia la parte negativa del eje  $x$ . Su frecuencia es de 4 Hz

- Escribir una ecuación para la posición  $x(t)$
- ¿Para qué valor de  $t$  volverá de nuevo a la posición de equilibrio?
- ¿Cuál es la aceleración en ese momento?

*Sol.: a)  $x(t)=0.24 \sin(8\pi t + \pi)$ ; b) 0.125 s; c) 0 m/s<sup>2</sup>*

- 3.- Una partícula oscila con m.a.s. Su aceleración máxima es igual a 49,3 cm/s<sup>2</sup> y da 30 vibraciones completas por minuto

- Escribir la ecuación de su movimiento en función del tiempo sabiendo que la elongación del punto al iniciarse el movimiento era de 2,5 cm y vibraba en sentido de alejamiento del origen.
- Hallar el tiempo más corto transcurrido hasta que pasa por el origen.
- Determinar la velocidad del punto cuando su elongación vale  $-A/2$ .
- Hallar la elongación de la masa en el instante en que su velocidad es la mitad de la máxima.
- Dibujar los gráficos de la elongación y la velocidad en función del tiempo.

*Sol.: a)  $x(t)=5 \sin(\pi t + \pi/6)$ ; b) 0.83 s; c)  $\pm 13.6$  m/s; d)  $\pm 4.33$  cm*

- 4.- Dos partículas siguen m.a.s de la misma amplitud, frecuencia y origen, a lo largo de una misma línea recta. Cada vez que se cruzan entre sí, moviéndose en sentidos opuesto, sus elongaciones son la mitad de la amplitud. Calcular la diferencia de fase entre ambos m.a.s.

*Sol.: 120°*

- 5.- La escala de un dinamómetro de muelle, que mide de 0 a 500 gramos, tiene 8 cm de longitud. Se coloca un objeto en el dinamómetro y se hace oscilar. Hallar la masa del objeto si las oscilaciones tienen una frecuencia de 3 Hz.

*Sol.: 172 g*

- 6.- Sean dos muelles de constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ . Demostrar que:

- a) Si se asocian como en la Fig. 1 la constante elástica efectiva es:

$$k_p = k_1 + k_2$$

- b) Si se asocian en serie ( Fig. 2), la constante elástica efectiva es:

$$1/k_s = 1/k_1 + 1/k_2$$



Fig. 1



Fig.2

- 7.- El período de un péndulo es de 3 s. Calcular el período si la longitud aumenta en un 60%.

*Sol.: 3.8 s*

- 8.- Hallar cuál debe ser el porcentaje de cambio en la longitud de un péndulo para que tenga el mismo período cuando se le desplaza desde un lugar en el que  $g=9.8 \text{ m/s}^2$  hasta otro lugar donde  $g'=9.81 \text{ m/s}^2$ .

*Sol.: +0.102 %*

- 9.- Hallar la ecuación del movimiento resultante de la superposición de dos m.a.s. de igual dirección cuyas ecuaciones son:

$$x_1 = 3 \text{ sen } 2t$$

$$x_2 = 4 \text{ sen } (2t + \theta)$$

- si: a)  $\theta = 0$   
 b)  $\theta = \pi/2$   
 c)  $\theta = \pi$

*Sol.: a)  $7 \sin 2t$ ; b)  $5 \sin(2t+0.93)$ ; c)  $\sin(2t+\pi)$*

- 10.- Hallar la ecuación de la trayectoria de una partícula sometida a los dos m.a.s. perpendiculares cuyas ecuaciones son:

$$x = 4 \text{ sen } \omega t$$

$$y = 3 \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

- si: a)  $\theta = 0$   
 b)  $\theta = \pi/2$   
 c)  $\theta = \pi$

*Sol.: a)  $y=3/4 x$ ; b)  $x^2/16 + y^2/9 =1$ ; c)  $y=-3/4 x$*

- 11.- Dos vibraciones armónicas de la misma dirección están descritas por las Ecs:

$$x_1 = A_0 \cos 10 \pi t$$

$$x_2 = A_0 \cos 12 \pi t$$

Hallar el período de la pulsación y dibujar un esquema de la perturbación resultante para un período de la pulsación.

*Sol.: 1 s*

- 12.- El movimiento de una partícula en el plano x-y está descrito en función del tiempo por las ecuaciones

$$x = A \cos \omega t$$

$$y = B \cos 2\omega t$$

Demostrar que la trayectoria de la partícula es un arco de parábola.

13.- Dibujar la trayectoria de una partícula sometida a dos m.a.s. perpendiculares con  $\omega_1/\omega_2 = 1/2$  si:

a)  $\theta = 0$

b)  $\theta = \pi/3$

c)  $\theta = \pi/2$

14.- Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función *en dientes de sierra*

$$F(t) = \frac{2A}{T} t \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

Sol.:  $F(t) = 2A/\pi (\sin \omega t - 1/2 \sin 2\omega t + 1/3 \sin 3\omega t - \dots)$

15.- Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$F(t) = \begin{cases} -h & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ +h & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Sol.:  $F(t) = 4h/\pi (\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t + 1/5 \sin 5\omega t - \dots)$





## 6. Oscilaciones amortiguadas y forzadas

En la sección anterior se ha visto que en un m.a.s. la energía se mantiene constante. Sin embargo ésta es una situación ideal. En la realidad siempre se produce una disipación de energía debido a la presencia de fuerzas de rozamiento. La pérdida de energía hace que la amplitud de las oscilaciones vaya disminuyendo continuamente hasta que cesa el movimiento. Se habla entonces de *oscilaciones amortiguadas*.

El amortiguamiento de las oscilaciones puede evitarse suministrando energía al sistema. Cuando un oscilador está accionado por una fuerza externa, recibe el nombre de *oscilador forzado*.

### 6.1. El oscilador amortiguado

Los movimientos oscilatorios reales van disminuyendo su amplitud debido al rozamiento. Los fenómenos de mayor interés son aquellos en los que la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es proporcional a la velocidad ( $F_f = -\gamma v$ ). La constante de proporcionalidad  $\gamma$  se denomina *coeficiente de amortiguamiento*.

Vamos a considerar una masa  $m$  que se mueve bajo la acción conjunta de una fuerza elástica y de una fuerza de rozamiento. La ecuación de movimiento en este caso es

$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (6.1)$$

Esta expresión suele escribirse como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.2)$$

donde

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} = \frac{1}{2\tau} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.3)$$

son respectivamente el *parámetro de amortiguamiento* y la *frecuencia angular propia* del oscilador (frecuencia angular del oscilador sin amortiguamiento). El parámetro  $\tau \equiv m / \gamma$  se

denomina *tiempo de relajación*.

El tipo de movimiento resultante depende de los valores de los coeficientes  $\beta$  y  $\omega_0$ .

Se pueden distinguir tres casos:

$\beta < \omega_0$  : *movimiento subamortiguado*

$\beta = \omega_0$  : *amortiguamiento crítico*

$\beta > \omega_0$  : *movimiento sobreamortiguado*

### 6.1.1. Movimiento subamortiguado

La solución de la ecuación (6.2) en este caso es

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \text{sen}(\omega t + \psi) \quad (6.4)$$

donde  $A_0$  y  $\psi$  son parámetros que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales.

$\omega$  es la *frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas* y viene dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (6.5)$$

Puede comprobarse que efectivamente (6.4) es una solución de (6.2) sustituyendo  $x(t)$  y sus derivadas en (6.2). Observamos que el movimiento es oscilatorio, con una amplitud que decrece con el tiempo según la ecuación exponencial

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-t/2\tau} \quad (6.6)$$

La representación gráfica de este movimiento se muestra en la figura 6.1.

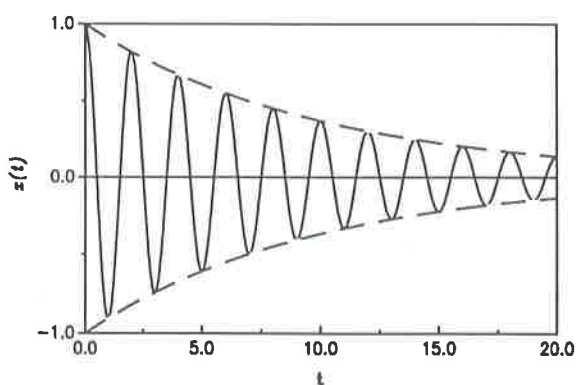


Fig. 6.1. Elongación para un movimiento amortiguado con  $\beta=0.1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_0=\pi$  y  $\psi=\pi/2$ .

El producto del período del movimiento  $T$  por el parámetro de amortiguamiento  $\beta$  se denomina *decremento logarítmico*. Es igual al logaritmo neperiano del cociente entre dos elongaciones máximas sucesivas.

### 6.1.2. Disipación de energía

Vamos a calcular ahora la energía que se disipa en cada oscilación en el caso del oscilador inframortiguado. Sin perder generalidad, tomaremos la fase inicial  $\psi = 0$ . Entonces, la ecuación (6.4) y su derivada nos dan como posición y la velocidad las expresiones:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 e^{-\beta t} \operatorname{sen} \omega t \\ v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = A_0 e^{-\beta t} (\omega \cos \omega t - \beta \operatorname{sen} \omega t) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Las energías cinética y potencial en un cierto instante de tiempo serán:

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} (\omega^2 \cos^2 \omega t + \beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega t - 2 \omega \beta \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t) \\ E_p(t) &= \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t} \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} \omega_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \end{aligned} \quad (6.8)$$

Si el amortiguamiento es lo bastante débil, la amplitud de la oscilación no cambiará mucho en el transcurso de un ciclo. Tiene sentido entonces evaluar el promedio de los valores anteriores para un ciclo. Teniendo en cuenta que el promedio temporal de un cantidad cualquiera  $G(t)$  se calcula como:

$$\langle G(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(t) \quad (6.9)$$

se obtiene:

$$\langle E_c(t) \rangle = \langle E_p(t) \rangle = \frac{1}{4} m A_0^2 \omega_0^2 e^{-2\beta t} \quad (6.10)$$

donde se han utilizado los promedios, a lo largo de un ciclo, de las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \langle \sin^2 \omega t \rangle &= \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \\ \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle &= \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Así pues, la energía total promediada en un ciclo es:

$$\langle E(t) \rangle = \langle E_c(t) \rangle + \langle E_p(t) \rangle = \langle E \rangle_{\beta=0} e^{-2\beta t} = \langle E \rangle_{\beta=0} e^{-t/\tau} \quad (6.12)$$

La expresión (6.12) nos indica que en un oscilador débilmente amortiguado la energía decrece exponencialmente con el tiempo a un ritmo doble que la amplitud.

