

EE
Estructuras
III



AQ2A

AT 21 (1400507108)
Estructures II



UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA DE BARCELONA
ESTRUCTURAS

CALCULO MATRICIAL
DE
ESTRUCTURAS

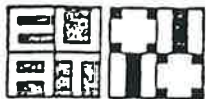
Estructures
Fornigo
Arnau

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Biblioteca



1400507108

Rafael Marzo Lafuente

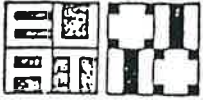


ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA DE BARCELONA
ESTRUCTURAS

Rafael Marzo Lafuente

1

CÁLCULO MATRICIAL
DE
ESTRUCTURAS

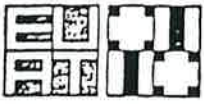


INDICE

1. GENERALIDADES DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL
 - 1.1 Concepto del análisis estructural.
 - 1.2 Tipos de estructuras.
 - 1.3 Grado de indeterminación y grado de libertad.
 - 1.4 Principios básicos.
 - 1.5 Métodos de análisis de una estructura.

2. RIGIDEZES
 - 2.1 Concepto de rigidez de una barra.
 - 2.2 Rigideces K_{GG} , $K_{GG'}$, K_{GD} , K_{DD} de una barra.
 - 2.3 Cálculo de las rigideces K_{GG} , $K_{GG'}$ y K_{GD} .
 - 2.4 Cálculo de las rigideces K_{GD} y K_{DD} .
 - 2.5 Rigidez de una barra a esfuerzos normales.
 - 2.6 Rigidez de barras con un extremo articulado.

3. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL MÉTODO MATRICIAL DE LAS DEFORMACIONES
 - 3.1 Representación idealizada de la estructura.
 - 3.2 Ejes locales y ejes globales o generales.
 - 3.3 Vector cargas sobre nudo.
 - 3.4 Vector movimientos de nudo.
 - 3.5 Vector esfuerzos en extremo de barra.



- 3.6 Vector movimientos de extremo de barra.
- 3.7 Secuencia de operaciones a seguir para determinar los movimientos de los nudos.
- 3.8 Ecuaciones que relacionan los esfuerzos de extremo de barra con sus movimientos. Matriz de rigidez de barra.
- 3.9 Propiedades de la matriz de rigidez de barra.

4. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

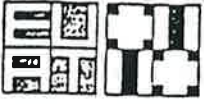
- 4.1 Transformación de coordenadas. Matriz de rotación.
- 4.2 Matriz de rigidez de barra en ejes globales.
- 4.3 Equilibrio de los nudos. Matriz de rigidez de la estructura.
- 4.4 Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.
- 4.5 Propiedades de la matriz de rigidez de la estructura.
- 4.6 Condiciones de contorno.
- 4.7 Sistema final de ecuaciones lineales.

5. ESFUERZOS DE EXTREMO DE BARRA

- 5.1 Determinación de los esfuerzos en los extremos de cada barra.
- 5.2 Matriz de flexibilidad. Matriz de incidencia.
- 5.3 Ejercicio 1

6. CARGAS APLICADAS EN LAS BARRAS

- 6.1 Caso de cargas aplicadas directamente sobre las barras.



6.2 Cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto respecto a los ejes locales de barra $[R^{AB}]_L$ y $[R_L^{BA}]$.

6.3 Ejercicio 2.

7. ESTRUCTURAS CON BARRAS ARTICULADAS

7.1 Barras con nudos articulados.

7.2 Caso de barras con el nudo dorsal articulado.

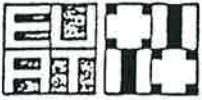
7.3 Caso de barras con el nudo frontal articulado.

7.4 Caso de barras con ambos extremos articulados.

7.5 Ejercicio 3.

7.6 Estructuras articuladas planas: celosías.

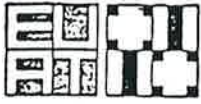
7.7 Ejercicio 4.



Rafael Marzo Lafuente

5

1. GENERALIDADES DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL



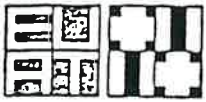
1.1 CONCEPTO DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

En sentido estricto, el análisis estructural consiste en el proceso de cálculo que, partiendo de la estructura definida, dimensionada y sometida a un estado de cargas, conduce al conocimiento de los esfuerzos a que están sometidas las piezas que forman parte de la estructura y de los movimientos de determinados puntos, generalmente los nudos.

El análisis estructural puede llevarse a cabo por diferentes métodos (ver 1.5). El objetivo básico de estos apuntes es el desarrollo del análisis de estructuras por el método matricial de las deformaciones, llamado también de la rigidez.

En sentido amplio, puede englobarse también en el análisis estructural el proceso previo de definición de la estructura y del estado de cargas. Este proceso previo puede sistematizarse en las siguientes etapas:

- Representación idealizada de la estructura. Consiste en establecer un esquema de la estructura real y definir los enlaces con el exterior.
- Establecimiento de las hipótesis de carga. La estructura va a estar sometida a una serie de acciones. Se trata de seleccionar la combinación o combinaciones de ellas que resulten más desfavorables.
- Predimensionado. Consiste en estimar, bien por métodos simplificados, bien por experiencia de estructuras similares, las dimensiones de todas y cada una de las piezas que forman parte de la estructura.



1.2 TIPOS DE ESTRUCTURAS

Los elementos conectados entre sí formando una estructura tienen siempre tres dimensiones: longitud, anchura y altura. Sin embargo, si predomina la longitud sobre las otras dos dimensiones, se considera que se trata de un elemento de una sola dimensión (lineal); tal es el caso, por ejemplo, de las vigas y de los pilares. En las losas, el espesor es mucho más pequeño que la longitud y la anchura y, por ello consideraremos a las losas como elementos de dos dimensiones.

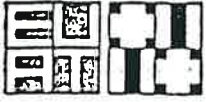
Atendiendo a las dimensiones de los elementos que componen la estructura, éstas pueden dividirse en:

- Estructuras de barras (piezas unidimensionales)
- Estructuras laminares (piezas bidimensionales)
- Sólidos (piezas tridimensionales)

Estos apuntes sólo se ocupan de las estructuras de barras, que a su vez, pueden dividirse en:

- Celosías articuladas planas.
- Celosías articuladas espaciales.
- Entramados rígidos planos.
- Entramados rígidos espaciales.
- Emparrillados.

En las celosías articuladas, las barras se unen entre sí



mediante articulaciones que permiten el giro libre de cada barra independientemente de las otras que concurren al nudo, y como además las cargas se aplican en los nudos, las barras sólo están sometidas a esfuerzos axiales.

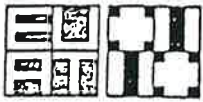
En los entramados rígidos, las barras se unen entre sí por medio de nudos rígidos, que son aquellos que poseen la propiedad de que el movimiento (giro o desplazamiento) del nudo es el mismo que el de todos y cada uno de los extremos de las barras que concurren a él. Si son entramados planos todas las cargas actúan en ese mismo plano y no existen esfuerzos de torsión.

Los emparrillados son estructuras planas sometidas a cargas que actúan en un plano perpendicular al de la estructura y, por lo tanto, habrá esfuerzos de flexión y de torsión.

1.3 GRADO DE INDETERMINACIÓN Y GRADO DE LIBERTAD

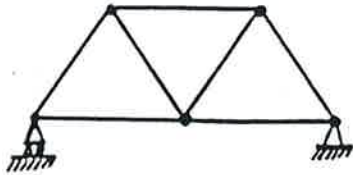
Grado de indeterminación de una estructura es el grado de hiperestaticidad ya estudiado el curso pasado en Resistencia de Materiales.

Grado de libertad es el número total de movimientos posibles en los nudos de una estructura. La estructura más general, un entramado rígido espacial, presenta 6 movimientos por cada nudo libre: tres traslaciones según la dirección de los tres ejes coordenados, y tres giros, uno en cada uno de los tres planos de referencia XY , XZ , YZ . Una celosía plana de nudos articulados presenta 2 movimientos por



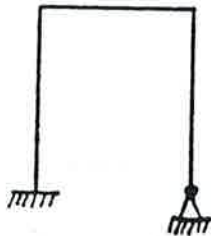
cada nudo libre: desplazamiento según el eje X y desplazamiento según el eje Y.

Ejemplos:



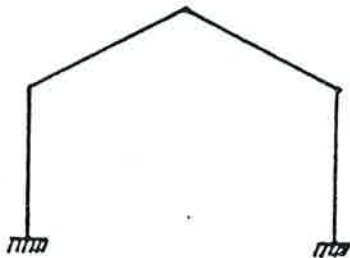
Grado de indeterminación = 0

Grado de libertad = 7 (3 nudos libres \times 2 + 1 despl. horiz.)



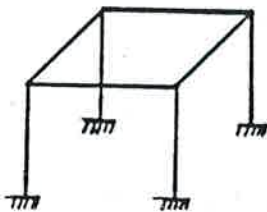
G.I. = 2

G.L. = 7 (2 nudos libres \times 3 + 1 giro)



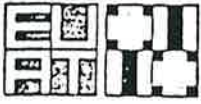
G.I. = 3

G.L. = 9 (3 nudos libres \times 3)



G.I. = 24

G.L. = 24 (4 nudos libres \times 6)



1.4 PRINCIPIOS BÁSICOS

El método matricial que se va a desarrollar más adelante se aplica a aquellas estructuras para las cuales son válidos los principios básicos (ya han sido estudiados en el curso anterior de Resistencia de Materiales y por eso nos limitaremos simplemente a su enunciado) siguientes:

— PEQUEÑEZ DE LAS DEFORMACIONES.

Las deformaciones se suponen tan pequeñas que se desprecia la modificación de la geometría de la estructura a efectos del cálculo de los esfuerzos.

— LINEALIDAD.

La relación entre las deformaciones y las cargas que las producen es lineal.

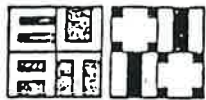
— SUPERPOSICIÓN DE LOS EFECTOS.

Los efectos que produce en una estructura la aplicación de un sistema de cargas es el mismo si la aplicación es simultánea que si se verifica sucesivamente una carga tras otra.

Este principio se puede aplicar siempre que se verifiquen los dos anteriores.

— EQUILIBRIO.

La estructura ha de estar en equilibrio frente a las fuerzas



exteriores y a las reacciones de los enlaces sustentantes, para lo cual:

- Todos y cada uno de los nudos estará en equilibrio.
- Todas y cada una de las barras estará en equilibrio.

- COMPATIBILIDAD DE LAS DEFORMACIONES.

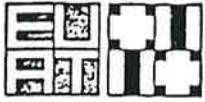
Las deformaciones que sufre la estructura han de ser compatibles con la geometría y las características de dicha estructura.

Ejemplos: En un entramado de nudos rígidos, el desplazamiento y el giro de cada nudo han de ser iguales al desplazamiento y al giro de cada barra que concurre a ese nudo.

En una celosía de nudos articulados, el desplazamiento que sufre cada nudo ha de ser igual al desplazamiento de las barras que concurren a ese nudo.

- UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES.

Una estructura perfectamente definida y sometida a un determinado estado de cargas, sufre unos movimientos y unos esfuerzos que son únicos, independientemente del método de análisis utilizado.



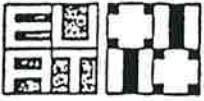
1.5 MÉTODOS DE ANÁLISIS DE UNA ESTRUCTURA

Fundamentalmente existen dos métodos diferentes de análisis de estructuras: el método de las deformaciones o de la rigidez y el método de las fuerzas o de la flexibilidad.

El método de las deformaciones consiste en considerar los movimientos de los nudos como incógnitas y conduce al planteamiento de un sistema lineal de N_d ecuaciones, siendo N_d el número de movimientos posibles de los nudos de la estructura, y donde las incógnitas son precisamente dichos movimientos. Una vez resuelto el sistema conoceremos los movimientos de los nudos, y a partir de ellos y de las cargas que actúan sobre las barras, será muy sencillo determinar los esfuerzos.

El método de las fuerzas consiste en considerar como incógnitas las reacciones hiperestáticas (redundantes) y conduce a un sistema de G_H ecuaciones lineales con G_H incógnitas, siendo G_H el grado de hiperestaticidad de la estructura.

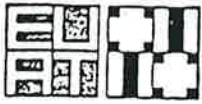
En estos apuntes se va a desarrollar solamente el método de las deformaciones o de la rigidez por ser el más ampliamente utilizado y, además, porque presenta una sencilla sistematización que le hace idóneo para su programación en ordenadores.



Rafael Marzo Lafuente

13

2. RIGIDECES



2.1 CONCEPTO DE RIGIDEZ DE UNA BARRA

La acción ejercida (o desarrollada) sobre un punto "i" de una barra para mantenerla en equilibrio cuando se provoca un desplazamiento (se entiende un desplazamiento generalizado: corrimiento o giro) de valor unidad en otro punto "j" de esa barra mientras permanecen impedidos todos los demás movimientos, se denomina coeficiente de rigidez (k_{ij}) de la barra o, simplemente, rigidez (k_{ij}) de la barra.

Si en la barra ji de la figura 2.1.1 se provoca un giro θ_j en el punto "j", permaneciendo impedidos los demás desplazamientos

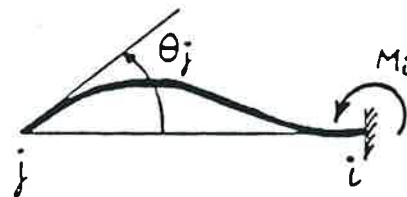


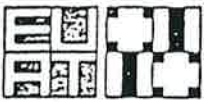
fig. 2.1.1

(corrimiento en "j" y corrimiento y giro en "i"), aparece un momento flector en "i" (acción en "i"). La relación entre θ_j y M_i es:

$$M_i = k_{ij} \cdot \theta_j$$

Acción en "i" = Coeficiente de rigidez (k_{ij}) x Giro en "j"

Los puntos que más interesan son los extremos A y B de la barra; por ello vamos a definir en los apartados siguientes las rigideces de una barra referidas a sus extremos A y B.



2.2 RIGIDEZES K_{GG} , $K_{GG'}$, K_{GD} , K_{DD} DE UNA BARRA

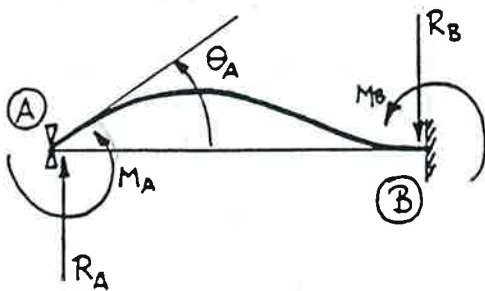


figura 2.2.1

Sea una barra recta de sección constante. Supongamos que en el extremo A se aplica un momento M_A estando impedidos el corrimiento (no el giro) en A y el corrimiento y el giro en B (empotramiento perfecto en B).

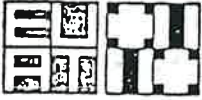
Como consecuencia del giro θ_A que aparece en A, provocado por el momento M_A , se desarrollan el momento M_B y las reacciones R_A y R_B para mantener el equilibrio de la barra.

En las condiciones antedichas (impedimento del corrimiento en el extremo A y estando el extremo B perfectamente empotrado), se verifica:

$$M_A = K_{GG}^{AB} \cdot \theta_A$$

$$K_{GG}^{AB}$$

es la rigidez de la barra AB que relaciona el momento aplicado en A con el giro sufrido por ese mismo extremo A y representa el valor del momento que es preciso aplicar para que el giro sufrido sea la unidad ($\theta_A=1$). El subíndice GG indica que se trata de una rigidez que relaciona un momento aplicado en un extremo con el giro experimentado por ese mismo extremo. (GIRO-GIRO).



$$M_B = K_{GG'}^{AB} \cdot \theta_A$$

$$K_{GG'}^{AB}$$

es la rigidez de la barra AB que relaciona el giro provocado en A con el momento desarrollado en B y representa el momento que aparece en B cuando el giro en A es la unidad ($\theta_A = 1$). El subíndice GG' indica que se trata de una rigidez que relaciona un giro en un extremo con el momento que aparece en el otro extremo. (GIRO-GIRO, pero en extremos opuestos).

$$R_A = K_{GD}^{AB} \cdot \theta_A$$

$$K_{GD}^{AB}$$

es la rigidez de la barra AB que relaciona el giro provocado en A con la reacción desarrollada en ese mismo extremo A, y representa la reacción (fuerza) que aparece en A cuando el giro sufrido en A es la unidad ($\theta_A = 1$). El subíndice GD indica que relaciona un giro en un extremo con la reacción que aparece en ese mismo extremo. (GIRO-DESPLAZAMIENTO).

$$R_B = -R_A = -K_{GD}^{AB} \cdot \theta_A$$

Supongamos ahora (fig. 2.2.2) que se somete al extremo A a un desplazamiento d^{AB} respecto al extremo B en dirección perpendicular



a la barra, manteniendo la imposibilidad de giro tanto en el extremo

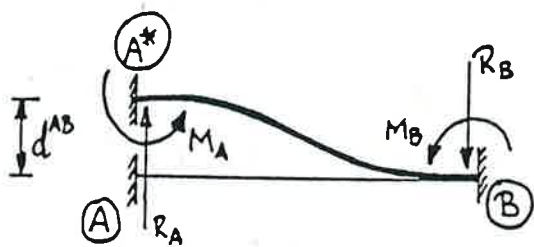


figura 2.2.2

simetría) y las reacciones R_A y R_B (que son iguales y de sentido contrario).

En las condiciones antedichas (impedimento de giro en A y en B) se verifica:

$$M_A = K_{DG}^{AB} \cdot d^{AB}$$

$$M_B = M_A = K_{DG}^{AB} \cdot d^{AB}$$

$$K_{DG}^{AB}$$

es la rigidez de la barra AB que relaciona el desplazamiento d^{AB} con el momento M_A (o M_B) desarrollado en A (o en B), y representa el momento que aparece en A (y en B) cuando el desplazamiento es la unidad ($d^{AB} = 1$).

El subíndice DG indica que relaciona un desplazamiento d^{AB} con el momento que aparece en un extremo (DESPLAZAMIENTO-GIRO)

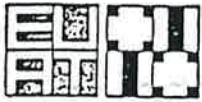
Se demostrará en seguida que $K_{GD} = K_{DG}$.

$$R_A = K_{DD}^{AB} \cdot d^{AB}$$

$$R_B = -R_A = -K_{DD}^{AB} \cdot d^{AB}$$

$$K_{DD}^{AB}$$

es la rigidez de la barra AB que relaciona el desplazamiento d^{AB} con



la reacción (fuerza) desarrollada en A, y representa el valor de la reacción que aparece en A cuando el desplazamiento es la unidad ($d^{AB} = 1$). El subíndice DD indica que relaciona un desplazamiento d^{AB} con la reacción que aparece en el extremo A. (DESPLAZAMIENTO-DESPLAZAMIENTO).

2.3 CÁLCULO DE LAS RIGIDECES K_{GG} , $K_{GG'}$ Y K_{GD}

El cálculo de las rigideces K_{GG} , $K_{GG'}$ y K_{GD} puede hacerse fácilmente a partir del 2º teorema de Mohr:

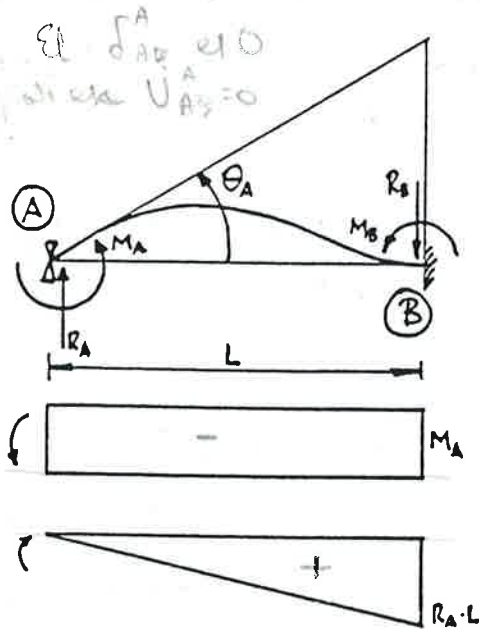


Figura 2.3.1

U_{AB}^A = Momento estático del área del diagrama de momentos flectores respecto a la vertical de A

$$U_{AB}^A = 0 = M_A \cdot L \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2} R_A \cdot L \cdot \frac{2}{3} L = 0$$

$$R_A = \frac{3M_A}{2L} \quad (2.3.1)$$

Además $M_A + M_B = R_A \cdot L \rightarrow M_B = \frac{M_A}{2} \quad (2.3.2)$

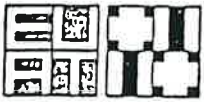
$$\theta_A = \frac{\Delta_{AB}^B}{L} = \frac{U_{AB}^B}{R_B \cdot L} = \frac{1}{R_B \cdot L} \cdot U_{AB}^B$$

siendo R_B la rigidez a flexión de la barra

$$U_{AB}^B = M_A \cdot L \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2} R_A \cdot L \cdot L \cdot \frac{L}{3} = \frac{M_A \cdot L^2}{4}$$

Por lo tanto $\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{4R_B \cdot L}$, o sea $\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{4R_B} \rightarrow M_A = \frac{4R_B}{L} \cdot \theta_A \quad (2.3.3)$

y como $M_A = K_{GG}^{AB} \cdot \theta_A$ resulta $K_{GG}^{AB} = \frac{4R_B}{L} \quad (2.3.4)$



si se trata de flexión simétrica: $R_g = EI$ y entonces:

$$K_{GG}^{AB} = \frac{4EI}{L} \quad (2.3.5)$$

De (2.3.2) y (2.3.3) : $M_B = \frac{M_A}{2} = \frac{2R_g}{L} \theta_A$

y como $M_B = K_{GG'}^{AB} \cdot \theta_A$ resulta

$$K_{GG'}^{AB} = \frac{2R_g}{L}$$

y si la flexión es simétrica

$$K_{GG'}^{AB} = \frac{2EI}{L}$$

(2.3.6)

De (2.3.1) y (2.3.3) : $R_A = \frac{6R_g}{L^2} \theta_A$

y como $R_A = K_{GD}^{AB} \cdot \theta_A$ resulta

$$K_{GD}^{AB} = \frac{6R_g}{L^2}$$

y si la flexión es simétrica

$$K_{GD}^{AB} = \frac{6EI}{L^2}$$

(2.3.7)

2.4 CÁLCULO DE LAS RIGIDECES K_{DG} Y K_{DD}

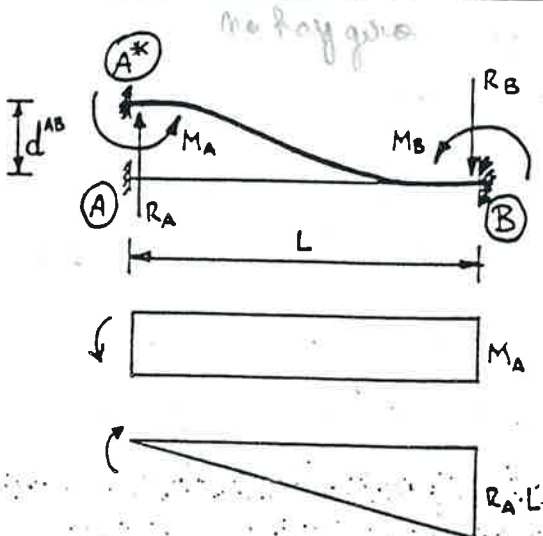


Figura 2.4.1

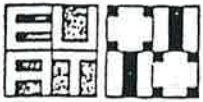
También se hará uso de los teoremas de Mohr:

$$\delta_{AB}^{AB} = 0 = M_A \cdot L - \frac{1}{2} R_A \cdot L \cdot L \rightarrow M_A = \frac{1}{2} R_A \cdot L \quad (2.4.1)$$

$$\delta_{AB}^{AB} = \frac{U_{AB}^B}{R_g} = \frac{1}{R_g} \left(M_A \cdot L \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} R_A \cdot L \cdot L \cdot \frac{1}{3} \right)$$

y teniendo en cuenta (2.4.1):

$$\delta_{AB}^{AB} = \frac{L^3}{12 R_g} \cdot R_A \rightarrow R_A = \frac{12 R_g}{L^3} \delta_{AB}^{AB} \quad (2.4.2)$$



y como $R_A = K_{DD}^{AB} \cdot d^{AB}$ resulta

$$K_{DD}^{AB} = \frac{12 R_q}{L^3}$$

y si la flexión es simétrica

$$K_{DD}^{AB} = \frac{12 EI}{L^3}$$

(2.4.3)

De (2.4.1) y (2.4.2) $\rightarrow M_A = \frac{6 R_q}{L^2} d^{AB}$ (2.4.4)

y como $M_A = K_{DG}^{AB} \cdot d^{AB}$ resulta $K_{DG}^{AB} = \frac{6 R_q}{L^2}$, valor que coincide

con K_{GD}^{AB} según (2.3.7). Por lo tanto:

$$K_{DG}^{AB} = K_{GD}^{AB}$$

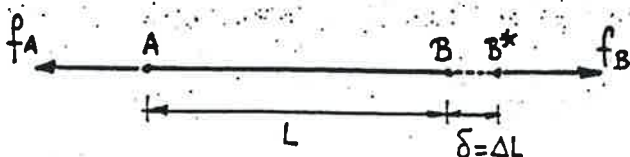
En lo sucesivo siempre se utilizará K_{GD}

$M_A + M_B = R_A \cdot L$ y según (2.4.1): $M_B = R_A L - \frac{1}{2} R_A L = \frac{1}{2} R_A L = M_A$

Se ha demostrado que $M_B = M_A$, tal como era de esperar por simetría.
desplazamiento

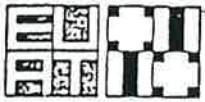
2.5 RIGIDEZ DE UNA BARRA A ESFUERZOS NORMALES

La acción desarrollada en el extremo de una barra recta cuando se provoca un corrimiento de valor unidad ($\delta=1$) en el otro extremo según la directriz de la barra, mientras permanecen impedidos todos los demás movimientos, se denomina coeficiente de rigidez o simplemente rigidez de esa barra a esfuerzos normales, y se designa por K_N .



Sea la barra AB de la figura 2.5.1
Supongamos que se provoca un

figura 2.5.1



desplazamiento δ al extremo B en dirección de la directriz de la barra, mientras el extremo A permanece inmóvil. En estas circunstancias se desarrollan las fuerzas axiales f_A y f_B que han de ser necesariamente iguales para el mantenimiento del equilibrio. Según la definición de K_N :

$$f_A = K_N^{AB} \cdot \delta \quad (2.5.1)$$

Mientras estamos en el período elástico se cumple la ley de Hooke:

$$\delta = \Delta L = \frac{f_A \cdot L}{EA} \rightarrow f_A = \frac{EA}{L} \cdot \delta \quad \text{siendo} \begin{cases} E = \text{módulo de Young} \\ A = \text{sección transversal} \end{cases}$$

} según (2.5.1):

$$K_N^{AB} = \frac{EA}{L}$$

2.6 RIGIDEZ DE BARRAS CON UN EXTREMO ARTICULADO

En algunas ocasiones ocurre que un extremo de barra se halla vinculado al resto de la estructura mediante una articulación que permite el giro libre. Es evidente que este tipo de barras ofrecerán menos dificultad a su deformación, lo que significa que sus rigideces serán más pequeñas que las anteriormente definidas.

Las rigideces de una barra AB que presenta una articulación en un extremo las designaremos por K_{GG}^{AB} , $K_{GG'}^{AB}$, K_{GD}^{AB} y K_{DD}^{AB} .

Si se hubiese efectuado para este tipo de barras un razonamiento similar al realizado en 2.2, 2.3 y 2.4, llegaríamos a las siguientes conclusiones:

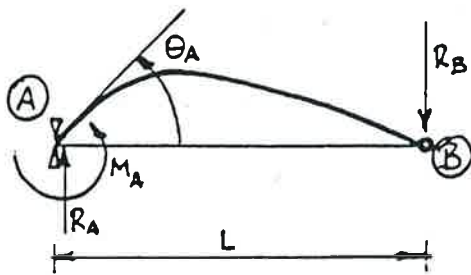
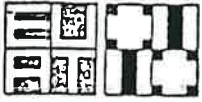


figura 2.6.1

$$M_A = \cdot K_{GG}^{AB} \cdot \theta_A$$

donde

$$\cdot K_{GG}^{AB} = \frac{3R_g}{L}$$

y si la flexión es simétrica

$$\cdot K_{GG}^{AB} = \frac{3EI}{L}$$

(2.6.1)

$$M_B = 0 \rightarrow \cdot K_{GG'}^{AB} = 0 \quad (2.6.2)$$

$$R_A = \cdot K_{GD}^{AB} \cdot \theta_A \quad \text{donde}$$

y si la flexión es simétrica

$$\cdot K_{GD}^{AB} = \frac{3R_g}{L^2}$$

$$\cdot K_{GD}^{AB} = \frac{3EI}{L^2}$$

(2.6.3)

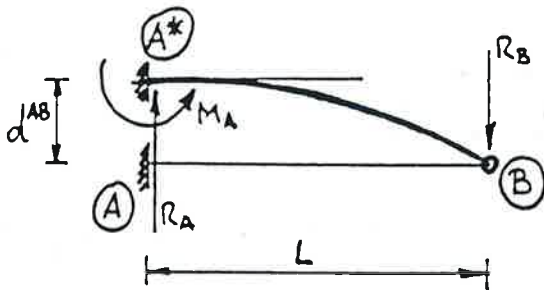


figura 2.6.2

$$M_A = \cdot K_{DG}^{AB} \cdot d^{AB}$$

donde

$$\cdot K_{DG}^{AB} = \cdot K_{GD}^{AB} = \frac{3R_g}{L^2}$$

(2.6.4)

$$R_A = \cdot K_{DD}^{AB} \cdot d^{AB}$$

donde

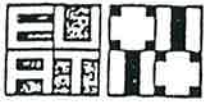
$$\cdot K_{DD}^{AB} = \frac{3R_g}{L^3}$$

y si la flexión es simétrica

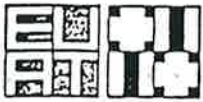
$$\cdot K_{DD}^{AB} = \frac{3EI}{L^3}$$

(2.6.5)

La rigidez de una barra articulada frente a esfuerzos normales sigue siendo $K_N^{AB} = \frac{EA}{L}$, como es obvio.



3. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL MÉTODO
MATRICIAL DE LAS DEFORMACIONES



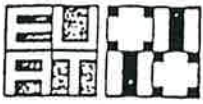
3.1 REPRESENTACIÓN IDEALIZADA DE LA ESTRUCTURA

La estructura se idealiza sustituyendo las piezas por sus directrices. Los puntos de corte entre las directrices se llaman nudos y los segmentos de directriz entre dos nudos se llaman barras. Los nudos se acostumbran a designar con letras mayúsculas o con números y las barras con letras minúsculas o también con números.

Para cada barra ha de elegirse necesariamente su extremo inicial o dorsal y su extremo final o frontal. Se dirá sentido positivo al de avance desde el extremo dorsal al extremo frontal. En lo sucesivo, se llamará genéricamente A al extremo dorsal de una barra y B a su extremo frontal. (*)

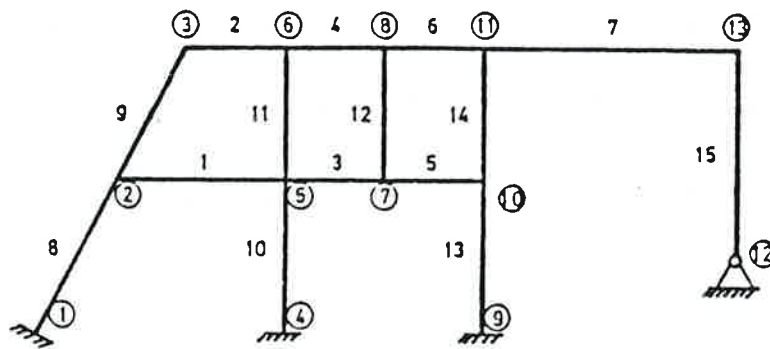
Las barras se enlazan entre sí, generalmente, mediante nudos rígidos (aquellos que cumplen la condición de que todas las barras que concurren en un mismo nudo experimentan el mismo giro), aunque en algún caso puedan haber barras que pre-

(*) Si el análisis de la estructura se efectúa por medio de un programa de ordenador, tiene una gran importancia la numeración de los nudos, ya que de dicha numeración depende el número de coeficientes no nulos que es preciso mantener en memoria central para resolver el sistema de ecuaciones. Se ha de lograr que la máxima diferencia entre los números que indican el nudo frontal y el nudo dorsal de una misma barra sea la más pequeña posible. Más adelante se insistirá sobre esto con más detalle.



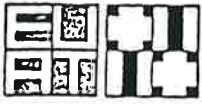
senten extremos articulados.

La siguiente figura ofrece un ejemplo de numeración de nudos y de barras, donde puede apreciarse que la máxima diferencia entre los números que indican el extremo frontal y el dorsal es de 3.



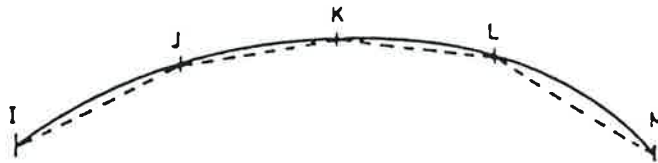
La estructura queda definida cuando se conocen:

- La posición de los nudos.
- La situación de las barras (sabiendo cuál es el nudo frontal y el dorsal de cada una de ellas)
- Los enlaces que presentan entre sí las barras y sustentaciones con el exterior.
- Módulo de Young, sección transversal y momento de inercia respecto al eje Z de la sección de cada una de las barras.

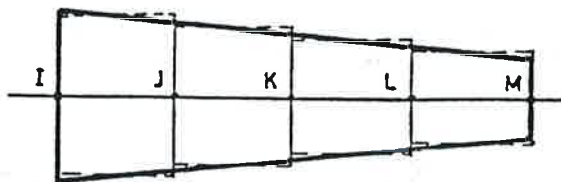


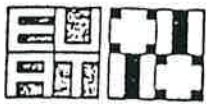
Los puntos de intersección entre barras son necesariamente nudos; sin embargo, también se puede considerar como nudo a cualquier punto intermedio de una barra, siempre que se le asigne un número o letra y posteriormente se le defina con sus coordenadas. Si se consideran varios puntos intermedios como nudos, la matriz de rigidez, que más adelante se definirá, será de mayor tamaño. Esto permite asimilar piezas curvas o piezas de sección variable a una serie de barras rectas de sección constante.

La barra curva IM puede estudiarse como una poligonal formada por cuatro barras rectas: IJ, JK, KL y LM:



La barra de sección variable IM puede estudiarse transformándola en cuatro barras IJ, JK, KL y LM de sección constante:

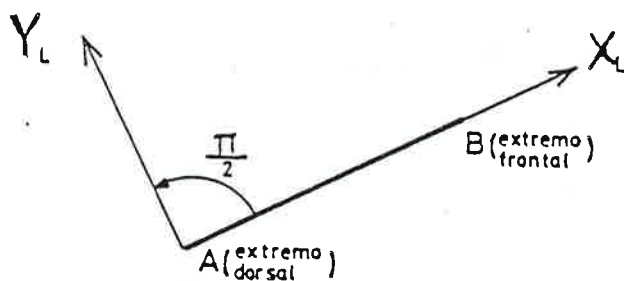




3.2 EJES LOCALES Y EJES GLOBALES O GENERALES

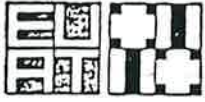
Se emplean dos tipos de ejes de referencia: el local de barra y el global para toda la estructura.

Los ejes locales están unidos a la barra y no dependen de la orientación de ésta en la estructura. Para barras rectas, el eje local X se hará coincidir con la dirección de su directriz y el sentido positivo será el de avance desde el extremo dorsal al extremo frontal (A \rightarrow B). El eje Y local será el perpendicular al X en el extremo dorsal A de tal modo que su sentido positivo se obtenga a partir del sentido positivo del eje X girando 90° en sentido contrario a las agujas de un reloj:



Los ejes locales se emplean cuando se calculan magnitudes relativas a la barra, como por ejemplo esfuerzos y desplazamientos de extremo de barra.

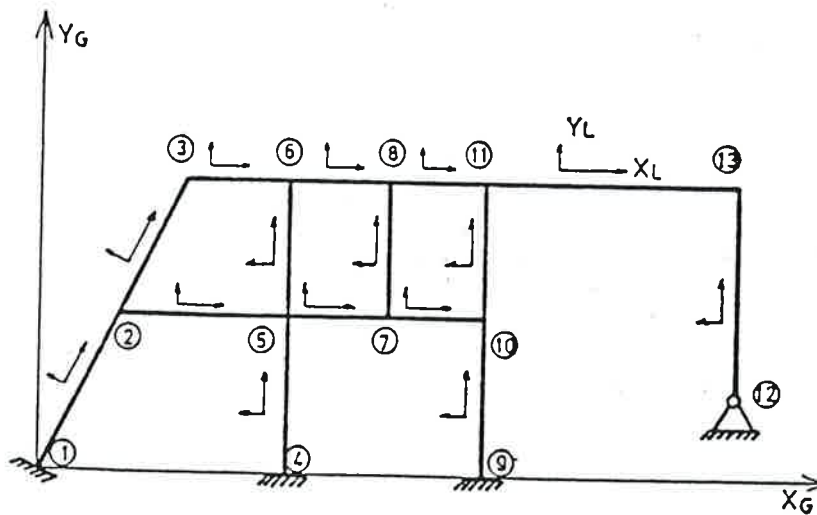
Los ejes globales serán generales para toda la estructura y se elegirán adecuadamente; en ellos se plantearán aquellos problemas en los que intervienen más de una barra.



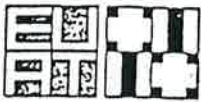
Se referirán a ejes globales:

- Las coordenadas de los nudos.
- Los desplazamientos de los nudos.
- Las fuerzas exteriores que actúan sobre los nudos.
- El equilibrio de fuerzas en un nudo.

En el siguiente entramado se muestran los ejes globales para toda la estructura y los ejes locales para cada una de las barras:



En los casos que pudiera haber confusión sobre si una magnitud o una expresión está referida a los ejes locales o globales, se utilizará un subíndice L para indicar referencia a ejes locales y un subíndice G para indicar referencia a los ejes globales.



3.3 VECTOR CARGAS SOBRE NUDO

En el caso de estructuras planas, es el vector formado por las tres magnitudes siguientes:

P_x = componente según el eje global X de la fuerza exterior P que actúa sobre el nudo. De valor positivo si sigue la dirección positiva del eje X_G .

P_y = id. id. según el eje global Y.

M = momento exterior que actúa sobre el nudo. De valor positivo si es antihorario.

El vector que define las cargas exteriores que actúan sobre el nudo "i" es:

$$[P^i]_G = \begin{bmatrix} P_x^i \\ P_y^i \\ M^i \end{bmatrix}_G$$

Se refiere siempre a ejes globales.

3.4 VECTOR MOVIMIENTOS DE NUDO

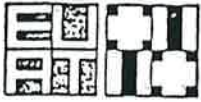
Es el vector formado por las tres magnitudes siguientes:

d_x = componente según el eje global X del desplazamiento que sufre el nudo. Positivo si sigue la dirección positiva de X_G

d_y = id. id. según el eje global Y

θ = Giro que experimenta el nudo. Positivo si es antihorario.

El vector que define los movimientos que sufre el nudo "i" es:



$$\begin{bmatrix} d^i \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} d_x^i \\ d_y^i \\ \theta^i \end{bmatrix}_G$$

Se refiere siempre a ejes globales.

3.5 VECTOR ESFUERZOS EN EXTREMO DE BARRA

$$\begin{bmatrix} p^{AB} \\ f \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} f_x^{AB} \\ f_y^{AB} \\ m^{AB} \end{bmatrix}_L$$

$$\begin{bmatrix} p^{BA} \\ f \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} f_x^{BA} \\ f_y^{BA} \\ m^{BA} \end{bmatrix}_L$$

Se refieren siempre a ejes locales.

$$\begin{bmatrix} p^{AB} \\ f \end{bmatrix}_L$$

es el vector representativo de los esfuerzos correspondientes al extremo A de la barra AB.

$$\begin{bmatrix} p^{BA} \\ f \end{bmatrix}_L$$

es el vector representativo de los esfuerzos correspondientes al extremo B de la barra AB.

f_x^{AB} = componente según X_L del esfuerzo que actúa en el extremo A de la barra AB =
= esfuerzo axial o normal en el extremo A de la barra AB

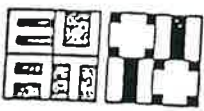
f_y^{AB} = componente según Y_L del esfuerzo que actúa en el extremo A de la barra AB =
= esfuerzo cortante en el extremo A de la barra AB

f_x^{BA} = componente según X_L del esfuerzo que actúa en el extremo B de la barra AB =
= esfuerzo axial o normal en el extremo B de la barra AB

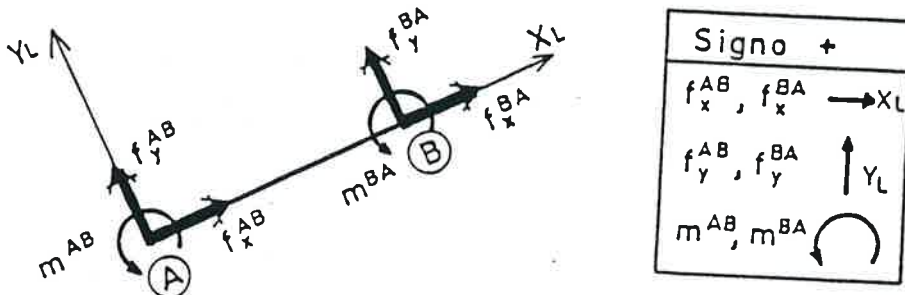
f_y^{BA} = componente según Y_L del esfuerzo que actúa en el extremo B de la barra AB =
= esfuerzo cortante en el extremo B de la barra AB

m^{AB} = momento flector que actúa en el extremo A de la barra AB.

m^{BA} = " " " " " " " B " " " "



En la siguiente figura se muestra el convenio de signos adoptado para las magnitudes anteriores:



3.6 VECTOR MOVIMIENTOS DE EXTREMO DE BARRA

$$[d^{AB}]_L = \begin{bmatrix} d_x^{AB} \\ d_y^{AB} \\ \theta^{AB} \end{bmatrix}_L$$

$$[d^{BA}]_L = \begin{bmatrix} d_x^{BA} \\ d_y^{BA} \\ \theta^{BA} \end{bmatrix}_L$$

Se refieren siempre a ejes locales

$[d^{AB}]_L$ es el vector representativo de los movimientos del extremo A de la barra AB

$[d^{BA}]_L$ es el vector representativo de los movimientos del extremo B de la barra AB

d_x^{AB} = componente según X_L del corrimiento del extremo A de la barra AB

d_y^{AB} = " " Y_L " " " " " A " " " AB

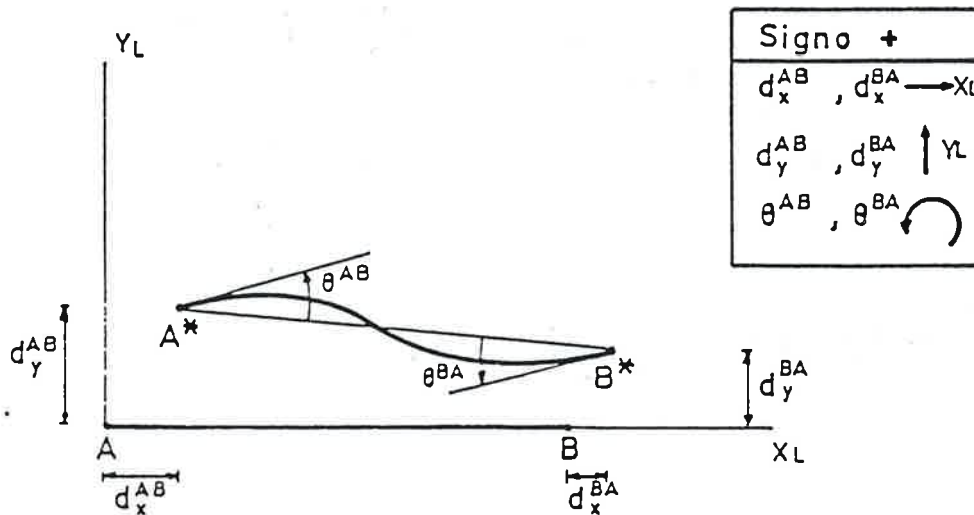
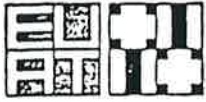
d_x^{BA} = " " X_L " " " " " B " " " AB

d_y^{BA} = " " Y_L " " " " " B " " " AB

θ^{AB} = Giro sufrido por el extremo A de la barra AB

θ^{BA} = " " " " " B " " " AB

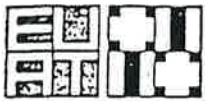
En la figura siguiente se muestra el convenio de signos adoptado para los corrimientos y giros de extremo de barra.



3.7 SECUENCIA DE OPERACIONES A SEGUIR PARA DETERMINAR LOS MOVIMIENTOS DE LOS NUDOS.

En el apartado 1.5 se indicó que el método de las deformaciones consiste en considerar como incógnitas los movimientos de los nudos, y el análisis estructural conduce a la determinación de esos movimientos cuando se aplican sobre los nudos unas cargas exteriores conocidas.

A continuación vamos a detallar el proceso a seguir para hallar los movimientos de los nudos en una estructura plana de nudos rígidos sometida a acciones que actúan exclusivamente en los nudos. Más adelante se generalizará el método para el caso de cargas que incidían sobre las barras y para el caso de que existan barras articuladas.



La secuencia de operaciones es la siguiente:

- 1.º - Planteamiento de las ecuaciones que relacionan los esfuerzos de extremo de barra $[f^{AB}]_L$ y $[f^{BA}]_L$ con sus movimientos $[d^{AB}]_L$ y $[d^{BA}]_L$, expresadas en ejes locales. Esta operación se detalla en los apartados 3.8 y 3.9
- 2.º - Paso a ejes globales de las ecuaciones citadas antes. Se trata de expresar la relación entre $[f^{AB}]_G$, $[f^{BA}]_G$ y $[d^{AB}]_G$, $[d^{BA}]_G$ en ejes globales o generales. Esto se lleva a cabo mediante la matriz de rotación o matriz de cambio de base y está desarrollado en los apartados 4.1 y 4.2
- 3.º - Condición de compatibilidad: Al ser una estructura de nudos rígidos, los movimientos de los nudos han de ser igual a los movimientos de los extremos de barra que concurren en ellos, o sea, para el nudo genérico I:

$$[d_I]_G = [d^{IJ}]_G = [d^{IK}]_G = [d^{IL}]_G = \dots = [d^{IN}]_G$$

Siendo IJ, IK, IL, \dots, IN las barras que concurren al nudo I.

- 4.º - Condición de equilibrio: La estructura está en equilibrio, luego también lo estarán la totalidad de los nudos. Por lo tanto, en un nudo I ha de ser nula la suma de cargas exteriores que actúan en él y las acciones que ejercen sobre él las barras (esfuerzos de extremo cambiados de signo) que con



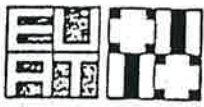
currenten en ese nudo I :

$$[P_I]_G - [f^{IJ}]_G - [f^{IK}]_G - [f^{IL}]_G - \dots - [f^{IN}]_G = 0 \quad (3.7.1)$$

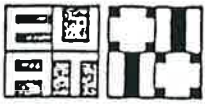
Aplicando (3.7.1) a todos los nudos de la estructura y teniendo en cuenta que los esfuerzos $[f]_G$ de extremo de barra pueden expresarse en función de los movimientos $[d]_G$ según se ha indicado en la operación 2ª, se tendrá un sistema de ecuaciones en el que los primeros miembros serán las cargas que actúan directamente sobre los nudos y los segundos miembros son relaciones lineales de los movimientos de dichos nudos.

Las operaciones 3ª y 4ª se desarrollan en el apartado 4.3

5º - Condiciones de contorno. En los nudos fijos (sustentaciones), las reacciones que ejerce la sustentación contra la estructura aparezcan en la ecuación (3.7.1) como si se tratase de fuerzas exteriores desconocidas, por lo que en el sistema de ecuaciones antes mencionado existirán algunos primeros miembros desconocidos. Sin embargo, como contrapartida algunas componentes del movimiento de esos nudos-sustentación cumplen unas condiciones conocidas (condiciones de contorno) que, al imponerlas, completan las ecuaciones que faltaban para resolver el sistema. Otro modo de proceder consiste en eliminar las componentes nulas de los movimientos de los nudos-sustentación, así como las ecuaciones correspondientes. El método que seguiremos es éste último y está desarrollado en el apartado 4.6.



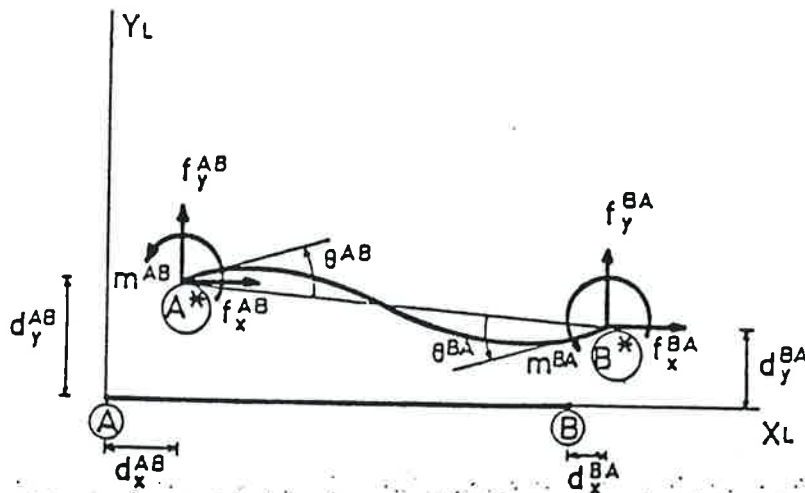
- 6.º - Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se obtendrán los movimientos de los nudos referidos a los ejes globales.
- 7.º - Conocidos los movimientos de los nudos, es preciso hallar los esfuerzos de extremo de barra, con lo que termina el análisis estructural. El cálculo de los esfuerzos (reacciones) de extremo de barra se lleva a cabo en 5.1

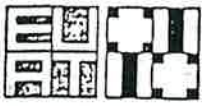


3.8 ECUACIONES QUE RELACIONAN LOS ESFUERZOS DE EXTREMO DE BARRA CON SUS MOVIMIENTOS. MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA

Sea AB cualquier barra recta que forma parte de un entramado plano sometido exclusivamente a cargas en sus nodos que actúan en el plano del entramado. Supongamos que, como consecuencia de los movimientos referidos a ejes locales d_x^{AB} , d_y^{AB} y θ^{AB} que sufre el extremo A (representados por el vector $[d^{AB}]_L$) y de los movimientos d_x^{BA} , d_y^{BA} y θ^{BA} que sufre el extremo B (vector $[d^{BA}]_L$), se desarrollan en los extremos A y B los esfuerzos (reacciones) siguientes:

$$[f^{AB}]_L = \begin{bmatrix} f_x^{AB} \\ f_y^{AB} \\ m^{AB} \end{bmatrix}_L \quad [f^{BA}]_L = \begin{bmatrix} f_x^{BA} \\ f_y^{BA} \\ m^{BA} \end{bmatrix}_L$$

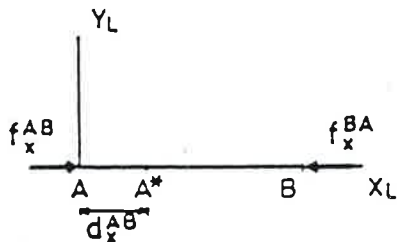




Vamos a encontrar las expresiones que relacionan los movimientos d_x^{AB} , d_y^{AB} , θ^{AB} , d_x^{BA} , d_y^{BA} y θ^{BA} con los esfuerzos de extremo de barra o reacciones f_x^{AB} , f_y^{AB} , m^{AB} , f_x^{BA} , f_y^{BA} y m^{BA} . Para ello, se provocará sucesivamente un solo movimiento de entre los seis posibles, manteniendo impedidos los cinco restantes movimientos. Cada movimiento generará unos esfuerzos y por aplicación del principio de superposición(*) podrán obtenerse las expresiones que relacionan los esfuerzos de extremo de barra con sus movimientos, referidos, desde luego, a ejes locales. Veámoslo con detalle:

1.) Movimiento d_x^{AB} del extremo A según X_L .

Resto de movimientos nulos: $d_y^{AB} = \theta^{AB} = d_x^{BA} = d_y^{BA} = \theta^{BA} = 0$



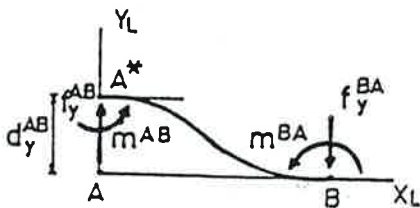
Recordando el concepto de coeficiente de rigidez de la barra a esfuerzo normal K_N :

$$f_x^{AB} = K_N \cdot d_x^{AB} \quad f_x^{BA} = -K_N \cdot d_x^{AB}$$

$$f_y^{AB} = m^{AB} = f_y^{BA} = m^{BA} = 0$$

2.) Movimiento d_y^{AB} del extremo A según Y_L .

Resto de movimientos nulos: $d_x^{AB} = \theta^{AB} = d_x^{BA} = d_y^{BA} = \theta^{BA} = 0$



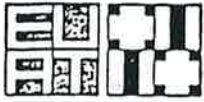
Recordando el concepto de los diferentes coeficientes de rigidez de barra:

$$f_y^{AB} = K_{DD} \cdot d_y^{AB} \quad f_y^{BA} = -K_{DD} \cdot d_y^{AB}$$

$$m^{AB} = K_{GD} \cdot d_y^{AB} \quad m^{BA} = K_{GD} \cdot d_y^{AB}$$

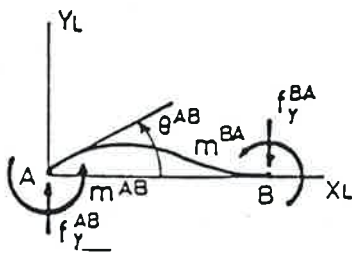
$$f_x^{AB} = 0 \quad f_x^{BA} = 0$$

(*) La aplicación del principio de superposición es lícita mientras se desprecien los efectos de segundo orden, ya que en este supuesto la relación entre esfuerzos y deformaciones es lineal.



3º) Giro θ^{AB} del extremo A.

Resto de movimientos nulos : $d_x^{AB} = d_y^{AB} = d_x^{BA} = d_y^{BA} = \theta^{BA}$



$$f_y^{AB} = k_{GD}^{AB} \cdot \theta^{AB}$$

$$m^{AB} = k_{GG'}^{AB} \cdot \theta^{AB}$$

$$f_x^{AB} = 0$$

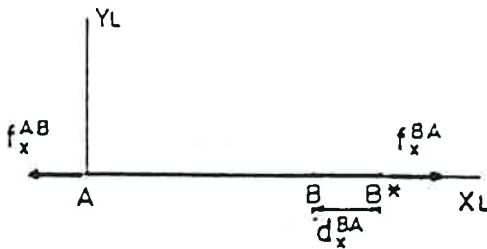
$$f_y^{BA} = -k_{GD}^{AB} \cdot \theta^{AB}$$

$$m^{BA} = k_{GG'}^{AB} \cdot \theta^{AB}$$

$$f_x^{BA} = 0$$

4º) Movimiento d_x^{BA} del extremo B según XL

Resto de movimientos nulos : $d_x^{AB} = d_y^{AB} = \theta^{AB} = d_y^{BA} = \theta^{BA} = 0$



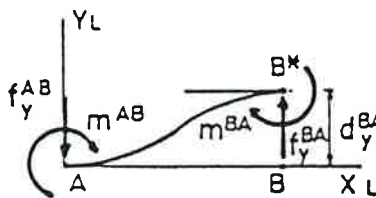
$$f_x^{AB} = -k_N^{AB} \cdot d_x^{BA}$$

$$f_x^{BA} = k_N^{AB} \cdot d_x^{BA}$$

$$f_y^{AB} = m^{AB} = f_y^{BA} = m^{BA} = 0$$

5º) Movimiento d_y^{BA} del extremo B según YL

Resto de movimientos nulos : $d_x^{AB} = d_y^{AB} = \theta^{AB} = d_x^{BA} = \theta^{BA} = 0$



$$f_y^{AB} = -k_{DD}^{AB} \cdot d_y^{BA}$$

$$m^{AB} = -k_{GD}^{AB} \cdot d_y^{BA}$$

$$f_x^{AB} = 0$$

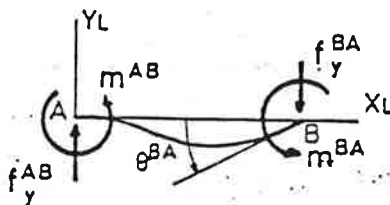
$$f_y^{BA} = k_{DD}^{AB} \cdot d_y^{BA}$$

$$m^{BA} = -k_{GD}^{AB} \cdot d_y^{BA}$$

$$f_x^{BA} = 0$$

6º) Giro θ^{BA} del extremo B

Resto de movimientos nulos : $d_x^{AB} = d_y^{AB} = \theta^{AB} = d_x^{BA} = d_y^{BA} = 0$



$$f_y^{AB} = k_{GD}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

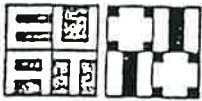
$$m^{AB} = k_{GG'}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

$$f_x^{AB} = 0$$

$$f_y^{BA} = -k_{GD}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

$$m^{BA} = k_{GG'}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

$$f_x^{BA} = 0$$



Los esfuerzos de extremo de barra (reacciones) definitivos cuando la barra sufra simultáneamente los seis movimientos en sus extremos, se obtendrán sumando los calculados en cada uno de los seis casos elementales anteriores:

$$f_x^{AB} = K_N^{AB} \cdot d_x^{AB} - K_N^{AB} \cdot d_x^{BA}$$

$$f_y^{AB} = K_{DD}^{AB} \cdot d_y^{AB} + K_{GD}^{AB} \cdot \theta^{AB} - K_{DD}^{AB} \cdot d_y^{BA} + K_{GD}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

$$m^{AB} = K_{GD}^{AB} \cdot d_y^{AB} + K_{GG}^{AB} \cdot \theta^{AB} - K_{GD}^{AB} \cdot d_y^{BA} + K_{GG}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

$$f_x^{BA} = -K_N^{AB} \cdot d_x^{AB} + K_N^{AB} \cdot d_x^{BA}$$

$$f_y^{BA} = -K_{DD}^{AB} \cdot d_y^{AB} - K_{GD}^{AB} \cdot \theta^{AB} + K_{DD}^{AB} \cdot d_y^{BA} - K_{GD}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

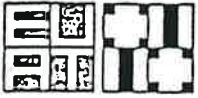
$$m^{BA} = K_{GD}^{AB} \cdot d_y^{AB} + K_{GG}^{AB} \cdot \theta^{AB} - K_{GD}^{AB} \cdot d_y^{BA} + K_{GG}^{AB} \cdot \theta^{BA}$$

Estas expresiones pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_x^{AB} \\ f_y^{AB} \\ m^{AB} \\ f_x^{BA} \\ f_y^{BA} \\ m^{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N^{AB} & 0 & 0 & -K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} & 0 & -K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} & 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \\ -K_N^{AB} & 0 & 0 & K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} & 0 & K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} & 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x^{AB} \\ d_y^{AB} \\ \theta^{AB} \\ d_x^{BA} \\ d_y^{BA} \\ \theta^{BA} \end{bmatrix}$$

o, de un modo más compacto:
$$[f]_L = [k^{AB}]_L \cdot [d]_L$$

(3.8.1)



donde $[f]_L$ es el vector esfuerzos de extremos en la barra AB referidos a ejes locales.

