



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

BARCELONATECH

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

TREBALL FINAL D'ESTUDIS

Resolució numèrica de les equacions de conservació de la massa, quantitat de moviment i energia. Anàlisis de fluxos en geometries complexes

Document:

Memòria

Autor:

Marc Famada Vizcaino

Director /Co-director:

Asensio Oliva Llena

Carlos David Perez Segarra

Titulació:

Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials

Convocatòria:

Pròrroga de primavera, 2021

Resum

El present estudi gira entorn de la implementació de codis en llenguatge C++ capaços de resoldre problemes de dinàmica de fluids i transferència de calor i massa, així com el posterior anàlisi i impressió dels resultats mitjançant MATLAB.

Concretament, al llarg de l'estudi s'indaga en els mètodes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials en derivades parcials, la transferència de calor per conducció i la resolució de l'equació de convecció-difusió i les equacions de Navier-Stokes sota diverses hipòtesis.

Per últim, s'introduceix l'anàlisi de formes complexes mitjançant el *blocked-off method* i el processament digital d'imatges.

Abstract

The present study concentrates on the implementation of C++ codes capable of resolving cases of interest in the field of fluid dynamics and heat and mass transfer, as well as the subsequent analysis and impression of the results using MATLAB.

In terms of content, the study is focused on the numerical methods for solving partial differential equations, the thermal conduction and the resolution of the convection-diffusion equation and the Navier-Stokes equations under certain hypothesis.

Finally, the analysis of complex shapes using image processing and the blocked-off method is introduced.

Índex

I Introducció	1
1 Introducció	2
1.1 Objecte	2
1.2 Abast	2
1.3 Requeriments bàsics	2
1.4 Justificació i utilitat	3
1.5 Background	3
1.6 Estructura del treball	4
II Mètodes numèrics	6
2 Mètodes numèrics	7
2.1 Tècniques de discretització numèrica	7
2.2 Discretització espacial	8
2.3 Discretització temporal	10
2.4 Mètodes de resolució de sistemes d'equacions lineals	12
III Transferència de calor per conducció	18
3 Transferència de calor per conducció en dues dimensions	19
3.1 Deducció de l'equació general de la calor	19
3.2 Discretització de l'equació general de la calor	21
4 Cas bidimensional genèric de transferència de calor per conducció	24
4.1 Plantejament	24
4.2 Règim estacionari	25
4.2.1 Discretització	25

4.2.2	Formulació nodes genèrics	25
4.2.3	Formulació nodes del contorn	30
4.2.4	Nodes dels vèrtexs	31
4.2.5	Mètode de resolució i algoritme	32
4.2.6	Resultats obtinguts	33
4.3	Règim transitori	34
4.3.1	Discretització	34
4.3.2	Formulació nodes genèrics	34
4.3.3	Formulació nodes del contorn i vèrtexs	35
4.3.4	Mètode de resolució i algoritme	35
4.3.5	Resultats obtinguts	35
5	Cas bidimensional de transferència de calor per conducció amb múltiples materials	38
5.1	Descripció del problema	38
5.2	Discretització del domini	39
5.3	Formulació utilitzada	40
5.4	Algoritme	41
5.5	Resultats	42
IV	Equació de convecció-difusió	45
6	Equació de convecció-difusió genèrica	46
6.1	Introducció	46
6.2	Discretització de l'equació de convecció-difusió genèrica en 2D	47
6.3	Esquemes numèrics	49
6.3.1	Central Difference Scheme (CDS)	49
6.3.2	Upwind Difference Scheme (UDS)	50
6.3.3	Exponential Difference Scheme (EDS)	51
6.3.4	Hybrid Difference Scheme (HDS)	51
6.3.5	Power Law Scheme (PLS)	52
7	Resolució de l'equació de convecció-difusió en diferents situacions	54
7.1	Flux paral·lel	54
7.1.1	Condicions de contorn	54

7.1.2	Paràmetres de la simulació	55
7.1.3	Resultats en funció del nombre de Péclat	55
7.1.4	Resultats en funció de l'esquema utilitzat	56
7.2	Flux diagonal	57
7.2.1	Condicions de contorn	57
7.2.2	Paràmetres de la simulació	58
7.2.3	Resultats en funció del nombre de Péclat	58
7.2.4	Resultats en funció de l'esquema utilitzat	60
7.3	Problema de Smith-Hutton	62
7.3.1	Condicions de contorn	62
7.3.2	Paràmetres de la simulació	62
7.3.3	Camp de velocitats i línies de corrent	63
7.3.4	Resultats en funció del nombre de Péclat	63
7.3.5	Resultats en funció de l'esquema utilitzat	66
V	Equacions de Navier-Stokes	68
8	Fractional Step Method	69
8.1	Base teòrica	69
8.2	Definició de la malla	70
8.3	Algoritme del Fractional Step Method	71
8.3.1	Avaluació de $R(\vec{v})$	72
8.3.2	Càlcul distribució de pressió	74
8.3.3	Càlcul distribució de velocitats	75
9	Resolució de les equacions de Navier-Stokes en diferents situacions	77
9.1	Lid-driven cavity	77
9.1.1	Plantejament	77
9.1.2	Resultats	78
9.2	Square cylinder	86
9.2.1	Plantejament	86
9.2.2	Condicions de contorn	86
9.2.3	Resultats	87

VI Cas d'estudi	94
10 Resolució de les equacions de Navier-Stokes en fluxos al voltant de geometries complexes	95
10.1 <i>Blocked-off method</i> i processament digital d'imatges	95
10.2 Cilindre quadrat amb variació de l'angle d'incidència	97
10.2.1 Plantejament	97
10.2.2 Condicions de contorn	98
10.2.3 Resultats	99
10.3 Anàlisi de formes complexes	104
VII Resum de resultats	106
11 Estudi econòmic	107
12 Anàlisi de les implicacions ambientals	108
13 Conclusions i accions futures	109
13.1 Conclusions	109
13.2 Accions futures	109

Índex de figures

2.2.1	Esquema d'un volum de control i els nodes contigus	10
3.1.1	Element de volum i fluxos de calor a través de les superfícies	20
4.2.1	Esquema de la discretització	25
4.2.2	Esquema node genèric	26
4.2.3	Esquema nodes centrals	26
4.2.4	Esquema node franja N	27
4.2.5	Esquema node franja S	27
4.2.6	Esquema node franja E	27
4.2.7	Esquema node franja W	28
4.2.8	Esquema node N-W	28
4.2.9	Esquema node S-W	28
4.2.10	Esquema node N-E	29
4.2.11	Esquema node S-E	29
4.2.12	Esquema node N	30
4.2.13	Esquema node S	30
4.2.14	Esquema node E	30
4.2.15	Esquema node W	31
4.2.16	Esquema node N-W	31
4.2.17	Esquema node S-W	32
4.2.18	Esquema node N-E	32
4.2.19	Esquema node S-E	32
4.2.20	Distribució de temperatures en règim estacionari	33
4.3.1	Esquema node genèric	34
4.3.2	Distribució per t=0s	36
4.3.3	Distribució per t=240s	36
4.3.4	Distribució per t=480s	36
4.3.5	Distribució per t=960s	36

