EE
Mecànica

EPSEB

UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Escola Universitària
Politècnica de Barcelona

Departament de
Física Aplicada

CENTRES DE GRAVETAT

PROBLEMES RESOLTS

CENTRES DE GRAVETAT

TEOREMES DE PAPPOS-GULDIN

Enric Camí

Barcelona, Octubre 1995.

DEPOSITO LEGAL B- 41.636-
OCTUBRE 1.995

14006 98076
AT Fonaments
de Mecànica

1. Centres de gravetat

1.1.- Calculeu les coordenades del centre de gravetat (centroide) del rectangle de la Figura 1.1 referides als eixos X i Y. Les dimensions són en centímetres i l'angle α verifica $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\cos\alpha = 0{,}8$.

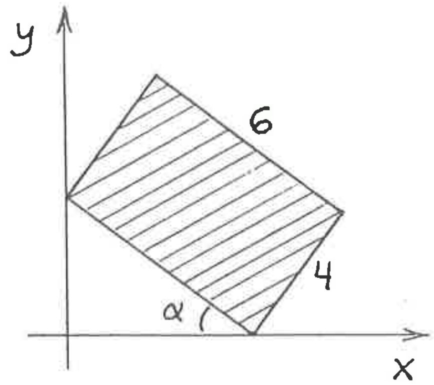

Figura 1.1

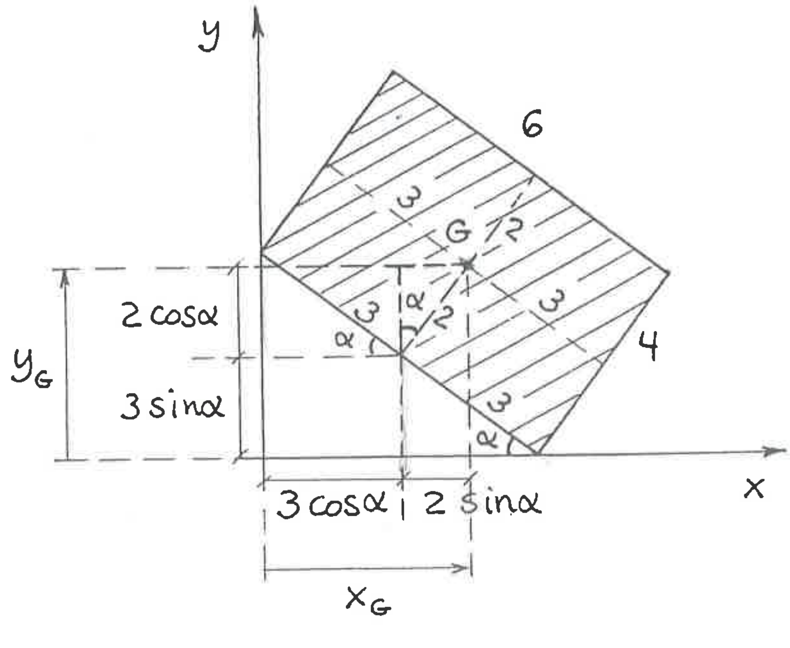

Figura 1.2

$$x_G = 3\cos\alpha + 2\sin\alpha = 3\cdot 0{,}8 + 2\cdot 0{,}6 = 3{,}6 \text{ cm}$$

$$y_G = 3\sin\alpha + 2\cos\alpha = 3\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}8 = 3{,}4 \text{ cm}$$

1.2.- Trobeu les coordenades del centroide de cada un dels semicercles (de radi 5 cm) de la Figura 1.3 referides als eixos indicats.

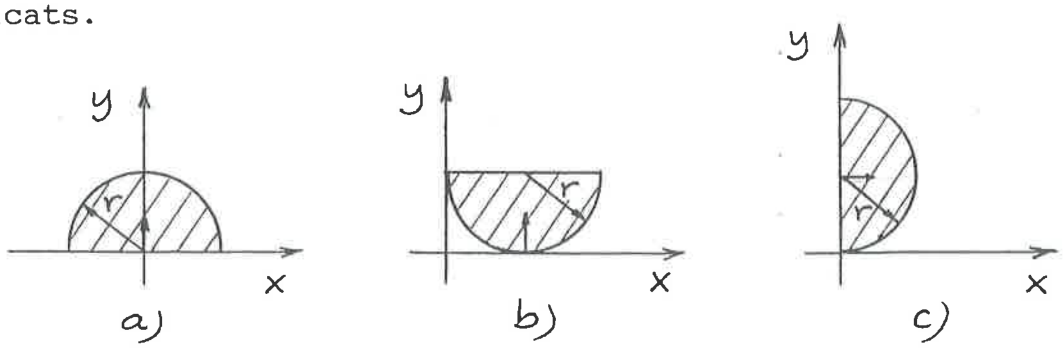

Figura 1.3

a)

$$x_G = 0 \text{ cm} \quad (\text{simetria})$$

$$y_G = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 5}{3\pi} = 2,12 \text{ cm}$$

b)

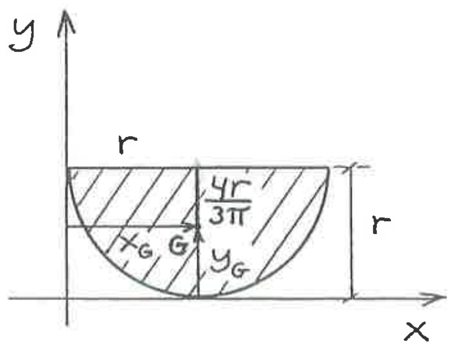

Figura 1.4

$$x_G = r = 5 \text{ cm} \quad (\text{simetria})$$

$$y_G = r - \frac{4r}{3\pi} = 5 - \frac{4 \cdot 5}{3\pi} = 2,88 \text{ cm}$$

c)

$$x_G = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 5}{3\pi} = 2,12 \text{ cm}$$

$$y_G = r = 5 \text{ cm} \quad (\text{simetria})$$

1.3.- Determineu l'expressió de les coordenades del centroide o centre de gravetat G de la superfície triangular de la Figura 1.5

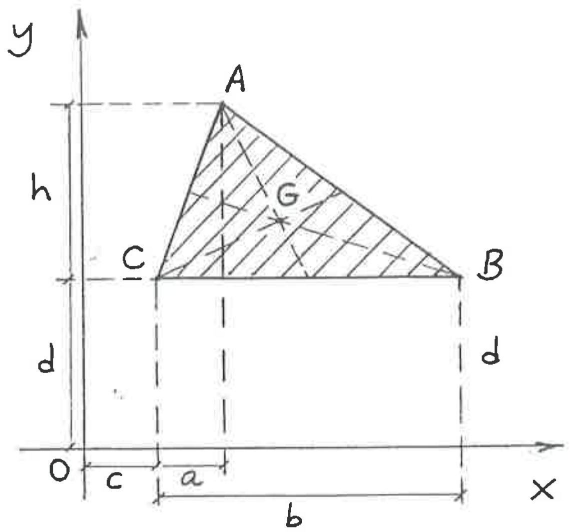

Figura 1.5

El centroide d'una superfície triangular és al seu baricentre. Per tant, es verifica