$[d]_L$ es el vector movimientos de extremos en la barra AB referidos a ejes locales.

$[K^{AB}]_L$ es la matriz de rigidez de la barra AB referida a ejes locales.

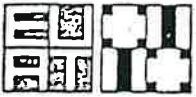
La expresi3n matricial anterior tambi3n puede escribirse as3:

$$\left. \begin{aligned} [f^{AB}]_L &= [K_{AA}^{AB}]_L \cdot [d^{AB}]_L + [K_{AB}^{AB}]_L \cdot [d^{BA}]_L \\ [f^{BA}]_L &= [K_{BA}^{AB}]_L \cdot [d^{AB}]_L + [K_{BB}^{AB}]_L \cdot [d^{BA}]_L \end{aligned} \right\} (3.8.2)$$

donde $[K_{AA}^{AB}]_L$, $[K_{AB}^{AB}]_L$, $[K_{BA}^{AB}]_L$, $[K_{BB}^{AB}]_L$ son las cuatro submatrices de rigidez de la barra AB:

$$\left. \begin{aligned} [K_{AA}^{AB}]_L &= \begin{bmatrix} K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L & [K_{AB}^{AB}]_L &= \begin{bmatrix} -K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L \\ [K_{BA}^{AB}]_L &= \begin{bmatrix} -K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L & [K_{BB}^{AB}]_L &= \begin{bmatrix} K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\ 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L \end{aligned} \right\} (3.8.3)$$

La submatriz $[K_{AA}^{AB}]_L$ relaciona los esfuerzos (reacciones) que

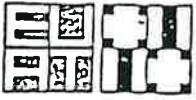


Se generan en el extremo A de la barra AB, cuando se provocan movimientos $[d^{AB}]_L$ en ese mismo extremo A permaneciendo nulos los movimientos del extremo B. Obsérvese que la submatriz $[K_{AA}^{AB}]_L$ es simétrica.

La submatriz $[K_{BB}^{AB}]_L$ relaciona los esfuerzos (reacciones) que se generan en el extremo B de la barra AB cuando se provocan movimientos $[d^{BA}]_L$ en ese mismo extremo B permaneciendo nulos los movimientos del otro extremo A. Obsérvese que la submatriz $[K_{BB}^{AB}]_L$ es simétrica.

La submatriz $[K_{AB}^{AB}]_L$ relaciona los esfuerzos (reacciones) que se generan en el extremo A de la barra AB cuando se provocan movimientos $[d^{BA}]_L$ en el otro extremo B, permaneciendo nulos los movimientos del extremo A.

La submatriz $[K_{BA}^{AB}]_L$ relaciona los esfuerzos (reacciones) que se generan en el extremo B de la barra AB cuando se provocan movimientos $[d^{AB}]_L$ en el otro extremo A, permaneciendo nulos los movimientos del extremo B. Obsérvese que $[K_{BA}^{AB}]_L$ es la transpuesta de $[K_{AB}^{AB}]_L$.



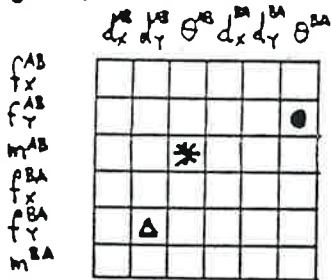
3.9 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA

De acuerdo con la expresión (3.8.1) de la matriz de rigidez de barra para entramados planos, pueden deducirse las siguientes propiedades:

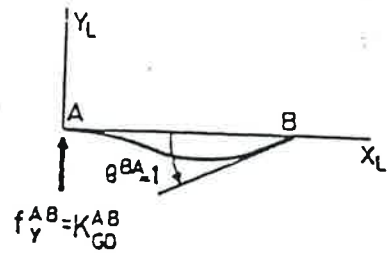
- La matriz de rigidez de barra es cuadrada de 6x6 elementos.
- Es una matriz simétrica.
- Todos los elementos de la diagonal principal son positivos, y además no nulos.
- El elemento situado en la fila "i", columna "j", representa el esfuerzo (reacción) de extremo de barra de orden "i" (el que corresponde a la fila "i") que se origina al provocar el movimiento de orden "j" con valor unidad, permaneciendo impedidos los restantes 5 movimientos.

Ejemplo:

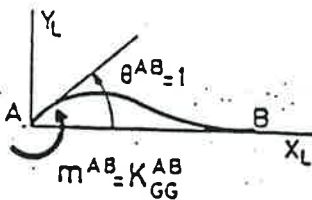
permite interpretar de que depende cada valor



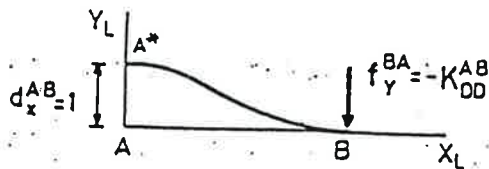
Elemento ●

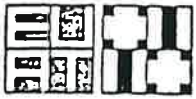


Elemento *



Elemento Δ





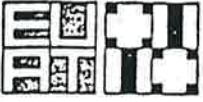
- La suma de los elementos de la fila "i" representa el esfuerzo de orden "i" que se desarrolla cuando se provocan los 6 movimientos posibles de extremo con un valor unidad. Ejemplo: la suma de los elementos de la fila 3ª representa el momento flector que aparecería en el extremo A si se provocan conjuntamente $d_x^{AB}=1$, $d_y^{AB}=1$, $d_x^{BA}=1$, $d_y^{BA}=1$, $\theta^{AB}=1$ y $\theta^{BA}=1$

Recordando que, para piezas rectas de sección constante despreciando las deformaciones originadas por el esfuerzo cortante, los coeficientes de rigidez son:

$$K_N = \frac{EA}{L} \quad K_{GG} = \frac{4EI}{L} \quad K_{GG'} = \frac{2EI}{L}$$

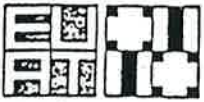
$$K_{GD} = \frac{6EI}{L^2} \quad K_{DD} = \frac{12EI}{L^3}$$

la matriz de rigidez de barra adopta la forma de la página siguiente:

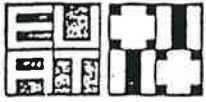


(3.9.1)

f_x^{AB}	f_y^{AB}	M^{AB}	f_x^{BA}	f_y^{BA}	M^{BA}
=					
$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{2EI}{L}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$
d_x^{AB}	d_y^{AB}	Θ^{AB}	d_x^{BA}	d_y^{BA}	Θ^{BA}



4. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA



4.1 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS . MATRIZ DE ROTACIÓN

Con objeto de poder establecer las condiciones de compatibilidad y las ecuaciones de equilibrio en cada nudo de la estructura, las ecuaciones (3.8.1), o las (3.8.2), se han de referir a los ejes globales o generales de la estructura.

Se trata de transformar los vectores $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m \end{bmatrix}_L$ y $\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ \theta \end{bmatrix}_L$ en los vectores $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m \end{bmatrix}_G$ y $\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ \theta \end{bmatrix}_G$, respectivamente.

Para conseguirlo, hay que efectuar un sencillo cambio de base. En una estructura plana, los ejes Z_L y Z_G son coincidentes, por lo que m y θ tendrán el mismo valor referidos a ambos sistemas de ejes.

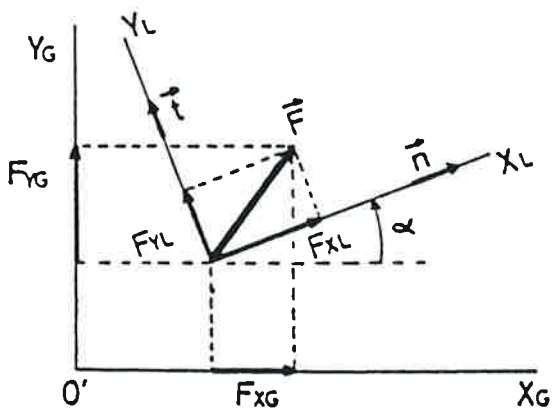


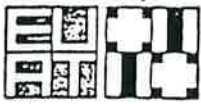
Fig. 4.1.1.

Sea \vec{n} un versor que sigue la dirección del eje local X_L y sean n_{xG}, n_{yG} sus componentes respecto a los ejes globales.

Sea \vec{t} un versor que sigue la dirección del eje local Y_L y sean t_{xG}, t_{yG} sus componentes respecto a los ejes globales.

Sean $\begin{bmatrix} F_{XL} \\ F_{YL} \\ m \end{bmatrix}$ las componentes de un vector $[F]$ respecto a los ejes locales.

Según se desprende de la figura 4.1.1, se verifica:



$$\left. \begin{aligned} F_{xG} &= F_{xL} \cdot n_{xG} + F_{yL} \cdot t_{xG} \\ F_{yG} &= F_{xL} \cdot n_{yG} + F_{yL} \cdot t_{yG} \\ m &= m \end{aligned} \right\}$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned} n_{xG} &= \cos \alpha & t_{xG} &= -\sin \alpha \\ n_{yG} &= \sin \alpha & t_{yG} &= \cos \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} F_{xG} \\ F_{yG} \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{xL} \\ F_{yL} \\ m \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

A la matriz $[R] = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

se le llama MATRIZ DE ROTACIÓN o MATRIZ DE CAMBIO DE BASE.

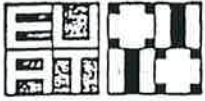
De acuerdo con (4.1.1):

$$\left. \begin{aligned} [f]_G &= [R] \cdot [f]_L \\ [d]_G &= [R] \cdot [d]_L \end{aligned} \right\} (4.1.2)$$

De (4.1.2) se desprende que premultiplicando por la matriz de rotación un vector referido a ejes locales, se obtiene ese mismo vector referido a ejes generales.

La matriz de rotación $[R]$ es una matriz ortogonal, por lo que su inversa es igual a su traspuesta:

$$[R]^{-1} = [R]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\left. \begin{aligned} \text{De (4.1.2): } [f]_L &= [R]^{-1} \cdot [f]_G = [R]^T \cdot [f]_G \\ [d]_L &= [R]^{-1} [d]_G = [R]^T \cdot [d]_G \end{aligned} \right\} (4.1.3)$$

De (4.1.3) se deduce que premultiplicando por la transpuesta de la matriz de rotación un vector referido a ejes globales, se obtiene ese mismo vector referido a ejes locales.

4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA EN EJES GLOBALES

Premultiplicando por la matriz de rotación $[R]$ las expresiones (3.8.2) se obtiene:

$$[R] [f^{AB}]_L = [R] \cdot [K_{AA}^{AB}]_L \cdot [d^{AB}]_L + [R] \cdot [K_{AB}^{AB}]_L \cdot [d^{BA}]_L$$

$$[R] [f^{BA}]_L = [R] \cdot [K_{BA}^{AB}]_L \cdot [d^{AB}]_L + [R] \cdot [K_{BB}^{AB}]_L \cdot [d^{BA}]_L$$

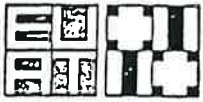
y teniendo en cuenta (4.1.2) y (4.1.3):

$$\left. \begin{aligned} [f^{AB}]_G &= [R] \cdot [K_{AA}^{AB}]_L \cdot [R]^T \cdot [d^{AB}]_G + [R] \cdot [K_{AB}^{AB}]_L \cdot [R]^T \cdot [d^{BA}]_G \\ [f^{BA}]_G &= [R] \cdot [K_{BA}^{AB}]_L \cdot [R]^T \cdot [d^{AB}]_G + [R] \cdot [K_{BB}^{AB}]_L \cdot [R]^T \cdot [d^{BA}]_G \end{aligned} \right\} (4.2.1)$$

Si llamamos

$$\left. \begin{aligned} [K_{AA}^{AB}]_G &= [R] [K_{AA}^{AB}]_L [R]^T, & [K_{AB}^{AB}]_G &= [R] [K_{AB}^{AB}]_L [R]^T \\ [K_{BA}^{AB}]_G &= [R] [K_{BA}^{AB}]_L [R]^T, & [K_{BB}^{AB}]_G &= [R] [K_{BB}^{AB}]_L [R]^T \end{aligned} \right\} (4.2.2)$$

las expresiones (4.2.1) quedan:



$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} f^{AB} \\ f^{BA} \end{bmatrix}_G &= \begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G \cdot \begin{bmatrix} d^{AB} \\ d^{BA} \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} K_{AB}^{AB} \\ K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G \cdot \begin{bmatrix} d^{BA} \\ d^{AB} \end{bmatrix}_G \end{aligned} \right\} (4.2.3)$$

Las anteriores expresiones (4.2.3) nos proporcionan las reacciones de extremo de barra referidas a ejes globales cuando se conocen los desplazamientos de esos mismos extremos de barra referidos también a ejes globales, y son análogas a las expresiones (3.8.2) para ejes locales.

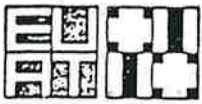
De un modo más compacto pueden escribirse así:

$$\begin{bmatrix} f^{AB} \\ f^{BA} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} & K_{AB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} & K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} d^{AB} \\ d^{BA} \end{bmatrix}_G$$

La matriz $\begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} & K_{AB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} & K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G$ es la matriz de rigidez de la barra AB en ejes globales.

De acuerdo con (4.2.2) las submatrices $\begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} \end{bmatrix}_G, \begin{bmatrix} K_{AB}^{AB} \end{bmatrix}_G, \begin{bmatrix} K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G, \begin{bmatrix} K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G$ se calculan así:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} \end{bmatrix}_G &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{AB}^{AB} \end{bmatrix}_G &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$



$$[K_{BA}^{AB}]_G = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DD}^{AB} & -k_{GD}^{AB} \\ 0 & k_{GD}^{AB} & k_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

$$[K_{BB}^{AB}]_G = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & k_{DD}^{AB} & -k_{GD}^{AB} \\ 0 & -k_{GD}^{AB} & k_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

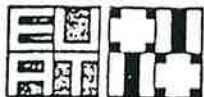
Efectuando los productos, queda:

$$[K_{AA}^{AB}]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k_N^{AB} n_{xG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} \cdot n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_N^{AB} n_{yG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & k_{GD}^{AB} \cdot n_{xG} \\ \hline -k_{GD}^{AB} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{xG} & k_{GG}^{AB} \\ \hline \end{array}$$

$$[K_{AB}^{AB}]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -k_N^{AB} n_{xG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_N^{AB} n_{yG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & k_{GD}^{AB} n_{xG} \\ \hline k_{GD}^{AB} n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{xG} & k_{GG}^{AB} \\ \hline \end{array}$$

$$[K_{BA}^{AB}]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -k_N^{AB} n_{xG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_N^{AB} n_{yG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & -k_{GD}^{AB} n_{xG} \\ \hline -k_{GD}^{AB} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{xG} & k_{GG}^{AB} \\ \hline \end{array}$$

$$[K_{BB}^{AB}]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k_N^{AB} n_{xG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_N^{AB} n_{yG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & -k_{GD}^{AB} n_{xG} \\ \hline k_{GD}^{AB} n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{xG} & k_{GG}^{AB} \\ \hline \end{array} \quad (4.2.6)$$



Las expresiones (4.2.6) ponen de manifiesto, tal como era de esperar, que las submatrices $[K_{AA}^{AB}]_G$ y $[K_{BB}^{AB}]_G$ son simétricas, y la submatriz $[K_{BA}^{AB}]_G$ es la transpuesta de $[K_{AB}^{AB}]_G$

La matriz de rigidez de barra referida a ejes globales

$$[K^{AB}]_G = \begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} & K_{AB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} & K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G$$

es una matriz cuadrada de 6×6 elementos, simétrica y presenta las mismas propiedades ya descritas anteriormente para la matriz $[K^{AB}]_L$, con la única diferencia que $[K^{AB}]_G$ relaciona movimientos de extremo de barra con esfuerzos de extremo de barra, referidos ambos a ejes generales, mientras que $[K^{AB}]_L$ establece la misma relación, pero con "d" y "f" referidos a ejes locales.



4.3 EQUILIBRIO DE LOS NUDOS. MATRIZ DE RIGÍDEZ DE LA ESTRUCTURA

Las ecuaciones (4.2.3) proporcionan las reacciones de extremo de barra en función de los movimientos de esos extremos, referidos a ejes globales. Para la barra IJ esas ecuaciones son:

$$\begin{bmatrix} f^{IJ} \\ f^{JI} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} k_{II}^{IJ} & k_{IJ}^{IJ} \\ k_{JI}^{IJ} & k_{JJ}^{IJ} \end{bmatrix}_G \cdot \begin{bmatrix} d^{IJ} \\ d^{JI} \end{bmatrix}_G \quad (4.3.1)$$

Teniendo en cuenta que los nudos son rígidos, la condición de compatibilidad de las deformaciones exige que los movimientos del nudo coincidan con los movimientos de los extremos de las barras que concurren al nudo, por lo que

$$[d_I]_G = [d^{IJ}]_G \quad \text{y, por la misma razón, en}$$

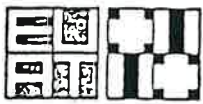
el nudo J :

$$[d_J]_G = [d^{JI}]_G$$

Sustituyendo en (4.3.1):

$$\begin{bmatrix} f^{IJ} \\ f^{JI} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} k_{II}^{IJ} & k_{IJ}^{IJ} \\ k_{JI}^{IJ} & k_{JJ}^{IJ} \end{bmatrix}_G \cdot \begin{bmatrix} d_I \\ d_J \end{bmatrix}_G \quad (4.3.2)$$

La expresión (4.3.2) significa que $[f^{IJ}]_G$ es la reacción que el nudo I ejerce sobre el extremo I de la barra IJ , por lo que el extremo I de la barra IJ ejercerá contra el nudo I una acción igual y de sentido contrario, o sea de valor $-[f^{IJ}]_G$.



Por la misma razón, el extremo J de la barra IJ ejercerá contra el nudo J una acción de valor $-[f^{JI}]_G$.

Las acciones que la barra IJ ejerce contra todos los nudos de la estructura A, B, C, ..., I, ..., J, ..., N, pueden expresarse así:

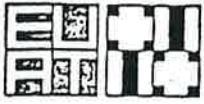
$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -f^{IJ} \\ \vdots \\ -f^{JI} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{II}^{IJ} & \dots & K_{IJ}^{IJ} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{JI}^{IJ} & \dots & K_{JI}^{IJ} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_A \\ d_B \\ \vdots \\ d_I \\ \vdots \\ d_J \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \quad (4.3.3)
 \end{array}$$

\uparrow \uparrow
 I J

Puesto que los nudos han de estar en equilibrio, la suma de las cargas exteriores que actúan sobre un nudo y las acciones que ejercen contra él los extremos de las barras que concurren en dicho nudo ha de ser nula. Esta condición de equilibrio aplicada a todos los nudos de la estructura, puede expresarse así:

$$\sum \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -f^{IJ} \\ \vdots \\ -f^{JI} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ \vdots \\ P_I \\ \vdots \\ P_J \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.4)$$

donde el sumatorio está extendido a todas las barras de la estructura.



Sustituyendo (4.3.4) en (4.3.3) queda:

$$-\sum \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{II}^{IJ} & \dots & k_{IJ}^{IJ} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{JI}^{IJ} & \dots & k_{IJ}^{IJ} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_A \\ d_B \\ \vdots \\ d_I \\ \vdots \\ d_J \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ \vdots \\ P_I \\ \vdots \\ P_J \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.5)$$

La ecuación matricial (4.3.5) puede expresarse así:

$$\boxed{[P] = [K_0] [d]} \quad (4.3.6)$$

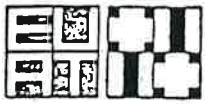
donde $[P]$ = vector cargas exteriores sobre los nudos. En los nudos sustentantes se elimina la sustentación y se sustituye por las reacciones, que actuarán como fuerzas exteriores, pero desconocidas.

$[d]$ = vector desplazamiento de los nudos referido a ejes generales.

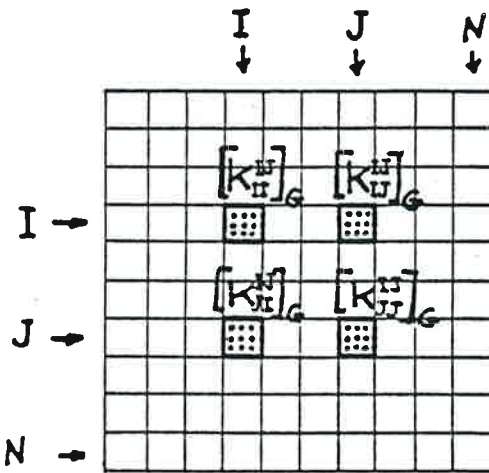
$[K_0]$ = matriz de rigidez completa de la estructura.

4.4 ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

Recordemos que $[K_0]$ no es sino la suma de las matrices que figuran como primer término en (4.3.5); por lo tanto, para formar la matriz de rigidez $[K_0]$ de la estructura, se deberá seguir el siguiente proceso:



- Construir una reticula de $N \times N$ casillas, siendo N el número de nudos de la estructura.



- Situar las cuatro submatrices de barra de cada pieza IJ en las siguientes casillas:

$[K_{II}^{IJ}]_G$ en la fila I, columna I

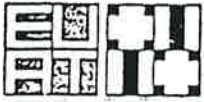
$[K_{IJ}^{IJ}]_G$ en la fila I, columna J

$[K_{JI}^{IJ}]_G$ en la fila J, columna I

$[K_{JJ}^{IJ}]_G$ en la fila J, columna J

Esta operación debe realizarse con todas y cada una de las barras de la estructura.

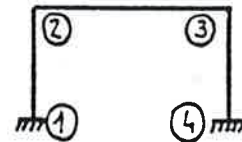
- Sumar las submatrices que ocupen la misma posición. Nótese que únicamente las casillas de la diagonal principal serán ocupadas por más de una submatriz, siempre que entre dos nudos no haya más de una barra, cosa que sucede siempre.
- Poner ceros en las casillas que queden vacías.



Al conjunto de las operaciones descritas en el proceso anterior se le acostumbra a denominar ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.

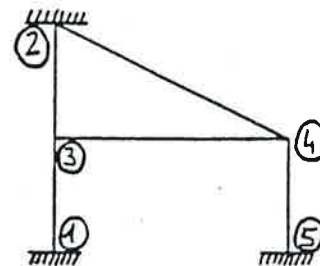
Ejemplos:

Matriz de rigidez de la estructura:



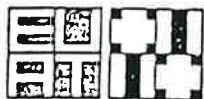
	1	2	3	4
1	$[K_{11}^{12}]_G$	$[K_{12}^{12}]_G$	0	0
2	$[K_{21}^{12}]_G$	$[K_{22}^{12}]_G + [K_{22}^{23}]_G$	$[K_{23}^{23}]_G$	0
3	0	$[K_{32}^{23}]_G$	$[K_{33}^{23}]_G + [K_{33}^{34}]_G$	$[K_{34}^{34}]_G$
4	0	0	$[K_{43}^{34}]_G$	$[K_{44}^{34}]_G$

Matriz de rigidez de la estructura:



	1	2	3	4	5
1	$[K_{11}^{13}]_G$	0	$[K_{13}^{13}]_G$	0	0
2	0	$[K_{22}^{23}]_G + [K_{22}^{24}]_G$	$[K_{23}^{23}]_G$	$[K_{24}^{24}]_G$	0
3	$[K_{31}^{13}]_G$	$[K_{32}^{23}]_G$	$[K_{33}^{23}]_G + [K_{33}^{34}]_G + [K_{33}^{35}]_G$	$[K_{34}^{34}]_G$	0
4	0	$[K_{42}^{24}]_G$	$[K_{43}^{34}]_G$	$[K_{44}^{24}]_G + [K_{44}^{34}]_G + [K_{44}^{45}]_G$	$[K_{45}^{45}]_G$
5	0	0	0	$[K_{54}^{45}]_G$	$[K_{55}^{45}]_G$

Es importante recordar que en el caso de entramados planos de nudos rígidos, las submatrices de barra son de 3×3 elementos, por lo que dentro de cada casilla en realidad hay 9 números. La matriz del primer ejemplo es de 12×12 elementos, y la del 2º ejemplo es de 15×15 elementos.



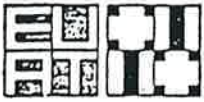
4.5 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

La matriz de rigidez $[K_0]$ de una estructura posee las siguientes propiedades:

- Es una matriz cuadrada de $3N \times 3N$ elementos, siendo N el número total de nudos de la estructura.
- Es una matriz simétrica, según se deduce del modo de formarla: las submatrices de barra de la diagonal principal $[K_{IJ}^{IJ}]_G$ y $[K_{JI}^{JI}]_G$ son simétricas, y las submatrices $[K_{IJ}^{JI}]_G$ y $[K_{JI}^{IJ}]_G$, que ocupan posiciones simétricas, son transpuestas.
- Todos los elementos de la diagonal principal son positivos y, además, no son nulos.
- La matriz de rigidez es una matriz en banda simétrica.

Se entiende por matriz en banda simétrica aquella cuyos elementos no nulos se localizan alrededor, y simétricamente, de su diagonal principal. Se denomina ancho de banda B_e al máximo número de elementos no nulos en cualquier fila de la matriz contando a partir de la diagonal principal e incluyendo al elemento de dicha diagonal. Por lo tanto, en una matriz banda de ancho B_e se cumplirá que $a_{IJ} = 0$ para todo $|I - J| > B_e - 1$

Si observamos con atención el modo de ensamblar la matriz de rigidez, nos percataremos que todas las submatrices de barra quedan ubicadas en el interior de una banda cuyo eje es la diagonal principal, y que dicha banda será tanto más estrecha cuanto menor



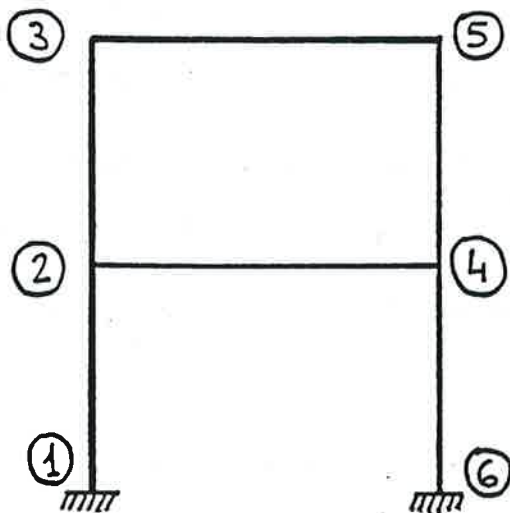
sea la diferencia entre los números de los nudos dorsal y frontal de cada barra. Precisamente, el ancho de banda medido en unidades de submatrices de barra (B_s), sin contar la submatriz de la diagonal principal, es igual a la máxima diferencia entre los números correspondientes a los nudos de una misma barra:

$$B_s = |I - J|_{\text{máx.}}$$

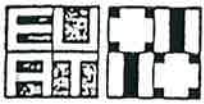
La relación entre B_e y B_s es, evidentemente: $B_e = 3(B_s + 1)$ para estructuras planas de nudos rígidos. Para otro tipo de estructuras con N_m posibles grados de libertad en cada nudo (N_m también es el número de filas de las submatrices de barra), la relación será:

$$B_e = N_m \cdot (B_s + 1)$$

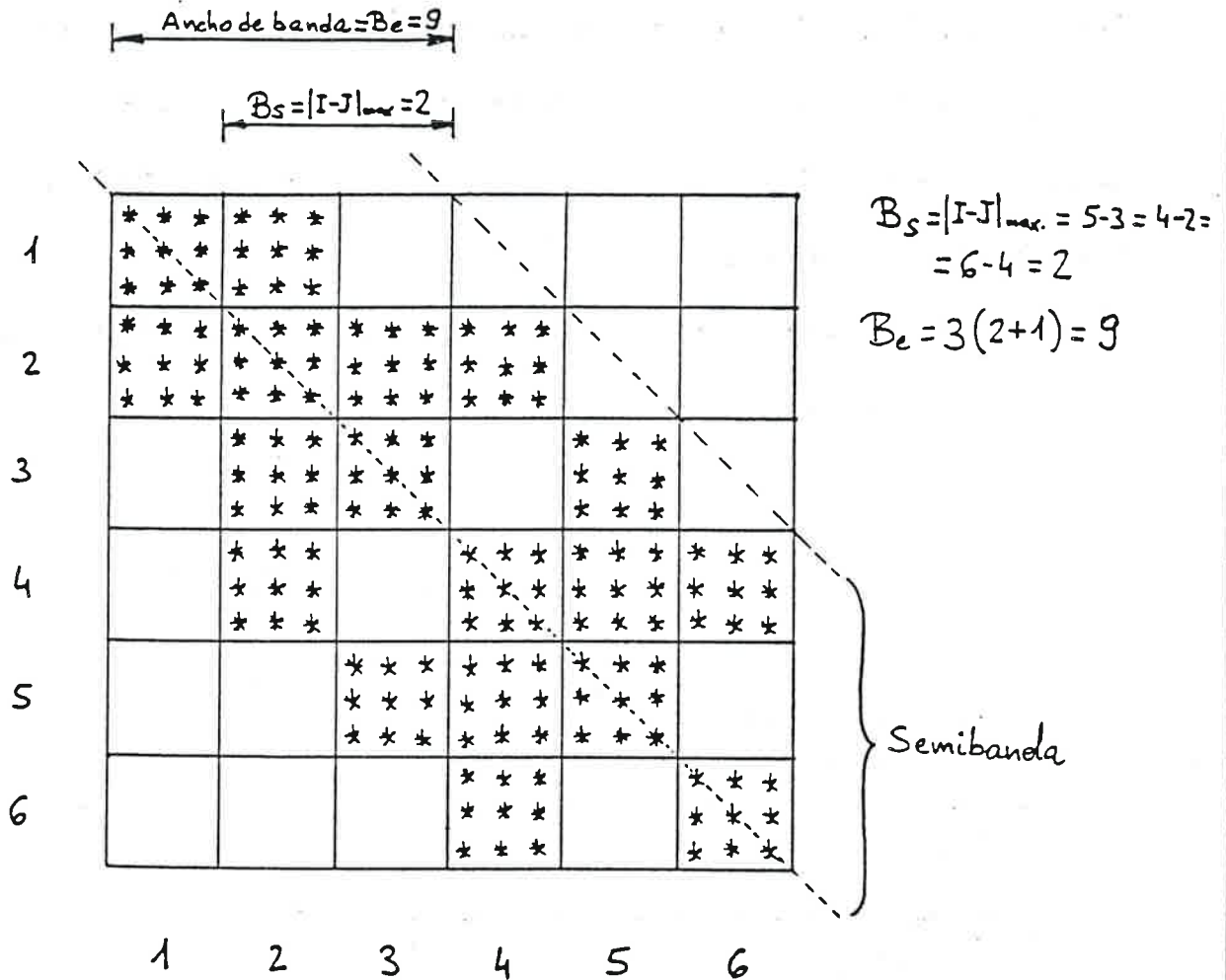
Ejemplo: Sea la estructura cruzada a continuación:



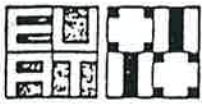
El esquema de la matriz de rigidez (donde se indica con "*" los elementos pertenecientes a las submatrices de barra no nulas y se dejan en blanco



los elementos de las submatrices nulas) es:

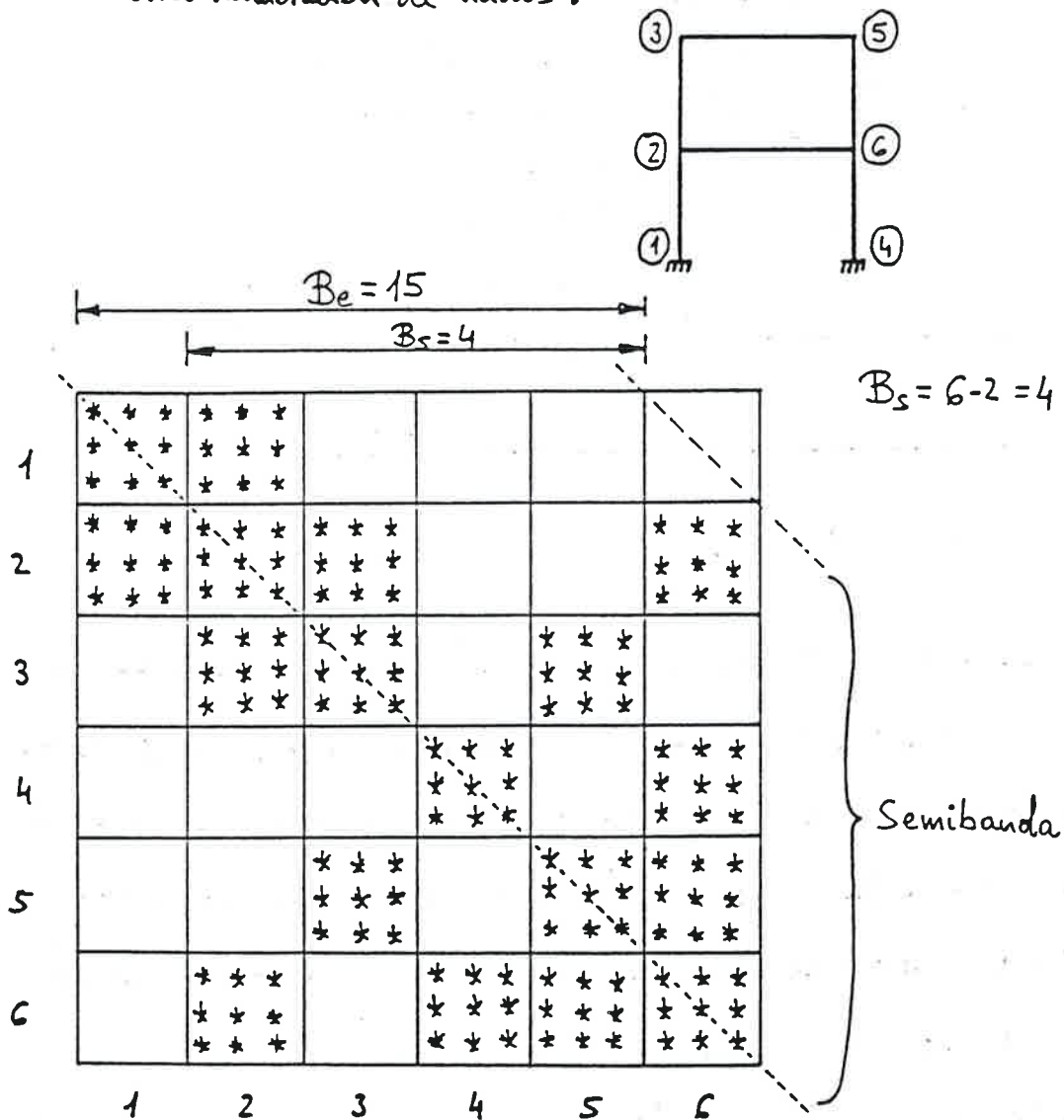


Si se efectúa el análisis de la estructura a través de un programa de ordenador, se comprende perfectamente que no es necesario almacenar en memoria la totalidad de los elementos de la matriz de rigidez, sino únicamente los elementos de la semibanda, con el consiguiente ahorro de memoria y de tiempos de ejecución. Cuanto menor sea el ancho de banda, menos elementos han de estar simultáneamente en memoria y se lograrán calcular estructuras más grandes. Tiene, pues, una gran importancia el conseguir anchos de banda lo más pequeños posible, y como $B_s = |I-J|_{\max}$ y $B_e = N_n(B_s+1)$, re-

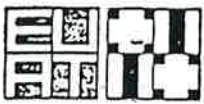


sulta que B_e depende de la numeración de los nudos, por lo que no es indiferente el modo de numerar los nudos de una estructura. La numeración más adecuada es aquella que origine el valor más bajo de B_s .

Volvamos a esquematizar la matriz de rigidez del ejemplo anterior, pero con otra numeración de nudos:



Se aprecia claramente la desventaja de esta segunda numeración, donde $B_s = 4$ frente $B_s = 2$ en el primer ejemplo.



4.6 CONDICIONES DE CONTORNO

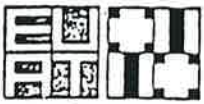
Las condiciones de contorno consisten en imponer la manera como está sustentada o apoyada la estructura.

En el primer miembro de la ecuación matricial completa (4.3.6) de la estructura aparecen acciones exteriores aplicadas en los nudos, que son cantidades conocidas, y también las reacciones en los apoyos, que son desconocidas. En el segundo miembro de dicha ecuación no todos los movimientos de los nudos son desconocidos, sino que en el caso de los apoyos los movimientos vienen impuestos. En efecto, si el apoyo es fijo, sus movimientos son nulos, si el apoyo sufre un asiento, el movimiento es un valor constante, y si se trata de un apoyo elástico, el movimiento es una función de las constantes elásticas.

Vamos a suponer que los apoyos de la estructura son fijos, o sea, que sus movimientos impedidos son nulos. Supongamos también que la numeración de los nudos se ha efectuado de tal modo que los últimos números se han destinado a los nudos fijos (apoyos). En estas condiciones, la ecuación matricial completa (4.3.6) de la estructura podemos escribirla así:

$$\begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_2] \\ \vdots \\ [P_s] \\ [P_{s+1}] \\ \vdots \\ [P_n] \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} [] & [] & \dots & [] & [] & \dots & [] \\ [] & [] & \dots & [] & [] & \dots & [] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [] & [] & \dots & [] & [] & \dots & [] \\ \hline [] & [] & \dots & [] & [] & \dots & [] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [] & [] & \dots & [] & [] & \dots & [] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [d_1] \\ [d_2] \\ \vdots \\ [d_s] \\ [d_{s+1}] \\ \vdots \\ [d_n] \end{bmatrix}_G \quad (4.6.1)$$

1 2 ... s s+1 ... n



donde los subvectores $[P_{s+1}]_G$ a $[P_n]_G$ representan las reacciones desconocidas en los apoyos (nodos $s+1, s+2, \dots, n$).

Teniendo en cuenta que los movimientos $[d_{s+1}]_G, [d_{s+2}]_G, \dots, [d_n]_G$ son nulos, pueden eliminarse las ecuaciones desde la de orden $s+1$ hasta la de orden n , y las columnas $s+1$ hasta n de la matriz K_0 en la expresión (4.6.1), quedando de este modo:

$$\begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_2] \\ \vdots \\ [P_s] \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} [I] & [] & \dots & [] \\ [] & [] & \dots & [] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [] & [] & \dots & [] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [d_1] \\ [d_2] \\ \vdots \\ [d_s] \end{bmatrix}_G \quad (4.6.2)$$

1 2 s

o también:

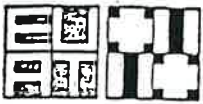
$$\boxed{[P] = [K] \cdot [d]} \quad (4.6.3) \quad \text{llamada ecuación matricial final de la estructura.}$$

donde: $[P]$ = vector cargas exteriores sobre los nudos desplazables.

$[d]$ = vector movimientos de los nudos desplazables, referido a los ejes generales.

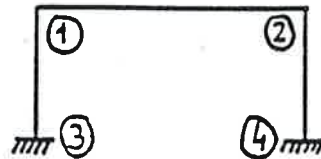
$[K]$ = matriz de rigidez final de la estructura.

La diferencia que existe entre la ecuación matricial completa y la ecuación matricial final de la estructura consiste en que la pri-



mera tiene en consideración todos los nudos, desplazables o fijos, mientras que en la segunda sólo aparecen los nudos desplazables.

Ejemplo 1: Sea la estructura



la matriz de rigidez completa es:

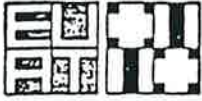
1	$[K_{11}^{12}]_G + [K_{11}^{13}]_G$	$[K_{12}^{12}]_G$	$[K_{13}^{13}]_G$	0
2	$[K_{21}^{12}]_G$	$[K_{22}^{12}]_G + [K_{22}^{24}]_G$	0	$[K_{24}^{24}]_G$
3	$[K_{31}^{13}]_G$	0	$[K_{33}^{13}]_G$	0
4	0	$[K_{42}^{24}]_G$	0	$[K_{44}^{24}]_G$
	1	2	3	4

los nudos 3 y 4 son fijos; en ellos están impedidos el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y el giro. Por ello podremos eliminar las filas 3 y 4, así como las columnas 3 y 4, quedando la matriz de rigidez final:

1	$[K_{11}^{12}]_G + [K_{11}^{13}]_G$	$[K_{12}^{12}]_G$
2	$[K_{21}^{12}]_G$	$[K_{22}^{12}]_G + [K_{22}^{24}]_G$
	1	2

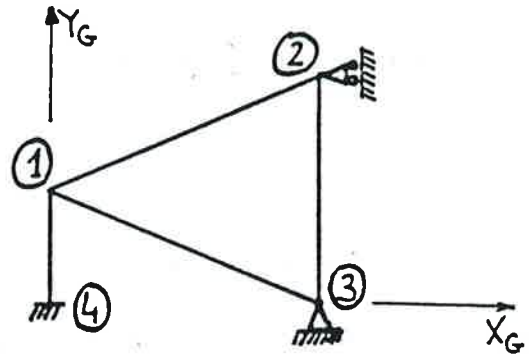
que es una matriz de 6x6 elementos.

No es imprescindible numerar en último lugar los nudos fijos. Si no se hubiese



hecho así, lo único que habría sucedido es que las filas y las columnas eliminadas no serían las últimas.

Ejemplo 2 : Sea la estructura



la matriz de rigidez completa es:

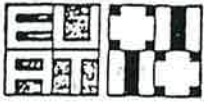
	1			2			3			4		
	d_x^1	d_y^1	θ^1	d_x^2	d_y^2	θ^2	d_x^3	d_y^3	θ^3	d_x^4	d_y^4	θ^4
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
3	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
4	*	*	*							*	*	*

En el apoyo 2 está impedido el movimiento según el eje X_G , por lo que se eliminan la fila y la columna correspondientes a d_x^2 .

En la articulación 3 están impedidos los movimientos según X_G e Y_G , por ello se eliminan las filas y las columnas correspondientes a d_x^3 y d_y^3 .

En el empotramiento 4 están impedidos los dos desplazamientos y el giro, por lo que se eliminan las filas y las columnas correspondientes a d_x^4 , d_y^4 y θ^4 .

La matriz de rigidez final es:



		1			2		3
		d_x^1	d_y^1	θ^1	d_x^2	θ^2	θ^3
1	d_x^1	*	*	*	*	*	*
	d_y^1	*	*	*	*	*	*
	θ^1	*	*	*	*	*	*
2	d_x^2	*	*	*	*	*	*
	θ^2	*	*	*	*	*	*
	θ^3	*	*	*	*	*	*
3	θ^3	*	*	*	*	*	*

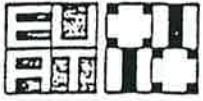
Es una matriz de 6×6 elementos, ya que la estructura del ejemplo 2 tiene 6 grados de libertad (3 movimientos del nudo 1, 2 movimientos del nudo 2, y 1 del nudo 3).

Se comprende que para ensamblar la matriz de rigidez final no es necesario formar antes la matriz de rigidez completa; en los ejemplos 1 y 2 lo hemos hecho así por su carácter didáctico.

La matriz de rigidez final tiene las mismas propiedades que las ya comentadas para la matriz de rigidez completa:

- Matriz cuadrada
- Matriz simétrica
- Elementos de la diagonal principal positivos
- Matriz en banda

La diferencia estriba en que el número de filas y de columnas de la matriz de rigidez final es igual al número de movimientos posibles de los nudos no fijos, o sea al grado de libertad (ver 3.1).



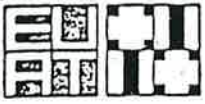
4.7 SISTEMA FINAL DE ECUACIONES LINEALES

El desarrollo del método de las deformaciones ha conducido a la ecuación matricial final de la estructura (4.6.3) :

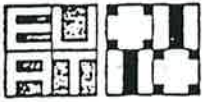
$$[P] = [K] \cdot [d]$$

Se trata de un sistema lineal de G_L ecuaciones, siendo G_L el grado de libertad de la estructura. Su resolución nos proporcionará el valor de los movimientos $[d]_G$ de los nudos referidos a ejes generales. Conocidos los movimientos $[d]_G$, va a ser muy fácil, como veremos a continuación, hallar los esfuerzos de extremo en cada barra.

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no se desarrollan aquí porque pueden encontrarse en cualquier tratado especializado, y no constituyen materia específica de esta asignatura.



5. ESFUERZOS DE EXTREMO DE BARRA



5.1 DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS EN LOS EXTREMOS DE CADA BARRA

Una vez conocidos los movimientos de los nudos referidos a ejes generales, para hallar las reacciones o esfuerzos de extremo de barra (esfuerzo axial, esfuerzo cortante y momento flector) con respecto a los ejes locales, deberán aplicarse las ecuaciones (3.8.1), después de haber referido aquellos movimientos a ejes locales.

Sea la barra prismaticá AB. Conozcamos los movimientos $[d^{AB}]_G = [d_A]_G$ y $[d^{BA}]_G = [d_B]_G$ de los extremos A y B referidos a ejes generales. Para referirlos a ejes locales basta aplicar (4.1.3): $[d]_L = [R]^T \cdot [d]_G$

o sea:

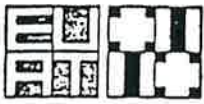
$$\begin{bmatrix} d_x^{AB} \\ d_y^{AB} \\ \theta^{AB} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^A \\ d_y^A \\ \theta^A \end{bmatrix}_G \quad \begin{bmatrix} d_x^{BA} \\ d_y^{BA} \\ \theta^{BA} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^B \\ d_y^B \\ \theta^B \end{bmatrix}_G \quad (5.1.1)$$

sustituyendo (5.1.1) en (3.8.1) queda:

$$\begin{bmatrix} p_x^{AB} \\ p_y^{AB} \\ m^{AB} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^A \\ d_y^A \\ \theta^A \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} -K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^B \\ d_y^B \\ \theta^B \end{bmatrix}_G$$

$$\begin{bmatrix} p_x^{BA} \\ p_y^{BA} \\ m^{BA} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} -K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^A \\ d_y^A \\ \theta^A \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\ 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^B \\ d_y^B \\ \theta^B \end{bmatrix}_G$$

Efectuando los productos de las submatrices de barra por la transpuesta de la matriz de rotación, queda:



$$\begin{bmatrix} p_{AB} \\ f_x \\ f_y \\ m^{AB} \\ p_{BA} \\ f_x \\ f_y \\ m^{BA} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} K_W^{AB} \cdot n_{xG} & K_W^{AB} \cdot n_{yG} & 0 & -K_W^{AB} \cdot n_{xG} & -K_W^{AB} \cdot n_{yG} & 0 \\ K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & K_{GD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & -K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & K_{GD}^{AB} \\ K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & K_{GG}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & -K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & K_{GG}^{AB} \\ -K_W^{AB} \cdot n_{xG} & -K_W^{AB} \cdot n_{yG} & 0 & K_W^{AB} \cdot n_{xG} & K_W^{AB} \cdot n_{yG} & 0 \\ -K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & -K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & -K_{GD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & -K_{GD}^{AB} \\ K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & K_{GG}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \cdot t_{xG} & -K_{GD}^{AB} \cdot t_{yG} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x^A \\ d_y^A \\ \theta^A \\ d_x^B \\ d_y^B \\ \theta^B \end{bmatrix}_G \quad (5.1.2)$$

Esta expresión nos proporciona los esfuerzos de extremo de la barra genérica AB, respecto a ejes locales, cuando se conocen los movimientos de los nudos A y B en ejes globales. Los esfuerzos o reacciones de extremo son:

p_{AB} = esfuerzo axial en el extremo A de la barra AB

f_y^{AB} = esfuerzo cortante en el extremo A de la barra AB

m^{AB} = momento flector en el extremo A de la barra AB

f_x^{BA} = esfuerzo axial en el extremo B de la barra AB

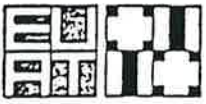
f_y^{BA} = esfuerzo cortante en el extremo B de la barra AB

m^{BA} = momento flector en el extremo B de la barra AB

La expresión (5.1.2) puede escribirse en forma más compacta:

$$[f]_L = [T^{AB}] \cdot [d]_G \quad (5.1.3)$$

A la matriz $[T^{AB}]$ la podemos llamar matriz de transformación de ejes de la barra AB, porque transforma los movimientos de los nudos A y B referidos a ejes globales en esfuerzos en A y en B respecto a ejes locales.

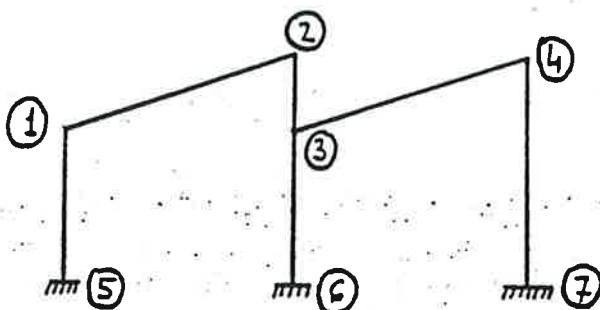


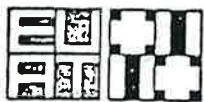
La matriz de transformación $dG-f_L$ de barra es una matriz cuadrada de 6×6 elementos, formada por cuatro submatrices:

$$\begin{aligned} [T_{AA}^{AB}] &= \begin{bmatrix} K_N^{AB} n_{xG} & K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ K_{DD}^{AB} t_{xG} & K_{DD}^{AB} t_{yG} & K_{GD}^{AB} \\ K_{GD}^{AB} t_{xG} & K_{GD}^{AB} t_{yG} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} & [T_{AB}^{AB}] &= \begin{bmatrix} -K_N^{AB} n_{xG} & -K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ -K_{DD}^{AB} t_{xG} & -K_{DD}^{AB} t_{yG} & K_{GD}^{AB} \\ -K_{GD}^{AB} t_{xG} & -K_{GD}^{AB} t_{yG} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \\ [T_{BA}^{AB}] &= \begin{bmatrix} -K_N^{AB} n_{xG} & -K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ -K_{DD}^{AB} t_{xG} & -K_{DD}^{AB} t_{yG} & -K_{GD}^{AB} \\ K_{GD}^{AB} t_{xG} & K_{GD}^{AB} t_{yG} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} & [T_{BB}^{AB}] &= \begin{bmatrix} K_N^{AB} n_{xG} & K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ K_{DD}^{AB} t_{xG} & K_{DD}^{AB} t_{yG} & -K_{GD}^{AB} \\ -K_{GD}^{AB} t_{xG} & -K_{GD}^{AB} t_{yG} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \quad (5.1.4) \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones (5.1.2) a todas las barras de la estructura de un modo ordenado, se obtiene la matriz de transformación $dG-f_L$ de la estructura, que nos proporciona los esfuerzos en los extremos de todas las barras de la estructura referidas a los ejes locales cuando se conocen los movimientos de todos los nudos en coordenadas globales.

Ejemplo: Sea la estructura



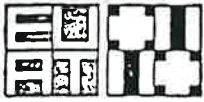


Las ecuaciones (5.1.2) escritas ordenadamente para todas las barras de la estructura, adoptan la forma:

	①	②	③	④	
$[f^{15}]$	$[T_{44}^{15}]$	0	0	0	$[d^{①}]$ $[d^{②}]$ $[d^{③}]$ $[d^{④}]$
$[f^{54}]$	$[T_{54}^{15}]$	0	0	0	
$[f^{12}]$	$[T_{41}^{12}]$	$[T_{12}^{12}]$	0	0	
$[f^{24}]$	$[T_{21}^{12}]$	$[T_{22}^{12}]$	0	0	
$[f^{23}]$	0	$[T_{22}^{23}]$	$[T_{23}^{23}]$	0	
$[f^{32}]$	0	$[T_{32}^{23}]$	$[T_{33}^{23}]$	0	
$[f^{34}]$	0	0	$[T_{33}^{34}]$	$[T_{34}^{34}]$	
$[f^{43}]$	0	0	$[T_{43}^{34}]$	$[T_{44}^{34}]$	
$[f^{36}]$	0	0	$[T_{33}^{36}]$	0	
$[f^{63}]$	0	0	$[T_{63}^{36}]$	0	
$[f^{47}]$	0	0	0	$[T_{44}^{47}]$	
$[f^{74}]$	0	0	0	$[T_{74}^{47}]$	

Abreviadamente: $[f]_L = [T] \cdot [d]_G$ (5.1.5)

donde $[T]$ es la matriz de transformación $d_G \rightarrow f_L$ de la estructura propuesta. El número de filas de la matriz $[T]$ es igual a $6 \cdot N_{\text{barras}}$, ya que hay 2 extremos por cada barra y 3 componentes de los esfuerzos en cada extremo. El número de columnas es igual al grado de libertad de la estructura, o sea, el número total de posibles movimientos en los nudos.



5.2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD . MATRIZ DE INCIDENCIA

Si en lugar de resolver el sistema de ecuaciones final de la estructura (4.6.3), se invirtiese la matriz de rigidez $[K]$, se tendría:

$$[F] = [K]^{-1} \quad (5.2.1)$$

A la inversa de la matriz de rigidez se le llama matriz de flexibilidad $[F]$.

$$\text{De (4.6.3) : } [d]_G = [K]^{-1} \cdot [P]_G = [F][P]_G \quad (5.2.2)$$

y sustituyendo (5.2.2) en (5.1.5):

$$[f]_L = [T] \cdot [d]_G = [T] \cdot [F] \cdot [P]_G \quad (5.2.3)$$

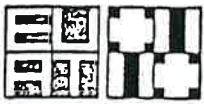
Al producto de la matriz de transformación d_G-f_L para toda la estructura y de la matriz de flexibilidad se le denomina matriz de incidencia $[I]$:

$$[I] = [T] \cdot [F]$$

y sustituyendo en (5.2.3):

$$\boxed{[f]_L = [I] \cdot [P]_G} \quad (5.2.4)$$

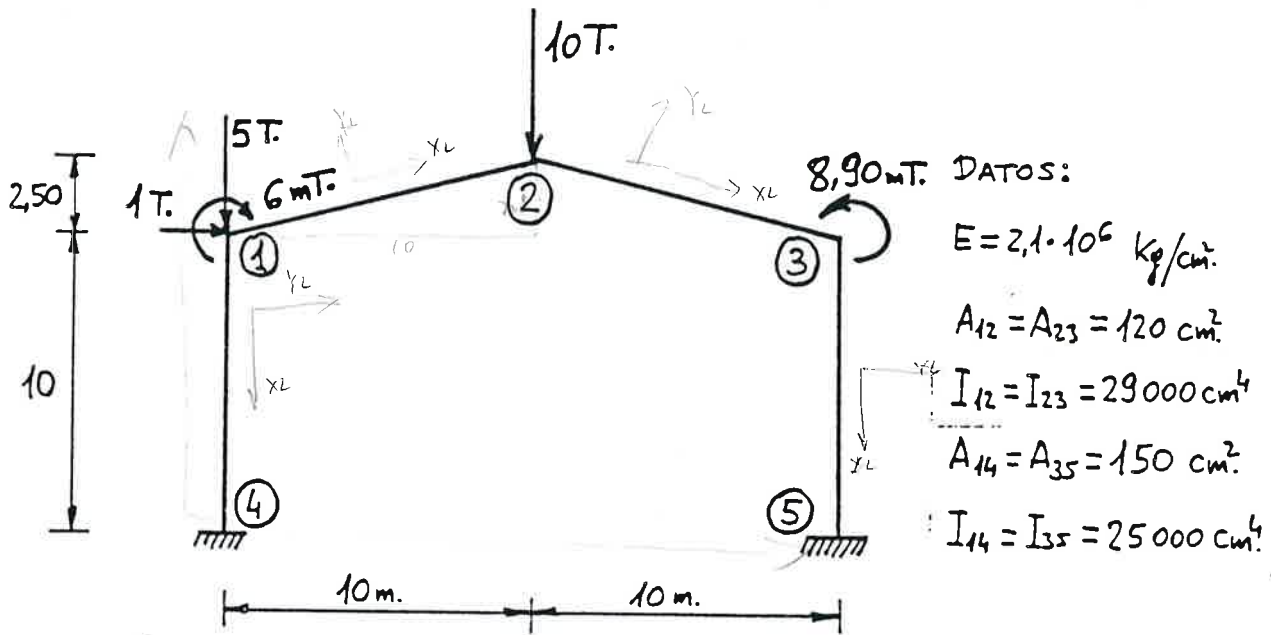
La matriz de incidencia sólo depende de la geometría de la estructura, de las condiciones de sustentación y de las características de los materiales que la forman; por lo que si se conoce $[I]$ la ecuación (5.2.4) proporciona los esfuerzos en los extremos de todas las barras para cada estado de cargas exteriores $[P]_G$.



53

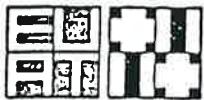
EJERCICIO 1

Sea el pórtico cruzado

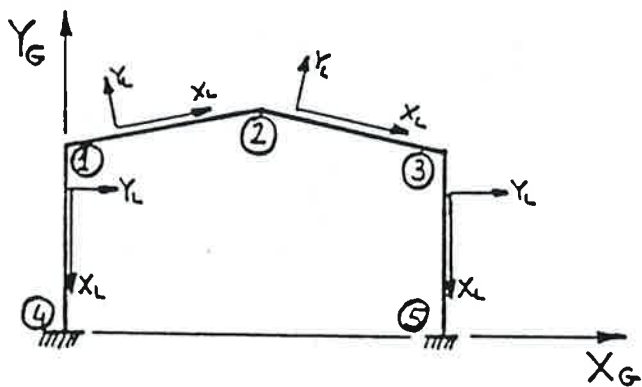


Hallar:

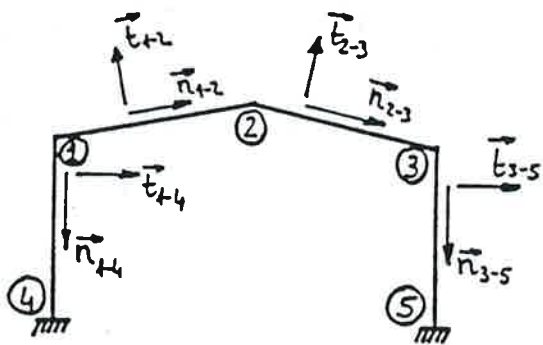
- 1- Matrices de rigidez de todas y cada una de las barras referidas a ejes locales.
- 2- Matrices de rigidez de todas y cada una de las barras referidas a ejes globales.
- 3- Matriz de rigidez de la estructura.
- 4- Desplazamientos de los nudos.
- 5- Matrices de transformación $d_G - f_L$ para cada barra.
- 6- Esfuerzos axiales, esfuerzos cortantes y momentos flectores en los extremos de cada barra.



La elección de nudo dorsal y frontal de cada barra puede hacerse arbitrariamente. Por sencillez, elegiremos como nudo dorsal el de menor numeración y como nudo frontal el de mayor numeración. Los ejes generales para toda la estructura y los locales para cada barra se indican en el siguiente esquema:

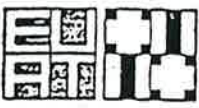


Los versores \vec{n} siguen la dirección positiva del eje local X



de cada barra, y los versores \vec{e} siguen la dirección positiva del eje local Y de cada barra. Sus componentes se refieren a los ejes generales.