4.3.6	Distribució per $t=1920\text{s}$	36
4.3.7	Distribució per $t=3840\text{s}$	36
4.3.8	Distribució per $t=7680\text{s}$	37
4.3.9	Distribució per $t=15360\text{s}$	37
4.3.10	Distribució per $t=20160\text{s}$	37
4.3.11	Distribució per $t=24000\text{s}$	37
5.1.1	Distribució dels materials i geometria del problema	38
5.2.1	Discretització espacial del domini i localització dels nodes	40
5.5.1	Distribució de temperatures calculada	43
5.5.2	Isotermes de la distribució de temperatures calculada	43
5.5.3	Distribució de temperatures esperada	44
6.2.1	Esquema d'un volum de control genèric. Extret de [19]	47
6.3.1	Central-difference scheme (CDS)	50
6.3.2	Upwind-difference scheme	50
6.3.3	Variació de a_E respecte el nombre de Péclet. Extret de [19]	52
7.1.1	Esquema del cas de flux paral·lel	54
7.1.2	Solució exacta per a diferents nombres de Péclet	56
7.1.3	Solució exacta del cas de flux paral·lel per $P = 1$	57
7.2.1	Esquema del cas de flux diagonal	58
7.2.2	Distribució de ϕ per $P = 1$	59
7.2.3	Distribució de ϕ per $P = 50$	59
7.2.4	Distribució de ϕ per $P = 1000$	60
7.3.1	Esquema del problema de Smith-Hutton	62
7.3.2	Camp de velocitats del problema (en mòdul)	63
7.3.3	Línies de corrent i camp vectorial de velocitats del problema	63
7.3.4	Distribució de ϕ per $\rho/\Gamma = 10$	64
7.3.5	Corbes de nivell per $\rho/\Gamma = 10$	64
7.3.6	Distribució de ϕ per $\rho/\Gamma = 10^3$	65
7.3.7	Corbes de nivell per $\rho/\Gamma = 10^3$	65
7.3.8	Distribució de ϕ per $\rho/\Gamma = 10^6$	65
7.3.9	Corbes de nivell per $\rho/\Gamma = 10^6$	66

8.2.1	Tipus de malles aplicades al FSM. Extret de [20]	71
8.2.2	Esquema d'una malla esglaonada (Staggered mesh)	71
8.3.1	Esquema de la malla de la velocitat u en el càlcul de $R(u)$	73
8.3.2	Esquema de la malla de la velocitat v en el càlcul de $R(v)$	74
8.3.3	Esquema de la malla de u en el càlcul de la velocitat. Extret de [20]	76
8.3.4	Esquema de la malla de v en el càlcul de la velocitat. Extret de [20]	76
9.1.1	Esquema del cas i condicions de contorn. Extret de [20]	77
9.1.2	Distribució de la velocitat en mòdul per a $Re=100$	80
9.1.3	Distribució de les components x i y de la velocitat per a $Re=100$	80
9.1.4	Distribució de la pressió per a $Re=100$	80
9.1.5	Distribució de la velocitat en mòdul per a $Re=1000$	82
9.1.6	Distribució de les components x i y de la velocitat per a $Re=1000$	83
9.1.7	Distribució de la pressió per a $Re=1000$	83
9.1.8	Distribució de la velocitat en mòdul per a $Re=10000$	85
9.1.9	Distribució de les components x i y de la velocitat per a $Re=10000$	85
9.1.10	Distribució de la pressió per a $Re=10000$	85
9.2.1	Esquema del cas i geometria. Extret de [20]	86
9.2.2	Camp de velocitats per a $Re=1$	88
9.2.3	Camp de pressures per a $Re=1$	88
9.2.4	Línies de corrent per a $Re=1$	88
9.2.5	Detalls de les línies de corrent per a diferents nombres de Reynolds inferiors a Re_{cr}	89
9.2.6	Camp de velocitats per a $Re=30$	89
9.2.7	Camp de pressures per a $Re=30$	90
9.2.8	Línies de corrent per a $Re=30$	90
9.2.9	Camp de velocitats per a $Re=60$	91
9.2.10	Camp de pressures per a $Re=60$	91
9.2.11	Línies de corrent per a $Re=60$	91
9.2.12	Camp de velocitats per a $Re=200$	92
9.2.13	Camp de pressures per a $Re=200$	92
9.2.14	Línies de corrent per a $Re=200$	92
9.2.15	Detalls de les línies de corrent per a diferents nombres de Reynolds	93
9.2.16	Línies de corrent esperades per a (a) $Re=1$; (b) $Re=30$; (c) $Re=60$; (d) $Re=200$. . .	93

10.1.1	Modelització d'una geometria regular mitjançant el <i>blocked-off method</i> . Extret de [26]	96
10.1.2	Modelització d'una geometria irregular mitjançant el <i>blocked-off method</i> . Extret de [26]	96
10.2.1	Esquema del cas i geometria.	98
10.2.2	Camp de velocitats per a $\alpha = 0^\circ$	99
10.2.3	Camp de pressions per a $\alpha = 0^\circ$	99
10.2.4	Línies de corrent per a $\alpha = 0^\circ$	100
10.2.5	Camp de velocitats per a $\alpha = 10^\circ$	100
10.2.6	Camp de pressions per a $\alpha = 10^\circ$	100
10.2.7	Línies de corrent per a $\alpha = 10^\circ$	101
10.2.8	Camp de velocitats per a $\alpha = 30^\circ$	101
10.2.9	Camp de pressions per a $\alpha = 30^\circ$	101
10.2.10	Línies de corrent per a $\alpha = 30^\circ$	102
10.2.11	Camp de velocitats per a $\alpha = 45^\circ$	102
10.2.12	Camp de pressions per a $\alpha = 45^\circ$	102
10.2.13	Línies de corrent per a $\alpha = 45^\circ$	103
10.2.14	Línies de corrent en un cicle de formació de vòrtexs per $\alpha = 30^\circ$	103
10.2.15	Cicle de formació de vòrtexs per un angle $alpha = 30^\circ$.	104
10.3.1	Camp de velocitats d'un perfil NACA 4412	104
10.3.2	Camp de pressions d'un perfil NACA 4412	104
10.3.3	Camp de velocitats al voltant de l'illa de Tenerife	105
10.3.4	Camp de pressions al voltant de l'illa de Tenerife	105

Índex de taules

5.1.1	Propietats termofísiques dels materials	39
5.3.1	Coeficients de les equacions en els nodes del contorn	41
5.3.2	Coeficients de les equacions en els nodes interns de frontera	41
6.1.1	Valors de ϕ , Γ_ϕ , \dot{s}_ϕ per cada equació. Extret de [18]	46
6.3.1	Fórmula de la funció $A(P)$ per cada esquema	53
7.2.1	Error relatiu per $P = 1$ segons cada un dels mètodes	60
7.2.2	Error relatiu per $P = 50$ segons cada un dels mètodes	61
7.2.3	Error relatiu per $P = 1000$ segons cada un dels mètodes	61
7.3.1	Valors esperats i resultats obtinguts amb cada esquema per $\rho/\Gamma = 10$	66
7.3.2	Valors esperats i resultats obtinguts amb cada esquema per $\rho/\Gamma = 10^3$	67
7.3.3	Valors esperats i resultats obtinguts amb cada esquema per $\rho/\Gamma = 10^6$	67
9.1.1	Valors esperats i obtinguts de u/u_{ref} per a $Re = 100$	79
9.1.2	Valors esperats i obtinguts de v/u_{ref} per a $Re = 100$	79
9.1.3	Valors esperats i obtinguts de u/u_{ref} per a $Re = 1.000$	81
9.1.4	Valors esperats i obtinguts de v/u_{ref} per a $Re = 1.000$	82
9.1.5	Valors esperats i obtinguts de u/u_{ref} per a $Re = 10.000$	84
9.1.6	Valors esperats i obtinguts de v/u_{ref} per a $Re = 10.000$	84
11.1	Desglossament del cost total de l'estudi	107

Part I

Introducció

Capítol 1

Introducció

1.1 Objecte

Els objectius d'aquest projecte són l'estudi de la resolució numèrica de problemes relacionats amb la Dinàmica de Fluids i la Transferència de Calor i Massa, el desenvolupament de codis de simulació capaços de resoldre aquest tipus de problemes i la seva aplicació en la resolució de casos d'interès en l'àmbit de l'enginyeria aeroespacial.