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

o, escrit impròpiament

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

on $O(0,0)$ és l'origen de coordenades, G és el baricentre i A, B i C són les coordenades dels vèrtexs del triangle. Segons la Fig. 1.5, les coordenades dels vèrtexs són:

$A(c+a,\ d+h)$

$B(c+b,\ d)$

$C(c,\ d)$

i

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{3c+a+b}{3}, \frac{3d+h}{3} \right) =$$

$$= \left(c + \frac{a+b}{3}, d + \frac{h}{3} \right)$$

És a dir, que les coordenades del centroide de la superfície triangular són

$$x_G = c + \frac{a+b}{3}$$

$$y_G = d + \frac{h}{3}$$

Cas particular

Si (Fig. 1.6) $c = d = 0$,

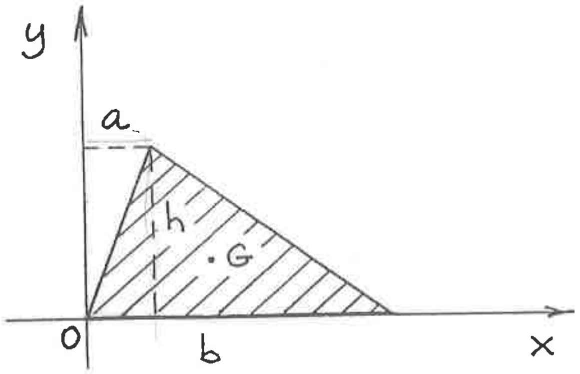

Figura 1.6

llavors

$$x_G = \frac{a+b}{3}$$

$$y_G = \frac{h}{3}$$

1.4.- Trobeu el centroide de cada triangle de la Figura 1.7

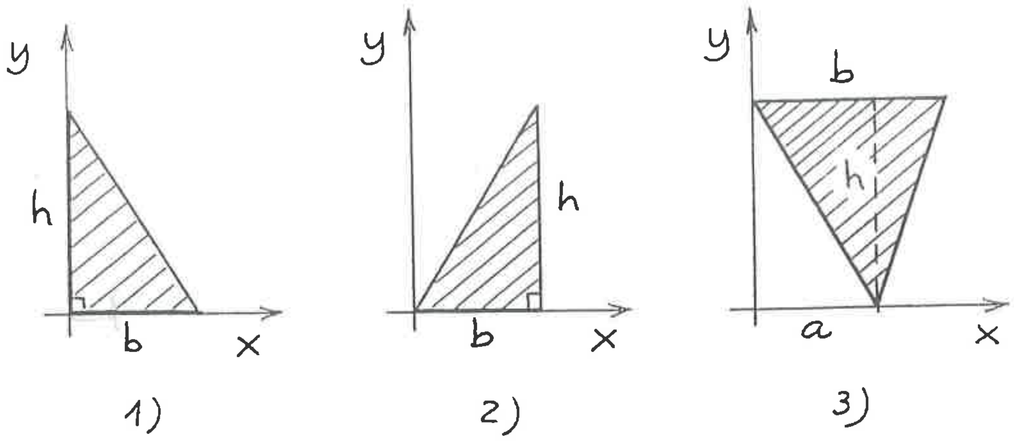

Figura 1.7

1)

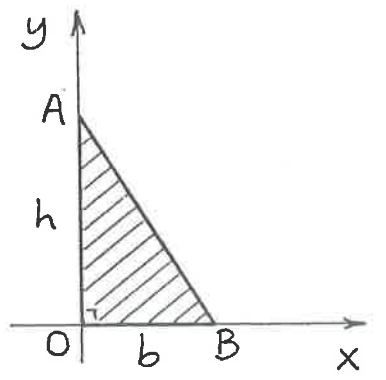

Figura 1.8

Els vèrtexs són:

$$O(0,0) \quad , \quad A(0,h) \quad , \quad B(b,0)$$

$$G = \frac{O+A+B}{3} = \left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right)$$

$$x_G = \frac{b}{3}$$

$$y_G = \frac{h}{3}$$

2)

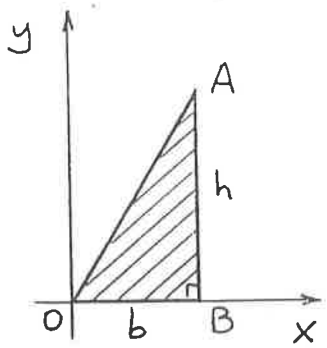

Figura 1.9

Vèrtexs : $O(0,0)$, $A(b,h)$, $B(b,0)$

$$G = \frac{O+A+B}{3} = \left(\frac{2b}{3}, \frac{h}{3}\right)$$

$$x_G = \frac{2b}{3}$$

$$y_G = \frac{h}{3}$$

3)

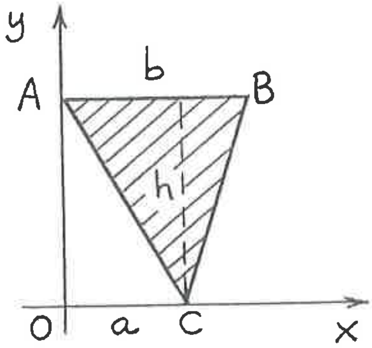

Figura 1.10

Vèrtexs : $A(0,h)$, $B(b,h)$, $C(a,0)$

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{2h}{3}\right)$$

$$x_G = \frac{a+b}{3}$$

$$y_G = \frac{2h}{3}$$

1.5.- Trobeu el centre de gravetat del triangle de la Figura 1.11

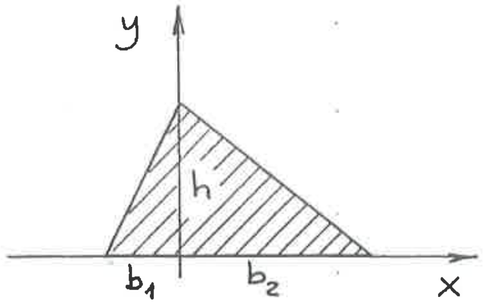

Figura 1.11

Les coordenades dels vèrtexs (Fig. 1.12) són:

$A(-b_1, 0)$, $B(b_2, 0)$ i $C(0, h)$.

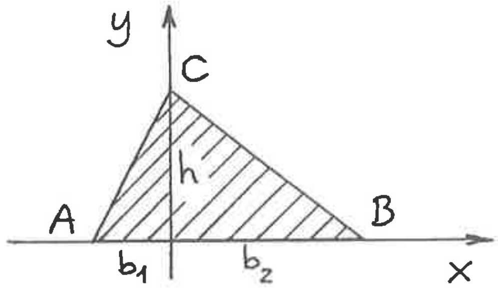

Figura 1.12

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{b_2 - b_1}{3}, \frac{h}{3}\right)$$

o sigui,

$$x_G = \frac{b_2 - b_1}{3}$$

$$y_G = \frac{h}{3}$$

Si $b_1 = b_2$, el triangle és isòsceles i $x_G = 0$, el centre de gravetat del triangle és sobre l'eix Y (que en aquest cas és eix de simetria del triangle).