La disipación media de potencia viene dada por la variación de la energía total del oscilador por unidad de tiempo:

$$\langle P \rangle = \frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau} \langle E \rangle_{\beta=0} e^{-t/\tau} = -\frac{\langle E \rangle}{\tau} \quad (6.13)$$

**Factor de calidad.** El factor de calidad se define como  $2\pi$  veces el cociente entre la energía almacenada y la disipada por ciclo:

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T} = \omega \tau \quad (6.14)$$

$Q$  es una cantidad adimensional que indica el grado de amortiguamiento del sistema. Valores de  $Q$  altos representan un amortiguamiento débil.

### 6.1.3. Amortiguamiento crítico

Es el que corresponde a tener un rozamiento tal que  $\beta = \omega_0$  de modo que  $\omega = 0$ . En este caso no se dan oscilaciones (el período sería infinito) y el cuerpo regresa a la posición de equilibrio sin rebasarla, o rebasándola una vez. La solución de (6.2) en este caso es:

$$x(t) = (A_0 + A_1 t) e^{-\beta t} \quad (6.15)$$

donde

$$A_0 = x_0 \quad A_1 = v_0 + \beta x_0 \quad (6.16)$$

### 6.1.4. Movimiento sobreamortiguado

La solución de la ecuación (6.2) en este caso es

$$x(t) = A_1 e^{-\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_2 t} \quad (6.17)$$

con

$$\omega_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \omega_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (6.18)$$

En la figura 6.2 se muestran las gráficas  $x(t)$  para los movimientos inframortiguado, crítico y sobreamortiguado correspondientes a las mismas condiciones iniciales ( $x_0=1$ ,  $v_0=0$ ).

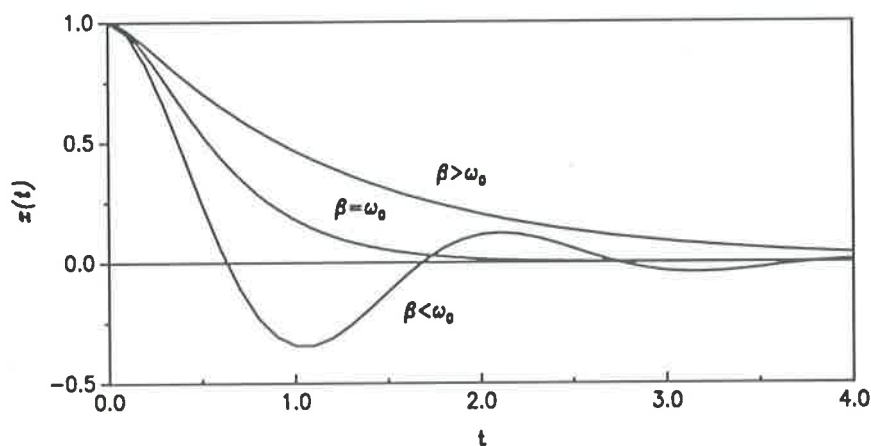


Fig. 6.2. Movimiento amortiguado para  $\beta=2\omega_0$ ,  $\beta=\omega_0$  y  $\beta=0.3\omega_0$ .

## 6.2. Oscilaciones forzadas

Mediante una fuerza impulsora puede forzarse una oscilación. En general, si se suministra energía al sistema aplicando una fuerza dependiente del tiempo  $F(t)$ , la ecuación diferencial del movimiento es:

$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (6.19)$$

### 6.2.1. Fuerza impulsora armónica

Si la fuerza impulsora es armónica se observa que, transcurrido un intervalo de tiempo adecuado, la amplitud que se comunica al sistema oscilante en el estado estacionario, depende de la frecuencia de la fuerza impulsora. Consideremos

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega_F t \quad (6.20)$$

donde  $F_0$  y  $\omega_F$  son la amplitud y la frecuencia angular de la fuerza impulsora. Entonces, introduciendo el parámetro  $\alpha_0 = F_0 / m$ , la ecuación (6.19) se puede escribir como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \operatorname{sen} \omega_F t \quad (6.21)$$

donde  $\beta$  es el parámetro de amortiguamiento y  $\omega_0$  es la frecuencia angular propia del sistema (ver ecuación (6.3)).

La solución completa de la ecuación anterior para el caso inframortiguado es:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega t + \psi) + A \operatorname{sen}(\omega_F t - \delta) \quad (6.22)$$

donde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas en ausencia de la fuerza impulsora,  $A_0$  y  $\psi$  son constante arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales y  $A$  y  $\delta$  cumplen que

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + 4\beta^2\omega_F^2}} \\ \cos\delta &= \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + 4\beta^2\omega_F^2}} \\ \operatorname{sen}\delta &= \frac{2\beta\omega_F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + 4\beta^2\omega_F^2}} \end{aligned} \right\} \tan\delta = \frac{2\beta\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \quad (6.23)$$

El primer término de (6.22) se amortigua exponencialmente con el tiempo de modo que a tiempo lo bastante grande en comparación con el tiempo de relajación ( $t \gg \tau = (2\beta)^{-1}$ ) habrá disminuido tanto que será despreciable. Por esa razón se denomina *solución o efecto transitorio*. El segundo término será el que prevalezca a tiempos grandes. Se denomina *solución o estado estacionario*. Aunque en algunas situaciones los efectos transitorios pueden ser importantes, en general nos interesará más estudiar la solución estacionaria. Así, supondremos que ha transcurrido suficiente tiempo, y tomaremos como ecuación para la elongación:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_F t - \delta) \quad (6.24)$$

con  $A$  y  $\delta$  dados por (6.23). Es importante notar que la solución estacionaria no depende de las condiciones iniciales.

La expresión (6.24) nos dice que cuando se impone a un oscilador una fuerza impulsora de frecuencia  $\omega_F$ , diferente de la natural  $\omega_0$ , la frecuencia de las oscilaciones en el estado estacionario (desaparecidos los efectos transitorios) es precisamente la frecuencia impuesta  $\omega_F$ . El ángulo  $\delta$  representa la diferencia de fase entre la elongación y la fuerza impulsora. Tanto  $F(t)$  como  $x(t)$  siguen una ecuación sinusoidal, y lo que  $\delta$  representa es el ángulo con que los máximos de la fuerza impulsora adelantan a los máximos de la elongación. El valor de  $\delta$  siempre está comprendido entre  $0$  y  $\pi$  radianes, de manera que  $F$  siempre está adelantada respecto de  $x$ . Para  $\delta = 0$  y  $\delta = \pi$  la fuerza  $F$  y  $x$  están en fase y en oposición de fase respectivamente.

En la figura 6.3 se representan  $F(t)$  y  $x(t)$  para tres valores del desfase  $\delta$ .

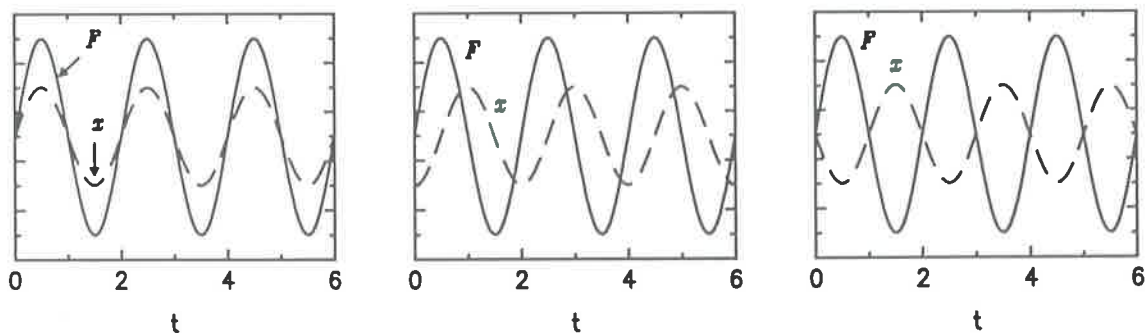


Fig. 6.3. Fuerza impulsora y elongación para desfases  $\delta=0$ ,  $\delta=\pi/2$  y  $\delta=\pi$ .

Observando la ecuación (6.23) vemos que para un sistema dado, caracterizado por unos determinados valores de  $\omega_0$  y de  $\beta$ , el desfase angular  $\delta$  aumenta con la frecuencia angular de la fuerza impulsora  $\omega_F$ . En particular, cuando  $\omega_F = \omega_0$  se tiene que  $\delta = \pi / 2$  independientemente del valor de  $\beta$ .

### 6.2.2. Resonancia

La velocidad de la partícula oscilante en el estado estacionario puede obtenerse derivando (6.24)

$$v(t) = A \omega \cos(\omega_F t - \delta) = A \omega \sin(\omega_F t - \phi) \quad (6.25)$$

donde  $\phi = \delta - \pi / 2$  es el desfase angular entre la velocidad y la fuerza impulsora. A partir de las ecuaciones (6.23) y (6.24), y teniendo en cuenta la relación entre  $\delta$  y  $\phi$  puede obtenerse que

$$A = \frac{\alpha_0}{2 \beta \omega_F} \sin \delta = \frac{F_0}{2 m \beta \omega_F} \sin \delta = \frac{F_0}{2 m \beta \omega_F} \cos \phi \quad (6.26)$$

La potencia transferida al oscilador por la fuerza impulsora en el estado estacionario es

$$\begin{aligned} P(t) &= F(t) v(t) = F_0 \sin \omega_F t A \omega_F \sin(\omega_F t - \phi) = \\ &A \omega_F F_0 (\sin^2 \omega_F t \cos \phi - \sin \omega_F t \cos \omega_F t \sin \phi) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Esta expresión nos da el valor instantáneo de dicha potencia. Podemos calcular ahora la potencia transferido al oscilador a lo largo de un ciclo, haciendo el promedio entre  $0$  y  $2\pi$ . Haciendo uso de (6.9) y teniendo en cuenta los promedios (6.11), obtenemos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} A \omega_F F_0 \cos \phi \quad (6.28)$$

que, utilizando la expresión (6.26), puede escribirse como



$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{4 m \beta} \cos^2 \phi \quad (6.29)$$

de modo que, para un sistema dado, el valor de la potencia transferida en un ciclo depende únicamente del factor  $\cos \phi$ , que recibe el nombre de *factor de potencia*.

Observamos que el máximo valor de  $\langle P \rangle$  se tiene cuando el factor de potencia es 1, es decir cuando  $\phi = 0$  y por tanto  $\delta = \pi / 2$ . Se dice entonces que hay *resonancia en la transferencia de potencia*. Así pues, la máxima transferencia de potencia (resonancia) se da cuando la velocidad y la fuerza impulsora están en fase, de modo que la partícula siempre se mueve en la misma dirección que la fuerza impulsora. Por otro lado, ya habíamos comentado anteriormente que la condición  $\delta = \pi / 2$  se cumple para  $\omega_F = \omega_0$ , de manera que *se tiene resonancia en la transferencia de potencia cuando la frecuencia de la fuerza impulsora coincide con la frecuencia natural del sistema*.