1.2 Abast

L'abast d'aquest projecte es pot definir mitjançants els següents punts:

- Resolució numèrica de problemes de transferència de calor en règim transitori i domini unidimensional/bidimensional amb la implementació del codi pertinent.
- Aplicació del codi per a resoldre casos d'interès en l'àmbit de l'enginyeria aeronàutica pel que fa a transferència de calor per conducció.
- Estudi i resolució numèrica de l'equació de Convecció-Difusió amb la implementació del codi pertinent.
- Estudi i resolució numèrica de les equacions de Navier-Stokes amb la implementació del codi pertinent.
- Validació i verificació dels codis.
- Aplicació dels codis en la resolució d'un problema d'interès en l'àmbit de l'enginyeria aeroespacial.
- Anàlisi i estudi dels resultats obtinguts.

1.3 Requeriments bàsics

- La implementació i optimització de codis en C++ per resoldre els problemes que són objecte d'estudi del treball.

1.4 Justificació i utilitat

Amb els avanços en la tecnologia en les últimes dècades i l'augment de la complexitat dels anàlisis requerits en camps de l'enginyeria aeronàutica com l'anàlisi estructural, la transferència de calor o la dinàmica de fluids, la resolució tradicional en paper i llapis ha quedat obsoleta i en molts casos resulta impossible la resolució analítica.

Una de les alternatives al càcul tradicional és la experimentació amb prototips físics, els quals requereixen d'una construcció i les corresponents modificacions a fer a posteriori dels anàlisis. L'inconvenient d'aquest mètode és que sovint resulta car i laboriós.

És per això que ha guanyat molta importància l'anàlisi mitjançant mètodes numèrics. Aquests mètodes no resolen les equacions característiques mitjançant mètodes analítics sinó numèrics i tenen l'avantatge de poder predir el comportament d'un model abans de realitzar qualsevol tipus d'experiment físic.

Actualment, els mètodes numèrics son utilitzats en molt camps d'enginyeria, entre els quals destaca l'enginyeria aeroespacial, per la seva especial complexitat en anàlisis tant estructurals com de dinàmica de fluids i transferència de calor i massa.

1.5 Background

Es considera que la ciència de la dinàmica de fluids es va originar a l'antiga Grècia aproximadament a l'any 350 aC de la mà del filòsof Aristòtil, el qual va establir el concepte de continu i la idea de resistència aerodinàmica entre un cos i un fluid. Un altre gran pensador de l'antiga Grècia, Arquimedes, va introduir per primera vegada conceptes en l'estàtica de fluids, així com una idea de la pressió en un fluid.

Un llarg període de temps va passar sense contribucions rellevants a nivell científic, fins al naixement de Leonardo da Vinci l'any 1452. Destaca per ser la primera persona en estudiar la conservació de la massa i en establir l'equació de continuïtat ($A V = \text{const}$).

El següent gran avanç en la dinàmica de fluids es va produir al segle XVII. A mitjans d'aquest segle, Edme Mariotte i Christian Huygens, de forma paral·lela, van aconseguir demostrar experimentalment que la força exercida per un fluid sobre un sòlid és proporcional al quadrat de la velocitat del fluid, i viceversa.

Posteriorment, a finals del segle XVII amb la publicació dels llibres *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Isaac Newton va indagar en diferents temàtiques científiques, entre elles la dinàmica de fluids. En aquesta matèria destaca la primera derivació teòrica de l'equació de la resistència aerodinàmica ($D \propto \rho S V^2$), l'expressió de la tensió tallant en qualsevol punt d'un fluid en funció del gradient de velocitat ($\tau = \mu \frac{dV}{dn}$), en els denominats fluids "newtonians", o la força aerodinàmica en una placa plana en funció de l'angle d'atac ($R = \rho V^2 S \sin^2 \alpha$).

La següent contribució rellevant va arribar a principis del segle XVIII de la mà de Daniel Bernoulli, el qual va demostrar que en un fluid en moviment la pressió disminueix a mesura que la velocitat augmenta. Aquest descobriment va donar lloc a l'equació de Bernoulli ($p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$), probablement una de les equacions més famoses en la matèria.

A mitjans del segle XVIII, va arribar la contribució més important en la dinàmica de fluids fins al moment, ja que es va marcar l'inici de la dinàmica de fluids teòrica. Leonhard Euler va publicar entre els anys 1752 i 1755 tres articles en els quals deduïa les equacions governants per a un fluid no viscós, tant incompressible com compressible.

No va ser fins a mitjans del segle XIX, però, que Louis Marie Henri Navier i George Gabriel Stokes van ser capaços d'entendre con interactuava la fricció en el flux d'un fluid i van deduir les equacions governants per a fluids viscosos, més conegudes com a equacions de Navier-Stokes.

Posteriorment a aquests contribucions, foren concebudes nombroses aportacions, així com l'estudi del flux turbulent per part de Osborne Reynolds o el teorema de Kutta-Jukowski, entre d'altres, que malgrat la seva importància queden fora de l'abast del present estudi.

Pel que fa a la Dinàmica de Fluids Computacional, en anglès *Computational Fluid Dynamics* (CFD), el seu desenvolupament es remunta a principis de la dècada de 1930, amb els esforços de múltiples investigadors per resoldre el problema de Riemann i les equacions de Navier-Stokes. Es considera que el primer càlcul CFD va ser dut a terme per A. Thom l'any 1933 en simular el flux al voltant d'un cilindre a baixes velocitats.

A la dècada de 1940 es van incorporar per primera vegada mètodes de diferències finites per resoldre equacions diferencials en derivades parcials amb el primer ordinador electrònic

Durant els anys 60 la divisió teòrica de la NASA va contribuir amb varis mètodes numèrics que actualment són utilitzats en CFD: *Particle-In-Cell* (PIC), *Marker-And-Cell* (MAC), mètodes de *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE), etc.

L'any 1980, es va produir un altre esdeveniment important en CFD, amb la publicació del llibre *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, de l'autor Suhas V. Patankar, considerat un dels llibres més influents en la literatura de CFD.

Finalment, a partir de la dècada dels 80, es van començar a desenvolupar els primers codis comercials, els quals permetien modelar qualsevol camp de flux especificant la geometria i les especificacions necessàries. Aquests programes van ser acceptats per la gran majoria de companyies per davant dels codis propis i actualment són àmpliament utilitzats en multitud de companyies i sectors. [1] - [3]

1.6 Estructura del treball

El present estudi gira entorn de la resolució de les equacions de conservació de la massa, la quantitat de moviment i l'energia i la seva aplicació en la resolució de problemes relacionats

amb la dinàmica de fluids i la transferència de calor i massa. A continuació, es realitza un breu recorregut per totes les parts i temàtiques tractades.

En primer lloc, a la part II, s'ha resumit la teoria sobre mètodes numèrics aplicats a la resolució de problemes de dinàmica de fluids i transferència de calor i massa.

A la part III s'ha realitzat l'estudi de la resolució de problemes de transferència de calor per conducció i s'ha aplicat en la resolució de problemes en dues dimensions i règim transitori.

A continuació, a la part IV s'ha avançat a l'estudi de la resolució de l'equació de convecció-difusió, i en concret la resolució dels casos de flux paral·lel, flux diagonal i el problema de Smith-Hutton.

A la part V s'ha indagat en la resolució de les equacions de Navier-Stokes per a un fluid incompressible i viscositat constant i la seva aplicació en els problemes de *Lid-driven Cavity* i *Square Cylinder*.

Seguidament, la part VI, continuant amb la resolució de les equacions de Navier-Stokes, tracta sobre la utilització del reconeixement d'imatges per a resoldre problemes mitjançant el *Blocked-off method*. En concret, s'ha estudiat el flux al voltant d'un cilindre quadrat en funció de l'angle d'incidència i s'han obert les portes a l'estudi de formes més complexes.