1.6.- Determineu les coordenades del centre de gravetat de la superfície ratllada de la Figura 1.13. Les dimensions són en centímetres.

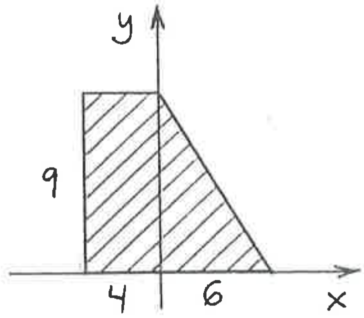

Figura 1.13

Si (1) és el rectangle i (2) el triangle,

$$x_{G_1} = -\frac{4}{2} = -2 \text{ cm} \qquad x_{G_2} = \frac{6}{3} = 2 \text{ cm}$$

$$y_{G_1} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ cm} \qquad y_{G_2} = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm}$$

$$S_1 = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2 \qquad S_2 = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{x_{G_1} S_1 + x_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{(-2) \cdot 36 + 2 \cdot 27}{36 + 27} =$$

$$= \frac{-2}{7} = -0{,}29 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4{,}5 \cdot 36 + 3 \cdot 27}{36 + 27} =$$

$$= \frac{27}{7} = 3{,}86 \text{ cm}$$

1.7.- Calculeu les coordenades del centre de gravetat de la superfície ratllada de la Figura 1.14. Les dimensions són en decímetres.

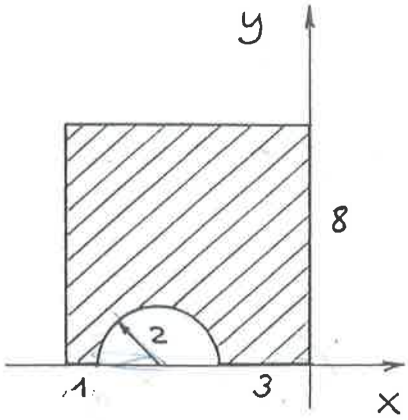

Figura 1.14

Si (1) és el quadrat de 8 dm de costat sense el forat semicircular i (2) és el semicercle de radi 2 dm,

$$x_{G_1} = \frac{-8}{2} = -4 \text{ dm}$$

$$y_{G_1} = \frac{8}{2} = 4 \text{ dm}$$

$$S_1 = 8^2 = 64 \text{ dm}^2$$

$$x_{G_2} = -(3+2) = -5 \text{ dm}$$

$$y_{G_2} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = \frac{8}{3\pi} = 0,85 \text{ dm}$$

$$S_2 = -\frac{\pi r^2}{2} = -\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = -2\pi = -6,28 \text{ dm}^2$$

El signe menys a S_2 indica que és un forat.

I el centre de gravetat de la superfície composta es troba a

$$X_G = \frac{x_{G_1} S_1 + x_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{(-4)\cdot 64 + (-5)\cdot(-6{,}28)}{64 - 6{,}28} =$$

$$= -3{,}89 \text{ dm}$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4 \cdot 64 + 0{,}85\cdot(-6{,}28)}{64 - 6{,}28} =$$

$$= 4{,}34 \text{ dm}$$

1.8.- Calculeu la posició del centre de gravetat de la superfície ratllada que es representa a la Figura 1.15. Les dimensions són en centímetres.

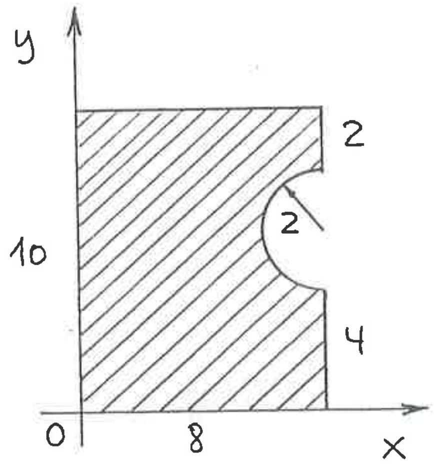

Figura 1.15

Si (1) és el rectangle sense el forat semicircular i (2) és el semicercle,

$$x_{G_1} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$y_{G_1} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$S_1 = 10 \cdot 8 = 80 \text{ cm}^2$$

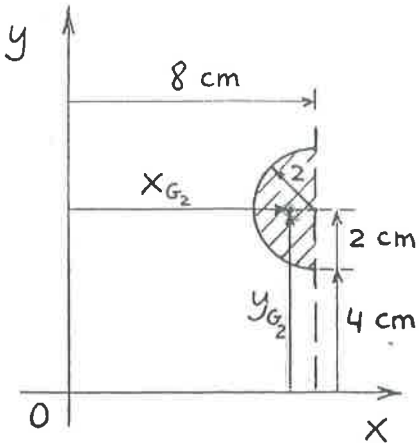

Figura 1.16

$$x_{G_2} = 8 - \frac{4r}{3\pi} = 8 - \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = 7{,}15 \text{ cm}$$

$$y_{G_2} = 4 + 2 = 6 \text{ cm}$$

$$S_2 = -\frac{\pi r^2}{2} = -\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = -2\pi = -6{,}28 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{x_{G_1} S_1 + x_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4 \cdot 80 + 7{,}15 \cdot (-6{,}28)}{80 - 6{,}28} =$$

$$= 3{,}73 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{5 \cdot 80 + 6 \cdot (-6{,}28)}{80 - 6{,}28} =$$

$$= 4{,}91 \text{ cm}$$

1.9.- Trobeu les coordenades del centre de gravetat de la superfície ratllada de la Figura 1.17, on les dimensions són en centímetres.

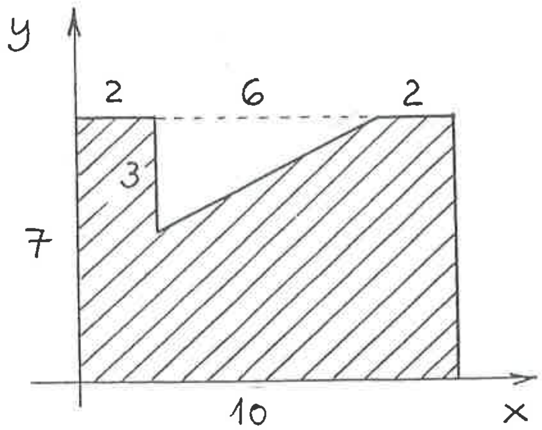

Figura 1.17

Si (1) és el rectangle sense el forat triangular i (2) és la superfície triangular,

$$x_{G_1} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm} \qquad x_{G_2} = 2 + \frac{6}{3} = 4 \text{ cm}$$

$$y_{G_1} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ cm} \qquad y_{G_2} = 7 - \frac{3}{3} = 6 \text{ cm}$$

$$S_1 = 10 \cdot 7 = 70 \text{ cm}^2 \qquad S_2 = -\frac{6 \cdot 3}{2} = -9 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{5 \cdot 70 + 4 \cdot (-9)}{70 - 9} = 5,15 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{3,5 \cdot 70 + 6 \cdot (-9)}{70 - 9} = 3,13 \text{ cm}$$

1.10.- Obteniu les coordenades del centroide d'un quart de cercle de radi r a partir del centroide del sector circular (Fig. 1.18).