Sin embargo, el máximo de transferencia de potencia no coincide exactamente con el máximo de la amplitud. La frecuencia angular de la fuerza impulsora para la que la amplitud es máxima, esto es, aquella que cumple que

$$\left. \frac{dA}{d\omega_F} \right|_{\omega_F = \omega_A} = 0 \quad (6.30)$$

se denomina *frecuencia de resonancia en la amplitud* y vale

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (6.31)$$

Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a  $\omega_A$ , la amplitud de las oscilaciones alcanza su valor máximo (amplitud de resonancia), cuyo valor es:

$$A = \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (6.32)$$

Cuanto menor es el amortiguamiento, más se aproxima la frecuencia de resonancia en la amplitud  $\omega_A$  a la frecuencia de resonancia en la transferencia de potencia  $\omega_0$ . Para  $\beta = 0$  las dos coinciden. En esta situación, además, podemos ver por la ec. (6.32) que la amplitud de resonancia se hace infinita, tal como se ve en la figura 6.4.

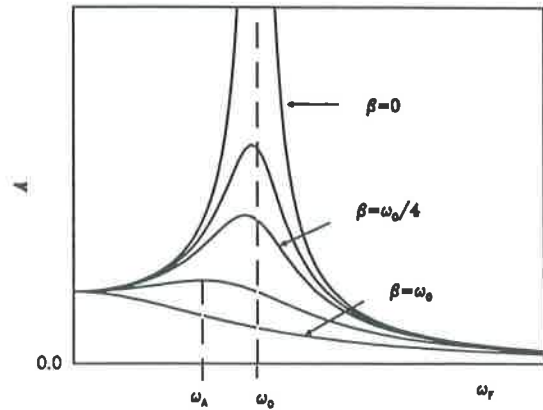


Fig. 6.4. Amplitud en función de  $\omega$ , para  $\omega_0 = \pi$  rad,  $\alpha_0 = 1$  rad/s y varios valores de  $\beta$ .

### Problemas

- 1.- Un péndulo simple tiene inicialmente un período de 2s y una amplitud de  $2^\circ$ . Después de 10 oscilaciones completas su amplitud se reduce a  $1.5^\circ$ . Hallar el parámetro de amortiguamiento  $\beta$ .

Sol.:  $0.0144 \text{ s}^{-1}$

- 2.- Una masa de 0.5 Kg unida a un muelle de constante elástica  $k=250 \text{ N/m}$  oscila con una amplitud inicial de 6 cm,  
 a) Hallar el período y la energía del oscilador en el instante inicial  
 b) Determinar el valor de la constante de amortiguamiento  $\gamma$  del oscilador sabiendo que la energía se disipa a razón de 1% cada ciclo.

Sol.: a)  $0.28 \text{ s}$ ;  $0.45 \text{ J}$ ; b)  $0.0178 \text{ Kg/s}$

- 3.- Un oscilador está caracterizado por los parámetros siguientes:  $m=0.5 \text{ Kg}$ ,  $K=50 \text{ N/m}$  y  $\beta=0.01 \text{ s}^{-1}$ . En el instante inicial la amplitud de sus oscilaciones era de 0.25 m.

a) Calcular el valor de la energía que se disipa por oscilación en el instante inicial.

b) Hallar el número de oscilaciones completas que se darán antes de que la energía del oscilador se haya reducido a un 1% de su valor inicial. ¿Cuánto valdrá entonces la energía perdida por oscilación?

c) Calcular el factor de calidad

*Sol.: a) 19 mJ; b) 366; 0.19 mJ; c) 500*

4.- Una masa de 0.25 Kg está unida a un muelle cuya constante elástica es  $K=200$  N/m, siendo la constante de amortiguamiento  $\gamma=3$  Kg/s. La masa está impulsada por una fuerza externa  $F=5 \sin 30t$  N

a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? ¿Cuál es el ángulo de desfase entre la fuerza impulsora y el desplazamiento?

b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿A qué frecuencia se producirá la resonancia en amplitud? ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones en la resonancia?

*Sol.: a) 5.35 cm; 105.5°; b) 26.98 rad/s; 6 cm*

5.- Un oscilador armónico no amortiguado está constituido por una masa de 100g unida a un muelle de constante elástica  $K=40000$  dyn/cm. Se le aplica una fuerza impulsora  $F=3000 \sin 10t$  dyn. Calcular la amplitud de las oscilaciones del oscilador en el estado estacionario y el desfase entre la fuerza impulsora y la velocidad.

*Sol.: 0.1 cm;  $-\pi/2$*



## 7. Movimiento ondulatorio

Una *onda* es cualquier perturbación de una condición de equilibrio, que se propaga en el tiempo de una región a otra del espacio. Su naturaleza puede ser muy distinta: la luz, el sonido, los movimientos sísmicos, las ondas sobre el agua, las ondas en una cuerda..., pero en todos los casos hay un estado físico (un campo electromagnético, una presión, un desplazamiento) que se propaga. Esta propagación presenta, en general, un transporte de energía, pero no un transporte de materia.

En este capítulo estudiaremos las características generales del movimiento ondulatorio, para pasar a continuación a considerar algunas clases especiales de ondas.

### 7.1. Descripción matemática de la propagación

Veremos en primer lugar cómo podemos describir matemáticamente una perturbación que se desplaza en una determinada dirección sin deformarse. Consideremos una función  $y=f(x)$  como la representada en la figura 7.1. Si reemplazamos  $x$  por  $x-a$  ( $a>0$ ) la función resultante  $y=f(x-a)$  mantiene la misma forma, y está desplazada una distancia  $a$  hacia la derecha. Del mismo modo,  $y=f(x+a)$  corresponde a un desplazamiento sin deformación hacia la izquierda.

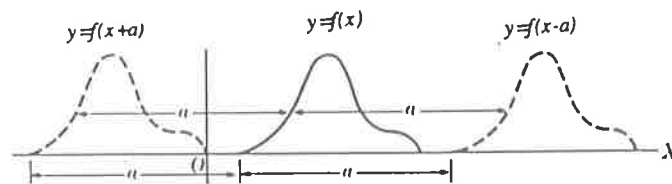


Fig. 7.1 Traslación de una función sin distorsión

Si tomamos el parámetro  $a$  como proporcional al tiempo  $t$  ( $a=vt$ ), entonces la función  $y=f(x\pm vt)$  representa una curva que se mueve hacia la derecha (izquierda) con una velocidad  $v$ . Así pues, una expresión matemática de la forma  $y(x,t)=f(x\pm vt)$  es adecuada para describir una situación física que se propaga sin deformación en la dirección del eje  $x$ .  $y(x,t)$  puede representar cantidades físicas muy diferentes, como la deformación en un sólido, un campo electromagnético o la presión en un gas.

Un caso especialmente interesante es aquel en el cual  $y(x,t)$  es una función armónica como

$$y(x,t) = y_0 \operatorname{sen} k(x - vt) \quad (7.1)$$

donde la cantidad  $k$  tiene un significado importante. Podemos ver fácilmente que reemplazando  $x$  por  $x+2\pi/k$ , se obtiene el mismo valor para  $y(x,t)$ :

$$y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = y_0 \operatorname{sen} (k(x-vt) + 2\pi) = y_0 \operatorname{sen} k(x-vt) = y(x,t) \quad (7.2)$$

de manera que la curva se repite a si misma cada longitud  $\lambda=2\pi/k$ .  $\lambda$  recibe el nombre de *longitud de onda*.  $k$  representa el número de longitudes de onda en la distancia  $2\pi$  y se denomina *número de onda*.

Para entender la forma de la función dada por (7.1), vamos a considerar dos situaciones. Si nos fijamos en primer lugar en un punto determinado, situado en la posición  $x=x_0$ , vemos que  $y(x_0,t)$  sigue la ecuación de un movimiento armónico simple de pulsación  $\omega=k\nu$ , igual al estudiado en el tema 5. Por otro lado, si nos fijamos en un instante de tiempo concreto  $t_0$ , vemos que la forma que adquiere  $y(x,t_0)$  también viene dada por la ecuación de un movimiento armónico simple, donde la posición  $x$  juega el papel del tiempo  $t$ . Este comportamiento puede verse en la Figura 7.2.

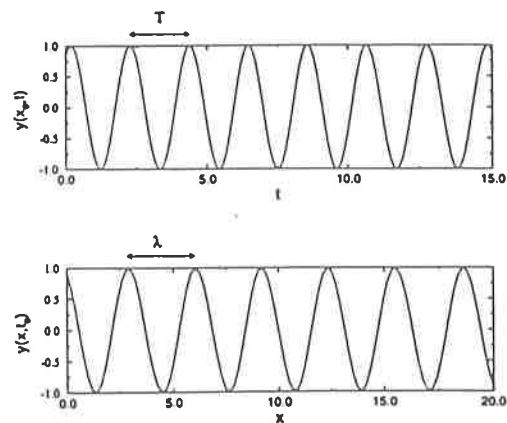


Fig. 7.2. Vibración de un punto  $y(x_0,t)$  y forma de la onda  $y(x,t_0)$ .

La ecuación (7.1) también puede escribirse como

$$y(x,t) = y_0 \operatorname{sen} (kx - \omega t) \quad (7.3)$$

donde la pulsación (o frecuencia angular de la onda) está relacionada con  $\lambda$  por:

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v \quad (7.4)$$

A partir de (7.4), y utilizando la expresión (5.5) para el m.a.s., se obtienen las siguientes relaciones entre la velocidad, la longitud de onda, la frecuencia y el período:

$$v = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T} \quad (7.5)$$

Esta expresión nos indica que la longitud de onda puede definirse como la distancia que avanza la onda en un período. Se tienen por tanto dos periodicidades: una en el tiempo, dada por el período  $T$  y la otra en el espacio, dada por la longitud de onda  $\lambda$ , relacionadas por  $\lambda = vT$ .

La importancia de realizar un estudio detallado de las ondas armónicas se debe a que, según el **Teorema de Fourier**, cualquier movimiento ondulatorio periódico puede escribirse como una superposición de movimientos ondulatorios armónicos. En efecto, tal como vimos en la sección 5.6, cualquier función periódica  $f(x) = f(x + \lambda)$  puede escribirse como

$$y = f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nkx + b_n \sin nkx \quad (7.6)$$

donde  $k$  juega el mismo papel que jugaba  $\omega$  en la ecuación (5.32). Los coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  se obtienen de forma similar a la dada en la ecuación (5.33), con  $x$  en lugar de  $t$ . Así pues, el movimiento ondulatorio descrito por  $y = f(x - vt)$  puede expresarse como

$$y(x,t) = f(x - vt) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(kx - \omega t) + b_n \sin n(kx - \omega t) \quad (7.7)$$

lo que indica que un movimiento ondulatorio periódico se puede expresar como una superposición de movimientos ondulatorios armónicos de frecuencias  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... y números de onda  $k$ ,  $2k$ ,  $3k$ , ...

