

Problema d'avaluació continuada.
Assignatura: Algebra lineal.
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Marta Casanellas Rius
Universitat Politècnica de Catalunya

Curs 2020-21



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA**
BARCELONATECH

PROBLEMA D'AVALUACIÓ CONTINUADA

ÀLGEBRA LINEAL. CURS 2020-21

Es pot modelitzar els inicis de propagació d'una epidèmia mitjançant un sistema dinàmic lineal discret. En concret, podem usar un model "SEIR" per a modelitzar els inicis de la propagació de la covid-19 causada pel coronavirus SARS-COV2: en el dia k -èssim, denotem per

- $S(k)$: la població Susceptible de ser infectada
- $E(k)$: la població que ja ha estat Exposada al virus però que encara no contagia (està en període d'incubació)
- $I(k)$: la població Infectada (i infecciosa)
- $R(k)$: la població Recuperada (que ja és immune) o Retirada (morts).

Aquest model consta de tres paràmetres: γ s'anomena taxa de recuperació i és tal que $1/\gamma$ és el període mitjà de recuperació; β s'anomena taxa de transmissió i representa la probabilitat que una persona s'infecti quan entra en contacte amb un infectat; σ és la taxa d'incubació, de manera que $1/\sigma$ és el temps mitjà d'incubació. La *taxa de reproducció* R_0 ve donada per β/γ i representa el nombre de nous infectats que genera cada persona infectada. El sistema dinàmic discret que considerem és $x(k+1) = Ax(k)$ on $x(k) = (S(k), E(k), I(k), R(k))^t$ i la matriu del sistema és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 - \sigma & \beta & 0 \\ 0 & \sigma & 1 - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota: Per resoldre aquest problema podeu usar programari matemàtic (Wolfram Alpha, Python, SAGE, Mathematica, Maple, Matlab/Octave...) i arrodonir les solucions a 2 decimals.

Part 1.

Suposant que $\gamma = 0.2$ i $\sigma = 0.5$ digueu per a quins valors de β la matriu A diagonalitza a \mathbb{R} .

Part 2. Segons l'article de Carcione et al. "A Simulation of a COVID-19 Epidemic Based on a Deterministic SEIR Model" (2020), en els inicis de l'epidèmia a la Llombardia es van poder estimar els valors següents:

$$\beta = 0.74, \quad \gamma = 0.2, \quad \sigma = 0.5.$$

Apliquem aquest model a la població de Catalunya i suposem que a 1 de febrer la població estava repartida com $x(0) = (7500000, 10, 5, 0)$.

- Estudieu si la matriu A diagonalitza a \mathbb{R} .
- Segons aquest model, quin era el repartiment de la població entre Susceptibles, Exposats, Infectats i Recuperats el dia 1 de març (és a dir al cap de 29 dies)?
- Descriu la solució del sistema dinàmic discret $x(k)$ en funció de k i dels valors i vectors propis de la matriu A .
- Si s'hagués seguit aquest model a llarg termini, què hauria passat amb la població de Catalunya?
- Polítiques sanitàries van permetre reduir β a 0.18. Digueu quina és la taxa de reproducció R_0 per a aquest nou model i com es reparteix la població a llarg termini.

Part 3. Demostreu que $R_0 > 1$ si i només si el VAP dominant de A és major que 1.