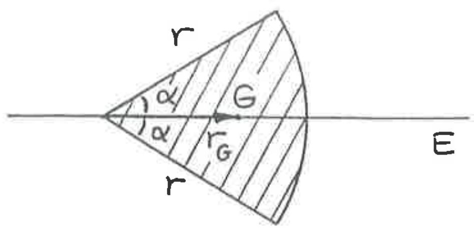

Figura 1.18

$$r_G = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha} \qquad (\alpha \text{ en radians})$$

En el cas d'un quart de cercle (Fig 1.19), $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad i

$$r_G = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,r$$

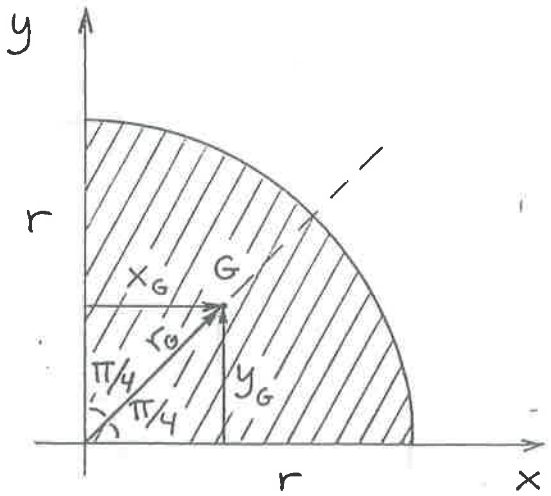

Figura 1.19

Per tant,

$$x_G = r_G \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$y_G = r_G \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4r}{3\pi}$$

$x_G = y_G$ per la simetria de la figura.

1.11.- Localitzeu el centre de gravetat d'un quart de cercle de radi r a partir del centre de gravetat del semicercle.

El centre de gravetat d'un quart de cercle ha de ser, per simetria, sobre la bisectriu del quadrant, de manera que les distàncies a_q del centre de gravetat a les bases del quadrant (o als eixos que el limiten) són iguals (Fig. 1.20).

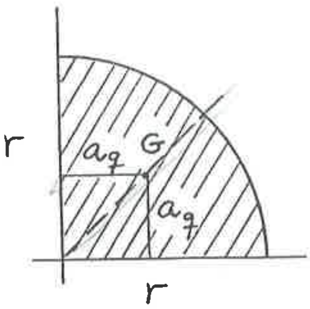

Figura 1.20

La distància des de la base al centre de gravetat d'un semicercle de radi r és

$$a = \frac{4r}{3\pi}$$

Per altra part, un semicercle es pot considerar com una figura composta per dos quadrants del mateix radi que el semicercle, tots dos d'igual àrea, S_q, i igual distància a_q del centre de gravetat de cada quadrant a la base (Fig. 1.21).

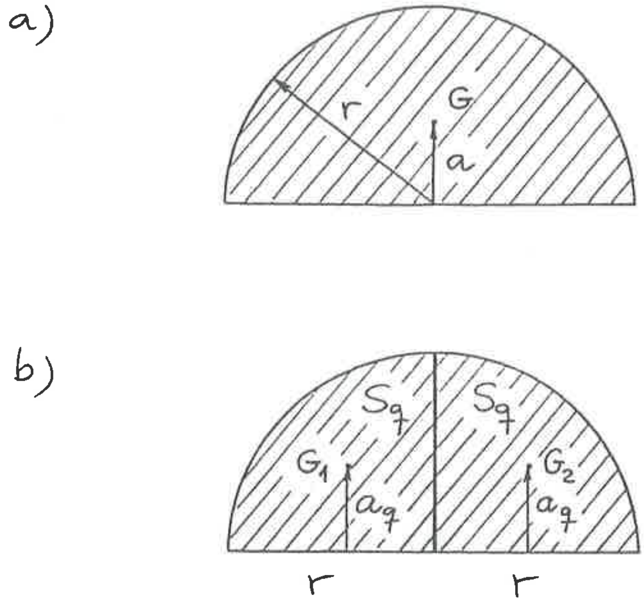

Figura 1.21

Així,

$$a = \frac{a_q \cdot S_q + a_q \cdot S_q}{S_q + S_q} = \frac{2\, a_q S_q}{2\, S_q} = a_q$$

O sigui,

$$a_q = a = \frac{4r}{3\pi}$$

La distància de la base al centre de gravetat d'un quart de cercle val $a_q = 4r/3\pi$ (i coincideix amb la del semicercle).

1.12.- Obteniu les coordenades del centre de gravetat d'un paral·lelogram (Fig. 1.22) a partir de les del triangle.

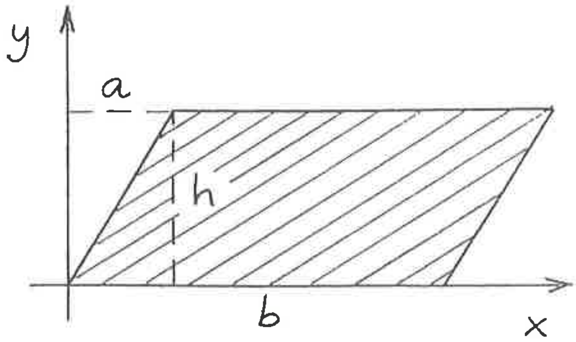

Figura 1.22

Es pot considerar el paral·lelogram com una figura composta, formada per dos triangles d'igual àrea S (Fig. 1.23).

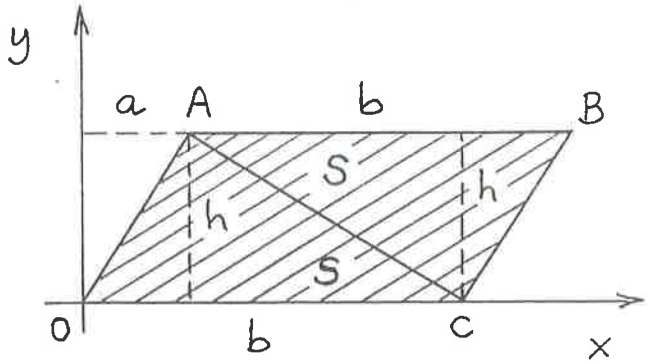

Figura 1.23

Els vèrtexs són :

$$O\,(0,0)$$
$$A\,(a,h)$$
$$B\,(a+b,\,h)$$
$$C\,(b,0)$$

Triangle OAC

$$G_1 = \frac{O+A+C}{3} = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{h}{3}\right)$$

Triangle ABC

$$G_2 = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{2a+2b}{3}, \frac{2h}{3}\right)$$

Paral·lelogram

$$G = \frac{G_1 S + G_2 S}{S+S} = \frac{G_1+G_2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

És a dir,

$$x_G = \frac{a+b}{2}$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

Cas particular

Si $a=0$, el paral·lelogram és un rectangle i

$$x_G = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

1.13.- Calculeu el centre de gravetat de la superfície ratllada de la Figura 1.24 respecte als eixos X i Y. Les dimensions són en centímetres.