## 7.2. Ecuación de ondas. Generalización a tres dimensiones

Hemos visto que una función  $y=f(x\pm vt)$  describe una perturbación que se propaga en dirección  $x$  sin distorsión. Sin embargo, es conveniente encontrar la ecuación diferencial que satisface dicha perturbación. Así, cada vez que reconozcamos que un cierto campo, como resultado de sus propiedades físicas, satisface tal ecuación, podremos estar seguros de que el mismo se propaga en el espacio con velocidad definida y sin distorsión.

Derivando la expresión  $y=f(x\pm vt)$  dos veces respecto de  $x$  y respecto de  $t$ , y utilizando la regla de la cadena ( $df(u)/dv=df(u)/du \cdot du/dv$ ) puede escribirse que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= \pm v f'(x \pm vt) & \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= v^2 f''(x \pm vt) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= f'(x \pm vt) & \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= f''(x \pm vt) \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde  $f''$  es la segunda derivada de  $f$  respecto de su argumento. Igualando  $f''$  de las dos expresiones anteriores, puede escribirse finalmente que

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (7.9)$$

Esta ecuación diferencial recibe el nombre de **ecuación de ondas**, y todas las funciones que representan ondas viajeras en dirección  $x$  deben satisfacerla. En particular, podemos verificar que la ecuación de ondas se satisface para la onda sinusoidal (7.3). En efecto, tomando derivadas parciales respecto a  $x$  y  $t$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 y_0 \text{sen}(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= -k^2 y_0 \text{sen}(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (7.10)$$

de modo que



$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (7.11)$$

Aunque  $y=f(x\pm vt)$  representa una onda que se propaga según el eje  $x$ , no tenemos que interpretarla necesariamente como una onda concentrada en ese eje. Puede representar también, en tres dimensiones, a una onda plana que se propaga paralelamente al eje  $x$ . Sin embargo, en la naturaleza hay ondas que se propagan en varias direcciones, como las ondas circulares en la superficie de un líquido, o las ondas esféricas en un gas isótropo. Para tratar estos casos es necesario generalizar la expresión (7.9) a tres dimensiones. Para funciones (que pueden ser vectores) del tipo  $\psi(\mathbf{r},t)$ , dependientes de las coordenadas espaciales  $\mathbf{r}=(x,y,z)$  y del tiempo  $t$ , puede escribirse que

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 \psi(\mathbf{r},t) \quad (7.12)$$

### 7.3. Tipos de ondas

Hemos visto que existen ondas unidimensionales, planas o esféricas. Otra forma de clasificar las ondas es según la dirección de la perturbación en relación a la dirección de propagación. Si la perturbación ocurre en dirección paralela a la dirección de propagación, las ondas se denominan **longitudinales**, mientras que si la dirección de variación es perpendicular a la dirección de propagación se denominan **transversales**. La dirección de variación de la magnitud en las ondas transversales se describe con el *estado de polarización*. Si dicha magnitud varía de tal forma que la dirección de propagación y la magnitud definan siempre el mismo plano, se dice que las ondas están polarizadas linealmente.

El medio de propagación puede hacer que la velocidad de propagación de la perturbación dependa de la frecuencia. Se dice entonces que el medio es **dispersivo**. En estos casos, una onda que sea superposición de varias ondas armónicas se deforma durante su propagación, ya que la velocidad de cada onda armónica es distinta, lo que hace que su tratamiento sea más complicado. Nuestro estudio por tanto, mientras no se indique lo contrario, se limitará al caso de medios no dispersivos, en los que la velocidad de propagación es independiente de la frecuencia  $\omega$ .

#### 7.4. Ondas transversales en una cuerda

Supongamos una cuerda tensa entre dos soportes fijos. Si la perturbamos desplazando transversalmente una pequeña porción, observaremos unas deformaciones que se propagan alejándose de la porción desplazada en ambos sentidos. Se trata de ondas elásticas, que tienen una dirección perpendicular a la de la cuerda.

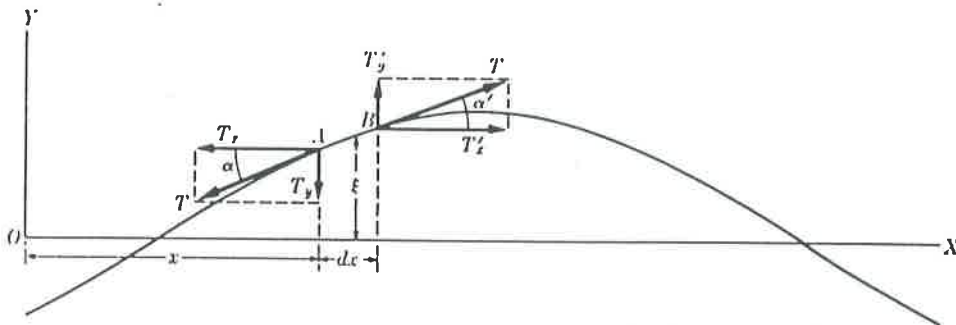


Fig. 7.3. Fuerzas sobre una sección de una cuerda desplazada transversalmente

Consideremos la cuerda de la figura 7.3., sometida a una tensión  $T$  y con una densidad lineal (masa por unidad de longitud)  $\mu$ . En un cierto instante, una porción AB de longitud  $dx$  se habrá desplazado una distancia  $y$  de su posición de equilibrio. En cada extremo de este segmento, estará actuando la tensión  $T$ , cuyas componentes verticales valdrán:  $T_y = -T \text{ sen } \alpha$  y  $T_y' = T \text{ sen } \alpha'$ , de manera que la fuerza total hacia arriba que actuará sobre el elemento AB será:

$$F_y = T(\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha) \approx T(\text{tg } \alpha' - \text{tg } \alpha) \quad (7.13)$$

Ahora bien,  $\text{tg } \alpha$  es la pendiente de la curva en el punto A, de manera que puede escribirse que  $\text{tg } \alpha = \partial y(x)/\partial x$  y  $\text{tg } \alpha' = \partial y(x+dx)/\partial x$  de forma que

$$F_y = T \left( \frac{\partial y(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (7.14)$$

Según la 2ª Ley de Newton, esta fuerza tiene que ser igual a la masa del segmento de cuerda AB por su aceleración hacia arriba:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (7.15)$$

de manera que se obtiene la ecuación de ondas (Ec. (7.9)) con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7.16)$$

El desplazamiento es una magnitud vectorial y su dirección ( $y$ ) es perpendicular a la dirección de propagación ( $x$ ). Se trata por tanto de una onda transversal que, en este caso, está polarizada linealmente.

### 7.5. Ondas de presión en un tubo de gas

A continuación vamos a considerar las ondas elásticas que se producen en un gas debido a las variaciones de presión. Para simplificar, comenzaremos considerando las ondas longitudinales que se propagan en un gas encerrado en un tubo cilíndrico, de sección  $A$ , como el mostrado en la Figura 7.4.

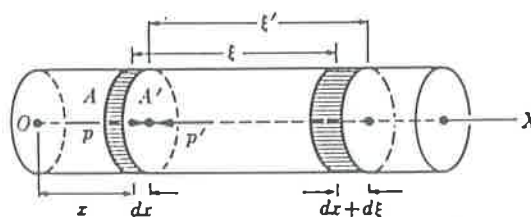


Fig 7.4. Propagación de una perturbación en un tubo que contiene un gas

Llamaremos  $p_0$  y  $\rho_0$  a la presión y a la densidad del gas en equilibrio (igual en todo  $x$ ), y consideraremos un volumen elemental  $A dx$ . Si la presión del gas se modifica (por ejemplo poniendo en movimiento un pistón situado en un extremo del tubo) el punto  $Q$  se desplazará una distancia  $\xi$ , y el punto  $Q'$  una distancia  $\xi+d\xi$ , de manera que el volumen elemental pasará a valer  $A(dx+d\xi)$ . Igualando las masas del volumen elemental, antes y después de la variación, puede obtenerse que:  $\rho_0 A dx = \rho A(dx+d\xi)$ , de modo que:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}} \approx \rho_0 \left( 1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (7.17)$$

donde se ha considerado que  $d\xi = \partial \xi / \partial x dx$  y se ha supuesto que  $\partial \xi / \partial x$  es pequeño.

En el estudio de los fluidos, se introduce el módulo de compresibilidad  $B$  como el cociente entre la presión a que está sometido un fluido y la deformación unitaria de volumen que produce, es decir:

$$p - p_0 = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (7.18)$$

Ahora bien, si el elemento que consideramos está en movimiento es porque la presión en una de sus caras es diferente a la presión en la otra cara. Llamando  $dp = p' - p$  a la diferencia de presión y aplicando la segunda ley de Newton, escribiremos que

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A dp \quad \Rightarrow \quad \rho_0 A dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad (7.19)$$

de modo que:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (7.20)$$

lo que corresponde a la ecuación de onda (7.9) con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad (7.21)$$

Utilizando las ecuaciones (7.17) y (7.18) pueden escribirse ecuaciones análogas a la (7.20) para la densidad  $\rho$  y para la presión  $p$ . Por ello, al referirnos a un gas, podemos hablar de una onda de desplazamiento, una onda de presión o una onda de densidad.

Suponiendo que las ondas de desplazamiento sean armónicas y se expresen como  $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ , tendremos para la presión (Ec. (7.18)) que

$$p - p_0 = -Bk\xi_0 \cos(kx - \omega t) = Bk\xi_0 \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (7.22)$$

de manera que la onda de presión oscila en torno a su valor de equilibrio con una amplitud  $\rho_0$  dada por:

$$\rho_0 = Bk\xi_0 = v^2 \rho_0 k \xi_0 \quad (7.23)$$

y está desfasada en  $\pi/2$  respecto de la onda de desplazamiento.

### 7.6. Ondas electromagnéticas

Cuando un campo eléctrico (o un campo magnético) varía con el tiempo, se induce un campo magnético (o eléctrico) en las regiones adyacentes del espacio. Esto sugiere la existencia de una perturbación electromagnética, consistente en campos eléctrico y magnético que varían con el tiempo y que pueden propagarse de una región a otra del espacio, que recibe el nombre de *onda electromagnética*.