Finalment, a la part VII es realitza l'estudi econòmic i ambiental del projecte i s'exposen les conclusions i les accions futures, per acabar amb la bibliografia.

Part II

Mètodes numèrics

Capítol 2

Mètodes numèrics

La cerca de solucions a problemes reals ha captivat als matemàtics des dels principis dels temps. Malgrat que pot ser possible trobar solucions exactes a problemes senzills, són majoria aquells problemes que no poden ser resolts de manera exacta, és a dir, analíticament. Per definició, una solució analítica és una solució exacta que es pot obtenir directament de les variables associades al problema mitjançant una expressió matemàtica.

Així doncs, els mètodes numèrics resulten molt útils per tal de sobrepassar les limitacions del càcul analític. Una solució numèrica és una aproximació de la solució exacta. Tot i no tractar-se de solucions exactes, les solucions numèriques poden ser tant precises com es vulgui o com la tecnologia computacional utilitzada ho permeti. [4]

La Dinàmica de Fluids Computacional (CFD), precisament, gira entorn a l'aplicació de mètodes numèrics per a la resolució de les equacions que governen el moviment dels fluids. Qualsevol aplicació de CFD en la resolució d'un problema de dinàmica de fluids comparteix la següent metodologia: [5]

1. Equacions matemàtiques que descriuen el flux del fluid, normalment equacions diferencials en derivades parcials.
2. Discretització de les equacions per tal d'obtenir-ne una analogia numèrica.
3. Discretització del domini formant una malla finita d'elements.
4. Definició de les condicions inicials i les condicions de contorn del problema.
5. Mètode de resolució de les equacions discretitzades al llarg del domini.

En els següents apartats es detallen les parts anteriors, en excepció de les equacions matemàtiques i les condicions inicials i de contorn que es detallaran específicament en cada un dels problemes considerats.

2.1 Tècniques de discretització numèrica

Per a resoldre les equacions fonamentals, és necessari en primera instància generar unes equacions numèriques anàlogues que puguin ser resoltes mitjançant un ordinador. Les tècniques de discretització més utilitzades són: [5]

1. Mètode de diferències finites (FDM): Aquest mètode utilitza la sèrie de Taylor per expressar les derivades d'una variable com la diferència entre els valors d'aquesta variable en diferents punts de l'espai o el temps.
2. Mètode d'elements finits (FEM): En aquest mètode, el domini del fluid considerat es divideix en un nombre finit de subdominis anomenats elements. Per cada element, es defineix la variació de cada variable mitjançant una funció senzilla. Per cada una de les variables, el sumatori de la variació d'aquesta variable dins de cada element s'utilitza per descriure la totalitat del domini.
3. Mètode de volums finits (FVM): En aquest mètode, el domini es discretitza en un nombre finit de volums o cel·les dins dels quals les propietats del fluid es consideren constants. El centroïde de cada volum és el punt de referència en el qual es pretén discretitzar l'equació diferencial en derivades parcials. Per tal de fer-ho, s'utilitzen els valors de les variables en les cel·les veïnes per interpolar els valors de les variables i les derivades parcials en les cares frontereres entre cada parella de nodes. Finalment, s'aconsegueix un sistema d'equacions algebraiques, de tantes equacions com nodes, que podrà ser resolt mitjançant un *solver*.

El mètode de volums finits (FVM) és actualment el més popular i utilitzat en els camps de la mecànica de fluids i la transferència de calor i massa ja que presenta alguns avantatges, tals com la facilitat del seu ús en malles estructurades/no estructurades en comparació amb les altres alternatives o el fet que el flux numèric es conserva entre una cel·la i les cel·les veïnes, entre d'altres. [6]

És per aquests motius que s'utilitzarà aquest mètode de discretització al llarg de l'estudi.

2.2 Discretització espacial

En l'aplicació del mètode de volums finits (FVM), és important tenir en compte en primer lloc la malla utilitzada, ja que afectarà directament als resultats obtinguts i a la precisió d'aquests, així com a la dificultat de programació i l'execució dels programes.

Pel que fa a la naturalesa de la malla, aquesta pot ser: [7]

- Estructurada. Es tracta d'una malla en la que les cel·les (quadrilàters en 2D i hexaedres en 3D) estan distribuïdes de forma ordenada en una formació $I \times J$ (o $I \times J \times K$), de manera que per a qualsevol node és possible conèixer els nodes contigus de forma immediata (augmentant o disminuint els valors dels índexs en 1 posició). [8]

Els avantatges de les malles estructurades són la seva simplicitat i eficiència. Per una banda, requereixen significativament menys memòria que una malla desestructurada amb el mateix nombre d'elements degut a la connectivitat regular dels nodes. Això també es tradueix en un estalvi de temps, en simplificar el procés d'identificació dels nodes veïns.

Per altra banda, per a geometries complexes, la generació de la malla pot esdevenir molt

complicada o fins i tot impossible. A més, per un mateix problema, una malla estructurada requerirà típicament un major nombre d'elements.

En funció de la forma dels elements d'una malla estructurada, es poden distingir les següents subclassificacions: [9]

- Malla estructurada cartesiana. En aquest tipus de malla les línies que determinen el contorn de les cel·les son sempre paral·leles als eixos de coordenades.
- Malla estructurada curvilínia. En aquest tipus de malla les línies de contorn poden ser no paral·leles als eixos cartesianos amb l'objectiu d'adaptar-se a les condicions de contorn de la geometria.

Una malla estructurada també es pot classificar en:

- Malla estructurada ortogonal. En aquest tipus de malla, totes les línies de frontera entre nodes es creuen amb un angle recte.
- Malla estructurada no ortogonal. En aquest tipus de malla, les línies de contorn no sempre es creuen amb un angle de 90° .
- No estructurada. Es diu d'aquelles malles en les quals la connectivitat entre elements no es pot obtenir de forma directa, sinó que s'ha de comptar amb una estructura de dades que permeti conèixer les connectivitats de cada un.

Per tant, això permet una major flexibilitat en la forma dels elements i conseqüentment fa possible adaptar la malla a qualsevol geometria.

No obstant això, també es requereix major memòria i potència computacional pel fet d'haver de recórrer a un procés més complex a l'hora d'avaluar la connectivitat entre elements i degut a la major complexitat de les equacions a resoldre respecte d'una malla estructurada.

Pel que fa a la forma dels seus elements, una malla no estructurada pot ser:

- Malla triangular/tetraèdrica. Els elements son triangles en dues dimensions i tetraedres en tres dimensions.
- Malla quadrilàtera/hexaèdrica. Els elements que la conformen son quadrilàters en dues dimensions i hexaedres en tres dimensions.
- Malla poligonal/polièdrica. Els elements son polígons en dues dimensions i poliedres en tres dimensions.
- Híbrida o *block-structured*. En aquest tipus de malla es descompon el domini en un nombre finit de subdominis. En cada un dels subdominis es forma una malla estructurada tot i que en conjunt es forma una malla no estructurada.

