

Problema d'avaluació continuada.
Assignatura: Algebra lineal.
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Marta Casanellas Rius i Jesús Fernández Sánchez
Universitat Politècnica de Catalunya

Curs 2019-20



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA**
BARCELONATECH

PROBLEMA D'AVALUACIÓ CONTINUADA

ÀLGEBRA LINEAL 2019

Part 1. Donats $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ amb $a + b + c + d = 1$, considerem la matriu següent:

$$K(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

- Sense calcular el polinomi característic, demostreu que 1 és un valor propi de $K(a, b, c, d)$.
- Sense calcular el polinomi característic, demostreu que $1, a+b-c-d, a-b+c-d, a-b-c+d$ són els valors propis de $K(a, b, c, d)$.
- Doneu una b.o.n de vectors propis de $K(a, b, c, d)$ que no depengui dels valors de a, b, c, d .
- Demostreu que els producte de dues matrius $K_1 = K(a_1, b_1, c_1, d_1)$ i $K_2 = K(a_2, b_2, c_2, d_2)$ dóna lloc a una matriu K_3 amb la mateixa forma. Expresseu els valors propis de $K_3 = K_2 K_1$ en funció dels valors propis de K_1 i K_2 .
- Sense calcular els productes, demostreu que les matrius del tipus $K(a, b, c, d)$ commuten entre elles.

Part 2. Una seqüència d'ADN (és a dir, una paraula formada amb les lletres A, C, G i T que denoten els nucleòtids) muta seguint el model següent:

- la probabilitat que el nucleòtid A (respectivament C, G, T) es mantingui igual en la generació següent és a .
- la probabilitat que el nucleòtid A (respectivament C, G, T) muti a un altre nucleòtid diferent x és b , de manera que $a + 3b = 1$.

Sigui $\mathbf{x}(0) = (x_A(0), x_C(0), x_G(0), x_T(0))^t$ el vector que recull la proporció de A 's, C 's, G 's i T 's en la seqüència d'ADN i considerem el sistema dinàmic lineal discret

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) \quad \text{on} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

- Estudieu si la matriu A diagonalitza.
- Si partim d'una seqüència d'ADN amb 30% de A 's, 30% de C 's, 20% de G 's i 20% de T 's, cap a quina distribució¹ de nucleòtids es tendeix a llarg termini?

Part 3. En el mateix context que la part 2, suposem que el sistema dinàmic discret ve donat per una matriu $A = K(a, b, c, d)$ com les de la primera part². Estudieu la distribució de nucleòtids a la que es tendeix a llarg termini partint de la distribució $\mathbf{x}(0)$ d'una seqüència d'ADN qualsevol.

¹En general, un *vector de distribució* és un vector de coordenades no negatives que sumen 1.

²Aquest model de mutació de nucleòtids va ser proposat per M. Kimura a Proceedings of the National Academy of Sciences, 1981.