Los principios básicos del electromagnetismo pueden formularse mediante un conjunto de 4 ecuaciones que se denominan *Ecuaciones de Maxwell*. Estas ecuaciones pueden combinarse originando dos ecuaciones de onda, una para el campo eléctrico  $\vec{E}$  y otra para el campo magnético  $\vec{B}$ . Las ecuaciones de Maxwell en el vacío pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

donde  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son constantes y  $\rho$  y  $\vec{j}$  son, respectivamente, las densidades de carga y de

corriente. En el caso particular de ausencia de cargas ( $\rho=0$ ) y corrientes ( $\vec{j}=0$ ) estas ecuaciones quedan en la forma:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{7.25}$$

Combinando las ecuaciones precedentes, puede obtenerse

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B}\tag{7.26}$$

de modo que obtenemos la ecuación de ondas tridimensional (7.12), con velocidad de propagación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}\tag{7.27}$$

Algunas características importantes de *todas* las ondas electromagnéticas son:

- La onda es *transversal*. Los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda y entre sí.
- La onda viaja en el vacío con una velocidad definida e invariante dada por (7.27).

Las ondas electromagnéticas se caracterizan por su longitud de onda (o su frecuencia). La *luz* consiste en ondas electromagnéticas con longitud de onda comprendida en el intervalo de longitudes de onda entre  $4$  y  $7 \cdot 10^7 \text{ m}$ . En la figura 7.5 se muestra el espectro electromagnético.

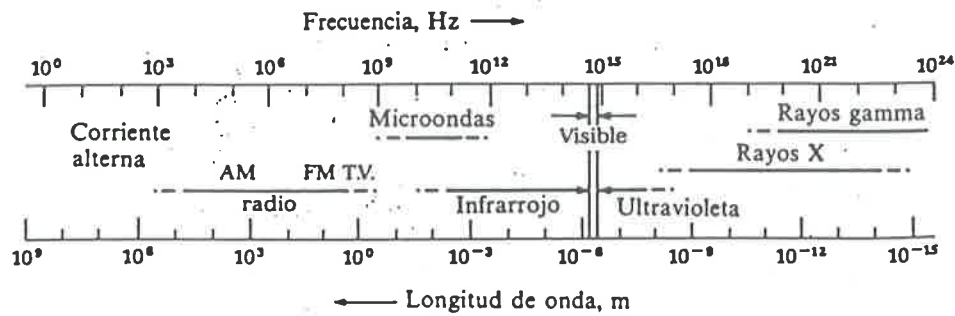


Fig. 7.5 Espectro electromagnético

### 7.7. Energía e intensidad de las ondas

En este apartado, vamos a centrarnos en el estudio de la energía transportada por una onda esférica, para el caso de ondas elásticas armónicas.

Cuando un movimiento armónico se propaga por un medio elástico, las partículas alcanzadas por la perturbación se encuentran sometidas a un movimiento vibratorio y, en consecuencia, poseen una cierta energía cinética  $E_c$ , por la velocidad de que están animadas, y una cierta energía potencial  $E_p$ , por efecto de la fuerza elástica que tiende a retornarla a su posición de equilibrio. Si el medio es homogéneo e isótropo, la velocidad de propagación de la energía es la misma en todas las direcciones. Tomando dos superficies esféricas muy próximas, separadas una distancia  $dr$ , todas las partículas que vibran en esta capa lo harán con la misma energía  $e$ ,

$$e = \frac{1}{2} m v^2 + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 \xi_0^2 \quad (7.28)$$

siendo  $\xi_0$  la amplitud de la vibración. Si llamamos  $dM = \rho 4\pi r^2 dr$  a la masa total de las partículas contenidas en dicha capa, la energía de vibración de todas ellas será

$$dE = \frac{1}{2} dM \omega^2 \xi_0^2 = 2\pi \rho r^2 \omega^2 \xi_0^2 dr \quad (7.29)$$

Esta energía atravesará las dos superficies esféricas próximas en un tiempo  $dt$ , de modo que el flujo de potencia valdrá:

$$P = \frac{dE}{dt} = 2\pi\rho r^2 \omega^2 \xi_0^2 \frac{dr}{dt} = 2\pi\rho r^2 \omega^2 \xi_0^2 v \quad (7.30)$$

siendo  $v$  la velocidad de propagación de la onda.

La energía por unidad de tiempo que atraviesa la unidad de superficie recibe el nombre de *intensidad de onda*, y vale

$$I = \frac{1}{2}\rho \omega^2 \xi_0^2 v \quad (7.31)$$

La expresión (7.31) nos indica que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. Si consideramos dos superficies esféricas de radios  $r$  y  $r'$ , la energía total que las atraviesa en un cierto tiempo  $t$  será:

$$E = 4\pi r^2 I t \quad E' = 4\pi r'^2 I' t \quad (7.32)$$

Si no hay pérdidas de energía en el medio  $E=E'$ , de modo que

$$\frac{I'}{I} = \frac{r^2}{r'^2} \quad (7.33)$$

Así pues, en las ondas esféricas las intensidades están en razón inversa a los cuadrados de las distancias al foco de la perturbación, mientras que las amplitudes son inversamente proporcionales a las distancias al foco.

Cuando se consideran ondas a distancia lo bastante alejada del foco como para que las superficies esféricas puedan considerarse en una pequeña región como planas (ondas planas), se tiene que  $r=r'$  y por tanto  $I=I'$  y  $\xi_0=\xi_0'$ . Sin embargo, la experiencia demuestra que la onda experimenta una disminución de la intensidad  $-dI$  dada por la relación

$$-dI = \beta I dx \quad (7.34)$$

done  $dx$  es el espesor del medio atravesado y  $\beta$  es el llamado *coeficiente de absorción del medio*. Separando variables en la ecuación (7.34) e integrando, se tiene



$$\frac{dI}{I} = -\beta dx \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\beta x \quad (7.35)$$

y despejando  $I$  podemos saber la intensidad a una distancia  $x$ . Así, se obtiene una función exponencial:

$$I = I_0 e^{-\beta x} \quad (7.36)$$

que proporciona la intensidad  $I$  de la onda en función de la intensidad incidente  $I_0$ , el coeficiente de absorción  $\beta$  y el espesor  $x$  del medio.

### 7.8. Sonido y sensación sonora

El sonido es una onda esférica de presión que se propaga en un medio elástico y que, al llegar al oído, puede producir una sensación sonora. El oído humano es sensible a ondas comprendidas en un intervalo de frecuencias de 20 a 20000 Hz.

La velocidad de propagación del sonido viene dada por la expresión (7.21), es decir:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (7.37)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido en que se propaga la onda y  $B$  es módulo de compresibilidad. En el caso de un gas ideal, la densidad y la presión están relacionadas por:  $\rho = pRT/M$ , siendo  $T$  la temperatura,  $M$  la masa molecular del gas y  $R$  la constante universal de los gases perfectos. Por otro lado,  $B$  está relacionado con la presión por  $B = \gamma p$ , siendo  $\gamma$  es una constante característica de cada gas. Utilizando estas dos expresiones, puede expresarse la velocidad del sonido como:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (7.38)$$

Respecto a la intensidad del sonido, si se utiliza la expresión para la amplitud de presión (7.23) en la ecuación para la intensidad (7.31), se obtiene

$$I = \frac{\rho_0^2}{2 \rho v} \quad (7.39)$$

La amplitud de presión de la onda sonora audible más débil es de unos  $3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$  y la intensidad correspondiente de  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ .

La sensación que nos produce una determinada onda sonora depende de la frecuencia de dicha onda. Además, para un frecuencia dada, la sensación producida no es directamente proporcional a la intensidad del sonido. La ley psicofísica de Weber y Fechner establece que la *sensación sonora*  $S$  es proporcional al logaritmo de la intensidad de la onda sonora. Más concretamente, se define el *nivel de intensidad sonora*, expresado en decibelios (dB), como

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (7.40)$$

donde  $I_0$  representa el valor umbral por debajo del cual deja de percibirse un sonido de 1000 Hz de frecuencia y vale  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ .

En la figura 7.6 se muestran, para las distintas frecuencias, los umbrales de audición y de dolor entre los cuales se produce la audición para el oído humano

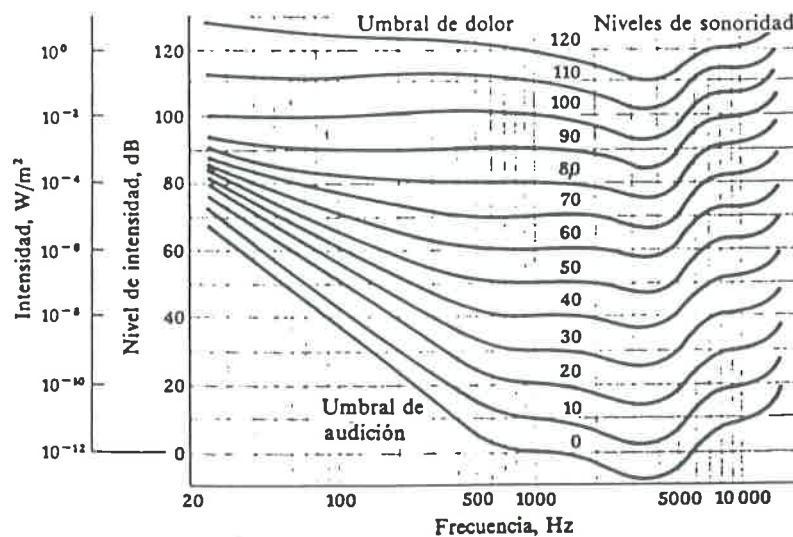


Fig. 7.6. Intervalo medio de audición para el oído humano

### 7.9. Efecto Doppler

Cuando una fuente emisora de ondas o un receptor, o ambos, están en movimiento con respecto al aire, la frecuencia percibida es distinta a la emitida. Este fenómeno, de gran importancia tanto para las ondas sonoras como para las luminosas, recibe el nombre de *Efecto Doppler*. A continuación analizaremos este efecto para el caso de las ondas sonoras.

Supondremos en primer lugar un foco en reposo, que emite ondas sonoras de frecuencia  $\nu$  y longitud de onda  $\lambda$ . Un observador en reposo notará que, por unidad de tiempo, la presión presenta sus máximos un número de veces igual a la frecuencia del sonido emitido, ya que en un segundo la onda recorre una distancia  $\nu$ , y en ella existen  $\nu/\lambda = \nu$  oscilaciones completas. Ahora bien, si el observador se desplaza con velocidad radial  $\nu_0$ , el número de oscilaciones que recibirá por unidad de tiempo será:

$$\nu' = \frac{\nu \pm \nu_0}{\lambda} \quad (7.41)$$

(+ si O se acerca al foco, - si se aleja de él). Por tanto, la relación entre la frecuencia percibida y la emitida puede escribirse como

$$\nu' = \nu \left( 1 \pm \frac{\nu_0}{\nu} \right) = \nu \frac{\nu \pm \nu_0}{\nu} \quad (7.42)$$

Supongamos ahora que el observador no se mueve, pero que el foco emisor sí lo hace, radialmente, con velocidad  $\nu_r$ . Ahora, las superficies correspondientes a los puntos de máxima presión ya no serán concéntricas sino que, como se representa en la figura 7.7, se concentrarán en la dirección del desplazamiento y se espaciarán en la opuesta.