Para la formación de las submatrices de barra y la matriz de rigidez de la estructura es aconsejable, desde el punto de vista práctico, ir elaborando los datos de acuerdo con el cuadro de la página siguiente.



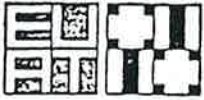
Rafael Marzo Lafuente

75

BARRAS	L_x (cm.)	L_y (cm.)	L (cm.)	A (cm. ²)	I (cm. ⁴)	n_{xG} L_x/L	n_{yG} L_y/L	t_{xG} $-n_{yG}$	t_{yG} n_{xG}
1-2	1000	250	1030,776	120	29000	0,9701	0,2425	-0,2425	0,9701
2-3	1000	-250	1030,776	120	29000	0,9701	-0,2425	0,2425	0,9701
1-4	0	-1000	1000	150	25000	0	-1	1	0
3-5	0	-1000	1000	150	25000	0	-1	1	0

BARRAS	$K_N = EA/L$	$K_{DD} = 12EI/L^3$	$K_{GD} = 6EI/L^2$	$K_{GG} = 4EI/L$	$K_{GD} = 2EI/L$	$K_N \cdot n_{yG}$	$K_N \cdot n_{xG}$	$K_N \cdot n_{yG}$	$K_N \cdot n_{xG}$	$K_N \cdot n_{yG}^2$
1-2	244476	667,276	343,906	$2,36327 \cdot 10^8$	$1,18163 \cdot 10^8$	237,166	237,166	59285,4	230075	14336,73
2-3	244476	667,276	343,906	$2,36327 \cdot 10^8$	$1,18163 \cdot 10^8$	237,166	237,166	-59285,4	230075	14336,73
1-4	315000	630	315000	$2,1 \cdot 10^8$	$1,05 \cdot 10^8$	0	0	-315000	0	315000
3-5	315000	630	315000	$2,1 \cdot 10^8$	$1,05 \cdot 10^8$	0	0	-315000	0	315000

BARRAS	$(K_N - K_{DD})n_{yG}$	$K_{DD} \cdot n_{xG}^2$	$K_{DD} \cdot n_{yG}^2$	$K_{GD} \cdot n_{xG}$	$K_{GD} \cdot n_{yG}$	$K_{DD} \cdot t_{xG}$	$K_{DD} \cdot t_{yG}$	$K_{GD} \cdot t_{xG}$	$K_{GD} \cdot t_{yG}$	$K_{GD} \cdot t_{xG}$	$K_{GD} \cdot t_{yG}$
1-2	57366	627,969	39,24	333,638	83409	-161,838	647,352	-83409	333,638	-83409	333,638
2-3	57366	627,969	39,24	333,638	-83409	161,838	647,352	83409	333,638	83409	333,638
1-4	0	0	630	0	-315000	630	0	315000	0	315000	0
3-5	0	0	630	0	-315000	630	0	315000	0	315000	0



SUBMATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1-2 :

a) Respecto a ejes locales (ver 3.8.3)

$$[K_{1-1}^{1-2}]_L = \begin{bmatrix} 2.44476E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & 6.67276E+02 & 3.43906E+05 \\ 0.00000E+00 & 3.43906E+05 & 2.36327E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K_{1-1}^{1-2}]_L = \begin{bmatrix} -2.44476E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & -6.67276E+02 & -3.43906E+05 \\ 0.00000E+00 & -3.43906E+05 & -1.18163E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K_{2-1}^{1-2}] = \begin{bmatrix} -2.44476E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & -6.67276E+02 & -3.43906E+05 \\ 0.00000E+00 & 3.43906E+05 & 1.18163E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K_{2-1}^{1-2}] = \begin{bmatrix} 2.44476E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & 6.67276E+02 & -3.43906E+05 \\ 0.00000E+00 & -3.43906E+05 & 2.36327E+08 \end{bmatrix}$$

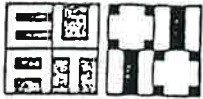
b) Respecto a ejes generales (ver 4.2.6)

$$[K_{1-1}^{1-2}]_G = \begin{bmatrix} 2.30134E+05 & 5.73667E+04 & -8.34094E+04 \\ 5.73667E+04 & 1.50090E+04 & 3.33638E+05 \\ -8.34094E+04 & 3.33638E+05 & 2.36327E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K_{1-1}^{1-2}]_G = \begin{bmatrix} -2.30134E+05 & -5.73667E+04 & 8.34094E+04 \\ -5.73667E+04 & -1.50090E+04 & -3.33638E+05 \\ 8.34094E+04 & -3.33638E+05 & -1.18163E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K_{2-1}^{1-2}]_G = \begin{bmatrix} -2.30134E+05 & -5.73667E+04 & 8.34094E+04 \\ -5.73667E+04 & -1.50090E+04 & -3.33638E+05 \\ -8.34094E+04 & 3.33638E+05 & 1.18163E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K_{2-1}^{1-2}]_G = \begin{bmatrix} 2.30134E+05 & 5.73667E+04 & -8.34094E+04 \\ 5.73667E+04 & 1.50090E+04 & -3.33638E+05 \\ 8.34094E+04 & -3.33638E+05 & 2.36327E+08 \end{bmatrix}$$



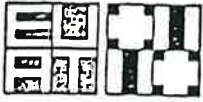
SUBMATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 2-3

a) Referidas a ejes locales

$[K_{12}^{13}]_L$	2.44476E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 6.67276E+02 3.43906E+05	0.00000E+00 3.43906E+05 2.36327E+08	-2.44476E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 -6.67276E+02 -3.43906E+05	0.00000E+00 3.43906E+05 1.18163E+08	$[K_{13}^{13}]_L$
$[K_{32}^{13}]_L$	-2.44476E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 6.67276E+02 3.43906E+05	0.00000E+00 -3.43906E+05 1.18163E+08	2.44476E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 6.67276E+02 -3.43906E+05	0.00000E+00 -3.43906E+05 2.36327E+08	$[K_{33}^{13}]_L$

b) Referidas a ejes globales

$[K_{12}^{13}]_G$	2.30134E+05 -5.73667E+04 8.34094E+04	-5.73667E+04 1.50090E+04 3.33638E+05	8.34094E+04 3.33638E+05 2.36327E+08	-2.30134E+05 5.73667E+04 -8.34094E+04	5.73667E+04 -1.50090E+04 -3.33638E+05	8.34094E+04 3.33638E+05 1.18163E+08	$[K_{13}^{13}]_G$
$[K_{32}^{13}]_G$	-2.30134E+05 5.73667E+04 8.34094E+04	5.73667E+04 -1.50090E+04 -3.33638E+05	-8.34094E+04 -3.33638E+05 1.18163E+08	2.30134E+05 -5.73667E+04 8.34094E+04	-5.73667E+04 1.50090E+04 -3.33638E+05	-8.34094E+04 3.33638E+05 2.36327E+08	$[K_{33}^{13}]_G$



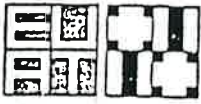
SUBMATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1-4

a) Referidas a ejes locales

$[K_{11}^L]$	3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	$[K_{11}^L]$
	0.00000E+00	6.30000E+02	3.15000E+05	0.00000E+00	-6.30000E+02	0.00000E+00	3.15000E+05	
	0.00000E+00	3.15000E+05	2.10000E+08	0.00000E+00	-3.15000E+05	0.00000E+00	1.05000E+08	
$[K_{44}^L]$	-3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	$[K_{44}^L]$
	0.00000E+00	-6.30000E+02	-3.15000E+05	0.00000E+00	6.30000E+02	0.00000E+00	-3.15000E+05	
	0.00000E+00	3.15000E+05	1.05000E+08	0.00000E+00	-3.15000E+05	0.00000E+00	2.10000E+08	

b) Referidas a ejes globales

$[K_{11}^G]$	6.30000E+02	0.00000E+00	3.15000E+05	-6.30000E+02	0.00000E+00	3.15000E+05	0.00000E+05	$[K_{11}^G]$
	0.00000E+00	3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	
	3.15000E+05	0.00000E+00	2.10000E+08	-3.15000E+05	0.00000E+00	1.05000E+08	0.00000E+08	
$[K_{44}^G]$	-6.30000E+02	0.00000E+00	-3.15000E+05	6.30000E+02	0.00000E+00	-3.15000E+05	0.00000E+05	$[K_{44}^G]$
	0.00000E+00	-3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	3.15000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	
	3.15000E+05	0.00000E+00	1.05000E+08	-3.15000E+05	0.00000E+00	2.10000E+08	0.00000E+08	



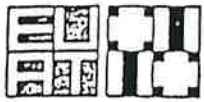
SUBMATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 3-5

a) Referidas a ejes locales

$[K_{33}]_L$	$\begin{bmatrix} 3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & 6.30000E+02 & 3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & 3.15000E+05 & 2.10000E+08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & -6.30000E+02 & 3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & -3.15000E+05 & 1.05000E+08 \end{bmatrix}$	$[K_{35}]_L$
$[K_{55}]_L$	$\begin{bmatrix} -3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & -6.30000E+02 & -3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & 3.15000E+05 & 1.05000E+08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 0.00000E+00 \\ 0.00000E+00 & 6.30000E+02 & -3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & -3.15000E+05 & 2.10000E+08 \end{bmatrix}$	$[K_{55}]_L$

b) Referidas a ejes globales

$[K_{33}]_G$	$\begin{bmatrix} 6.30000E+02 & 0.00000E+00 & 3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & 3.15000E+05 & 0.00000E+00 \\ 3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 2.10000E+08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6.30000E+02 & 0.00000E+00 & 3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & -3.15000E+05 & 0.00000E+00 \\ -3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 1.05000E+08 \end{bmatrix}$	$[K_{35}]_G$
$[K_{53}]_G$	$\begin{bmatrix} -6.30000E+02 & 0.00000E+00 & -3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & -3.15000E+05 & 0.00000E+00 \\ 3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 1.05000E+08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.30000E+02 & 0.00000E+00 & -3.15000E+05 \\ 0.00000E+00 & 3.15000E+05 & 0.00000E+00 \\ -3.15000E+05 & 0.00000E+00 & 2.10000E+08 \end{bmatrix}$	$[K_{55}]_G$



La ecuación matricial $[P]_G = [K_0] \cdot [d]_G$, o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} \text{Vector acciones} \\ \text{sobre los nudos} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \text{Matriz de rigidez com-} \\ \text{pleta de la estructura} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Vector movimientos} \\ \text{de los nudos} \end{bmatrix}_G$$

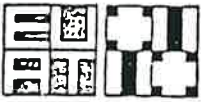
en este caso es:

	Matrix 1x5					Matrix 1x1
$[P_1]_G$	$[K_{11}^{12}]_G + [K_{11}^{14}]_G$	$[K_{12}^{12}]_G$	$[0]$	$[K_{14}^{14}]_G$	$[0]$	$[d_1]_G$
$[P_2]_G$	$[K_{21}^{12}]_G$	$[K_{22}^{12}]_G + [K_{22}^{23}]_G$	$[K_{23}^{23}]_G$	$[0]$	$[0]$	$[d_2]_G$
$[P_3]_G$	$[0]$	$[K_{32}^{23}]_G$	$[K_{33}^{23}]_G + [K_{33}^{35}]_G$	$[0]$	$[K_{35}^{35}]_G$	$[d_3]_G$
$[P_4]_G$	$[K_{41}^{14}]_G$	$[0]$	$[0]$	$[K_{44}^{14}]_G$	$[0]$	$[d_4]_G$
$[P_5]_G$	$[0]$	$[0]$	$[K_{53}^{35}]_G$	$[0]$	$[K_{55}^{35}]_G$	$[d_5]_G$
	1	2	3	4	5	

La matriz de rigidez completa es cuadrada de 15x15 elementos. Al imponer las condiciones de contorno (nulidad de movimientos en los nudos 4 y 5), se suprimen las filas 4 y 5 y las columnas 4 y 5, con lo que la matriz de rigidez final de la estructura será de 9x9 elementos, tal como era de esperar, ya que en la estructura propuesta hay tres nudos libres, lo que supone nueve movimientos posibles.

En la página siguiente se ha desarrollado la ecuación matricial final correspondiente a la estructura propuesta.





③

d_x^1	d_y^1	θ^1
d_x^2	d_y^2	θ^2
d_x^3	d_y^3	θ^3

↓
Incógnitas:
Vector movimientos
de los nudos libres

②

2.30764E+05	5.73667E+04	2.31591E+05	-2.30134E+05	-5.73667E+04	-8.34094E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5.73667E+04	3.30099E+05	3.33638E+05	-5.73667E+04	-1.50090E+04	3.33638E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.31591E+05	3.33638E+05	4.46327E+08	8.34094E+04	-3.33638E+05	1.18163E+08	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-2.30134E+05	-5.73667E+04	8.34094E+04	4.60269E+05	0.00000E+00	1.66819E+05	-2.30134E+05	5.73667E+04	8.34094E+04
-5.73667E+04	-1.50090E+04	-3.33638E+05	0.00000E+00	3.00179E+04	0.00000E+00	5.73667E+04	-1.50090E+04	3.33638E+05
-8.34094E+04	3.33638E+05	1.18163E+08	1.66819E+05	0.00000E+00	4.72653E+08	-8.34094E+04	-3.33638E+05	1.18163E+08
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.30134E+05	5.73667E+04	-8.34094E+04	2.30764E+05	-5.73667E+04	2.31591E+05
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	5.73667E+04	-1.50090E+04	-3.33638E+05	-5.73667E+04	3.30099E+05	-3.33638E+05
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	8.34094E+04	3.33638E+05	1.18163E+08	2.31591E+05	-3.33638E+05	4.46327E+08

↓
Coeficientes : Matriz de rigidez final de la estructura

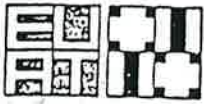
①

1000
-5000
-6.405
0
-10000
0
0
0
8.9.105

↓
Términos
independientes:
Vector cargas en nudos

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los movimientos de los nudos libres referidos a los ejes generales:

Nudo	δx (cm.)	δy (cm.)	Giro (rad.)
1	-1.2703530	-0.0314879	-0.0078459
2	1.0174140	-9.2725690	0.0002371
3	3.3088550	-0.0161312	0.0069436



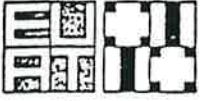
MATRICES DE TRANSFORMACION $d_6 - f_L$ DE CADA BARRA (ver 5.1.4)

a) BARRA 1-2

$[T_{11}^{12}]$	2.37177E+05 -1.61838E+02 -8.34094E+04	5.92941E+04 6.47352E+02 3.33638E+05	0.00000E+00 3.43906E+05 2.36327E+08	-2.37177E+05 1.61838E+02 8.34094E+04	-5.92941E+04 -6.47352E+02 -3.33638E+05	0.00000E+00 3.43906E+05 1.18163E+08	$[T_{12}^{12}]$
$[T_{21}^{12}]$	-2.37177E+05 1.61838E+02 -8.34094E+04	-5.92941E+04 -6.47352E+02 3.33638E+05	0.00000E+00 -3.43906E+05 1.18163E+08	2.37177E+05 -1.61838E+02 8.34094E+04	5.92941E+04 6.47352E+02 -3.33638E+05	0.00000E+00 -3.43906E+05 2.36327E+08	$[T_{22}^{12}]$

b) BARRA 2-3

$[T_{21}^{23}]$	2.37177E+05 1.61838E+02 8.34094E+04	-5.92941E+04 6.47352E+02 3.33638E+05	0.00000E+00 3.43906E+05 2.36327E+08	-2.37177E+05 -1.61838E+02 -8.34094E+04	5.92941E+04 -6.47352E+02 -3.33638E+05	0.00000E+00 3.43906E+05 1.18163E+08	$[T_{23}^{23}]$
$[T_{31}^{23}]$	-2.37177E+05 -1.61838E+02 8.34094E+04	5.92941E+04 -6.47352E+02 3.33638E+05	0.00000E+00 -3.43906E+05 1.18163E+08	2.37177E+05 1.61838E+02 -8.34094E+04	-5.92941E+04 6.47352E+02 -3.33638E+05	0.00000E+00 -3.43906E+05 2.36327E+08	$[T_{33}^{23}]$



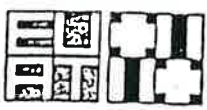
MATRICES DE TRANSFORMACION d_G-f_1 DE BARRA

c) BARRA 1-4

$[T_{11}^{14}]$	0.00000E+00 6.30000E+02 3.15000E+05	-3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 3.15000E+05 2.10000E+08	0.00000E+00 -6.30000E+02 -3.15000E+05	3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 3.15000E+05 1.05000E+08	$[T_{44}^{14}]$
$[T_{41}^{14}]$	0.00000E+00 -6.30000E+02 3.15000E+05	3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 -3.15000E+05 1.05000E+08	0.00000E+00 6.30000E+02 -3.15000E+05	-3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 -3.15000E+05 2.10000E+08	$[T_{44}^{14}]$

d) BARRA 3-5

$[T_{33}^{35}]$	0.00000E+00 6.30000E+02 3.15000E+05	-3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 3.15000E+05 2.10000E+08	0.00000E+00 -6.30000E+02 -3.15000E+05	3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 3.15000E+05 1.05000E+08	$[T_{35}^{35}]$
$[T_{53}^{35}]$	0.00000E+00 -6.30000E+02 3.15000E+05	3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 -3.15000E+05 1.05000E+08	0.00000E+00 6.30000E+02 -3.15000E+05	-3.15000E+05 0.00000E+00 0.00000E+00	0.00000E+00 -3.15000E+05 2.10000E+08	$[T_{55}^{35}]$

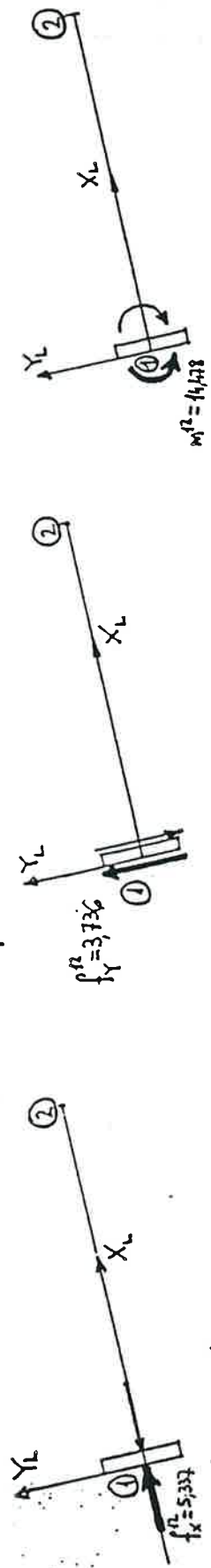


ESFUERZOS AXILES, ESFUERZOS CONTANTES Y MOMENTOS FLECTORES EN LOS EXTREMOS DE CADA BARRA.

Efectuando el producto de la matriz de transformacion de f_L de una barra por los movimientos, ya conocidos, de los extremos de esa barra (Ver S.1.2) se obtienen los esfuerzos de extremo de dicha barra:

BARRA		ESF. AXILES (T.)		ESF. CORTANTES (T.)		MOM. FLECTORES (MT)	
1	2	dorsal	frontal	dorsal	frontal	dorsal	frontal
1	2	5.337	-5.337	3.736	-3.736	14.478	24.029
2	3	5.377	-5.377	-3.894	3.894	-24.029	-16.104
3	4	9.919	-9.919	-3.272	3.272	-20.478	-12.240
4	5	5.081	-5.081	4.272	-4.272	25.004	17.714
A	B	f_{x}^{BA}	f_{x}^{AB}	f_{y}^{BA}	f_{y}^{AB}	M^{AB}	M^{BA}

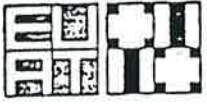
No olvidemos que estos esfuerzos estan referidos a ejes locales y, por lo tanto, el convenio de signos de los esfuerzos es el mismo que el de los ejes locales. Asi, por ejemplo, el extremo dorsal 1 de la barra 1-2 esta sometido a los siguientes esfuerzos:



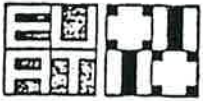
Esfuerzo axial = 5,337 T. (positivo)
por ser (+) sigue la direccion (+) de X_L
Por lo tanto: COMPRESION

Esfuerzo cortante = 3,736 T. (positivo)
por ser (+) sigue la direccion (+) de Y_L

Momento flector = 14,478 (positivo)
por ser (+) va en sentido contrario
a las agujas del reloj

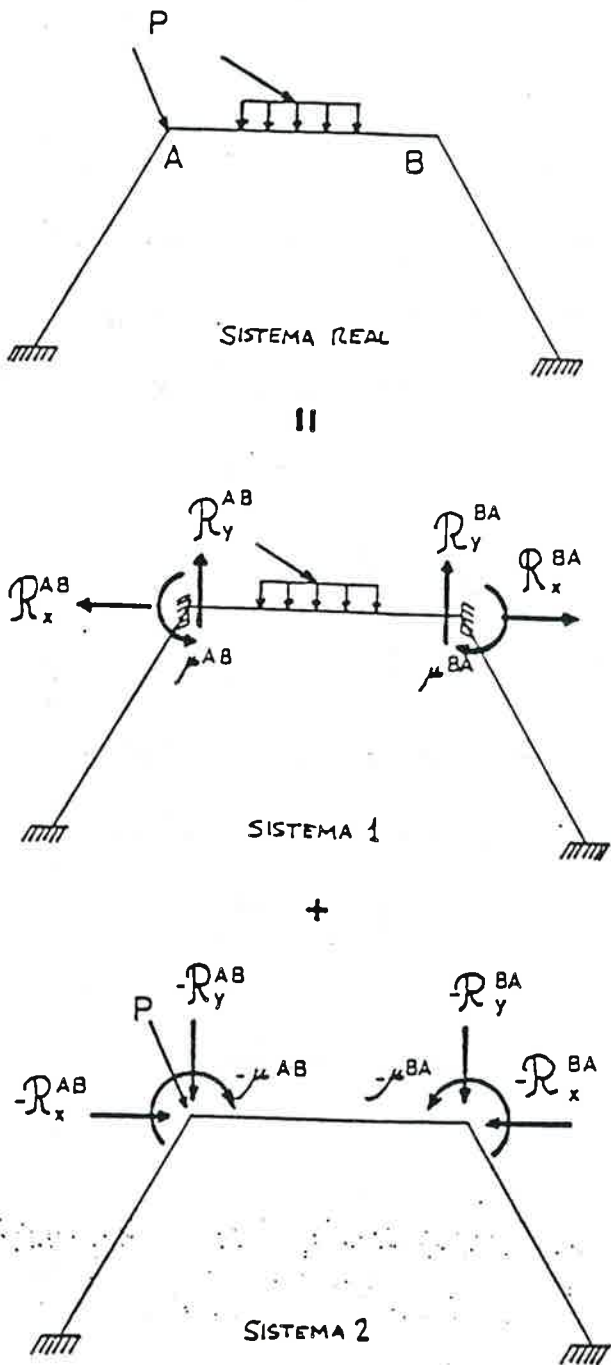


6. CARGAS APLICADAS EN BARRAS



6.1 CASO DE CARGAS APLICADAS DIRECTAMENTE SOBRE LAS BARRAS

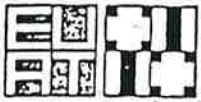
En el método desarrollado hasta aquí se ha supuesto que sobre el entramado sólo actuaban cargas en los nudos. Sin embargo, lo más frecuente es que las cargas estén aplicadas en las barras, en cuyo caso el sistema de cargas real se descompondrá en dos:



- SISTEMA 1, formado por las cargas reales aplicadas simultáneamente con un sistema de fuerzas y momentos sobre los nudos, de tal modo que impidan todo movimiento y giro de éstos. Estas fuerzas y momentos son las reacciones de empotramiento perfecto, y pueden calcularse barra por barra como si éstas fuesen independientes.

- SISTEMA 2, formado por pares y fuerzas actuando en los nudos. Sus valores son iguales y de signo contrario a los del sistema 1 (reacciones de empotramiento perfecto).

Es evidente que el sistema 1 más el sistema 2 equivalen al sistema real.



Por lo tanto, el cálculo matricial de una estructura sobre la que actúen cargas sobre las barras queda reducido al cálculo de esa misma estructura, pero sometida sólo a acciones sobre los nudos (SISTEMA 2), más el cálculo de cada barra sometida a sus cargas, pero considerando que sus extremos están perfectamente empotrados (SISTEMA 1).

Los movimientos de los nudos de la estructura vendrán dados exclusivamente por el cálculo del SISTEMA 2, ya que el SISTEMA 1 no presenta movimientos en los nudos. Sin embargo, para hallar los esfuerzos en cualquier barra se deberán sumar a los obtenidos en el cálculo del SISTEMA 2, los que provienen de la barra empotrada en sus extremos y actuando sobre ella las cargas reales.

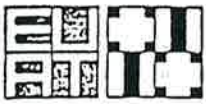
El proceso de cálculo a seguir en el caso de una estructura sometida a cargas en sus barras y en sus nudos, será:

- 1) Cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto en los extremos de todas las barras sobre las que haya cargas directamente aplicadas. Estas reacciones se refieren, desde luego, a ejes locales y se designarán genéricamente así:

$[R^{AB}]_L$ = vector de las reacciones de empotr. perfecto en el extremo A de AB

$[R^{BA}]_L$ = " " " " " " " " " " B " "

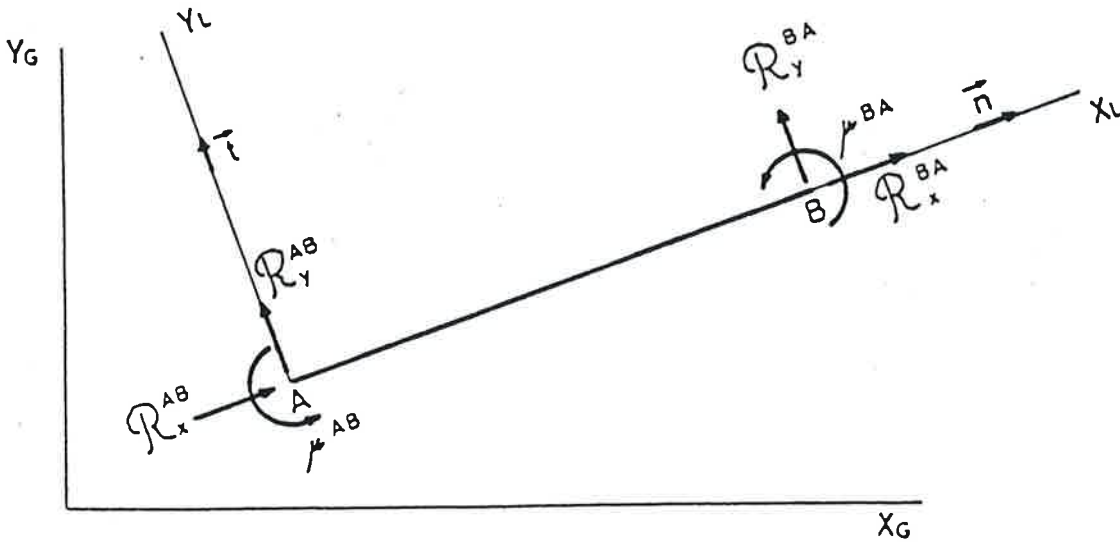
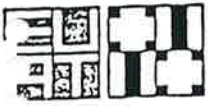
Sus componentes son:



$$\begin{bmatrix} R^{AB} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} R_x^{AB} \\ R_y^{AB} \\ \mu^{AB} \end{bmatrix}_L \quad \begin{bmatrix} R^{BA} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} R_x^{BA} \\ R_y^{BA} \\ \mu^{BA} \end{bmatrix}_L$$

Para efectuar el cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto lo más práctico es consultar un buen formulario, aunque el cálculo puede no ser tan trivial si las cargas presentan una cierta inclinación respecto al eje de la pieza. El apart. 6.2 se dedica precisamente al cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto respecto a los ejes locales de barra; en él se indica cómo efectuar la descomposición de las fuerzas actuantes en normales y axiales a la directriz de la barra. También se presenta un formulario con los casos más frecuentes de carga.

- 2) Cambio de las reacciones de empotramiento referidas a ejes locales por las reacciones de empotramiento perfecto referidas a ejes globales.



Si \vec{n} y \vec{t} son sendos versores que siguen la dirección de los ejes X_L y Y_L , respectivamente, y sus componentes respecto de los ejes globales son (n_{xG}, n_{yG}) y (t_{xG}, t_{yG}) , la matriz de rotación $[R]$ es:

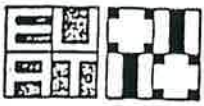
$$[R] = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xG} & -n_{yG} & 0 \\ n_{yG} & n_{xG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Según se vio anteriormente (4.1.2) $[R^{AB}]_G = [R][R^{AB}]_L$

$$[R^{BA}]_G = [R][R^{BA}]_L$$

y desarrollando:

$$\begin{bmatrix} R_x^{AB} \\ R_y^{AB} \\ \mu^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x^{AB} \\ R_y^{AB} \\ \mu^{AB} \end{bmatrix}_L \quad \begin{bmatrix} R_x^{BA} \\ R_y^{BA} \\ \mu^{BA} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x^{BA} \\ R_y^{BA} \\ \mu^{BA} \end{bmatrix}_L \quad (6.1.1)$$



3) Las acciones equivalentes de empotramiento perfecto aplicadas en un nudo genérico "I" $[A_I]_G$ son iguales a la suma, cambiada de signo, de las reacciones de empotramiento perfecto en los extremos I de todas las barras IJ, IK, IL, \dots, IN que coinciden en ese nudo:

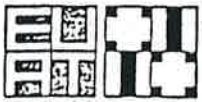
$$[R_I]_G = [R^{IJ}]_G + [R^{IK}]_G + [R^{IL}]_G + \dots + [R^{IN}]_G$$

$$[A_I]_G = -[R_I]_G \quad (6.1.2)$$

El conjunto de acciones equivalentes de empotramiento perfecto $[A]_G$ en todos y cada uno de los nudos de la estructura, más las cargas y momentos directamente aplicados en ellas, constituyen el SISTEMA 2 antes definido.