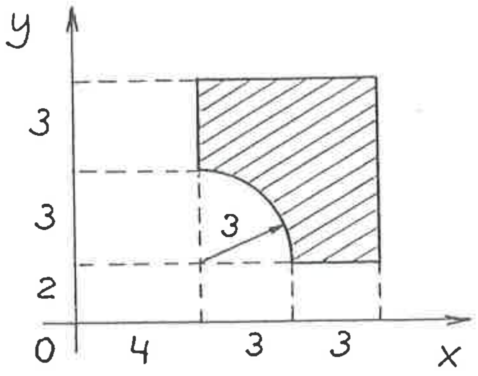

Figura 1.24

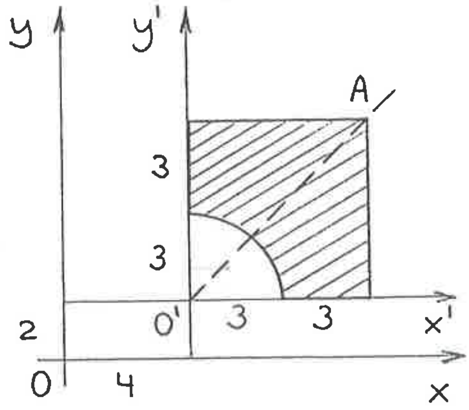

Figura 1.25

La superfície ratllada és simètrica (Fig. 1.25) respecte a l'eix O'A (bisectriu x'y'). Per tant, respecte als eixos x'y' es verifica $x'_G = y'_G$. Si (1) és el quadrat sense el forat i (2) el quart de cercle,

$$x'_{G_1} = 3 \text{ cm} \qquad x'_{G_2} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 3}{3\pi} = \frac{4}{\pi} = 1{,}27 \text{ cm}$$

$$S_1 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2 \qquad S_2 = -\frac{\pi r^2}{4} = -\frac{\pi \cdot 3^2}{4} = -\frac{9\pi}{4} = -7{,}07 \text{ cm}^2$$

$$x'_G = \frac{x'_{G_1} S_1 + x'_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{3 \cdot 36 + 1{,}27 \cdot (-7{,}07)}{36 - 7{,}07} = 3{,}42 \text{ cm}$$

$$y'_G = x'_G = 3{,}42 \text{ cm}$$

I respecte als eixos originals XY,

$$x_G = 4 + x'_G = 4 + 3{,}42 = 7{,}42 \text{ cm}$$

$$y_G = 2 + y'_G = 2 + 3{,}42 = 5{,}42 \text{ cm}$$

Si es calcula directament (sense canviar d'eixos) s'arriba al mateix resultat. En efecte,

$$x_{G_1} = 4+3 = 7 \text{ cm} \qquad x_{G_2} = 4 + \frac{4 \cdot 3}{3\pi} = 5{,}27 \text{ cm}$$

$$y_{G_1} = 2+3 = 5 \text{ cm} \qquad y_{G_2} = 2 + \frac{4 \cdot 3}{3\pi} = 3{,}27 \text{ cm}$$

$$S_1 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2 \qquad S_2 = -\frac{\pi \cdot 3^2}{4} = -7{,}07 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{x_{G_1} S_1 + x_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{7 \cdot 36 + 5{,}27 \cdot (-7{,}07)}{36 - 7{,}07} = 7{,}42 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{5 \cdot 36 + 3{,}27 \cdot (-7{,}07)}{36 - 7{,}07} = 5{,}42 \text{ cm}$$

1.14.- Una peça plana (de poc gruix) està formada per dos rectangles tal com es mostra a la Figura 1.26, on les dimensions són en centímetres. Les densitats superficials dels materials que formen els rectangles són $\sigma_1 = 0,3\ g/cm^2$ i $\sigma_2 = 0,4\ g/cm^2$. Trobeu el centre de massa i el centre de gravetat de la peça i el centroide de la superfície de la peça.

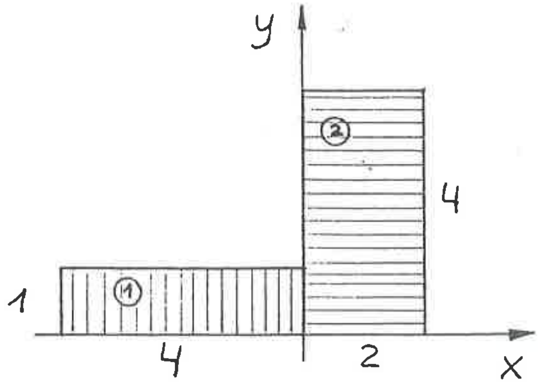

Figura 1.26

Centre de massa

$$x_1 = -\frac{4}{2} = -2\ cm \qquad x_2 = \frac{2}{2} = 1\ cm$$

$$y_1 = \frac{1}{2} = 0,5\ cm \qquad y_2 = \frac{4}{2} = 2\ cm$$

$$S_1 = 4 \cdot 1 = 4\ cm^2 \qquad S_2 = 2 \cdot 4 = 8\ cm^2$$

$$\sigma_1 = \frac{m_1}{S_1} = 0,3\ g/cm^2 \qquad \sigma_2 = \frac{m_2}{S_2} = 0,4\ g/cm^2$$

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 \sigma_1 S_1 + x_2 \sigma_2 S_2}{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2} =$$

$$= \frac{(-2) \cdot 0,3 \cdot 4 + 1 \cdot 0,4 \cdot 8}{0,3 \cdot 4 + 0,4 \cdot 8} = 0,18\ cm$$

$$y_{CM} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 \sigma_1 S_1 + y_2 \sigma_2 S_2}{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 4 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 8}{0{,}3 \cdot 4 + 0{,}4 \cdot 8} = 1{,}59 \text{ cm}$$

Centre de gravetat

Com que se suposa que la peça està sotmesa a un camp gravitatori que no varia d'un punt a un altre de la peça (les dimensions són molt petites comparades amb el radi de la Terra) el centre de gravetat de la peça coincideix amb el seu centre de massa.

$$x_G = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{x_1 m_1 g + x_2 m_2 g}{m_1 g + m_2 g} =$$

$$= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = x_{CM}$$

Anàlogament $\quad y_G = y_{CM}$

Per tant,

$$x_G = x_{CM} = 0{,}18 \text{ cm}$$
$$y_G = y_{CM} = 1{,}59 \text{ cm}$$

Centroide

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{(-2) \cdot 4 + 1 \cdot 8}{4 + 8} = 0 \text{ cm}$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{0{,}5 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{4 + 8} = 1{,}5 \text{ cm}$$

En aquest cas el centroide C de la superfície no coincideix amb el centre de gravetat G de la peça.