Para un observador situado en O, la longitud de onda aparentemente será:

$$\lambda' = \lambda \mp v_f T = \lambda \mp \frac{v_f}{v} \quad (7.43)$$

(- si el foco se aproxima a O; + si se aleja).

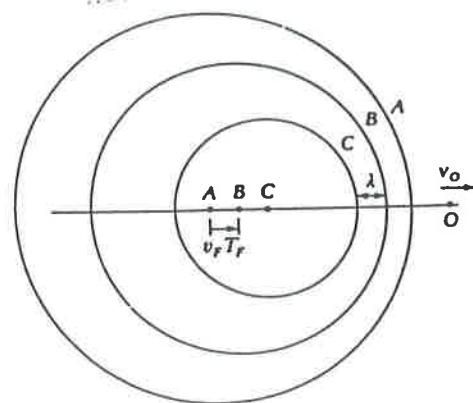


Fig 7.7. Foco en movimiento

Por tanto, la frecuencia aparente para el observador será:

$$v' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda \mp v_f/v} = v \frac{v}{v \mp v_f} \quad (7.44)$$

Las expresiones (7.42) y (7.44) pueden escribirse en una única fórmula, que podrá utilizarse si se mueven tanto el foco como el observador:

$$v' = v \frac{v \pm v_o}{v \mp v_f} \quad (7.45)$$

En resumen, siempre que el movimiento del foco y/o del observador tienda a que la distancia entre ambos disminuya, la frecuencia aparente es mayor a la emitida. En caso contrario, la frecuencia aparente es menor. Esto, en el caso del sonido, significa que éste se percibirá más agudo cuando el movimiento sea de acercamiento, y más grave cuando sea de alejamiento. Aun cuando nuestra deducción se ha hecho para ondas sonoras, en el caso de las ondas luminosas se produce el mismo fenómeno: en los espectros de estrellas que se acercan o se alejan de la Tierra se observan, respectivamente, corrimientos hacia el azul (mayor frecuencia) o hacia el rojo (menor frecuencia).

## Problemas

- 1.- Una onda transversal de  $10\text{ cm}$  de amplitud y  $200\text{ cm}$  de longitud de onda se propaga de izquierda a derecha a una velocidad de  $100\text{ cm/s}$ , a lo largo de una cuerda tensa horizontal. En el instante  $t=0$  el extremo izquierdo se encuentra en el origen y moviéndose hacia abajo.
- Calcular la pulsación y el número de onda del movimiento ondulatorio considerado.
  - Hallar la ecuación de movimiento del extremo izquierdo de la onda.
  - ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier punto de la cuerda?
  - Dibujar la forma de la cuerda en  $t=3.25\text{ s}$
  - Si la densidad lineal de la cuerda es  $0.5\text{ g/cm}$ , ¿Cuál es la tensión a la que está sometida?

Sol.: a)  $3.14\text{ rad/s}$ ;  $0.031\text{ rad/cm}$ ; b)  $y(0,t) = 10\text{ sen } \pi t$ ; c)  $31.42\text{ cm/s}$ ; e)  $5000\text{ dinas}$

- 2.- La ecuación de una onda transversal es:

$$y(x,t) = 2 \text{ sen } 2\pi \left( \frac{t}{0.01} - \frac{x}{30} \right)$$

donde  $x$  e  $y$  están en  $\text{cm}$  y  $t$  en  $\text{seg}$ . Hallar: la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda.

Sol.:  $2\text{ cm}$ ;  $30\text{ cm}$ ;  $100\text{ Hz}$ ;  $3000\text{ cm/s}$

- 3.- Una onda armónica transversal de longitud de onda  $\lambda=2\text{ cm}$  se propaga de izquierda a derecha con una velocidad de  $1\text{ cm/s}$  y una amplitud de  $1\text{ cm}$ . En el instante  $t=0$ , el extremo izquierdo se encuentra en el origen y moviéndose hacia arriba.
- Calcular el período de la onda y determinar la ecuación de la onda.
  - Representar gráficamente el perfil de la onda en el instante  $t=T/4$ .
  - Representar el movimiento de un punto situado a  $1\text{ cm}$  del origen.

Sol.: a)  $2\text{ s}$ ;  $y(x,t) = \text{sen}\pi(t-x)$

4.- Dada la ecuación de onda en una cuerda:

$$y(x,t) = 0.03 \text{ sen}(3x-2t)$$

donde  $x$  e  $y$  están en metros y  $t$  en segundos. Se pide:

- La velocidad máxima en cualquier punto de la cuerda
- La velocidad de propagación de la onda

Sol.: a) 0.06 m/s; b) 0.67 m/s

5.- Una fuente vibrante que está en el extremo de una cuerda tensa produce una perturbación dada por la ecuación:

$$y(t) = 0.1 \text{ sen } 6t$$

donde  $y$  está en metros y  $t$  en segundos. La tensión de la cuerda es de 4 N y la masa por unidad de longitud es de 0.01 Kg m<sup>-1</sup>.

- Hallar la frecuencia y la longitud de onda.
- Hallar la ecuación del movimiento para un punto situado a 1m de la fuente.

Sol.: a) 0.95 Hz; 20.94 m; b)  $y(1,t)=0.1 \text{ sin}(6t-0.3)$

6.- Una fuente emite un sonido de 200 Hz que se mueve por el aire en reposo con una velocidad de 340 m/s.

- Si la fuente se mueve con una velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo hacia un oyente estacionario, hallar la longitud de onda del sonido entre la fuente y el oyente, y la frecuencia oída por éste.
- Si el observador se mueve con una velocidad de 80 m/s alejándose de la fuente estacionaria, hallar la frecuencia oída por dicho observador.

Sol.: a) 1.3 m; 261.54 Hz; b) 152.94 Hz

7.- Dos sirenas A y B, tienen una frecuencia de 500 ciclos/s. A está fija, y B se mueve hacia la derecha (alejándose de A) con una velocidad de 60 m/s. Un observador situado entre A y B se desplaza hacia la derecha a 30 m/s. ¿Cuál es la frecuencia de A al ser percibida por el observador? ¿Y la de B?

Sol.: 455.9 Hz; 462.5 Hz

8.- Un coche se mueve con una velocidad de 17 m/s hacia una pared estacionaria. Su bocina emite ondas sonoras de 200 Hz que se mueven a 340 m/s.

a) Hallar la longitud de onda del sonido delante del coche y la frecuencia (de con) la que las ondas inciden en la pared.

b) Como que las ondas se reflejan en la pared, ésta actúa como una fuente de ondas sonoras a la frecuencia hallada en el apartado a). ¿Qué frecuencia oírás la persona que conduce el coche de las ondas reflejadas en la pared?

Sol.: a) 1.615 m; 210.5 Hz; b) 221.05 Hz

9.- Un foco que emite ondas sonoras de 1000 ciclos/s se mueve hacia la derecha en el aire en reposo con una velocidad de 30 m/s. A la derecha del foco se halla una gran superficie reflectora que se desplaza hacia la izquierda con una velocidad de 120 m/s.

a) ¿Cuál es la longitud de onda a la derecha del foco?

b) ¿Cuántas ondas llegan a la superficie receptora en 0.01 seg.?

c) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas reflejadas?

Sol.: a) 0.31 m/s; 15; c) 0.15 m

10.- 1.- ¿Cuál es el nivel de intensidad en dB correspondiente a una onda sonora:

a) de intensidad  $10^{-10}$  w/m<sup>2</sup>.

b) de intensidad  $10^{-2}$  w/m<sup>2</sup>.

2.- Hallar la intensidad si:

a) el nivel de intensidad es 10 dB.

b) el nivel de intensidad es 3 dB.

3.- Hallar la amplitud de presión correspondiente a ondas sonoras en el aire en c.n. para las intensidades del apartado 2 (Densidad del aire: 1,29 kg/m<sup>3</sup>).

4.- Si se duplica la intensidad ¿en cuánto aumentará el nivel de intensidad?.

5.- ¿Qué fracción de potencia acústica de un ruido deberá eliminarse para disminuir el nivel de intensidad sonora de 90 a 70 dB?.

Intensidad umbral:  $I_0=10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>

*Sol.: 1a) 20 dB; 1b) 100 dB; 2a)  $10^{-11}$  W/m<sup>2</sup>; 2b)  $2 \cdot 10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>; 3)  $9.27 \cdot 10^{-5}$  Pa; 4) en 3dB; 5) 99%*

11.- a) Si se triplica la amplitud de los cambios de presión de una onda sonora, ¿cuántas veces se aumenta la intensidad de la onda?

b) ¿Cuántas veces habría que aumentar la amplitud de los cambios de presión de una onda sonora para multiplicar su intensidad por un factor 16?

*Sol.: a) 9; b) 4*

12.- Un automóvil tiene producción de ruido acústico de 0,10 W. Si el sonido se radía isotrópicamente,

a) ¿Cuál es la intensidad a una distancia de 30 m?

b) ¿Cuál es el nivel de intensidad sonora en db a esta distancia?

c) ¿A qué distancia el nivel de intensidad sonora vale 40 dB?

d) ¿A qué distancia deja de percibirse el ruido producido por el coche?

*Sol.: a)  $8.84 \cdot 10^{-6}$  W/m<sup>2</sup>; b) 69.5 dB; c) 892 m; d) 89206 m*

13.- Tres fuentes sonoras producen unos niveles de intensidad de 70, 73 y 80 dB cuando actúan separadamente. Cuando actúan juntas las intensidades se suman (no existe interferencia entre las ondas procedentes de las fuentes sonoras debido a que las fases varían aleatoriamente). Hallar el nivel de intensidad sonora cuando las tres fuentes actúan simultáneamente. Discutir sobre la utilidad de eliminar las dos fuentes menos intensas con objeto de reducir el nivel de intensidad del ruido.

*Sol.: 81 dB*



## 8. Superposición de ondas

El *principio de superposición* afirma que cuando dos o más ondas coinciden en el tiempo y en el espacio, la función de onda resultante es la suma de las funciones de onda individuales. Este principio nos permitirá estudiar lo que ocurre cuando en un medio se propaga más de un movimiento ondulatorio. A continuación enunciaremos el principio de Huygens, y analizaremos los fenómenos de difracción y de polarización.