4) Los pasos anteriores 1), 2) y 3) han conducido al hallazgo de las acciones equivalentes de empotramiento perfecto $[A]$ aplicadas en los nudos.

Ahora hay que calcular los movimientos que sufren los nudos de la estructura cuando están sometidos al SISTEMA 2: acciones equivalentes de empotramiento perfecto más cargas y momentos exteriores aplicados directamente en los nudos. Este proceso ya ha sido descrito y conducirá al ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura y a la resolución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:



$$[P]_G + [A]_G = [K]_G \cdot [d]_G \quad (6.1.3)$$

5) Los esfuerzos de extremo de barra obtenidos según las ecuaciones (5.1.2) son el resultado del análisis de la estructura bajo el SISTEMA2 antes definido.

Para obtener los resultados correspondientes al sistema real, se deberán sumar a los esfuerzos calculados por las ecuaciones (5.1.2), los esfuerzos que produce el SISTEMA1, o sea las reacciones de empotramiento perfecto. Por lo tanto, los esfuerzos de extremo de barra definitivos, referidos a ejes locales, son:

$$\left. \begin{aligned} [f^{AB}]_L &= [T_{AA}^{AB}] [d_A]_G + [T_{AB}^{AB}] [d_B]_G + [R^{AB}]_L \\ [f^{BA}]_L &= [T_{BA}^{AB}] [d_A]_G + [T_{BB}^{AB}] [d_B]_G + [R^{BA}]_L \end{aligned} \right\} (6.1.4)$$

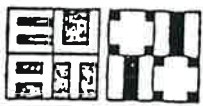
o bien, escrito de un modo compacto para toda la estructura:

$$[f]_L = [T] \cdot [d]_G + [R]_L \quad (6.1.5)$$

donde $[f]_L$ = vector de esfuerzos de extremo de todas las barras de la estructura, referido a ejes locales.

$[T]$ = matriz de transformación de f_L de toda la estructura.

$[d]_G$ = vector movimientos de los nudos desplazables de la estructura, referido a ejes globales.



$[R]_L$ = vector de reacciones de empotramiento perfecto en los extremos de todas las barras de la estructura, referido a ejes locales.

Si se hubiese invertido la matriz de rigidez, tendríamos la matriz de flexibilidad $[F] = [K]^{-1}$ y, de (6.1.3):

$$[d]_G = [K]^{-1} ([P]_G + [R]_G) = [F] ([P]_G + [R]_G)$$

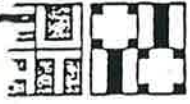
y sustituyendo en (6.1.5):

$$[f]_L = [T] [F] ([P]_G + [R]_G) + [R]_L$$

recordando que $[T] [F] = [I]$ = matriz de incidencia:

$$\boxed{[f]_L = [I] ([P]_G + [R]_G) + [R]_L} \quad (6.1.6)$$

Una vez conocida la matriz de incidencia, la expresión (6.1.6) proporciona los esfuerzos en los extremos de todas las barras, en función de las cargas exteriores directamente aplicadas en los nudos $[P]_G$ y de las cargas exteriores que actúan sobre las barras (acciones equivalentes de empotramiento perfecto $[R]_G$ y reacciones de empotramiento perfecto $[R]_L$).



6.2

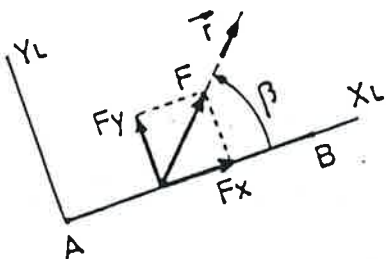
CÁLCULO DE LAS REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO RESPECTO A LOS EJES LOCALES DE BARRA $[R^{AB}]_L$ Y $[R^{BA}]_L$

El cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto cuando las cargas actuantes son perpendiculares a la barra (dirección Y_L) o siguen la dirección de la directriz (X_L) se lleva a cabo aplicando las fórmulas que se encuentran en cualquier prontuario.

Sin embargo, en el caso más general las cargas actúan sobre las barras según una determinada dirección que podemos definir por un vector \vec{r} de componentes r_x y r_y respecto a los ejes locales.

A continuación, tratamos de descomponer las cargas que siguen la dirección genérica \vec{r} en suma de cargas según los ejes X_L e Y_L :

1.º) CASO DE CARGAS PUNTUALES.



Sea \vec{r} la fuerza que actúa según la dirección \vec{r} . Conociendo

$$\vec{r} : [r]_L = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}_L$$

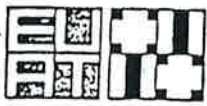
y el módulo de \vec{F} (\vec{F} sigue la dirección y el sentido de \vec{r}) es trivial

hallar F_x y F_y :

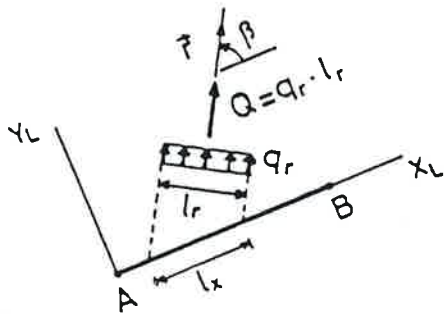
$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}_L = F \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}_L \quad (6.2.1)$$

2.º) CASO DE CARGAS UNIFORMEMENTE REPARTIDAS.

Se trata de transformar la carga unitaria q_r que actúa según la dirección \vec{r} y sobre una extensión l_r en la suma

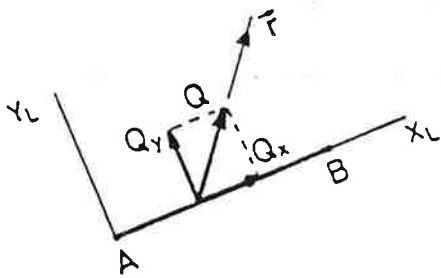


de q_x (según X_L y sobre una extensión l_x) y de q_y (según Y_L y sobre una extensión l_y).



$$l_x \cdot \text{sen } \beta = l_r \rightarrow l_r = r_y \cdot l_x$$

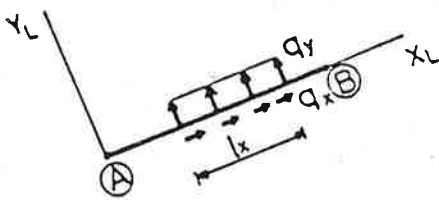
$$l_y = l_x \text{sen } \beta$$



$r_x = \cos \beta$

$$Q_x = r_x Q = r_x q_r l_r$$

$$Q_y = r_y Q = r_y q_r l_r$$



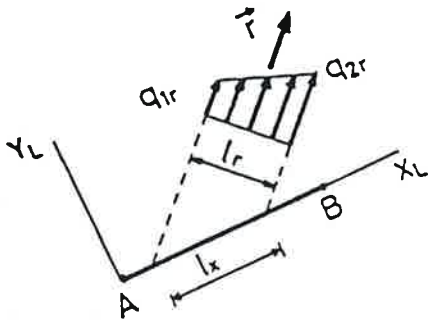
$$q_y = \frac{Q_y}{l_x} = \frac{r_y q_r l_r}{l_x} = \frac{r_y^2 q_r l_x}{l_x} = r_y^2 \cdot q_r$$

$$q_x = \frac{Q_x}{l_x} = \frac{r_x q_r l_r}{l_x} = \frac{r_x r_y q_r l_x}{l_x} = r_x r_y q_r$$

Se ha demostrado que

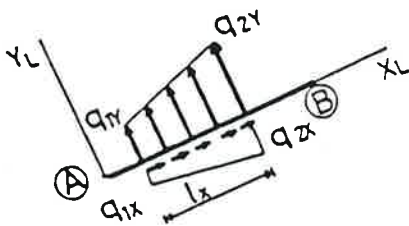
$$\boxed{\begin{aligned} q_y &= r_y^2 \cdot q_r \\ q_x &= r_x r_y q_r \end{aligned}} \quad (6.2.2)$$

3.º) CASO DE CARGAS TRAPEZIALES

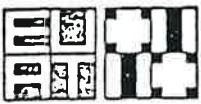


De (6.2.2) :

$$\begin{aligned}
 q_{1Y} &= r_Y^2 \cdot q_{1r} & q_{2Y} &= r_Y^2 \cdot q_{2r} \\
 q_{1X} &= r_X r_Y q_{1r} & q_{2X} &= r_X r_Y q_{2r}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.3}$$



Una vez que se han transformado las cargas que actúan sobre la barra según una dirección cualquiera, en cargas normales y axiales a la barra, el valor de las reacciones de empotramiento perfecto se halla en cualquier formulario. No obstante, también queda indicado en las páginas siguientes.

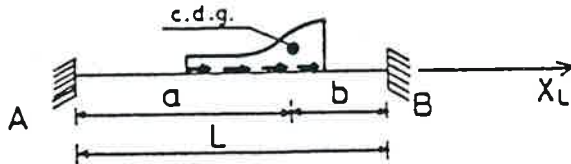


ACCIONES AXILES (SEGUN LA DIRETRIZ DE LA BARRA)

REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

Cualquier carga

$Q = \text{carga total}$

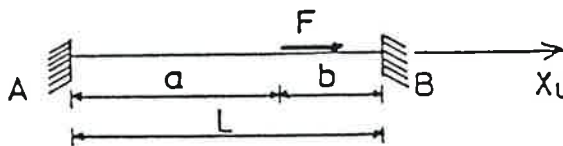


$$R_X^{AB} = -Q \frac{b}{L} \quad R_X^{BA} = -Q \frac{a}{L}$$

$$R_Y^{AB} = 0 \quad R_Y^{BA} = 0$$

$$\mu^{AB} = 0 \quad \mu^{BA} = 0$$

Carga puntual

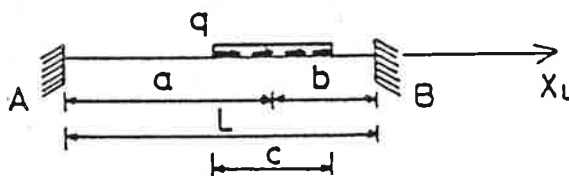


$$R_X^{AB} = -F \frac{b}{L} \quad R_X^{BA} = -F \frac{a}{L}$$

$$R_Y^{AB} = 0 \quad R_Y^{BA} = 0$$

$$\mu^{AB} = 0 \quad \mu^{BA} = 0$$

Carga uniformemente repartida

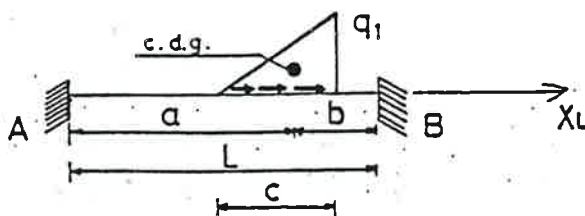


$$R_X^{AB} = -qc \frac{b}{L} \quad R_X^{BA} = -qc \frac{a}{L}$$

$$R_Y^{AB} = 0 \quad R_Y^{BA} = 0$$

$$\mu^{AB} = 0 \quad \mu^{BA} = 0$$

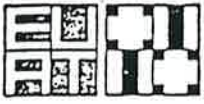
Carga triangular



$$R_X^{AB} = -\frac{1}{2} q_1 c \frac{b}{L} \quad R_X^{BA} = -\frac{1}{2} q_1 c \frac{a}{L}$$

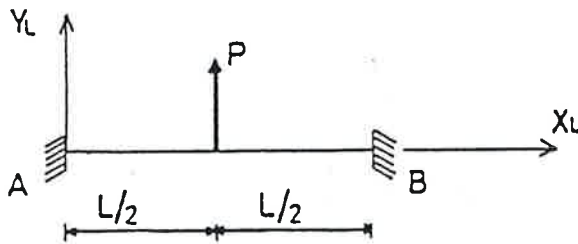
$$R_Y^{AB} = 0 \quad R_Y^{BA} = 0$$

$$\mu^{AB} = 0 \quad \mu^{BA} = 0$$



ACCIONES PERPENDICULARES A LA DIRECTRIZ DE LA BARRA

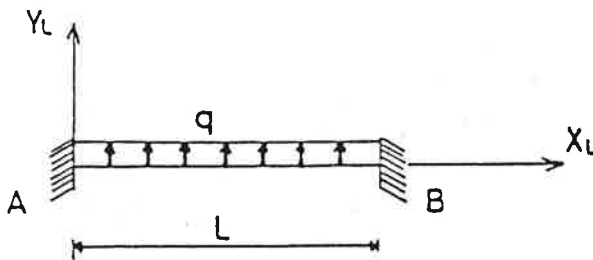
REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO



$$R_x^{AB} = 0 \quad R_x^{BA} = 0$$

$$R_y^{AB} = -\frac{P}{2} \quad R_y^{BA} = -\frac{P}{2}$$

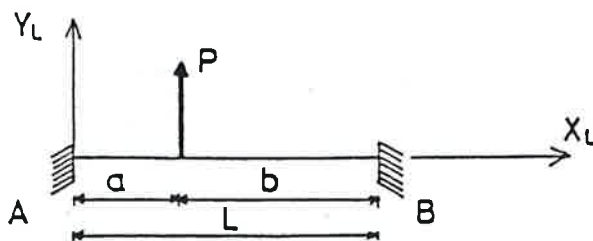
$$\mu^{AB} = -\frac{PL}{8} \quad \mu^{BA} = \frac{PL}{8}$$



$$R_x^{AB} = 0 \quad R_x^{BA} = 0$$

$$R_y^{AB} = -\frac{qL}{2} \quad R_y^{BA} = -\frac{qL}{2}$$

$$\mu^{AB} = -\frac{1}{12} qL^2 \quad \mu^{BA} = \frac{1}{12} qL^2$$

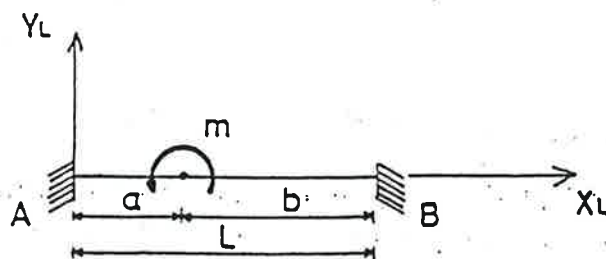


$$R_x^{AB} = 0$$

$$R_y^{AB} = -\frac{Pb}{L} + \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L}$$

$$R_y^{BA} = -\frac{Pa}{L} - \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L}$$

$$\mu^{AB} = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad \mu^{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

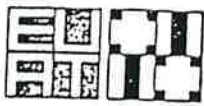


$$R_x^{AB} = 0 \quad R_x^{BA} = 0$$

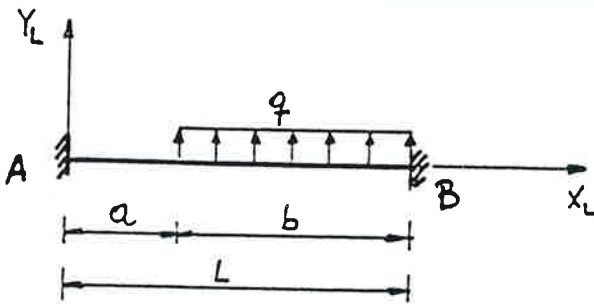
$$R_y^{AB} = \frac{m}{L} + \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L} \quad R_y^{BA} = -R_y^{AB}$$

$$\mu^{AB} = -m \frac{b}{L} \left(2 - 3 \frac{b}{L}\right)$$

$$\mu^{BA} = m \frac{a}{L} \left(2 - 3 \frac{a}{L}\right)$$



ACCIONES PERPENDICULARES A LA DIRECTRIZ DE LA BARRA

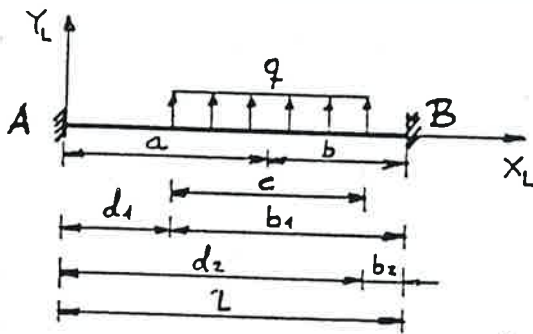


$$R_x^{AB} = 0$$

$$R_x^{BA} = 0$$

$$\mu^{AB} = -\frac{qb^3}{12L^2}(L+3a) ; \mu^{BA} = \frac{qb^2}{12}\left(\frac{6a}{L} + \frac{3b^2}{L^2} - \frac{2b}{L}\right)$$

$$R_y^{AB} = -\frac{qb^2}{2L} + \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L} ; R_y^{BA} = -\frac{qb}{L}\left(a + \frac{b}{2}\right) - \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L}$$



$$R_x^{AB} = 0$$

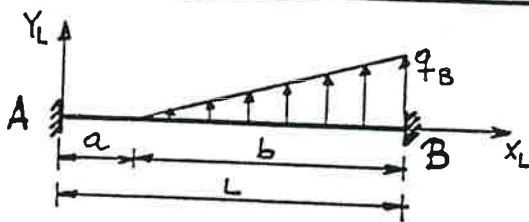
$$R_x^{BA} = 0$$

$$R_y^{AB} = -\frac{qbc}{L} + \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L}$$

$$R_y^{BA} = -\frac{qac}{L} - \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L}$$

$$\mu^{AB} = -\frac{q}{12L^2} [b_1^3(L+3d_1) - b_2^3(L+3d_2)]$$

$$\mu^{BA} = \frac{q}{12L^2} [d_2^3(L+3b_2) - d_1^3(L+3b_1)]$$



$$R_x^{AB} = 0$$

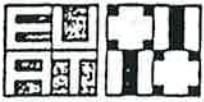
$$R_x^{BA} = 0$$

$$R_y^{AB} = -\frac{q_B b^2}{6L} + \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L}$$

$$R_y^{BA} = -\frac{q_B b}{2L}\left(a + \frac{2}{3}b\right) - \frac{\mu^{AB} + \mu^{BA}}{L}$$

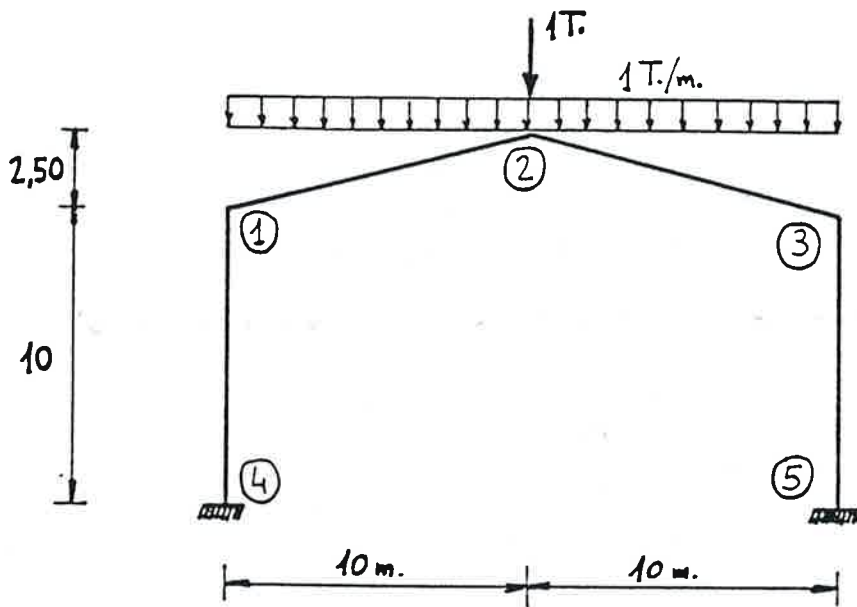
$$\mu^{AB} = -\frac{q_B b^3}{60L}\left(5 - 3\frac{b}{L}\right)$$

$$\mu^{BA} = \frac{q_B b^2}{60}\left(\frac{10a}{L} + \frac{3b^2}{L^2}\right)$$



6.3 EJERCICIO 2

Sea el pórtico croquizado



DATOS:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{12} = A_{23} = 120 \text{ cm}^2$$

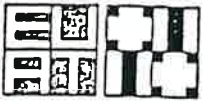
$$I_{12} = I_{23} = 29000 \text{ cm}^4$$

$$A_{44} = A_{35} = 150 \text{ cm}^2$$

$$I_{44} = I_{35} = 25000 \text{ cm}^4$$

Hallar:

- 1 - Vector cargas en nudos.
- 2 - Desplazamientos de los nudos.
- 3 - Esfuerzos axiales, esfuerzos cortantes y momentos flectores en los extremos de cada barra.



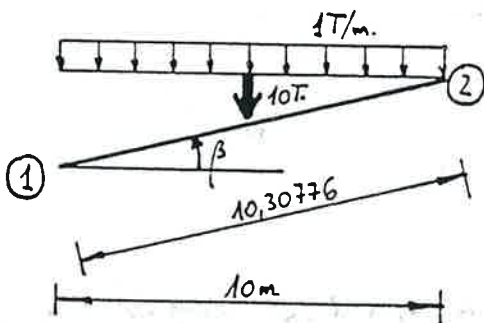
Se trata del mismo pórtico que en el ejercicio 1, por lo que elegiremos los mismos ejes locales y ejes generales. Las matrices de rigidez de cada barra y de la estructura serán las ya encontradas en dicho ejercicio 1.

La novedad consiste en el sistema de cargas: aquí actúan cargas sobre las barras (uniformemente repartida y con una cierta inclinación en las barras 1-2 y 2-3) y sobre un nudo (carga de 1T. en el nudo 2). Para plantear la ecuación matricial final, necesitaremos el vector de cargas sobre nudos, cuyo cálculo no es tan inmediato, puesto que previamente se han de hallar las acciones equivalentes de empotramiento perfecto. De acuerdo con 6.1 el proceso a seguir es:

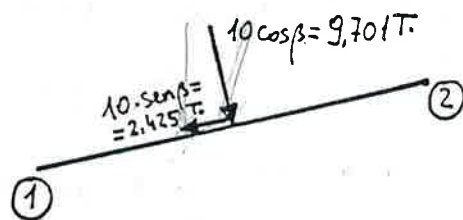
1) CÁLCULO DE $[R^{AB}]_L$ y $[R^{BA}]_L$ EN TODAS LAS BARRAS CARGADAS

Las barras que soportan cargas son la 1-2 y la 2-3.

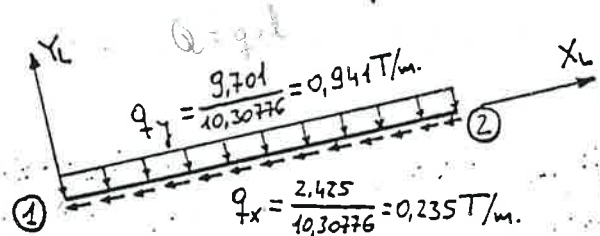
Barra 1-2

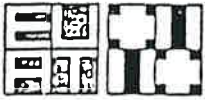


equivale a:



Las acciones repartidas axiales y normales a la directriz son, pues:





Las reacciones de empotramiento correspondientes son (formulario 6.2):

$$R_x^{12} = 0,235 \frac{10,30776}{2} = 1,2125 \text{ T.}$$

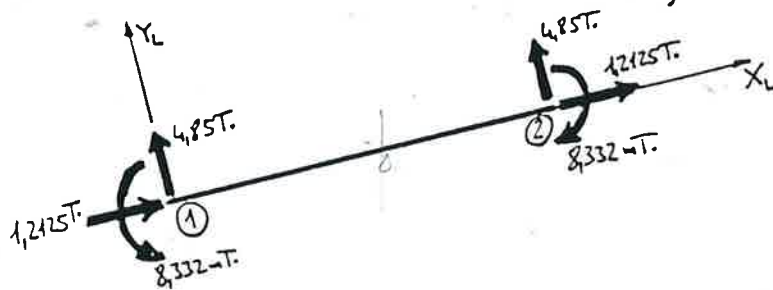
$$R_x^{21} = 1,2125 \text{ T.}$$

$$R_y^{12} = \frac{0,944 \cdot 10,30776}{2} = 4,85 \text{ T.}$$

$$R_y^{21} = 4,85 \text{ T.}$$

$$\mu^{12} = \frac{1}{12} 0,944 \cdot 10,30776^2 = 8,332 \text{ mT.}$$

$$\mu^{21} = -8,332 \text{ mT.}$$



Barra 2-3

Las reacciones de empotramiento perfecto de la barra 2-3 se deducen por simetría respecto a la 1-2:

$$R_x^{23} = -1,2125 \text{ T.}$$

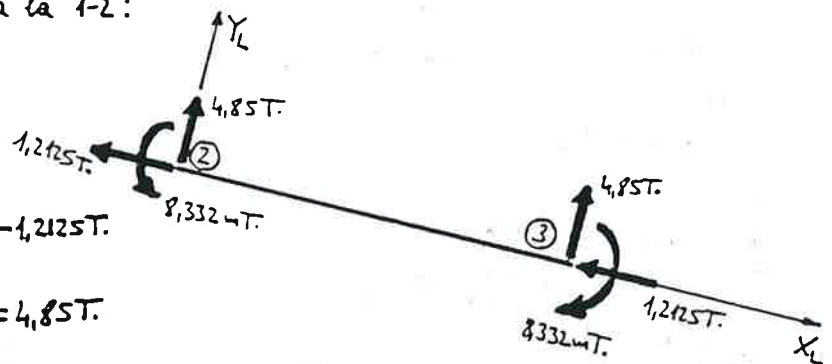
$$R_x^{32} = -1,2125 \text{ T.}$$

$$R_y^{23} = 4,85 \text{ T.}$$

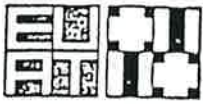
$$R_y^{32} = 4,85 \text{ T.}$$

$$\mu^{23} = 8,332 \text{ mT.}$$

$$\mu^{32} = -8,332 \text{ mT.}$$



En las barras 1-4 y 3-5 las reacciones de empotramiento perfecto son nulas, ya que no actúan cargas sobre ellas.



2) CAMBIO A EJES GLOBALES

Para poder sumar las reacciones de empotramiento perfecto en todos los extremos de las barras que coinciden en el mismo nudo, se han de referir al mismo sistema de ejes: el global.

Barra 1-2

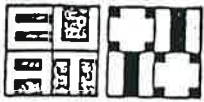
$$[R] = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9701 & -0,2425 & 0 \\ 0,2425 & 0,9701 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^{12} \\ R_y^{12} \\ \mu^{12} \end{bmatrix}_G = [R] \cdot \begin{bmatrix} 1,2125 \\ 4,85 \\ 8,332 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8,332 \end{bmatrix} ; \text{analogamente } \begin{bmatrix} R_x^{21} \\ R_y^{21} \\ \mu^{21} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8,332 \end{bmatrix}$$

Barra 2-3

$$[R] = \begin{bmatrix} 0,9701 & 0,2425 & 0 \\ -0,2425 & 0,9701 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^{23} \\ R_y^{23} \\ \mu^{23} \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} -1,2125 \\ 4,85 \\ 8,332 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8,332 \end{bmatrix} ; \text{analogamente } \begin{bmatrix} R_x^{32} \\ R_y^{32} \\ \mu^{32} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8,332 \end{bmatrix}$$



3) ACCIONES EQUIVALENTES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

$$[R_1]_G = [R^{12}]_G + [R^{14}]_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8,332 \end{bmatrix}; [R_3]_G = [R^{12}]_G + [R^{15}]_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8,332 \end{bmatrix}$$

$$[R_2]_G = [R^{21}]_G + [R^{23}]_G = \begin{bmatrix} 0+0 \\ 5+5 \\ -8,332+8,332 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[R]_G = -[R]_G = \begin{bmatrix} [R_1]_G \\ [R_2]_G \\ [R_3]_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \\ -8,332 \cdot 10^5 \\ \hline 0 \\ -10000 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -5000 \\ 8,332 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

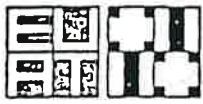
Nota. Las fuerzas se han pasado de T. a Kp.
y los momentos de mT. a cmKp.

4) ECUACION MATRICIAL FINAL DE LA ESTRUCTURA Y RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES.

Para obtener el vector cargas en nudos se han de sumar las cargas que efectivamente estén aplicadas en los nudos a las acciones equivalentes de empotramiento perfecto:

$$[P]_G + [R]_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -1000 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \\ -8,332 \cdot 10^5 \\ \hline 0 \\ -10000 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -5000 \\ 8,332 \cdot 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \\ -8,332 \cdot 10^5 \\ \hline 0 \\ -11000 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -5000 \\ 8,332 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

La ecuación matricial final de la estructura es:



$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \\ -8,332 \cdot 10^5 \\ 0 \\ -11000 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \\ 8,332 \cdot 10^5 \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} d_x^1 \\ d_y^1 \\ \theta^1 \\ d_x^2 \\ d_y^2 \\ \theta^2 \\ d_x^3 \\ d_y^3 \\ \theta^3 \end{bmatrix}$$

donde $[K]$ es la misma matriz de rigidez final que la del ejercicio 1 (pág. 5.15)

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los movimientos de los nudos libres referidos a los ejes generales:

Nudo	δx (cm.)	δy (cm.)	Giro (rad.)
1	-2.5832550	-0.0333368	-0.0083205
2	0.0000424	-10.4585300	0.0000000
3	2.5833420	-0.0333299	0.0083205

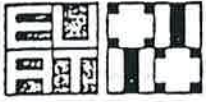
5) ESFUERZOS AXILES, ESFUERZOS CORTANTES Y MOMENTOS FLECTORES EN LOS EXTREMOS DE CADA BARRA.