1.15.- Per al rectangle homogeni i uniforme de la Figura 1.27,

a) calculeu el moment estàtic respecte a l'eix X mitjançant integració

b) deduiu el moment estàtic respecte a l'eix Y

c) trobeu el centroide del rectangle a partir dels moments estàtics obtinguts anteriorment.

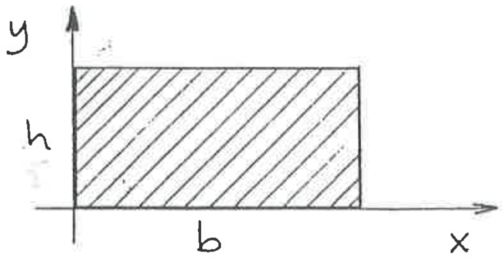

Figura 1.27

a)

Si es descompon la superfície en franges horitzontals d'àrea dS (rectangles de base b i altura dy), Fig. 1.28 ,

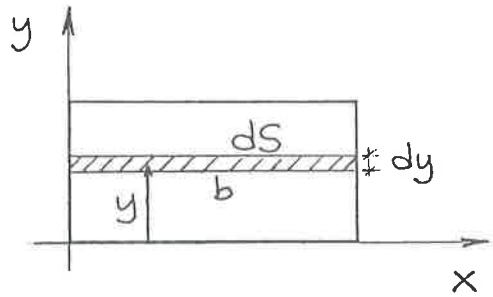

Figura 1.28

$$U_x = \int_S y\, dS = \int_0^h y\, b\, dy = b \int_0^h y\, dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h =$$
$$= \frac{1}{2} b h^2$$

b)

Pensant en un procés similar però amb franges verticals,

$$U_y = \frac{1}{2} h b^2$$

c)

$$x_G = \frac{U_y}{S} = \frac{\frac{1}{2} h b^2}{b h} = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{U_x}{S} = \frac{\frac{1}{2} b h^2}{b h} = \frac{h}{2}$$

1.16.- ¿Quin valor del paràmetre a anul·la el moment estàtic respecte a l'eix X de la superfície ratllada de la Figura 1.29? ¿Quin és llavors el moment estàtic respecte a l'eix Y d'aquesta superfície?. Les dimensions són en centímetres.

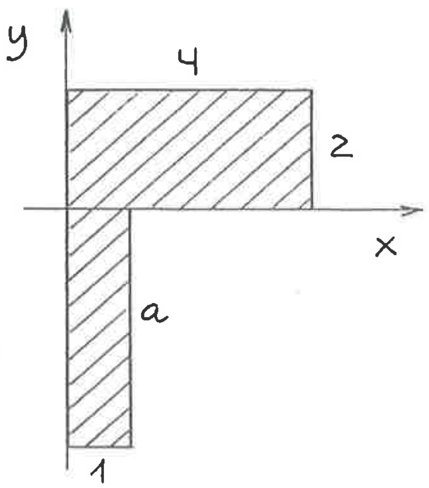

Figura 1.29

$$U_x = \frac{1}{2} 4 \cdot 2^2 - \frac{1}{2} 1 \cdot a^2 = 0 \quad , \qquad a = 4 \text{ cm}$$

Quan $a = 4$ cm, $U_x = 0$ i U_y val

$$U_y = \frac{1}{2} 2 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} 4 \cdot 1^2 = 18 \text{ cm}^3$$

1.17.- Calculeu els moments estàtics respecte als eixos X i Y del triangle de la Figura 1.30 a partir del seu centroide. Les dimensions són en centímetres.

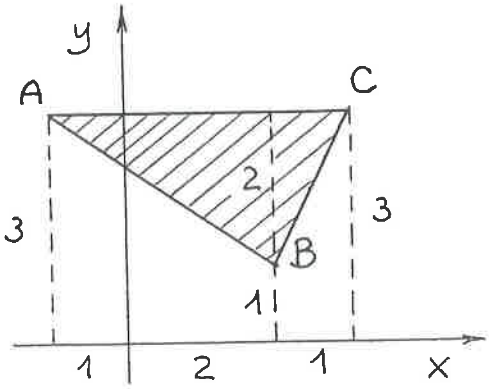

Figura 1.30

Els vèrtexs del triangle ABC són:

$$A(-1,3) \quad , \quad B(2,1) \quad i \quad C(3,3)$$

i el seu centre de gravetat,

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{(-1,3)+(2,1)+(3,3)}{3} = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$x_G = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{7}{3} \text{ cm}$$

L'àrea del triangle és $S = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ cm}^2$

I els moments estàtics,

$$U_x = y_G S = \frac{7}{3} \cdot 4 = \frac{28}{3} = 9{,}3 \text{ cm}^3$$

$$U_y = x_G S = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3} = 5{,}3 \text{ cm}^3$$

2. Teoremes de Pappos-Guldin

2.1.- Trobeu l'àrea de la superfície generada pel segment AB, de 30 cm de longitud (Fig. 2.1), quan gira una volta completa al voltant de l'eix E.

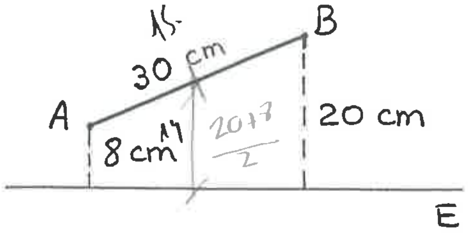

Figura 2.1

El centre de gravetat G del segment AB és al seu punt mig i la distància de G a l'eix de gir E val

$$r_G = \frac{20+8}{2} = 14 \text{ cm}$$

com s'indica a la Figura 2.2.

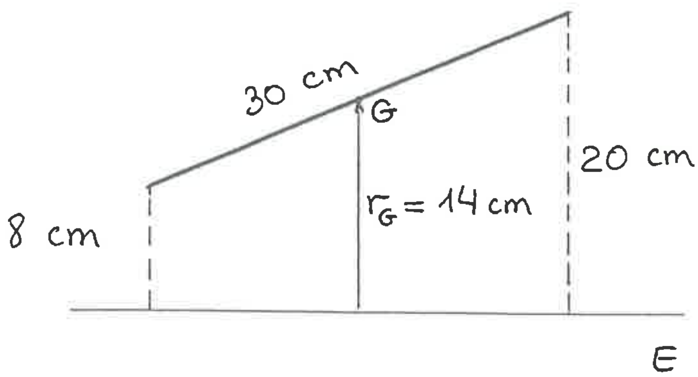

Figura 2.2

Com que el segment gira una volta completa $\alpha = 2\pi$. Així, segons el primer teorema de Pappos-Guldin,

$$S = \ell_G \cdot L = \alpha\, r_G \cdot L = 2\pi \cdot 14 \cdot 30 = 2638{,}9 \ cm^2$$

La superfície que s'obté és la superfície lateral d'un tronc de con circular.

2.2.- Determineu la fórmula que dóna l'àrea de la superfície d'una esfera de radi *r*.

La rotació d'una semicircumferència al voltant del diàmetre genera una superfície esfèrica si gira 2π radians (360°).