La malla utilitzada al llarg de l'estudi és estructurada, cartesiana i ortogonal o híbrida amb cares coincidents de les cel·les. Cada volum de control té unes dimensions de $\Delta x \cdot \Delta y$. En l'anàlisi de cada volum de control, denominat P , s'anomenen els quatre nodes contigus com a E , W , N i S , en funció de la seva posició respecte del node P . Veure figura [2.2.1]. Les cares entre el volum de control i els volums contigus es denominen per lletres minúscules (e , w , n i s , respectivament). [10]

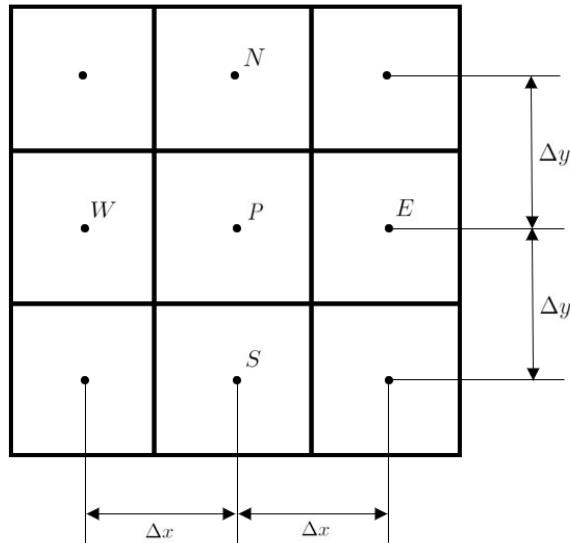


Figura 2.2.1: Esquema d'un volum de control i els nodes contigus

2.3 Discretització temporal

Per tal de realitzar una simulació en règim transitori, no és suficient amb discretitzar les equacions governants en el domini espacial, sinó que és absolutament necessària la discretització temporal. [11]

Les equacions que descriuen l'evolució temporal d'una variable genèrica ϕ tenen la següent forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi) \quad (2.3.1)$$

La discretització temporal de primer ordre d'aquesta equació és:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = f(\phi^{n+1}, \phi^n) \quad (2.3.2)$$

En aquest punt es pot expressar l'equació d'una forma alternativa introduint el factor β , el qual pot prendre valors entre 0 i 1 i resulta molt útil per discernir entre els diferents tipus d'esquemes temporals.

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \beta f(\phi^{n+1}) + (1 - \beta) f(\phi^n) \quad (2.3.3)$$

En funció del valor que pren el factor β , es poden obtenir els diferents esquemes temporals, els més distintius dels quals es troben detallats a continuació.

- Esquema explícit. En el cas que β pregui el valor de 0, ens trobarem davant d'un esquema explícit, ja que per cada instant de temps es pot obtenir el nou valor de la variable de forma explícita a partir dels valors en instants de temps passats:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \cdot f(\phi^n) \quad (2.3.4)$$

Gràcies a això, no és necessari iterar per a calcular els valors de les variables en els nous instants de temps. És per això que un esquema explícit és més fàcil d'implementar i requereix una menor potència computacional i temps de càlcul que un esquema implícit.

No obstant això, un esquema explícit precisa de Δt relativament petits per tal de sobrepassar els problemes d'estabilitat que presenta.

En termes generals, una funció d'aspecte $\phi^{n+1} = a \phi^n$ com la que resulta d'un esquema explícit té les següents característiques d'estabilitat:

- Estable si $|a| \leq 1$
- Marginalment estable si $|a| = 1$
- Inestable si $|a| \geq 1$
- Esquemes implícits. Per $\beta \neq 0$, es troba el rang d'esquemes implícits, en els quals no és possible obtenir el valor de la variable en el nou instant de temps únicament a partir dels valors passats d'aquesta mateixa variable. És per això que els esquemes implícits requereixen un procés iteratiu en el càlcul de les variables en cada instant de temps, per tal que el valor calculat convergeixi en un valor. Els esquemes implícits més característics són:
 - Esquema totalment implícit. Aquest esquema es dona per al cas particular de $\beta = 1$. En aquest esquema, els termes de f són únicament funció de les variables en l'instant de temps que s'està intentant calcular, ϕ^{n+1} .

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \cdot f(\phi^{n+1}) \quad (2.3.5)$$

Aquest esquema presenta com a avantatges un menor limitació en els Δt utilitzats, ja que no s'ha de satisfer cap condició d'estabilitat.

Per altra banda, l'esquema totalment implícit és més difícil d'implementar, ja que s'ha d'inserir el procés iteratiu en el càlcul de les variables noves, requereix una major potència computacional i compta amb uns temps de càlcul majors.

- Esquema de Crank-Nicolson. Aquest esquema es dona pel cas particular de $\beta = \frac{1}{2}$. L'equació d'aquest esquema és una combinació dels esquemes explícit i implícit:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \cdot \frac{f(\phi^{n+1}) + f(\phi^n)}{2} \quad (2.3.6)$$

Aquest esquema combina els avantatges i inconvenients dels dos mètodes tractats anteriorment i a diferència d'aquests és un esquema de segon ordre en temps.

2.4 Mètodes de resolució de sistemes d'equacions lineals

Per poder resoldre el sistema d'equacions lineals algebraiques implícites generades en la discretzació, és necessari utilitzar un mètode de resolució, en anglès *solvers*. [11]

Els sistemes d'equacions lineals, tenen la següent estructura:

$$A x = b \quad (2.4.1)$$

La solució per aquest tipus de sistemes d'equacions és:

$$x^{sol} = A^{-1}b \quad amb \quad ||Ax^{sol} - b|| \leq \varepsilon \quad (2.4.2)$$

No obstant, existeixen varis problemes que fan que calcular la inversa de la matriu A no sigui una bona estratègia. En primer lloc, les matrius no sempre són invertibles (matrius no quadrades, singulars). Per altra banda, tot i tractar-se d'una matriu A invertible, sovint és excessivament costós a nivell computacional calcular-ne la inversa.

És per això que s'utilitzen mètodes de resolució específics per resoldre els sistemes d'equacions resultants. Existeixen dos grans blocs de mètodes de resolució de sistemes d'equacions lineals: els mètodes directes i els mètodes iteratius.

- Mètodes directes. Són aquells en els quals es calcula la solució en un nombre finit d'operacions. Aquests mètodes es basen en la factorització de la matriu A en k matrius A_i "senzilles" [12]

$$A x = A_1 A_2 \underbrace{\dots A_k}_{\substack{x_2 \\ x_1}} x = b \quad (2.4.3)$$

per tal de resoldre k sistemes senzills d'equacions

$$A_1 x_1 = b \quad \longrightarrow \quad A_2 x_2 = x_1 \quad \longrightarrow \quad \dots \quad \longrightarrow \quad A_k x = x_{k-1} \quad (2.4.4)$$

Els mètodes directes d'interès son:

- Diagonalització. Aquest mètode es basa en la diagonalització de la matriu A i serà útil en els problemes en què A sigui fàcilment diagonalitzable. La solució d'un sistema d'equacions $Ax = b$, sent A una matriu diagonal, és:

$$x = \left(\frac{b_1}{a_{11}} \frac{b_2}{a_{22}} \dots \frac{b_n}{a_{nn}} \right)^T \quad (2.4.5)$$

- Factorització en LU. Aquest mètode es basa en la factorització d'una matriu quadrada i no singular A en dues matrius, L (matriu triangular inferior) i U (matriu triangular superior), de manera que:

$$Ax = L \underbrace{U x}_{x_1} = b \quad (2.4.6)$$

i la solució es pot obtenir resolent

$$L x_1 = b \quad \longrightarrow \quad U x = x_1 \quad (2.4.7)$$

- Factorització de Cholesky. Aquest mètode es pot aplicar en matrius quadrades, simètriques i definides positives i consisteix en descomposar la matriu A en L (matriu triangular inferior) i L^T (matriu triangular inferior transposada), transformant el sistema d'equacions com:

$$Ax = L L^T x = b \quad (2.4.8)$$

La solució del sistema es pot obtenir resolent

$$L x_1 = b \quad \longrightarrow \quad L^T x = x_1 \quad (2.4.9)$$

- TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm). És un mètode basat en la factorització en LU aplicada a la resolució de sistemes amb una matriu A tridiagonal. Aquest tipus de matrius és bastant recurrent, ja que resulta de la discretització unidimensional d'equacions diferencials en derivades parcials. En aquest tipus de problemes s'ha de resoldre un sistema amb equacions de la forma:

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = r_i \quad (2.4.10)$$

L'algoritme consta de dues etapes: [13]

1. La primera etapa consisteix en avaluar els coeficients γ i ρ des de $i = 1$ fins a $i = N$, sent NxN les dimensions de la matriu:

$$\gamma_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \quad (2.4.11a)$$

$$\rho_i = \frac{r_i - a_i \rho_{i-1}}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \quad (2.4.11b)$$

2. La segona etapa consisteix en avaluar les incògnites des de $i = N$ fins a $i = 1$:

$$\phi_i = \rho_i - \gamma_i \phi_{i+1} \quad (2.4.12)$$

La condició que ha de complir l'algoritme per ser estable és $|b_i| > |a_i| + |c_i|$, per a qualsevol i .