Para hallar los esfuerzos de extremo en una barra se habrá de multiplicar la matriz de transformación d_g - f_L de esa barra por los movimientos, ya conocidos, de los extremos de dicha barra y sumarle el vector de reacciones de empotramiento perfecto, según se indica en 6.1.4.

Recordemos que las matrices de transformación d_g - f_L para este ejercicio son las mismas que las del ejercicio 1 (págs. 5.16 y 5.17)

En la página siguiente se efectúa la aplicación de las ecuaciones

6.1.4. a las 4 barras de la estructura propuesta.



Para la barra 1-2 :

$$\begin{bmatrix} p_{12} \\ f_x \\ f_y \\ m_{12} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} -2,583 \\ -0,033 \\ -0,0083 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{12} \\ T_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2125 \cdot 10^5 \\ 4,185 \cdot 10^3 \\ 8,332 \cdot 10^5 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} p_{21} \\ f_x \\ f_y \\ m_{21} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} -2,583 \\ -0,033 \\ -0,0083 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21} \\ T_{21} \\ T_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2125 \cdot 10^5 \\ 4,185 \cdot 10^3 \\ 8,332 \cdot 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la barra 2-3 :

$$\begin{bmatrix} p_{23} \\ f_x \\ f_y \\ m_{23} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ -10,458 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{23} \\ T_{23} \\ T_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,583 \\ -0,033 \\ 0,0083 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1212,5 \\ 4850 \\ 8,332 \cdot 10^5 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} p_{32} \\ f_x \\ f_y \\ m_{32} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ -10,458 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{32} \\ T_{32} \\ T_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,583 \\ -0,033 \\ 0,0083 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1212,5 \\ 4850 \\ 8,332 \cdot 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la barra 1-4 :

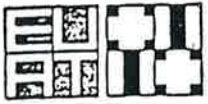
$$\begin{bmatrix} p_{14} \\ f_x \\ f_y \\ m_{14} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} -2,583 \\ -0,033 \\ -0,0083 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{14} \\ T_{14} \\ T_{14} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,583 \\ -0,033 \\ -0,0083 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la barra 3-5 :

$$\begin{bmatrix} p_{35} \\ f_x \\ f_y \\ m_{35} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} -3,5 \\ -0,033 \\ 0,0083 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{35} \\ T_{35} \\ T_{35} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,583 \\ -0,033 \\ 0,0083 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los esfuerzos de extremo de barra resultan ser:

Barra	Nudo	ESF. AXIALES (T.)		ESF. CORTANTES (T.)		MOM. FLECTORES (mT)	
		dorsal	frontal	dorsal	frontal	dorsal	frontal
1	1	6.668	-4.243	9.157	0.544	25.610	18.768
2	2	4.243	-6.668	0.546	9.155	-18.768	-25.611
3	1	10.501	-10.501	-4.248	4.248	-25.610	-16.874
4	3	10.499	-10.499	4.248	-4.248	25.611	16.874



7.

ESTRUCTURAS CON BARRAS ARTICULADAS

7.1 BARRAS CON NUDOS ARTICULADOS

Hasta aquí hemos analizado únicamente entramados de nudos rígidos. Es frecuente, sin embargo, la existencia de estructuras en las que la totalidad de sus barras o alguna de ellas se hallen articuladas.

Así, la estructura de la figura 7.1.1. presenta la totalidad de sus

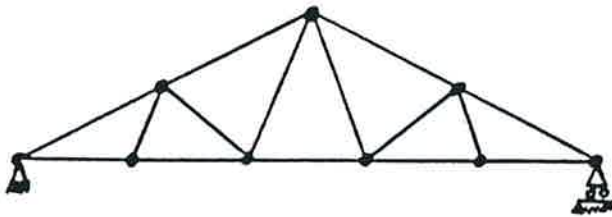


Fig. 7.1.1

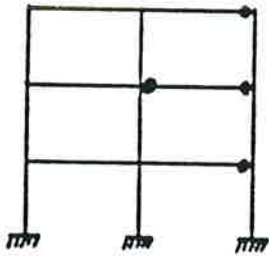


Fig. 7.1.2

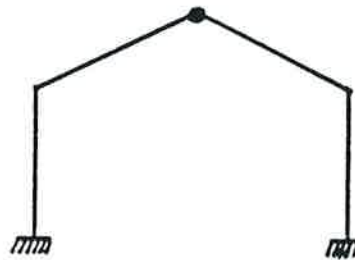
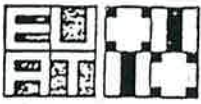


Fig. 7.1.3

nudos articulados, tratándose de una celosía plana de nudos articulados. En las estructuras de las figuras 7.1.2 y 7.1.3 existen nudos rígidos y articulaciones.

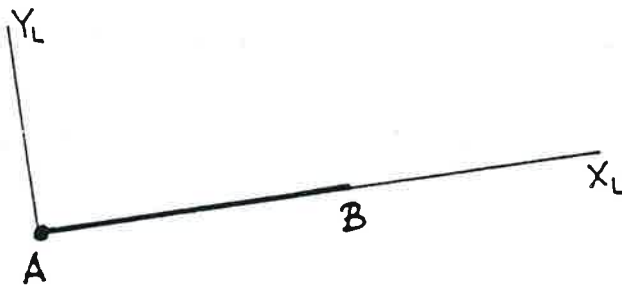
Vamos a estudiar a continuación las modificaciones que es preciso realizar en el proceso de cálculo de una estructura cuando existan barras con extremos articulados.



7.2 CASO DE BARRAS CON EL NUDO DORSAL ARTICULADO

Recordemos que la característica esencial de una articulación en el extremo de una barra es que ésta puede girar libremente en ese extremo (e independientemente del resto de las barras que concurren al mismo nudo) y que, por lo tanto, el momento flector en el extremo articulado es nulo.

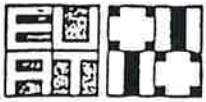
Sea la barra AB, cuyo nudo dorsal A presenta una articulación:



Si siguiéramos el razonamiento (3.8) que conduce a la matriz de rigidez de barra, pero partiendo de las rigideces de la barra articulada (2.3), llegaríamos a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix}
 P_{AB} \\
 f_x \\
 f_y \\
 m_{AB} \\
 P_{BA} \\
 f_x \\
 f_y \\
 m_{BA}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 K_N^{AB} & 0 & 0 & -K_N^{AB} & 0 & 0 \\
 0 & K_{DD}^{AB} & 0 & 0 & -K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -K_N^{AB} & 0 & 0 & K_N^{AB} & 0 & 0 \\
 0 & -K_{DD}^{AB} & 0 & 0 & K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\
 0 & K_{GD}^{AB} & 0 & 0 & -K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 d_x^{AB} \\
 d_y^{AB} \\
 \theta^{AB} \\
 d_x^{BA} \\
 d_y^{BA} \\
 \theta^{BA}
 \end{bmatrix}$$

(7.2.1)



donde la matriz cuadrada de 6×6 elementos es la matriz de rigidez de la barra AB, cuyo nudo dorsal A está articulado.

Nótese que todos los elementos de la fila 3ª y de la columna 3ª son nulos, como consecuencia de la nulidad del momento flector m^{AB} , forzada por la articulación en A.

Recordemos que para barras rectas de sección constante y en caso de flexión simétrica los coeficientes de rigidez son:

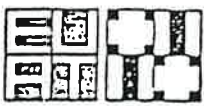
$$k_{GG} = \frac{3EI}{L} \quad k_{GD} = \frac{3EI}{L^2} \quad k_{DD} = \frac{3EI}{L^3}$$

Las submatrices de rigidez de barra en ejes locales son:

$$\left. \begin{aligned} [K_{AA}^L] &= \begin{bmatrix} k_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & k_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L & [K_{AB}^L] &= \begin{bmatrix} -k_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DD}^{AB} & k_{GD}^{AB} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L \\ [K_{BA}^L] &= \begin{bmatrix} -k_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & k_{GD}^{AB} & 0 \end{bmatrix}_L & [K_{BB}^L] &= \begin{bmatrix} k_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & k_{DD}^{AB} & -k_{GD}^{AB} \\ 0 & -k_{GD}^{AB} & k_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L \end{aligned} \right\} (7.2.2)$$

Las submatrices de rigidez de una barra articulada en su extremo dorsal A, respecto a los ejes globales (ver 4.2.4) son:

$$\left. \begin{aligned} [K_{AA}^G] &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & k_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [K_{AB}^G] &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DD}^{AB} & k_{GD}^{AB} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (7.2.3)$$



$$\begin{bmatrix} K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & k_{GD}^{AB} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & k_{DD}^{AB} & -k_{GD}^{AB} \\ 0 & -k_{GD}^{AB} & k_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.3)$$

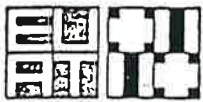
Efectuando los productos, y recordando que $t_{xG} = -n_{yG}$ y $t_{yG} = n_{xG}$, queda:

$$\begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k_N^{AB} n_{xG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_N^{AB} n_{yG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} K_{AB}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -k_N^{AB} n_{xG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_N^{AB} n_{yG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & k_{GD}^{AB} n_{xG} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

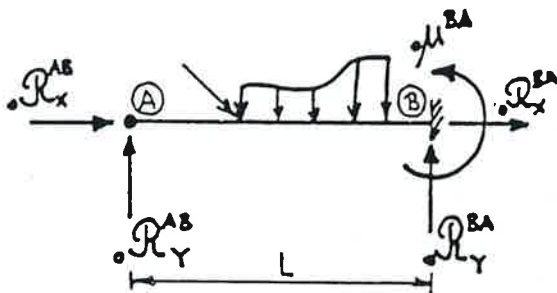
$$\begin{bmatrix} K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -k_N^{AB} n_{xG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline -(k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_N^{AB} n_{yG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & 0 \\ \hline -k_{GD}^{AB} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{xG} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k_N^{AB} n_{xG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline (k_N^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_N^{AB} n_{yG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & -k_{GD}^{AB} n_{xG} \\ \hline k_{GD}^{AB} n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{xG} & k_{GG}^{AB} \\ \hline \end{array} \quad (7.2.4)$$



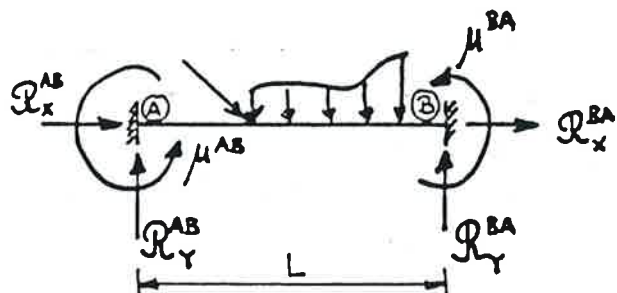
El ensamblaje de la matriz de rigidez se llevará a cabo del mismo modo que en el caso de entramados de nudos rígidos, tal como se ha expuesto en el apartado 4.4.

El cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto en los casos de barras que presenten articulaciones y sobre las cuales actúen directamente cargas, deberá realizarse considerando la viga articulada-empotrada (fig. 7.2.1).



BARRA ARTICULADA-EMPOTRADA

figura 7.2.1



BARRA BIEMPOTRADA

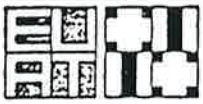
figura 7.2.2

Los valores de R_x^{AB} y R_x^{BA} son iguales a R_x^{AB} y R_x^{BA} , respectivamente. Los valores de mu^{BA} , R_y^{AB} y R_y^{BA} se encontrarán en un formulario, pero si no se dispone de él, pueden deducirse a partir de mu^{AB} y mu^{BA} de la viga biempotrada (fig. 7.2.2) sometida al mismo estado de cargas, recordando que:

$$\mu^{BA} = \mu^{BA} - \frac{\mu^{AB}}{2} \quad (7.2.5)$$

y, a partir de mu^{BA} se obtienen R_y^{AB} y R_y^{BA} :

$$R_y^{AB} = R_{y(isost.)}^{AB} + \frac{\mu^{BA}}{L} \quad \} \quad R_y^{BA} = R_{y(isost.)}^{BA} - \frac{\mu^{BA}}{L}$$



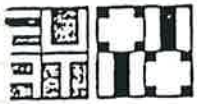
Una vez conocidos los movimientos de los nudos de la estructura, el cálculo de los esfuerzos de extremo de barra, se llevará a cabo del modo que ya se desarrolló en 5.1, pero modificando las submatrices de transformación de g - f_L de barra, con objeto de tener en cuenta la articulación en el nudo dorsal A:

$$\begin{bmatrix} T_{AA}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N^{AB} n_{xG} & K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ K_{DD}^{AB} t_{xG} & K_{DD}^{AB} t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{AB}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_N^{AB} n_{xG} & -K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ -K_{DD}^{AB} t_{xG} & -K_{DD}^{AB} t_{yG} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

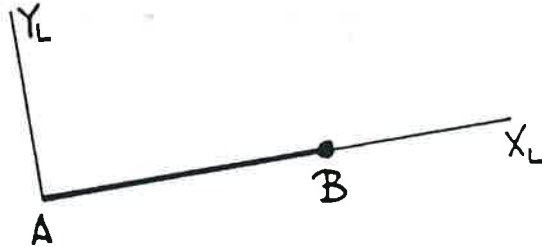
$$\begin{bmatrix} T_{BA}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_N^{AB} n_{xG} & -K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ -K_{DD}^{AB} t_{xG} & -K_{DD}^{AB} t_{yG} & 0 \\ K_{GD}^{AB} t_{xG} & K_{GD}^{AB} t_{yG} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{BB}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N^{AB} n_{xG} & K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ K_{DD}^{AB} t_{xG} & K_{DD}^{AB} t_{yG} & -K_{GD}^{AB} \\ -K_{GD}^{AB} t_{xG} & -K_{GD}^{AB} t_{yG} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix} \quad (7.2.6)$$



7.3 CASO DE BARRAS CON EL NUDO FRONTAL ARTICULADO

Sea la barra AB, cuyo nudo frontal B está articulado:



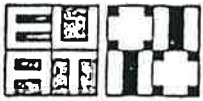
La ecuación matricial (3.8.1) modificada por la articulación en B es:

$$\begin{bmatrix} f_x^{AB} \\ f_y^{AB} \\ m^{AB} \\ f_x^{BA} \\ f_y^{BA} \\ m^{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N^{AB} & 0 & 0 & -K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} & 0 & -K_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} & 0 & -K_{GD}^{AB} & 0 \\ -K_N^{AB} & 0 & 0 & K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} & 0 & K_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x^{AB} \\ d_y^{AB} \\ \theta^{AB} \\ d_x^{BA} \\ d_y^{BA} \\ \theta^{BA} \end{bmatrix}$$

(7.3.1)

donde la matriz cuadrada de 6x6 elementos es la matriz de rigidez de la barra AB, cuyo nudo frontal B está articulado.

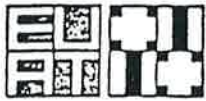
Las submatrices de rigidez de la barra AB, que presenta una articulación en el nudo frontal son:



$$\left. \begin{aligned}
 [K_{AA}^L]_{AB} &= \begin{bmatrix} K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L & [K_{AB}^L]_{AB} &= \begin{bmatrix} -K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & -K_{GD}^{AB} & 0 \end{bmatrix}_L \\
 [K_{BA}^L]_{AB} &= \begin{bmatrix} -K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L & [K_{BB}^L]_{AB} &= \begin{bmatrix} K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L
 \end{aligned} \right\} (7.3.2)$$

Las submatrices de rigidez de una barra AB, articulada en su extremo frontal B, referidas a los ejes generales (ver el apartado 4.2.4) son:

$$\begin{aligned}
 [K_{AA}^G]_{AB} &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & K_{GD}^{AB} \\ 0 & K_{GD}^{AB} & K_{GG}^{AB} \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [K_{AB}^G]_{AB} &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & -K_{GD}^{AB} & 0 \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [K_{BA}^G]_{AB} &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{DD}^{AB} & -K_{GD}^{AB} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [K_{BB}^G]_{AB} &= \begin{bmatrix} n_{xG} & t_{xG} & 0 \\ n_{yG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_W^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & K_{DD}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} n_{xG} & n_{yG} & 0 \\ t_{xG} & t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (7.3.3)$$



Efectuando los productos, y recordando que $t_{xG} = -n_{yG}$ y $t_{yG} = n_{xG}$, queda:

$$\left[K_{AA}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k_W^{AB} n_{xG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & (k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} \cdot n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline (k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_W^{AB} n_{yG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & k_{GD}^{AB} \cdot n_{xG} \\ \hline -k_{GD}^{AB} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{xG} & k_{GG}^{AB} \\ \hline \end{array}$$

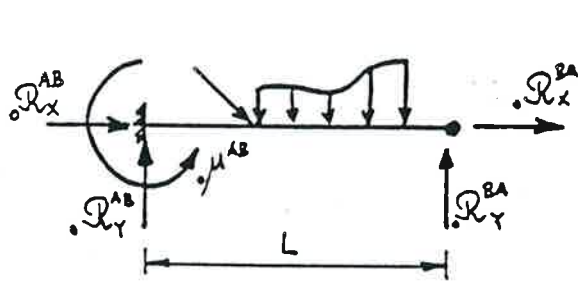
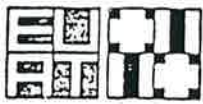
$$\left[K_{AB}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -k_W^{AB} n_{xG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & -(k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline -(k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_W^{AB} n_{yG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & 0 \\ \hline k_{GD}^{AB} n_{yG} & -k_{GD}^{AB} n_{xG} & 0 \\ \hline \end{array}$$

(7.3.4)

$$\left[K_{BA}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -k_W^{AB} n_{xG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & -(k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_{GD}^{AB} n_{yG} \\ \hline -(k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & -k_W^{AB} n_{yG}^2 - k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & -k_{GD}^{AB} n_{xG} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

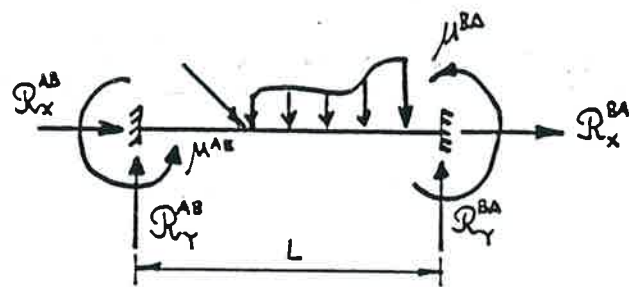
$$\left[K_{BB}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k_W^{AB} n_{xG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{yG}^2 & (k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline (k_W^{AB} - k_{DD}^{AB}) n_{xG} n_{yG} & k_W^{AB} n_{yG}^2 + k_{DD}^{AB} n_{xG}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Si sobre una barra articulada en su extremo frontal B actúan directamente cargas, el cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto deberá realizarse considerando la viga empotrada-articulada (fig. 7.3.1)



BARRA EMPOTRADA-ARTICULADA

Figura 7.3.1



BARRA BIEMPOTRADA

Figura 7.3.2

$$\boxed{M^{AB} = M^{AB} - \frac{M^{BA}}{2}} \quad (7.3.5)$$

$$R_x^{AB} = R_x^{AB}$$

$$R_x^{BA} = R_x^{BA}$$

$$R_y^{AB} = R_{y(isost.)}^{AB} + \frac{M^{AB}}{L}$$

$$R_y^{BA} = R_{y(isost.)}^{BA} - \frac{M^{AB}}{L}$$

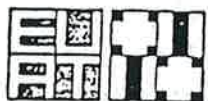
Las submatrices de transformación dg-fl de barra en el caso de que el extremo frontal B sea una articulación, son:

$$[T_{AA}^{AB}] = \begin{bmatrix} k_N^{AB} n_{xG} & k_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ k_{DD}^{AB} t_{xG} & k_{DD}^{AB} t_{yG} & k_{GD}^{AB} \\ k_{GD}^{AB} t_{xG} & k_{GD}^{AB} t_{yG} & k_{GG}^{AB} \end{bmatrix}$$

$$[T_{AB}^{AB}] = \begin{bmatrix} -k_N^{AB} n_{xG} & -k_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ -k_{DD}^{AB} t_{xG} & -k_{DD}^{AB} t_{yG} & 0 \\ -k_{GD}^{AB} t_{xG} & -k_{GD}^{AB} t_{yG} & 0 \end{bmatrix}$$

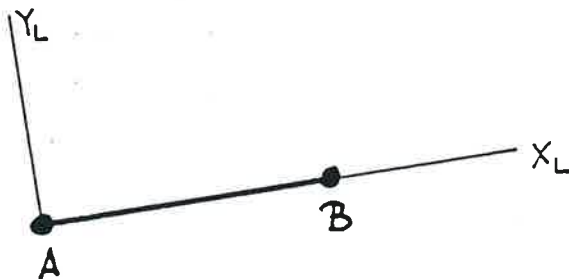
$$[T_{BA}^{AB}] = \begin{bmatrix} -k_N^{AB} n_{xG} & -k_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ -k_{DD}^{AB} t_{xG} & -k_{DD}^{AB} t_{yG} & -k_{GD}^{AB} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_{BB}^{AB}] = \begin{bmatrix} k_N^{AB} n_{xG} & k_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ k_{DD}^{AB} t_{xG} & k_{DD}^{AB} t_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3.5)$$



7.4 CASO DE BARRAS CON AMBOS EXTREMOS ARTICULADOS

Sea la barra AB, cuyos nudos A y B están articulados:



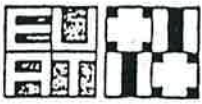
La ecuación matricial de una barra articulada en A y en B es:

f_x^{AB}	K_N^{AB}	0	0	$-K_N^{AB}$	0	0	d_x^{AB}
f_y^{AB}	0	0	0	0	0	0	d_y^{AB}
m^{AB}	0	0	0	0	0	0	θ^{AB}
f_x^{BA}	$-K_N^{AB}$	0	0	K_N^{AB}	0	0	d_x^{BA}
f_y^{BA}	0	0	0	0	0	0	d_y^{BA}
m^{BA}	0	0	0	0	0	0	θ^{BA}

(7.4.1)

En ella se pone de manifiesto que los únicos esfuerzos de extremo de barra no nulos son los esfuerzos normales. Dicho de otro modo: Si los extremos A y B de una barra están articulados, los únicos esfuerzos en A y B serán los axiles f_x^{AB} y f_x^{BA} .

Las submatrices de rigidez de la barra articulada en A y en B, referidas a ejes locales, son:



$$\begin{aligned}
 \left[K_{AA}^{AB} \right]_L &= \begin{bmatrix} K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L & \left[K_{AB}^{AB} \right]_L &= \begin{bmatrix} -K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L \\
 \left[K_{BA}^{AB} \right]_L &= \begin{bmatrix} -K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L & \left[K_{BB}^{AB} \right]_L &= \begin{bmatrix} K_N^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_L
 \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

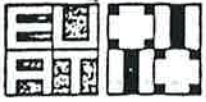
Y las submatrices de rigidez de la barra articulada en A y en B, referidas a ejes globales, son:

$$\left[K_{AA}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline K_N^{AB} n_{xG}^2 & K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & K_N^{AB} n_{yG}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

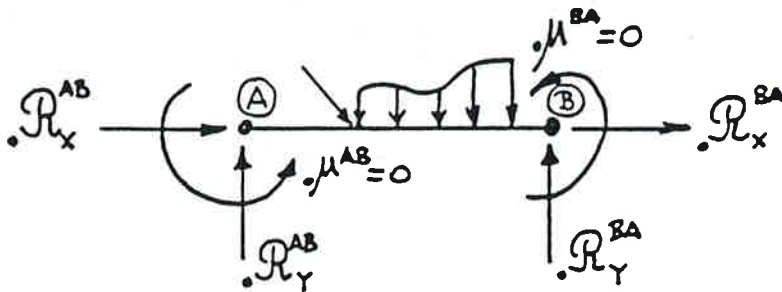
$$\left[K_{AB}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -K_N^{AB} n_{xG}^2 & -K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline -K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & -K_N^{AB} n_{yG}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\left[K_{BA}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -K_N^{AB} n_{xG}^2 & -K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline -K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & -K_N^{AB} n_{yG}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\left[K_{BB}^{AB} \right]_G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline K_N^{AB} n_{xG}^2 & K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & 0 \\ \hline K_N^{AB} n_{xG} n_{yG} & K_N^{AB} n_{yG}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{7.4.3}$$



Si sobre una barra articulada en sus dos extremos A y B actúan directamente cargas, para el cálculo de las acciones equivalentes de empotramiento perfecto en los nudos se considerarán las siguientes reacciones:



R_x^{AB} y R_x^{BA} son las mismas que en el caso de la barra biempotrada y pueden calcularse según 6.2

$$R_y^{AB} = R_y^{AB}(\text{isost.}) \quad R_y^{BA} = R_y^{BA}(\text{isost.})$$

$$M^{AB} = 0 \quad M^{BA} = 0$$

Las submatrices de transformación de f_L de barra para extremos A y B articulados, son:

$$[T_{AA}^{AB}] = \begin{bmatrix} K_N^{AB} n_{xG} & K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

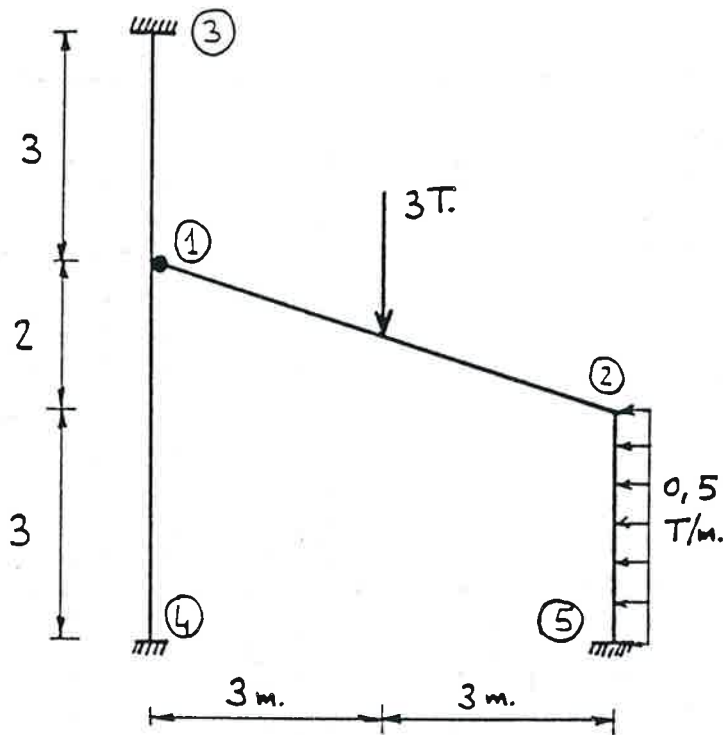
$$[T_{AB}^{AB}] = \begin{bmatrix} -K_N^{AB} n_{xG} & -K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_{BA}^{AB}] = \begin{bmatrix} -K_N^{AB} n_{xG} & -K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_{BB}^{AB}] = \begin{bmatrix} K_N^{AB} n_{xG} & K_N^{AB} n_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.4)$$

7.5 EJERCICIO 3

Sea el pórtico croquizado



DATOS:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_{12} = 60 \text{ cm}^2$$

$$I_{12} = 8000 \text{ cm}^4$$

$$A_{25} = A_{13} = A_{14} = 50 \text{ cm}^2$$

$$I_{25} = I_{13} = I_{14} = 5000 \text{ cm}^4$$

Hallar los esfuerzos axiales, esfuerzos cortantes y momentos flectores en los extremos de cada barra.

Para cada barra elegiremos como nodo dorsal el de menor numeración, con lo cual los ejes locales quedan perfectamente definidos.