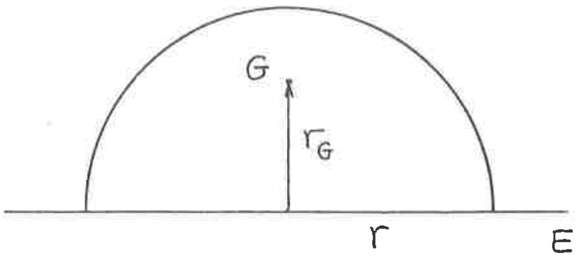

Figura 2.3

Si $r_G = \frac{2r}{\pi}$ és la distància (Fig. 2.3) entre el diàmetre i el centre de gravetat de la línia (semicircumferència; de longitud πr), del primer teorema de Pappos-Guldin s'obté

$$S = \ell_G \cdot L = \alpha\, r_G\, L = 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \pi r = 4\pi r^2$$

2.3.- Calculeu la posició del centre de gravetat d'un semicercle de radi r utilitzant el teorema de Pappos-Guldin.

Per simetria, el centre de gravetat del semicercle ha de ser sobre la recta que el divideix en dues parts iguals (Fig. 2.4). Resta determinar a quina altura a de la base es troba aquest centre de gravetat.

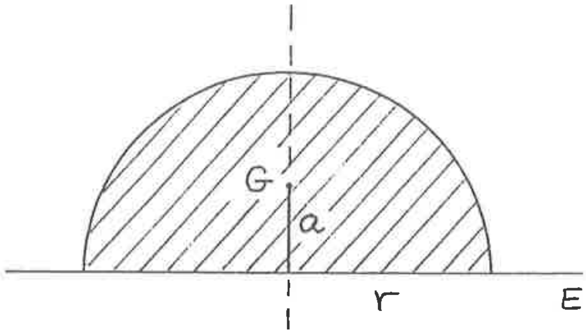

Figura 2.4

Quan el semicercle gira 2π rad (360°) al voltant de l'eix E genera una esfera de volum

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Com que l'àrea del semicercle és

$$S = \frac{\pi r^2}{2}$$

del segon teorema de Pappos-Guldin s'obté

$$V = \ell_G \cdot S = 2\pi a S$$

i

$$a = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi} \simeq 0,4244\, r$$

distància mesurada des de la base del semicercle.

2.4.- Calculeu la posició del centre de gravetat d'un quart de cercle de radi r utilitzant el teorema de Pappos-Guldin.

El centre de gravetat d'un quart de cercle ha de ser sobre la bisectriu del quadrant (per simetria). Per tant, $x_G = y_G$ (Fig. 2.5).

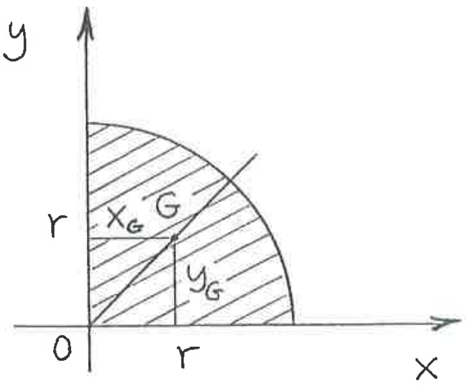

Figura 2.5

Quan el quart de cercle gira una volta completa (2π rad) al voltant de l'eix y (per exemple), genera una semiesfera de volum

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Com que l'àrea del quart de cercle és

$$S = \frac{\pi r^2}{4}$$

del segon teorema de Pappos-Guldin s'obté

$$V = l_G \cdot S = 2\pi x_G \cdot S$$

Aïllant x_G,

$$x_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi} \simeq 0,4244\, r$$

$$y_G = x_G = \frac{4r}{3\pi}$$

x_G i y_G són distàncies mesurades des dels eixos y i x, respectivament, fins a G.

En certes ocasions es demana o es dóna la distància r_G entre O i G (Figura 2.6).

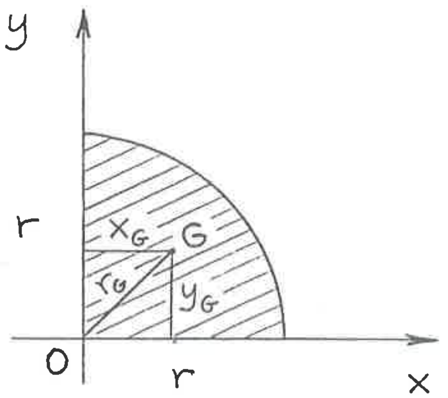

Figura 2.6

El valor de r_G s'obté a partir de y_G (o de x_G)

$$r_G = \frac{y_G}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{4r}{3\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\, r$$

2.5.- Els dos triangles de la Figura 2.7 tenen la mateixa àrea. Si tots dos giren el mateix angle al voltant de l'eix E, quin dels dos genera més volum?. Les dimensions són en centímetres.

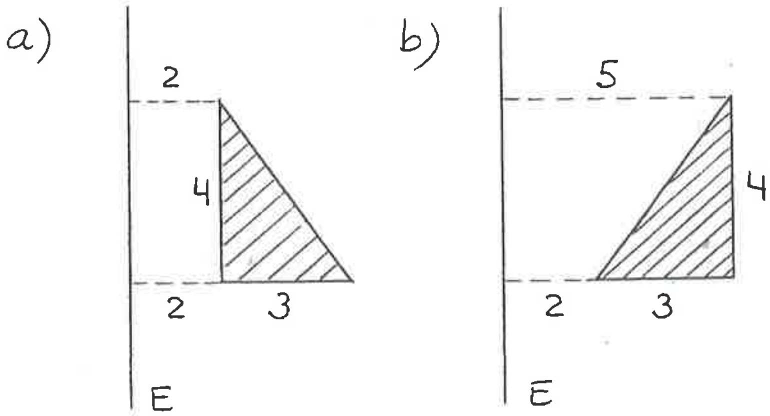

Figura 2.7

El volum que es genera és (segon teorema de Pappos - Guldin)

$$V = \ell_G \cdot S = \alpha \, r_G \, S$$

on r_G és la distància del centre de gravetat de la superfície a l'eix de gir. Com que l'àrea dels dos triangles és la mateixa i giren igual angle, quan més lluny de l'eix sigui el centre de gravetat de la superfície que gira, més volum genera. Per tant, el triangle b) genera un volum més gran.

$$V_a = \alpha S \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 3 \alpha S$$

$$V_b = \alpha S \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 3\right) = 4 \alpha S$$

$$V_b > V_a$$

2.6.- Calculeu el volum que genera el sector circular de radi 18 cm que es mostra a la Figura 2.8 quan gira 45° al voltant de l'eix E.