### 8.1. Interferencias

Se denomina interferencias a los fenómenos que resultan de superponer dos o más ondas en un punto. Cuando en una región del espacio coinciden varias ondas, se observa que la intensidad de la onda resultante varía de un punto a otro, formándose las llamadas figuras de interferencia.

En primer lugar, trataremos el caso de dos fuentes que oscilan en fase, con igual frecuencia e igual amplitud  $A$ . Consideraremos un punto  $P$  cualquiera, y llamaremos  $x_1$  y  $x_2$  a las distancias de cada una de las fuentes al punto  $P$ . Las ondas individuales, en  $P$ , vendrán descritas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}y_1 &= A \operatorname{sen}(kx_1 - \omega t) \\y_2 &= A \operatorname{sen}(kx_2 - \omega t)\end{aligned}\tag{8.1}$$

La onda resultante, de acuerdo con el principio de superposición, será:

$$y = y_1 + y_2 = A [\operatorname{sen}(kx_1 - \omega t) + \operatorname{sen}(kx_2 - \omega t)]\tag{8.2}$$

Aplicando la fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\tag{8.3}$$

la expresión anterior queda:

$$y = 2A \cos \frac{k(x_1 - x_2)}{2} \operatorname{sen} \left( k \frac{x_1 + x_2}{2} - \omega t \right) \quad (8.4)$$

que puede escribirse como

$$y = A' \operatorname{sen} \left( k \frac{x_1 + x_2}{2} - \omega t \right) \quad (8.5)$$

siendo  $A'$  la amplitud:

$$A' = 2A \cos \frac{k(x_1 - x_2)}{2} \quad (8.6)$$

Estas expresiones nos indican que el resultado de la superposición es una onda de igual frecuencia que las iniciales, pero con una amplitud que depende de la diferencia de caminos desde las dos fuentes hasta el punto P.

Según (8.6), la amplitud será **máxima** en los puntos que verifiquen:

$$\cos \frac{k(x_1 - x_2)}{2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{k(x_1 - x_2)}{2} = n\pi$$

es decir, para una diferencia de caminos:

$$x_1 - x_2 = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En este caso se dice que la interferencia es **constructiva**. La amplitud vale  $A' = 2A$ , de modo que la intensidad (proporcional al cuadrado de la amplitud) es  $I' = 4I$ . Por otro lado, la amplitud será cero (y por tanto también la intensidad) en los puntos que verifiquen:

$$\cos \frac{k(x_1 - x_2)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{k(x_1 - x_2)}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

es decir, para una diferencia de caminos:

$$x_1 - x_2 = \frac{(2n + 1)\pi}{k} = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En este caso se dice que la interferencia es **destruktiva**. En resumen, se tiene:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \begin{cases} n \lambda & \text{constructiva} \\ (2n + 1) \frac{\lambda}{2} & \text{destruktiva} \end{cases} \quad (8.7)$$

Las interferencias se producen tanto en ondas que se propagan en medios materiales como en ondas electromagnéticas. Respecto a este segundo caso, es muy célebre el experimento realizado por Young en 1801, que sirvió para comprobar el carácter ondulatorio de la luz.

### ~ 8.2. Experiencia de Young:

La experiencia de Young consiste en interponer en el camino de la luz procedente de un foco F una superficie con dos rendijas separadas una pequeña distancia  $a$ . Colocando una pantalla delante de éstas, puede observarse una imagen consistente en una serie de franjas de luz y de oscuridad. La explicación es que cada una de las rendijas se convierte en centro emisor de ondas, que se superponen dando lugar al fenómeno de interferencias explicado anteriormente.

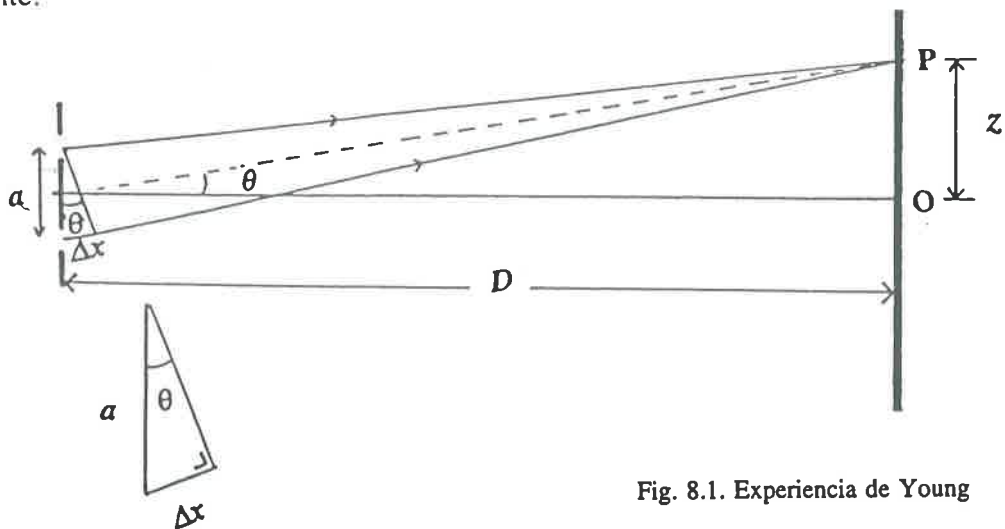


Fig. 8.1. Experiencia de Young

Si consideramos el punto **P** de la pantalla, situada a una distancia  $D$  muy grande en comparación con la separación entre rendijas ( $a \ll D$ ), la diferencia de caminos es aproximadamente:

$$\Delta x = x_1 - x_2 \approx a \sin \theta \quad (8.8)$$

La distancia  $z$  medida sobre la pantalla desde el centro de ésta hasta el punto **P** está relacionada con  $\theta$  por:

$$z = D \tan \theta \quad (8.9)$$

Para valores pequeños de  $\theta$  se cumple que  $\sin \theta \approx \tan \theta = z / D$ , de modo que podemos considerar

$$\Delta x \approx \frac{a z}{D} \quad (8.10)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (8.7), encontramos que la posición de los máximos de luz (**interferencia constructiva**) viene dada por la expresión:

$$\Delta x = n \lambda = \frac{a z_{\max}}{D} \Rightarrow z_{\max} = n \frac{D \lambda}{a} \quad (8.11)$$

mientras que la posición de los mínimos (**interferencia destructiva**) viene dada por:

$$\Delta x = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} = \frac{a z_{\min}}{D} \Rightarrow z_{\min} = \left( \frac{2n+1}{2} \right) \frac{D \lambda}{a} \quad (8.12)$$

La distancia entre dos máximos o dos mínimos vale

$$\Delta z = \frac{D \lambda}{a} \quad (8.13)$$

El resultado obtenido indica que, dentro de las aproximaciones realizadas, la distancia entre franjas es constante, es decir, las franjas son equidistantes.

### 8.3. Ondas estacionarias

Un caso especial de interferencia es el que se produce entre dos ondas idénticas que se propagan en sentidos opuestos. A la resultante de estas ondas se la denomina *onda estacionaria*. En particular, podemos pensar en una cuerda en la que se propagan dos ondas de igual frecuencia y amplitud. La onda que viaja hacia la derecha es:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (8.14)$$

mientras que la que viaja hacia la izquierda es:

$$y_2 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) \quad (8.15)$$

La superposición de las dos ondas será:

$$y = y_1 + y_2 = A [\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(kx + \omega t)] = \\ = 2A \operatorname{sen}kx \cos \omega t \quad (8.16)$$

donde se ha utilizado nuevamente la relación trigonométrica (8.3). La ecuación (8.16) nos indica que cada uno de los puntos de la cuerda sigue un movimiento armónico simple de frecuencia angular  $\omega$  y cuya amplitud ( $A' = 2A \operatorname{sen}kx$ ) depende de su posición. La amplitud  $A'$  es cero en los puntos, denominados **nodos**, en los que se cumple que:

$$\operatorname{sen}kx = 0 \Rightarrow kx = m\pi \Rightarrow x = m \frac{\lambda}{2} \quad (8.17)$$

La amplitud  $A'$  es máxima ( $A' = 2A$ ) en los puntos, denominados **vientres** o **antinodos**, que verifican que:

$$\operatorname{sen}kx = \pm 1 \Rightarrow kx = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2m + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (8.18)$$

Así pues, se tiene:

$$x = \begin{cases} m \frac{\lambda}{2} & \text{nodos} \\ (2m + 1) \frac{\lambda}{4} & \text{antinodos} \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.19)$$

Si tenemos una cuerda de longitud  $L$  sujeta por los dos extremos y la perturbamos, se crea una onda que al llegar a los extremos se refleja. La onda incidente y la reflejada se propagan en sentidos contrarios y podrían dar lugar a una onda estacionaria. Para que esto suceda tienen que darse unas condiciones especiales: los extremos de la cuerda tienen que ser nodos. De acuerdo con la ecuación (8.19), la distancia entre dos nodos es  $\lambda/2$ , de manera que para tener una onda estacionaria en una cuerda fija por ambos extremos es necesario que ésta tenga una longitud:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.20)$$

Dicho de otro modo: si la cuerda tiene longitud  $L$ , las posibles longitudes de onda y frecuencias de las ondas estacionarias son:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \nu = n \frac{v}{2L} \quad (8.21)$$

Estas frecuencias se denominan frecuencias naturales o armónicos. La frecuencia correspondiente a  $n=1$  ( $\nu_1 = v/2L$ ) se denomina frecuencia fundamental. En la Figura 8.2 se muestra las ondas correspondientes a varios armónicos.

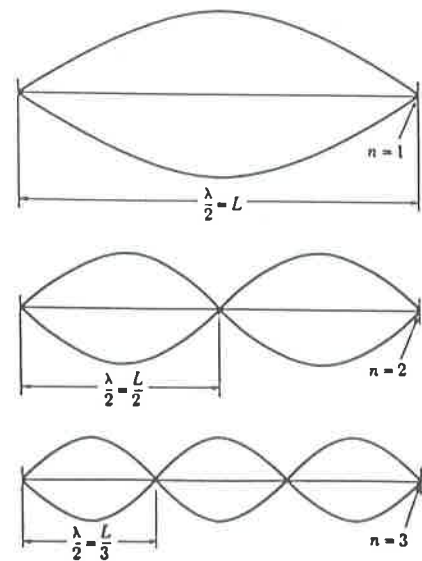


Fig.8.2 Ondas estacionarias en una cuerda con ambos extremos fijos.