Tot i que els mètodes directes poden trobar la solució de forma més senzilla, es troben limitats per la naturalesa de la matriu A i pel nombre d'elements d'aquesta. És per això que s'utilitzen mètodes iteratius.

- Mètodes iteratius. Són aquells en els quals es realitzen estimacions de la solució iterativament fins a arribar a una aproximació molt exacta de la solució. Aquests mètodes són àmpliament utilitzats en CFD, degut a la no-linealitat de les equacions i el gran nombre d'incògnites, els quals no permeten l'ús eficient de mètodes directes.

Alguns dels mètodes iteratius més comuns són:

- Mètode de Jacobi. És possiblement el mètode iteratiu més senzill que es pot plantejar. L'estrategia que segueix el mètode és la realitzar una estimació de totes les incògnites i recalcular per cada equació del sistema una d'aquestes incògnites a partir dels valors estimats de les altres incògnites. En format matricial, aquest raonament es pot escriure com:

$$D x^{(k+1)} + (A - D) x^{(k)} = b \quad (2.4.13)$$

on k correspon a una iteració concreta, D és la matriu formada amb els elements de la diagonal principal de la matriu A, i $(A - D)$ simbolitza la matriu formada pels elements fora de la diagonal.

Aleshores, és possible obtenir la solució aproximada en cada iteració per mitjà de:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} [b - (A - D)x^{(k)}] \quad (2.4.14)$$

on D^{-1} és la inversa de la matriu diagonal D, la qual és immediata.

A la pràctica, es potaprofitar que la matriu D és una matriu diagonal per calcular seqüencialment els elements de $x^{(k+1)}$ amb la següent fórmula:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.15)$$

El mètode de Jacobi és convergent per sistemes d'equacions lineals amb diagonal estrictament dominant. [14]

- Mètode de Gauss-Seidel. El mètode de Gauss-Seidel és un mètode iteratiu per a la resolució d'equacions lineals. Presenta una gran similitud amb el mètode de Jacobi, però a diferència d'aquest, utilitza els valors recalculats de les variables anteriors dins d'una mateixa iteració en comptes dels valors estimats a l'inici de la iteració.

En aquest mètode, la matriu A es descompon en les matrius D, L i U, que són una matriu diagonal, una matriu triangular estrictament inferior i una matriu triangular estrictament superior, respectivament. Si plantegem el sistema d'equacions en format matricial, aquest esdevé:

$$(D + L)x^{(k+1)} + Ux^{(k)} = b \quad (2.4.16)$$

La solució en cada una de les iteracions es pot obtenir mitjançant la següent fórmula matricial:

$$x^{(k+1)} = (D + L)^{-1} (b - Ux^{(k)}) \quad (2.4.17)$$

Deixant de banda la formulació matricial, aprofitant que el terme $(D + L)$ correspon a una matriu triangular inferior, es poden calcular els elements de $x^{(k+1)}$ de manera seqüencial utilitzant la tècnica de *forward substitution* mitjançant la següent fórmula:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.18)$$

El mètode de Gauss-Seidel és convergent si la matriu A és simètrica i definida positiva

o alternativament si és una matriu amb diagonal dominant. [15]

- Mètode de sobre-relaxació successiva (SOR). Aquest mètode és una variant del mètode de Gauss-Seidel que permet assolir una convergència més ràpida mitjançant un factor de relaxació w que pot prendre valors entre 1 i 2, essent $w = 1$ el cas particular del mètode de Gauss-Seidel. El sistema d'equacions després de la descomposició de matrius i l'addició del factor w esdevé:

$$(D + w L) x^{(k+1)} + [w U + (w - 1) D] x^{(k)} = w b \quad (2.4.19)$$

Aquest sistema pot ser resolt en cada iteració utilitzant la següent fórmula:

$$x^{(k+1)} = (D + w L)^{-1} \left(w b - [w U + (w - 1) D] x^{(k)} \right) \quad (2.4.20)$$

De mateixa similar al mètode de Gauss-Seidel, es pot aprofitar la naturalesa de la matriu $(D + w L)$ per calcular els elements de $x^{(k+1)}$ de manera seqüencial:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - w) x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.21)$$

La convergència d'aquest mètode s'assegura si A és una matriu simètrica i definida positiva. [16]

- TDMA line-by-line. Aquest mètode és una combinació del TDMA i el Gauss-Seidel. Es pot utilitzar com una extrapolació del mètode TDMA a problemes bidimensionals en els que s'ha de resoldre un sistema d'equacions diferencials amb derivades parcials discretitzades de la forma:

$$a_P \phi_P + a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S = b_P \quad (2.4.22)$$

Aquest mètode utilitza un TDMA per resoldre cada fila de nodes de la malla, mentre que els nodes d'altres files que apareixen a les equacions es consideren coneguts. Per tant, a la pràctica les equacions que es resolen en cada iteració per cada fila tenen la mateixa forma de l'equació [2.4.10]:

$$\underbrace{a_W}_{a} \phi_W + \underbrace{a_P}_{b} \phi_P + \underbrace{a_E}_{c} \phi_E = \underbrace{b_P - a_N \phi_N - a_S \phi_S}_{r} \quad (2.4.23)$$

Concretament, ϕ_S correspon al vector dels valors ϕ de la fila anterior i ϕ_N correspon al vector dels valors ϕ de l'última iteració de la fila següent. [17]

L'algoritme per a cada fila i iteració és idèntic al TDMA:

1. La primera etapa consisteix en avaluar els coeficients γ i ρ des de $i = 1$ fins a $i = N$, sent NxN les dimensions de la matriu:

$$\gamma_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \quad (2.4.24a)$$

$$\rho_i = \frac{r_i - a_i \rho_{i-1}}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \quad (2.4.24b)$$

2. La segona etapa consisteix en avaluar les incògnites des de $i = N$ fins a $i = 1$:

$$\phi_i = \rho_i - \gamma_i \phi_{i+1} \quad (2.4.25)$$

Part III

Transferència de calor per conducció

Capítol 3

Transferència de calor per conducció en dues dimensions

3.1 DeduCCIÓ de l'equació general de la calor

A continuació, es mostra la deducció de l'equació general de calor per a un element de volum de dimensions $dxdy$ i profunditat unitària.

Es parteix del primer principi de la termodinàmica per a un procés quasiestàtic i en el cas particular de treball nul:

$$dU = \delta Q \longrightarrow dU = \delta Q_S + \delta Q_V \quad (3.1.1)$$

En aquesta equació, dU simbolitza la variació d'energia interna en l'element de volum; δQ_S , la calor neta intercanviada entre l'element i l'exterior a través de les superfícies; i δQ_V , la calor absorbida per les fonts internes de calor.

Pel que fa a la variació d'energia interna, considerant un sòlid incompressible:

$$dU = dC dT = \rho c dV dT \quad (3.1.2)$$

On c és la calor específica del sòlid ($c_V = c_P = c$), $dV = dx \cdot dy \cdot 1$, i dT és el diferencial total de la temperatura.

El diferencial total de la temperatura $T = T(x, y, t)$ es mostra a l'equació [3.1.3]. Es pot observar que els termes de la variació espacial es cancel·len degut a que l'element de volum es manté fix en l'espai.