Los ejes generales son los indicados

a continuación:



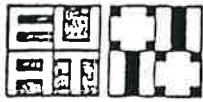


BARRAS	L_x (cm.)	L_y (cm.)	L (cm.)	A (cm ²)	I (cm ⁴)	n_{xg} L_x/L	n_{yg} L_y/L	t_{xg} $-n_{yg}$	t_{yg} n_{xg}
1-2 (1)	600	-200	632,45553	60	8000	0,948683	-0,3162277	0,3162277	0,948683
2-5 (2)	0	-300	300	50	5000	0	-1	1	0
1-3 (3)	0	300	300	50	5000	0	1	-1	0
1-4 (4)	0	-500	500	50	5000	0	-1	1	0

BARRAS	$K_N = EA/L$	$K_{DD} = 12EI/L^3$	$K_{GD} = 6EI/L^2$	$K_{GG} = 4EI/L$	$K_{GG} = 2EI/L$	$K_N \cdot n_{xg}$	$K_N \cdot n_{yg}$	$K_N \cdot \dot{n}_{xg}$	$K_N \cdot \dot{n}_{yg}$
1-2	199224	199,224	126000	$7,96894 \cdot 10^7$	0	189000	-63000	179304	19922,4
2-5	350000	4666,67	700000	$4,4 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^7$	0	-350000	0	350000
1-3	350000	4666,67	700000	$1,4 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^7$	0	350000	0	350000
1-4	210000	1008	252000	$8,4 \cdot 10^7$	$4,2 \cdot 10^7$	0	-210000	0	210000

BARRAS	$(K_N - K_{DD})n_{xg}$	$K_{DD} \cdot \dot{n}_{xg}$	$K_{DD} \cdot \dot{n}_{yg}$	$K_{GD} \cdot n_{xg}$	$K_{GD} \cdot n_{yg}$	$K_{DD} \cdot t_{xg}$	$K_{DD} \cdot t_{yg}$	$K_{GD} \cdot t_{xg}$	$K_{GD} \cdot t_{yg}$
1-2	-59707	179,30	19,92	119534	-39844,7	63	189	39844,7	119534
2-5	0	0	4666,67	0	-700000	4666,67	0	700000	0
1-3	0	0	4666,67	0	700000	-4666,67	0	-700000	0
1-4	0	0	1008	0	-252000	1008	0	252000	0

*) Para la barra 1-2: $K_{DD} = 3EI/L^3$ $K_{GD} = 3EI/L^2$ $K_{GG} = 3EI/L$ $K_{GG} = 0$



MATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1 (1-2)

a) Referidas a ejes locales

1.99224E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.99224E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.99224E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.99224E+02	1.26000E+05
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.99224E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	1.99224E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-1.99224E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	1.99224E+02	-1.26000E+05
0.00000E+00	1.26000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.26000E+05	7.96894E+07

b) Referidas a ejes globales

1.79321E+05	-5.97073E+04	0.00000E+00	-1.79321E+05	5.97073E+04	3.98447E+04
-5.97073E+04	2.01017E+04	0.00000E+00	5.97073E+04	-2.01017E+04	1.19534E+05
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.79321E+05	5.97073E+04	0.00000E+00	1.79321E+05	-5.97073E+04	-3.98447E+04
5.97073E+04	-2.01017E+04	0.00000E+00	-5.97073E+04	2.01017E+04	-1.19534E+05
3.98447E+04	1.19534E+05	0.00000E+00	-3.98447E+04	-1.19534E+05	7.96894E+07

MATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 2 (2-5)

a) Referidas a ejes locales

3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	4.66667E+03	7.00000E+05	0.00000E+00	-4.66667E+03	7.00000E+05
0.00000E+00	7.00000E+05	1.40000E+08	0.00000E+00	-7.00000E+05	7.00000E+07
-3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-4.66667E+03	-7.00000E+05	0.00000E+00	4.66667E+03	-7.00000E+05
0.00000E+00	7.00000E+05	7.00000E+07	0.00000E+00	-7.00000E+05	1.40000E+08

b) Referidas a ejes globales

4.66667E+03	0.00000E+00	7.00000E+05	-4.66667E+03	0.00000E+00	7.00000E+05
0.00000E+00	3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.50000E+05	0.00000E+00
7.00000E+05	0.00000E+00	1.40000E+08	-7.00000E+05	0.00000E+00	7.00000E+07
-4.66667E+03	0.00000E+00	-7.00000E+05	4.66667E+03	0.00000E+00	-7.00000E+05
0.00000E+00	-3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	3.50000E+05	0.00000E+00
7.00000E+05	0.00000E+00	7.00000E+07	-7.00000E+05	0.00000E+00	1.40000E+08



MATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 3 (1-3)

a) Referidas a ejes locales

3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	4.66667E+03	7.00000E+05	0.00000E+00	-4.66667E+03	7.00000E+05
0.00000E+00	7.00000E+05	1.40000E+08	0.00000E+00	-7.00000E+05	7.00000E+07
-3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-4.66667E+03	-7.00000E+05	0.00000E+00	4.66667E+03	-7.00000E+05
0.00000E+00	7.00000E+05	7.00000E+07	0.00000E+00	-7.00000E+05	1.40000E+08

b) Referidas a ejes globales

4.66667E+03	0.00000E+00	-7.00000E+05	-4.66667E+03	0.00000E+00	-7.00000E+05
0.00000E+00	3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.50000E+05	0.00000E+00
-7.00000E+05	0.00000E+00	1.40000E+08	7.00000E+05	0.00000E+00	7.00000E+07
-4.66667E+03	0.00000E+00	7.00000E+05	4.66667E+03	0.00000E+00	7.00000E+05
0.00000E+00	-3.50000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	3.50000E+05	0.00000E+00
-7.00000E+05	0.00000E+00	7.00000E+07	7.00000E+05	0.00000E+00	1.40000E+08

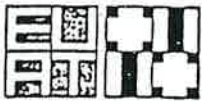
MATRICES DE RIGIDEZ DE LA BARRA 4 (1-4)

a) Referidas a ejes locales

2.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00800E+03	2.52000E+05	0.00000E+00	-1.00800E+03	2.52000E+05
0.00000E+00	2.52000E+05	8.40000E+07	0.00000E+00	-2.52000E+05	4.20000E+07
-2.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	2.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-1.00800E+03	-2.52000E+05	0.00000E+00	1.00800E+03	-2.52000E+05
0.00000E+00	2.52000E+05	4.20000E+07	0.00000E+00	-2.52000E+05	8.40000E+07

b) Referidas a ejes globales

1.00800E+03	0.00000E+00	2.52000E+05	-1.00800E+03	0.00000E+00	2.52000E+05
0.00000E+00	2.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.10000E+05	0.00000E+00
2.52000E+05	0.00000E+00	8.40000E+07	-2.52000E+05	0.00000E+00	4.20000E+07
-1.00800E+03	0.00000E+00	-2.52000E+05	1.00800E+03	0.00000E+00	-2.52000E+05
0.00000E+00	-2.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	2.10000E+05	0.00000E+00
2.52000E+05	0.00000E+00	4.20000E+07	-2.52000E+05	0.00000E+00	8.40000E+07



A partir de las matrices de rigidez de barra en ejes generales, el ensamblaje de la matriz de rigidez final de la estructura se lleva a cabo del modo habitual. Dicha matriz se muestra en la página siguiente.

Al no existir cargas directamente aplicadas en los nudos, el vector acciones en los nudos coincide con el vector de acciones equivalentes de empotramiento perfecto. Vamos a hallarlo:

Barra 2-5

$$R_x^{25} = 0$$

$$R_x^{52} = 0$$

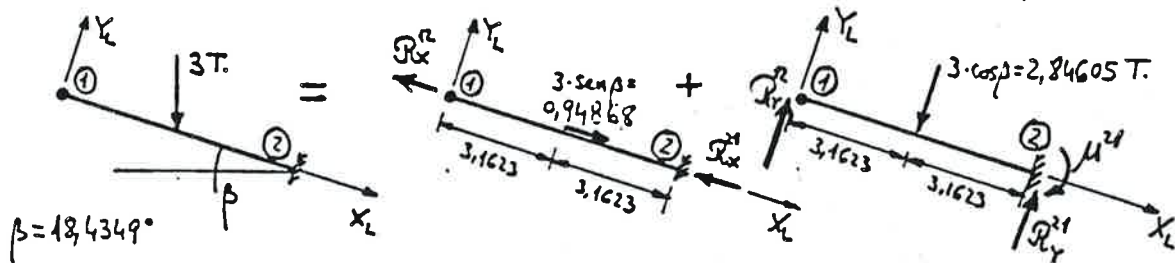
$$R_y^{25} = -\frac{(-0,5) \cdot 3}{2} = 0,75 T. = 750 \text{ Kg.}$$

$$R_y^{52} = 750 \text{ Kg.}$$

$$\mu^{25} = -\frac{1}{12} (-0,5) \cdot 3^2 = 0,375 \text{ mT.} = 37500 \text{ cmKg.} \quad \mu^{52} = -37500 \text{ cmKg.}$$

Barra 1-2

Es preciso calcular las reacciones de la barra articulada-empotrada.



$$R_x^{12} = -0,4743 T. = -474,3 \text{ Kg.}$$

$$R_x^{21} = -474,3 \text{ Kg.}$$

$$\mu^{12} = 0$$

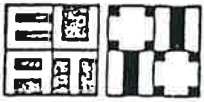
$$\mu^{21} = \frac{(-2,84605) \cdot 6,32455}{8} = -2,25 \text{ mT.}$$

$$\mu^{12} (\text{biempotrada}) = +2,25 \text{ mT.}$$

$$\mu^{21} = -2,25 - \frac{+2,25}{2} = -3,375 \text{ mT.} = -3,375 \cdot 10^5 \text{ cmKg.}$$

$$R_y^{12} = -\frac{-2846}{2} + \frac{\mu^{21}}{L} = 1423 - \frac{3,375 \cdot 10^5}{632,4555} = 889,37 \text{ Kg.}$$

$$R_y^{21} = -\frac{-2846}{2} - \frac{\mu^{12}}{L} = 1423 + 0 = 1423 \text{ Kg.}$$



Las reacciones de empotramiento perfecto hay que referirlas a ejes globales:

$$\begin{bmatrix} R_x^{12} \\ R_y^{12} \\ \mu^{12} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0,948683 & 0,3162277 & 0 \\ -0,3162277 & 0,948683 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -474,3 \\ 889,37 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -168,7 \\ 993,8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^{21} \\ R_y^{21} \\ \mu^{21} \end{bmatrix}_G = [R] \cdot \begin{bmatrix} -474,3 \\ 1595,63 \\ -3,375 \cdot 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168,7 \\ 2006,2 \\ -3,375 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^{25} \\ R_y^{25} \\ \mu^{25} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 750 \\ 37500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 0 \\ 37500 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} R_x^{52} \\ R_y^{52} \\ \mu^{52} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 750 \\ -37500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 0 \\ -37500 \end{bmatrix}$$

El vector de acciones equivalentes de empotramiento perfecto es:

$$[A] = \begin{bmatrix} 168,7 \\ -993,8 \\ 0 \\ -918,7 \\ -2006,2 \\ 300.000 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Nudo } ① \\ \text{Nudo } ② \end{matrix}$$

La ecuación matricial final de la estructura resulta ser:

①

②

168,7	1.84996E+05	-5.97073E+04	-4.48000E+05	-1.79321E+05	5.97073E+04	3.98447E+04	$\frac{d_1}{dx}$	①
-993,8	-5.97073E+04	5.80102E+05	0.00000E+00	5.97073E+04	-2.01017E+04	1.19534E+05	$\frac{d_1}{dy}$	
0	-4.48000E+05	0.00000E+00	2.24000E+08	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	θ_1	
-918,7	-1.79321E+05	5.97073E+04	0.00000E+00	1.83988E+05	-5.97073E+04	6.60155E+05	$\frac{d_2}{dx}$	②
-2006,2	5.97073E+04	-2.01017E+04	0.00000E+00	-5.97073E+04	3.70102E+05	-1.19534E+05	$\frac{d_2}{dy}$	
300000	3.98447E+04	1.19534E+05	0.00000E+00	6.60155E+05	-1.19534E+05	2.19689E+08	θ_2	



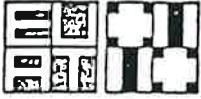
Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los movimientos de los nudos libres referidos a ejes generales:

Nudo	δx (cm.)	δy (cm.)	Giro (rad.)
1	-0.2331670	-0.0015186	-0.0004663
2	-0.2413878	-0.0061417	0.0021296

Multiplicando la matriz de transformación d_G-f_L de una barra por los movimientos de sus extremos y sumándole el vector reacciones de empotramiento referido a ejes locales (ver 6.1.5) se obtienen las es-fuerzos axiales, esfuerzos cortantes y momentos flectores en los extremos de esa barra:

Ba-		ESFUERZOS EN EXTREMOS DE BARRA							
M U D O S		ESF. AXILES (T.)		ESF. CORTANTES (T.)		MOM. FLECTORES (MT)			
rra	dor.	fro.	dorsal	frontal	dorsal	frontal	dorsal	frontal	
1	1	2	0.788	-1.737	1.159	1.687	0.000	-1.667	
2	2	3	2.150	-2.150	1.114	0.386	1.667	-0.574	
3	1	3	-0.531	0.531	0.762	-0.762	0.979	1.306	
4	1	4	0.319	-0.319	-0.353	0.353	-0.979	-0.783	

En la página siguiente se muestran las matrices de transformación d_G-f_L de los cuatro barras del pórtico propuesto.



ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA DE BARCELONA

ESTRUCTURAS

Rafael Marzo Lafuente

128

Barra 1-2

1.890000E+05	-6.300000E+04	0.000000E+00	-1.890000E+05	6.300000E+04	0.000000E+00
6.300000E+01	1.890000E+02	0.000000E+00	-6.300000E+01	-1.890000E+02	1.260000E+05
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
-1.890000E+05	6.300000E+04	0.000000E+00	1.890000E+05	-6.300000E+04	0.000000E+00
-6.300000E+01	-1.890000E+02	0.000000E+00	6.300000E+01	1.890000E+02	-1.260000E+05
3.98447E+04	1.19534E+05	0.000000E+00	-3.98447E+04	-1.19534E+05	7.96894E+07

Barra 2-5

0.000000E+00	-3.500000E+05	0.000000E+00	0.000000E+00	3.500000E+05	0.000000E+00
4.66667E+03	0.000000E+00	7.000000E+05	-4.66667E+03	0.000000E+00	7.000000E+05
7.000000E+05	0.000000E+00	1.400000E+08	-7.000000E+05	0.000000E+00	7.000000E+07
0.000000E+00	3.500000E+05	0.000000E+00	0.000000E+00	-3.500000E+05	0.000000E+00
-4.66667E+03	0.000000E+00	-7.000000E+05	4.66667E+03	0.000000E+00	-7.000000E+05
7.000000E+05	0.000000E+00	7.000000E+07	-7.000000E+05	0.000000E+00	1.400000E+08

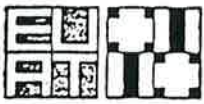
Barra 1-3

0.000000E+00	3.500000E+05	0.000000E+00	0.000000E+00	-3.500000E+05	0.000000E+00
-4.66667E+03	0.000000E+00	7.000000E+05	4.66667E+03	0.000000E+00	7.000000E+05
-7.000000E+05	0.000000E+00	1.400000E+08	7.000000E+05	0.000000E+00	7.000000E+07
0.000000E+00	-3.500000E+05	0.000000E+00	0.000000E+00	3.500000E+05	0.000000E+00
4.66667E+03	0.000000E+00	-7.000000E+05	-4.66667E+03	0.000000E+00	-7.000000E+05
-7.000000E+05	0.000000E+00	7.000000E+07	7.000000E+05	0.000000E+00	1.400000E+08

Barra 1-4

0.000000E+00	-2.100000E+05	0.000000E+00	0.000000E+00	2.100000E+05	0.000000E+00
1.008000E+03	0.000000E+00	2.520000E+05	-1.008000E+03	0.000000E+00	2.520000E+05
2.520000E+05	0.000000E+00	8.400000E+07	-2.520000E+05	0.000000E+00	4.200000E+07
0.000000E+00	2.100000E+05	0.000000E+00	0.000000E+00	-2.100000E+05	0.000000E+00
-1.008000E+03	0.000000E+00	-2.520000E+05	1.008000E+03	0.000000E+00	-2.520000E+05
2.520000E+05	0.000000E+00	4.200000E+07	-2.520000E+05	0.000000E+00	8.400000E+07

MATRICES DE TRANSFORMACION d_G - f_L DE BARRA



7.6 ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS : CELOSÍAS

Se llaman estructuras articuladas o celosías a aquellas en las que todas sus barras están articuladas en ambos extremos. En las celosías planas, los posibles movimientos de un nudo genérico I son dos: d_x^I y d_y^I , así como también son dos las componentes de las acciones exteriores sobre él: P_x^I y P_y^I .

Las submatrices de rigidez de la barra genérica AB en ejes globales (ver 7.4.3) son:

$$\begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} \\ K_{AB}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} K_{BB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} K_N^{AB} \cdot n_{xG}^2 & K_N^{AB} \cdot n_{xG} \cdot n_{yG} \\ K_N^{AB} \cdot n_{xG} \cdot n_{yG} & K_N^{AB} \cdot n_{yG}^2 \end{bmatrix}$$

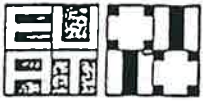
$$\begin{bmatrix} K_{AB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} K_{BA}^{AB} \\ K_{AB}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} -K_N^{AB} \cdot n_{xG}^2 & -K_N^{AB} \cdot n_{xG} \cdot n_{yG} \\ -K_N^{AB} \cdot n_{xG} \cdot n_{yG} & -K_N^{AB} \cdot n_{yG}^2 \end{bmatrix} \quad (7.6.1)$$

Recordemos que n_{xG} y n_{yG} son las componentes según los ejes generales de un versor situado en la barra y cuyo sentido va desde el nudo dorsal hacia el nudo frontal.

Nótese que las submatrices de rigidez de barra son iguales dos a dos:

$\begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} \\ K_{AB}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} K_{BB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G$ y $\begin{bmatrix} K_{AB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} K_{BA}^{AB} \\ K_{AB}^{AB} \end{bmatrix}_G$, siendo los elementos de estas dos últimas iguales en valor absoluto a los de las dos anteriores, pero de signo contrario: $\begin{bmatrix} K_{AB}^{AB} \\ K_{BA}^{AB} \end{bmatrix}_G = -\begin{bmatrix} K_{AA}^{AB} \\ K_{BB}^{AB} \end{bmatrix}_G$.

La matriz de rigidez final de una estructura articulada se ensambla a partir de las submatrices de barra (7.6.1) siguiendo exactamen-



te lo indicado en 4.4.

En las celosías, las cargas exteriores suelen estar aplicadas en los nudos, por lo que el planteamiento del vector acciones en nudos no presentará ninguna dificultad.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones simbolizado por $[P]=[K] \cdot [d]$ se conocerán los movimientos de los nudos y, a partir de éstos y de las matrices de transformación d_6-f_6 de las barras, se deducirán los esfuerzos en los extremos de barra que, si las cargas actúan exclusivamente sobre los nudos, habrán de ser necesariamente esfuerzos axiales:

De (5.1.2) y (7.4.4) resulta

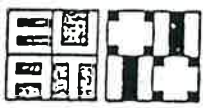
$$\begin{bmatrix} p_{AB} \\ f_x \\ p_{AB} \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_W^{AB} \cdot n_{xG} & K_W^{AB} \cdot n_{yG} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x^A \\ d_y^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_W^{AB} \cdot n_{xG} & -K_W^{AB} \cdot n_{yG} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^B \\ d_y^B \end{bmatrix}$$

O sea

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} p_{AB} \\ f_x \\ p_{AB} \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_W^{AB} \cdot n_{xG} & K_W^{AB} \cdot n_{yG} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x^A - d_x^B \\ d_y^A - d_y^B \end{bmatrix} \\ p_{AB} \\ f_y = 0 \end{array} \right\} (7.6.2)$$

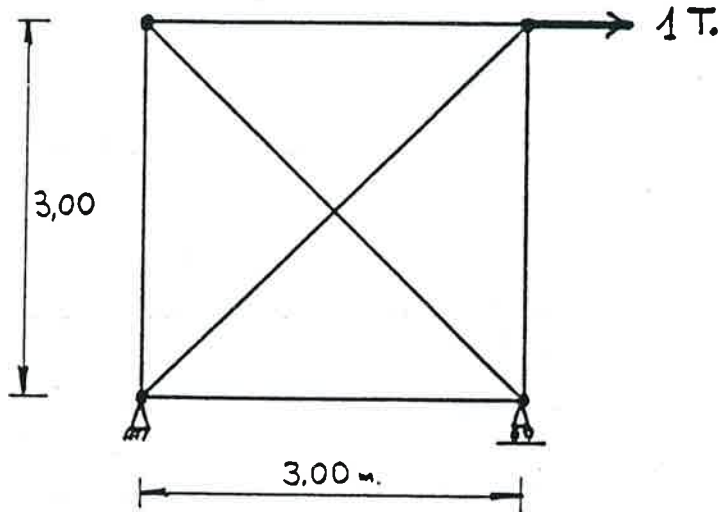
Para el extremo frontal se deduciría igualmente:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} p_{BA} \\ f_x \\ p_{BA} \\ f_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_W^{AB} \cdot n_{xG} & K_W^{AB} \cdot n_{yG} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x^A - d_x^B \\ d_y^A - d_y^B \end{bmatrix} \\ p_{BA} \\ f_y = 0 \end{array} \right\} (7.6.3)$$



7.7 EJERCICIO 4

Sea la siguiente estructura de nudos articulados



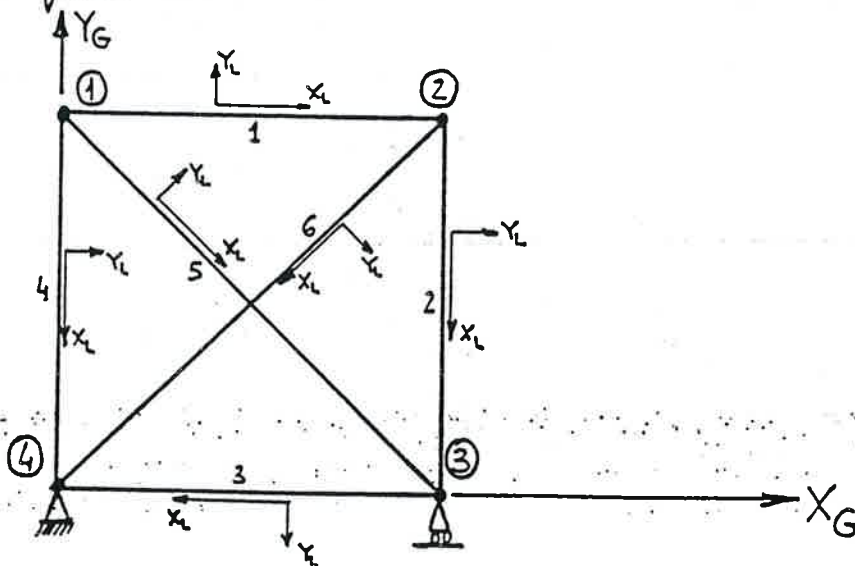
DATOS:

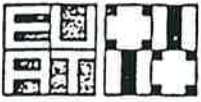
$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

Todas las barras con la misma sección transversal: $A = 20 \text{ cm}^2$

Hallar los movimientos de los nudos y los esfuerzos normales a que están sometidas las barras.

La numeración de nudos y de barras, así como los ejes generales y locales elegidos son:



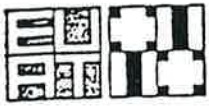


Rafael Marzo Lafuente

132

BARRAS	L_x (cm.)	L_y (cm.)	L (cm.)	A (cm ²)	$n_{xg} \frac{L_x}{L}$	$n_{yg} \frac{L_y}{L}$	$K_N = \frac{EA}{L}$
1-2 (1)	300	0	300	20	1	0	140.000
2-3 (2)	0	-300	300	20	0	-1	140.000
3-4 (3)	-300	0	300	20	-1	0	140.000
1-4 (4)	0	-300	300	20	0	-1	140.000
1-3 (5)	300	-300	424,2641	20	0,70711	-0,70711	98.994,94
2-4 (6)	-300	-300	424,2641	20	-0,70711	-0,70711	98.994,94

BARRAS	$K_N \cdot n_{xg}$	$K_N \cdot n_{yg}$	$K_N \cdot n_{xg}^2$	$K_N \cdot n_{yg}^2$	$K_N \cdot n_{xg} \cdot n_{yg}$
1-2 (1)	140.000	0	140.000	0	0
2-3 (2)	0	-140.000	0	140.000	0
3-4 (3)	-140.000	0	140.000	0	0
1-4 (4)	0	-140.000	0	140.000	0
1-3 (5)	70.000	-70.000	49497,47	49497,47	-49497,47
2-4 (6)	-70.000	-70.000	49497,47	49497,47	49497,47



Submatrices de rigidez de barra (respecto a ejes generales):

- Barra 1-2:

$$[K_{11}^{12}]_G = [K_{22}^{12}]_G = \begin{bmatrix} 140000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; [K_{12}^{12}]_G = [K_{21}^{12}]_G = \begin{bmatrix} -140000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3:

$$[K_{22}^{23}]_G = [K_{33}^{23}]_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 140.000 \end{bmatrix}; [K_{23}^{23}]_G = [K_{32}^{23}]_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -140.000 \end{bmatrix}$$

- Barra 3-4:

$$[K_{33}^{34}]_G = [K_{44}^{34}]_G = \begin{bmatrix} 140000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; [K_{34}^{34}]_G = [K_{43}^{34}]_G = \begin{bmatrix} -140000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 1-4:

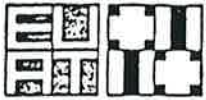
$$[K_{11}^{14}]_G = [K_{44}^{14}]_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 140.000 \end{bmatrix}; [K_{14}^{14}]_G = [K_{41}^{14}]_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -140000 \end{bmatrix}$$

- Barra 1-3:

$$[K_{11}^{13}]_G = [K_{33}^{13}]_G = \begin{bmatrix} 49497,47 & -49497,47 \\ -49497,47 & 49497,47 \end{bmatrix}; [K_{13}^{13}]_G = [K_{31}^{13}]_G = \begin{bmatrix} -49497,47 & 49497,47 \\ 49497,47 & -49497,47 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-4:

$$[K_{22}^{24}]_G = [K_{44}^{24}]_G = \begin{bmatrix} 49497,47 & 49497,47 \\ 49497,47 & 49497,47 \end{bmatrix}; [K_{24}^{24}]_G = [K_{42}^{24}]_G = \begin{bmatrix} -49497,47 & -49497,47 \\ -49497,47 & -49497,47 \end{bmatrix}$$



La matriz de rigidez completa $[K_0]$ de la estructura es:

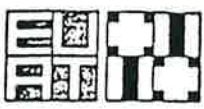
	①	②	③	④
①	$[K_{11}^{12}]_G + [K_{11}^{13}]_G + [K_{11}^{14}]_G$	$[K_{12}^{12}]_G$	$[K_{13}^{13}]_G$	$[K_{14}^{14}]_G$
②	$[K_{21}^{12}]_G$	$[K_{22}^{12}]_G + [K_{22}^{23}]_G + [K_{22}^{24}]_G$	$[K_{23}^{23}]_G$	$[K_{24}^{24}]_G$
③	$[K_{31}^{13}]_G$	$[K_{32}^{23}]_G$	$[K_{33}^{13}]_G + [K_{33}^{23}]_G + [K_{33}^{34}]_G$	$[K_{34}^{34}]_G$
④	$[K_{41}^{14}]_G$	$[K_{42}^{24}]_G$	$[K_{43}^{34}]_G$	$[K_{44}^{14}]_G + [K_{44}^{24}]_G + [K_{44}^{34}]_G$

Al imponer las condiciones de contorno ($d_y^3=0, d_x^4=0, d_y^4=0$) se obtiene la matriz de rigidez final de la estructura $[K]$, suprimiendo de $[K_0]$ las filas y columnas 6, 7 y 8 que son las correspondientes a los movimientos impedidos por las sustentaciones.

La ecuación matricial final $[P]=[K] \cdot [d]$ de la estructura de nudos articulados propuesta es:

0	189497,47	-49497,47	-140000	0	-49497,47	d_x^1
0	-49497,47	189497,47	0	0	49497,47	d_y^1
1000	-140000	0	189497,47	49497,47	0	d_x^2
0	0	0	49497,47	189497,47	0	d_y^2
0	-49497,47	49497,47	0	0	189497,47	d_x^3

①
②
③



Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos los movimientos de los nudos libres, referidos a ejes globales:

$$d_x^1 = 0,01367 \text{ cm.} \quad d_y^1 = 0,002832 \text{ cm.}$$

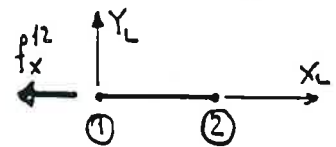
$$d_x^2 = 0,01650 \text{ cm.} \quad d_y^2 = -0,004311 \text{ cm.}$$

$$d_x^3 = 0,002832 \text{ cm.}$$

Los esfuerzos sobre el extremo dorsal de cada barra son (ver 7.6.2):

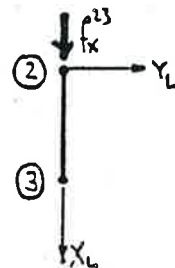
Barra 1-2:

$$f_x^{12} = [140000 \quad 0] \begin{bmatrix} 0,01367 - 0,01650 \\ 0,002832 + 0,004311 \end{bmatrix} = -396 \text{ kg.}$$



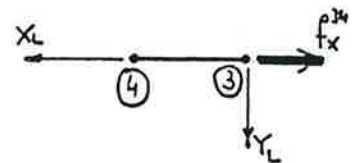
Barra 2-3:

$$f_x^{23} = [0 \quad -140000] \begin{bmatrix} 0,01650 - 0,002832 \\ -0,004311 - 0 \end{bmatrix} = 603 \text{ kg.}$$



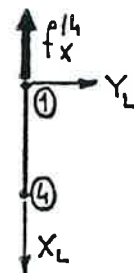
Barra 3-4

$$f_x^{34} = [-140000 \quad 0] \begin{bmatrix} 0,002832 \\ 0 \end{bmatrix} = -396 \text{ kg.}$$



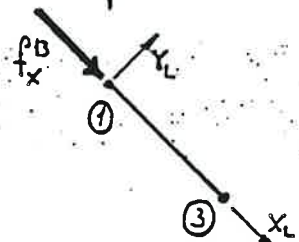
Barra 1-4

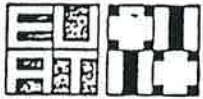
$$f_x^{14} = [0 \quad -140000] \begin{bmatrix} 0,01367 \\ 0,002832 \end{bmatrix} = -396 \text{ kg.}$$



Barra 1-3

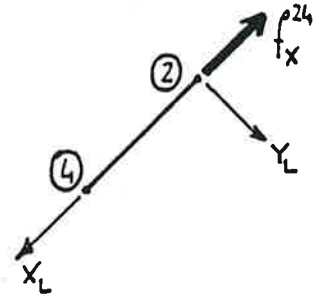
$$f_x^{13} = [70000 \quad -70000] \begin{bmatrix} 0,01367 - 0,002832 \\ 0,002832 - 0 \end{bmatrix} = 560 \text{ kg.}$$





Barra 2-4

$$f_x^{24} = \begin{bmatrix} -70000 & -70000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01650 \\ -0,004311 \end{bmatrix} = -853 \text{ kp.}$$



Los esfuerzos sobre el extremo frontal son iguales, pero con signo contrario, para cada barra. Por lo tanto los esfuerzos axiales o normales a que está sometida cada barra son:

Barra 1-2 : TRACCIÓN 396 kp.

Barra 2-3 : COMPRESIÓN 603 kp.

Barra 3-4 : TRACCIÓN 396 kp.

Barra 1-4 : TRACCIÓN 396 kp.

Barra 1-3 : COMPRESIÓN 560 kp.

Barra 2-4 : TRACCIÓN 853 kp.