#### 8.4. Principio de Huygens. Difracción

El principio de Huygens establece que: "cuando un movimiento ondulatorio llega a un punto capaz de vibrar, éste se transforma en un foco emisor; las ondas resultantes son activas en los puntos de contacto con la envolvente común".

Este principio explica la propagación del movimiento ondulatorio. Todos los puntos de un frente de onda se convierten en emisores de ondas elementales que se propagan en todas direcciones. Pasado un período de tiempo, la perturbación se habrá transmitido una distancia  $\lambda = v T$  (radio de las esferas pequeñas). El nuevo frente de ondas será la superficie envolvente de las ondas elementales.

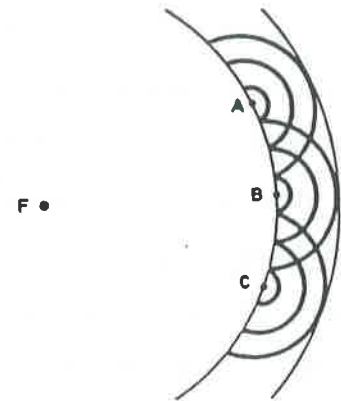


Fig. 8.3 Frentes de ondas.

Cuando en el camino por donde se propaga una onda se interpone un obstáculo cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda, dicha onda sufre una distorsión. Este fenómeno se conoce como **difracción**. El obstáculo puede ser una pantalla con una rendija que sólo permite el paso de una porción del frente de onda, o bien puede ser un pequeño objeto que impide el paso de una porción del frente de onda.

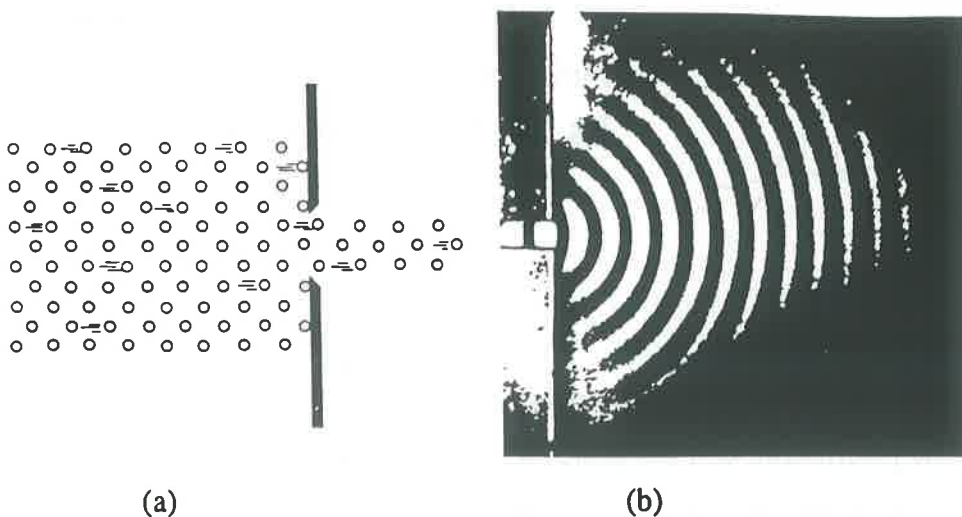


Fig. 8.4 Comportamiento de un haz de partículas (a) y de una onda (b) al incidir sobre una pantalla con una pequeña abertura.

Este fenómeno puede observarse en la Fig. 8.4 (b). Cuando un haz de partículas incide sobre una superficie que tiene una abertura, se observa que aquellas que inciden justo en la abertura continúan su camino sin ser perturbadas, mientras que las otras se detienen o rebotan hacia atrás (Fig. 8.4 (a)). Sin embargo, las ondas se comportan de una forma diferente, extendiéndose alrededor de la abertura, como se muestra en la Fig. 8.4 (b). El efecto es más importante cuando el tamaño de la abertura (obstáculo) se aproxima a la longitud de onda de las ondas. Es por esto que habitualmente no podemos observar la difracción de la luz ( $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7} \text{m}$ ) ya que el obstáculo tendría que ser muy pequeño; lo más frecuente es obtener una sombra detrás del obstáculo. En cambio sí que apreciamos habitualmente la difracción de las ondas sonoras, ya que éstas tienen una longitud de onda relativamente grande ( $\lambda \sim 1 \text{m}$ ). La ondas sonoras pueden contornear fácilmente un obstáculo interpuesto, de modo que percibamos el sonido detrás de éste.

### 8.5. Polarización

La polarización es un fenómeno característico de las ondas transversales, en las cuales las partículas vibran perpendicularmente a la dirección de propagación. En general, la dirección de vibración varía de unos puntos a otros. Se dice entonces que la onda *no está polarizada*.

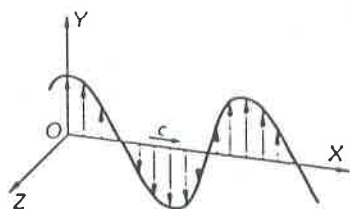


Fig. 8.5 Polarización lineal

Una onda está **polarizada linealmente** cuando las partículas vibran siempre en un mismo plano (OXY en la Fig. 8.5). Dicho plano se denomina *plano de oscilación*.

Cuando se superponen dos ondas transversales de igual frecuencia que se encuentran linealmente polarizadas, con sus planos de polarización perpendiculares, se obtiene una onda **polarizada elípticamente**. En efecto, si consideremos dos ondas de ecuaciones:



$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (8.22)$$

$$z(x,t) = B \operatorname{sen}(kx - \omega t + \delta) \quad (8.23)$$

De la Ec. (8.23) tenemos que

$$\frac{z(x,t)}{B} = \operatorname{sen}(kx - \omega t) \cos \delta + \cos(kx - \omega t) \operatorname{sen} \delta \quad (8.24)$$

y de la (8.22):

$$\operatorname{sen}(kx - \omega t) = \frac{y}{A} \Rightarrow \cos(kx - \omega t) = \sqrt{\frac{1 - y^2}{A^2}} \quad (8.25)$$

Sustituyendo y operando, puede obtenerse:

$$\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2zy}{AB} \cos \delta = \operatorname{sen}^2 \delta \quad (8.26)$$

que, para una  $x$  determinada, es la ecuación de la elipse que describe la partícula situada en esa posición.

**Problemas**

- 1.- Un foco de luz roja de longitud de onda  $6.5 \cdot 10^{-7}$  m, produce interferencias a través de dos rendijas separadas 0.01 cm. ¿A qué distancia debemos colocar la pantalla para que las primeras franjas estén separadas 1 cm?

*Sol.: 1.54 m*

- 2.- Dos rendijas separadas por una distancia de 1 mm se iluminan con luz roja. Las franjas de interferencia se observan sobre una pantalla colocada a 1 m de las franjas.  
a) Hallar la distancia entre dos franjas brillantes.

b) Determinar las posiciones de la 3ª franja oscura y de la 5ª franja brillante a partir de la franja central.

*Sol.: a) 0.65 mm; b) 1.625 mm; 3.25 mm*

- 3.- Al iluminar dos rendijas con luz de 589 nm de longitud de onda se observan, sobre una pantalla a 3m, 28 franjas brillantes por cm. ¿Cuál es la separación entre las rendijas?

*Sol.: 4.8 mm*

- 4.- Dos fuentes sonoras oscilan en fase con una frecuencia de 100 Hz. En un punto situado a 5 m de una de ellas y a 5.85 m de la otra, la amplitud del sonido procedente de cada fuente es A. Tomando  $v=340$  m/s,

a) ¿Cuál es la diferencia de fase de la onda sonora procedente de ambas fuentes en dicho punto?

b) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en dicho punto?

*Sol.: a)  $\pi/2$  ; b)  $A\sqrt{2}$*

- 5.- Dos altavoces separados cierta distancia emiten ondas sonoras de la misma frecuencia, pero el altavoz 1 tiene una fase adelantada en  $\pi/2$  a la del altavoz 2. Sea  $r_1$  la distancia de un punto determinado al altavoz 1 y  $r_2$  la que dista del mismo punto al altavoz 2. Hallar  $r_1-r_2$  tal que el sonido en el punto sea

a) máximo

b) mínimo

Expresar la respuesta en función de la longitud de onda.

Sol.: a)  $(n+1/4)\lambda$ ; b)  $(n+3/4)\lambda$

- 6.- La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos es

$$y(x, t) = 0.5 \text{ sen } 0.025 x \text{ cos } 500 t$$

donde  $x$  e  $y$  están expresados en cm y  $t$  en seg.

a) Hallar la velocidad y la amplitud de las ondas cuya combinación da como resultado la onda estacionaria.

b) ¿Cuál es la distancia entre nodos sucesivos de la cuerda?

c) ¿Cuál es la longitud más corta posible de la cuerda?

Sol.: a) 20000 cm/s; 0.25 cm; b) 125.66 cm; c) 125.66 cm

- 7.- Un hilo de acero de 5 g y 1.2 m de longitud está fijo por ambos extremos y tiene una tensión de 968 N.

a) Hallar la velocidad de las ondas transversales en el hilo

b) Hallar la frecuencia fundamental

c) Hallar las frecuencias del 2º y 3º armónicos.

Sol.: a) 482 m/s; b) 200.8 Hz; c) 401.6 Hz; 602.4 Hz

- 8.- Una cuerda de 4m de longitud se fija por un extremo y se liga por el otro a una cuerda ligera de modo que puede moverse libremente en dicho extremo. La velocidad de las ondas sobre la cuerda es de 20 m/s. Hallar:

a) la frecuencia fundamental

b) la frecuencia del 1º sobretono

Sol.: a) 1.25 Hz; b) 3.75 Hz

- 9.- Calcular la frecuencia fundamental de un tubo de órgano de 9.6 m que está abierto por ambos extremos y la correspondiente a otro que está cerrado por un extremo.

*Sol.: 17.7 Hz; 8.85 Hz*

- 10.- El intervalo normal de audición va desde 20 Hz hasta 20000 Hz aproximadamente. ¿Cuál es la longitud mayor de un tubo de órgano que tuviese su nota fundamental en este intervalo?

- a) Si está cerrado por un extremo.
- b) Si está abierto por ambos extremos.

*Sol.: a) 4.25 m; b) 8.5 m*

## Bibliografía

S.Burbano, E. Burbano y C. Gracia, *Física General*  
Mira editores, 1993.

J. Casas, *Óptica*.  
Universidad de Zaragoza, 1992.

J. Fernández y M. Pujal, *Iniciación a la Física*  
Ed. Reverté, Barcelona, 1992.

M. S. Millan y otros, *Óptica geométrica*  
Ed. U.P.C, Aula práctica 21, Barcelona, 1993

P. A. Tipler, *Física*  
Ed. Reverté, Barcelona, 1994.