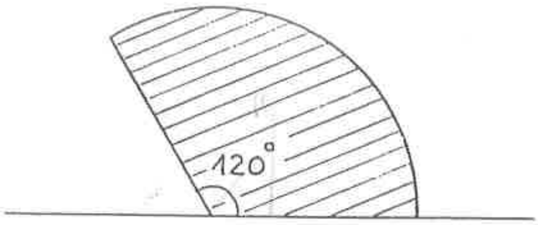

Figura 2.8

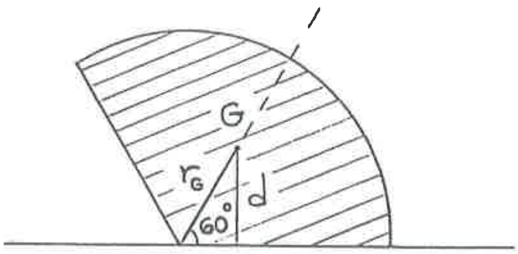

Figura 2.9

$$r_G = \frac{2}{3}\frac{r \sin\alpha}{\alpha} \quad , \quad \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}, \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r_G = \frac{2}{3}\frac{18\,\sqrt{3}/2}{\pi/3} = \frac{18\sqrt{3}}{\pi}\ \text{cm} = 9{,}92\ \text{cm}$$

$$d = r_G \sin 60° = \frac{18\sqrt{3}}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{\pi}\ \text{cm} = 8{,}59\ \text{cm}$$

$$120° = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$

$$S = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad} \cdot \frac{\pi\, 18^2\ \text{cm}^2}{2\pi\ \text{rad}} = \frac{\pi\, 18^2}{3} = 108\pi\ \text{cm}^2 =$$

$$= 339{,}29\ \text{cm}^2$$

$$\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Aplicant el segon teorema de Pappos-Guldin,

$$V = l_G S = \varphi d S = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{27}{\pi} \cdot 108\pi =$$

$$= 729\pi \text{ cm}^3 = 2290{,}2 \text{ cm}^3$$

2.7.- Trobeu la fórmula del volum d'un tor de radi interior *a* i radi exterior *b*.

Un tor és la figura de revolució que s'obté fent girar un cercle al voltant d'un eix exterior al cercle una volta completa (2π rad).

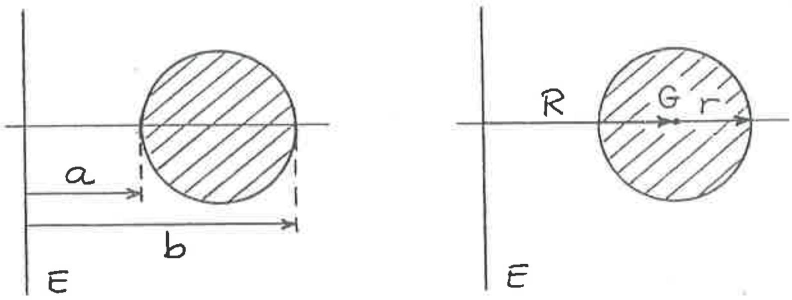

Figura 2.10

$$\left.\begin{aligned} a &= R - r \\ b &= R + r \end{aligned}\right\} \qquad R = \frac{a+b}{2} \qquad r = \frac{b-a}{2}$$

$$V = l_G S = \alpha r_G S = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2 =$$

$$= 2\pi^2 \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2 (a+b)(b-a)^2$$

2.8.- Calculeu el volum que genera la superfície ratllada de la Figura 2.11 quan gira un quart de volta al voltant de l'eix X.

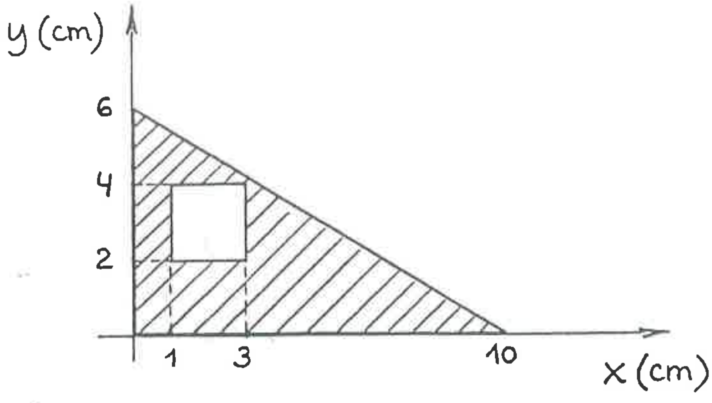

Figura 2.11

$$V = l_G \cdot S = \alpha\, y_G\, S = \alpha\,(y_1 S_1 + y_2 S_2)$$

on $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad (un quart de volta), y_G i S fan referència a la figura composta (triangle-quadrat), y_1 i S_1 fan referència al triangle sense el forat quadrat i y_2 i S_2 es refereixen al quadrat.

(1) Triangle sense forat

$$y_1 = \frac{6}{3} = 2 \text{ cm}$$

$$S_1 = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

(2) Quadrat

$$y_2 = 2 + \frac{2}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$S_2 = -2^2 = -4 \text{ cm}^2$$

$$V = \alpha\,(y_1 S_1 + y_2 S_2) = \frac{\pi}{2}(2 \cdot 30 - 3 \cdot 4) = 24\pi = 75{,}4 \text{ cm}^3$$

2.9.- ¿Quin volum genera la superfície ratllada de la Figura 2.12 quan gira 180° al voltant de l'eix Y?. Les dimensions són en centímetres.

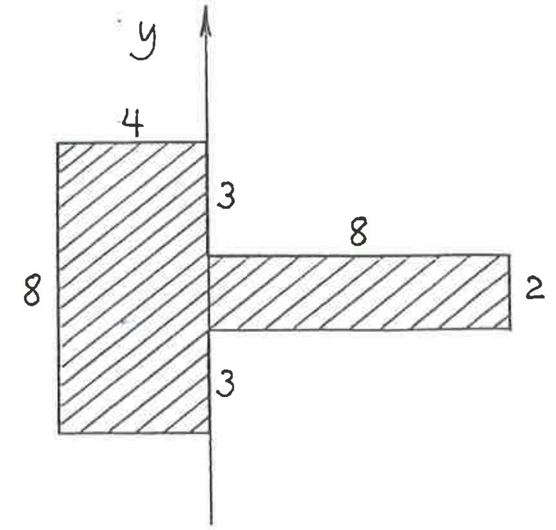

Figura 2.12

Si (1) és el rectangle situat a l'esquerra de l'eix i (2) és el de la dreta,

$$V_1 = \ell_{G_1} S_1 = \pi |x_{G_1}| S_1 = \pi \cdot 2 \cdot 32 = 64\pi \text{ cm}^3 =$$
$$= 201 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \ell_{G_2} S_2 = \pi x_{G_2} S_2 = \pi \cdot 4 \cdot 16 = 64\pi \text{ cm}^3 =$$
$$= 201 \text{ cm}^3$$

$$V = V_1 + V_2 = 128\pi \text{ cm}^3 = 402 \text{ cm}^3$$

Com que l'eix talla la superfície, no es pot utilitzar el centre de gravetat de la superfície composta. Si es fes, s'obtindria un volum nul (malament!) perquè el centre de gravetat del conjunt és sobre l'eix y.