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}^0 dx + \frac{\partial T}{\partial y}^0 dy + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (3.1.3)$$

Finalment, la variació de l'energia interna s'expressa com:

$$dU = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt \quad (3.1.4)$$

Pel que fa a la calor absorbida per les fonts internes de calor, es pot expressar en funció de l'energia calorífica subministrada per unitat de volum i temps:

$$\delta Q_V = \dot{q}_V dx dy dt \quad (3.1.5)$$

Per últim, es dedueix l'expressió de la calor intercanviada amb l'exterior a través de les superfícies límits (δQ_S) de l'element de volum. Els fluxos de calor es mostren a la figura [3.1.1].

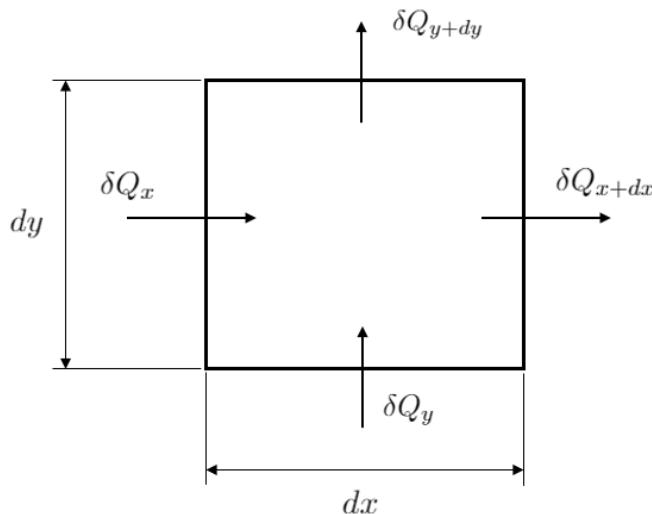


Figura 3.1.1: Element de volum i fluxos de calor a través de les superfícies

Tenint en compte que el criteri de signes estableix el sentit positiu quan la calor entra, el terme δQ_S esdevé:

$$\delta Q_S = \delta Q_x - \delta Q_{x+dx} + \delta Q_y - \delta Q_{y+dy} \quad (3.1.6)$$

Cada un d'aquests termes es pot expressar en funció de l'energia calorífica subministrada per unitat d'àrea i temps.

$$\delta Q_S = (\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}) dy dt + (\dot{q}_y - \dot{q}_{y+dy}) dx dt \quad (3.1.7)$$

Si desenvolupem els termes \dot{q}_{x+dx} i \dot{q}_{y+dy} en sèrie de Taylor fins a primer ordre obtenim les següents expressions:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{x+dx} &= \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \\ \dot{q}_{y+dy} &= \dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy\end{aligned}\quad (3.1.8)$$

Finalment, introduint les expressions [3.1.8] a [3.1.7] s'obté l'expressió final del terme δQ_S .

$$\delta Q_S = - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} \right) dx dy dt \quad (3.1.9)$$

Introduint els tres termes obtinguts (equacions [3.1.4], [3.1.5] i [3.1.9]) a l'equació [3.1.1] s'obté l'equació general de la calor:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} \right) + \dot{q}_V \quad (3.1.10)$$

Introduint la llei de Fourier ($\dot{q}_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$) també es pot obtenir una expressió anàloga de l'equació general de la calor en funció de la llei de temperatura:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q}_V \quad (3.1.11)$$

3.2 Discretització de l'equació general de la calor

Es parteix de l'equació general de la calor modificada (equació [3.1.11]). Per raons de nomenclatura, a partir d'aquest punt el terme \dot{q}_V s'expressarà com a S :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \quad (3.2.1)$$

El terme S correspon a la font/embornal (*source*) i per motius de convergència es linealitzarà com: $S = S_P \cdot T_P + S_C$.

Es pot trobar l'equació discretitzada integrant l'equació [3.2.1] al llarg del volum de control i en l'interval de temps entre t i $t + \Delta t$. A continuació es detalla la integració de cada terme de l'equació:

$$\int_w^e \int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt dy dx = \rho c \Delta x \Delta y (T_P - T_P^0) \quad (3.2.2)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\lambda (T_E - T_P)}{\Delta x} - \frac{\lambda (T_P - T_W)}{\Delta x} \right] \Delta y dt \quad (3.2.3)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\lambda (T_N - T_P)}{\Delta y} - \frac{\lambda (T_P - T_S)}{\Delta y} \right] \Delta x dt \quad (3.2.4)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n S dt dy dx = \int_t^{t+\Delta t} [S_P T_P + S_C] \Delta x \Delta y dt \quad (3.2.5)$$

Per tal de fer la integració temporal dels termes difusius i la font (equacions [3.2.3], [3.2.4] i [3.2.5]), s'ha utilitzat la següent equivalència:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\beta T_P + (1 - \beta) T_P^0] \Delta t \quad (3.2.6)$$

on β és un factor que pot variar entre 0 i 1. Mitjançant aquesta consideració, es pot obtenir un esquema explícit (fent $\beta = 0$), un esquema totalment implícit (fent $\beta = 1$) o un esquema Crank-Nicolson (fent $\beta = \frac{1}{2}$), entre d'altres.

Incorporant l'expressió [3.2.6] a les equacions [3.2.3], [3.2.4] i [3.2.5] s'obté la discretització final de cada un dels termes.

$$Eq. [3.2.3] = \beta \left[\frac{\lambda (T_E - T_P)}{\Delta x} - \frac{\lambda (T_P - T_W)}{\Delta x} \right] \Delta y \Delta t + (1 - \beta) \left[\frac{\lambda (T_E^0 - T_P^0)}{\Delta x} - \frac{\lambda (T_P^0 - T_W^0)}{\Delta x} \right] \Delta y \Delta t \quad (3.2.7)$$

$$Eq. [3.2.4] = \beta \left[\frac{\lambda (T_N - T_P)}{\Delta y} - \frac{\lambda (T_P - T_S)}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta t + (1 - \beta) \left[\frac{\lambda (T_N^0 - T_P^0)}{\Delta y} - \frac{\lambda (T_P^0 - T_S^0)}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta t \quad (3.2.8)$$

$$Eq. [3.2.5] = \beta [S_P T_P + S_C] \Delta x \Delta y \Delta t + (1 - \beta) [S_P T_P^0 + S_C] \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.2.9)$$

Unint els termes deduïts i reordenant els termes de l'equació general de la calor discretitzada es pot obtenir una equació de la forma

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b_P \quad (3.2.10)$$

essent cada un dels coeficients:

$$a_E = a_W = \beta \frac{\lambda \Delta y}{\Delta x} \quad (3.2.11a)$$

$$a_N = a_S = \beta \frac{\lambda \Delta x}{\Delta y} \quad (3.2.11b)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \rho c \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \beta S_P \Delta x \Delta y \quad (3.2.11c)$$

$$\begin{aligned} b_P = & \left[\rho c \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (1 - \beta) S_P \Delta x \Delta y - 2(1 - \beta) \frac{\lambda \Delta y}{\Delta x} - 2(1 - \beta) \frac{\lambda \Delta x}{\Delta y} \right] T_P^0 \\ & + \left[(1 - \beta) \frac{\lambda \Delta y}{\Delta x} \right] T_E^0 + \left[(1 - \beta) \frac{\lambda \Delta y}{\Delta x} \right] T_W^0 \\ & + \left[(1 - \beta) \frac{\lambda \Delta x}{\Delta y} \right] T_N^0 + \left[(1 - \beta) \frac{\lambda \Delta x}{\Delta y} \right] T_S^0 + S_C \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3.2.11d)$$

Capítol 4

Cas bidimensional genèric de transferència de calor per conducció

4.1 Plantejament

En aquest programa s'estudia la distribució de temperatures 2D d'un sòlid de dimensions $e \times h = 10 \times 10 \text{ cm}$ i profunditat $l \gg e, x$. El material utilitzat és fusta de roure i té les següents propietats:

- Conductivitat tèrmica: $\lambda = 0.21 \text{ W/(mK)}$
- Calor específica: $c = 2390 \text{ (Ws)/(kgK)}$
- Densitat: $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$
- Focus intern: $\dot{q}_V = 0 \text{ W/m}^3$

Les condicions de contorn son les següents:

- En el contorn superior, transferència de calor per convecció amb un gas a temperatura $T_{g,n} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ i coeficient de transferència de calor per convecció de $\alpha_n = 100 \text{ W/(m}^2\text{K)}$
- En el contorn inferior, transferència de calor per convecció amb un gas a temperatura $T_{g,s} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ i coeficient de transferència de calor per convecció de $\alpha_s = 100 \text{ W/(m}^2\text{K)}$
- En el contorn esquerre, transferència de calor per convecció amb un gas a temperatura $T_{g,w} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ i coeficient de transferència de calor per convecció de $\alpha_w = 100 \text{ W/(m}^2\text{K)}$
- En el contorn dret, transferència de calor per convecció amb un gas a temperatura $T_{g,e} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ i coeficient de transferència de calor per convecció de $\alpha_e = 100 \text{ W/(m}^2\text{K)}$

En l'instant inicial, el sòlid es troba a una temperatura uniforme de $T_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$

4.2 Règim estacionari

4.2.1 Discretització

Es discretitza el domini amb nodes centrats, de manera que es produueixen NxM volums de control i $(N+2) \times (M+2)$ nodes.

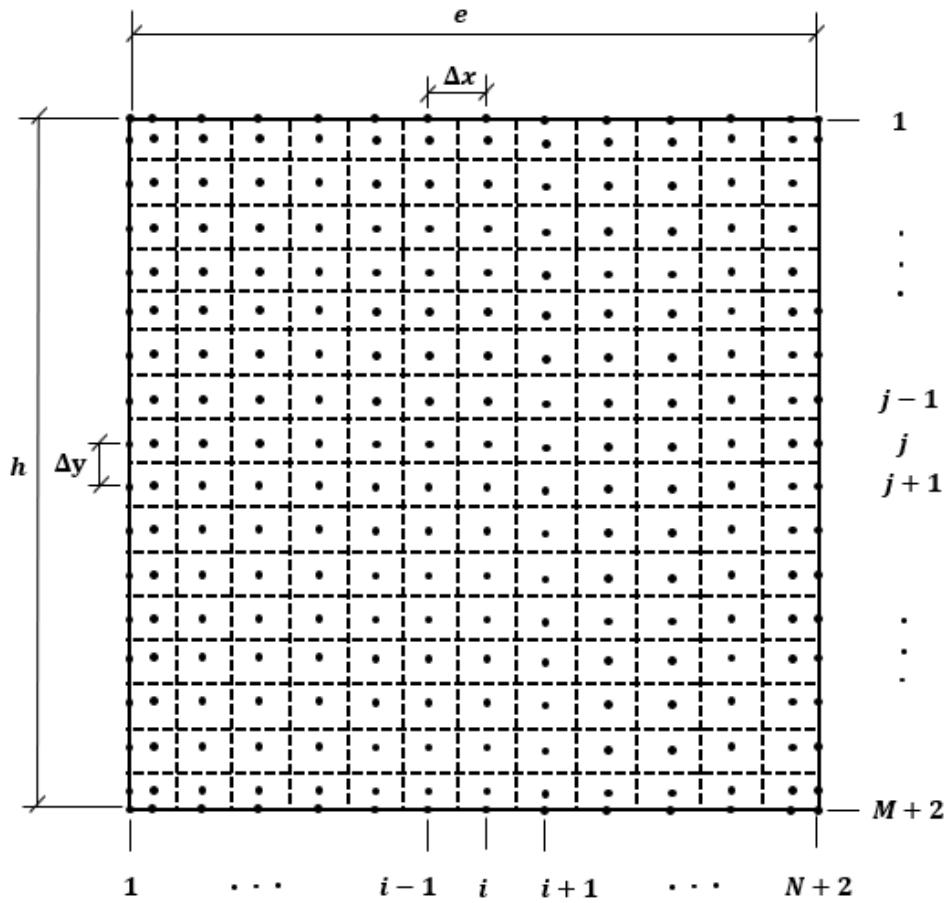


Figura 4.2.1: Esquema de la discretització

Les distàncies entre dos nodes gènerics es calculen com: $\Delta x = \frac{e}{N}$; $\Delta y = \frac{h}{M}$

4.2.2 Formulació nodes genèrics

En els nodes genèrics ($i \in [2, N + 1]$, $j \in [2, M + 1]$), l'esquema i l'equació de l'energia son:

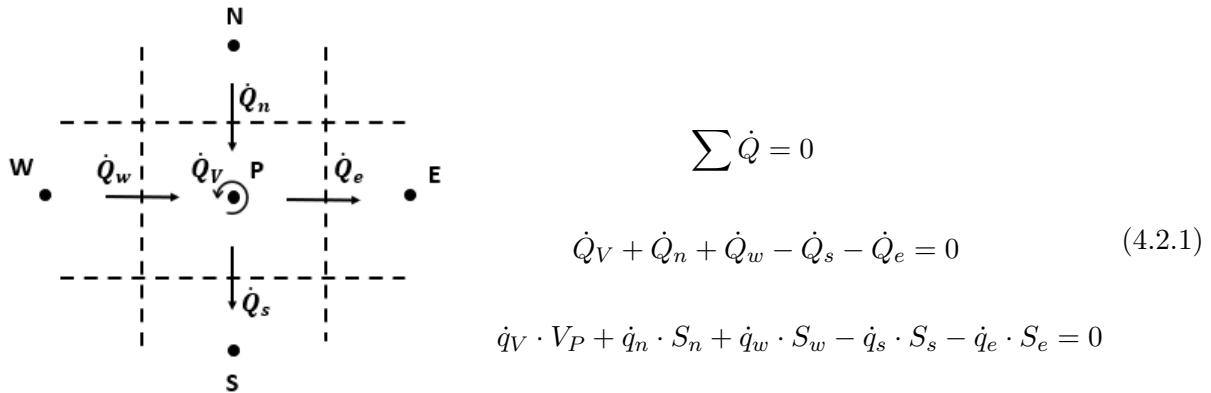


Figura 4.2.2: Esquema node genèric

Introduint la llei de Fourier, les àrees i volum diferencials i desenvolupant, podem obtenir una equació de la forma $a_P \cdot T_P = a_N \cdot T_N + a_S \cdot T_S + a_E \cdot T_E + a_W \cdot T_W + b_P$, particularitzada per a règim estacionari. Veure equació [3.2.11]

$$\underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{d_{PN}} + \frac{\lambda_s}{d_{PS}} + \frac{\lambda_w}{d_{PW}} + \frac{\lambda_e}{d_{PE}} \right)}_{a_P} T_P = \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{d_{PN} \cdot \Delta y} \right)}_{a_N} T_N + \underbrace{\left(\frac{\lambda_s}{d_{PS} \cdot \Delta y} \right)}_{a_S} T_S + \underbrace{\left(\frac{\lambda_e}{d_{PE} \cdot \Delta x} \right)}_{a_E} T_E + \underbrace{\left(\frac{\lambda_w}{d_{PW} \cdot \Delta x} \right)}_{a_W} T_W + \underbrace{\dot{q}_V}_{b_P} \quad (4.2.2)$$

En funció de la posició del node estudiat, varia el valor de les distàncies d_{PN} , d_{PS} , d_{PE} i d_{PW} :

- **Nodes centrals.** Són aquells amb $i \in [3, N]$, $j \in [3, M]$.

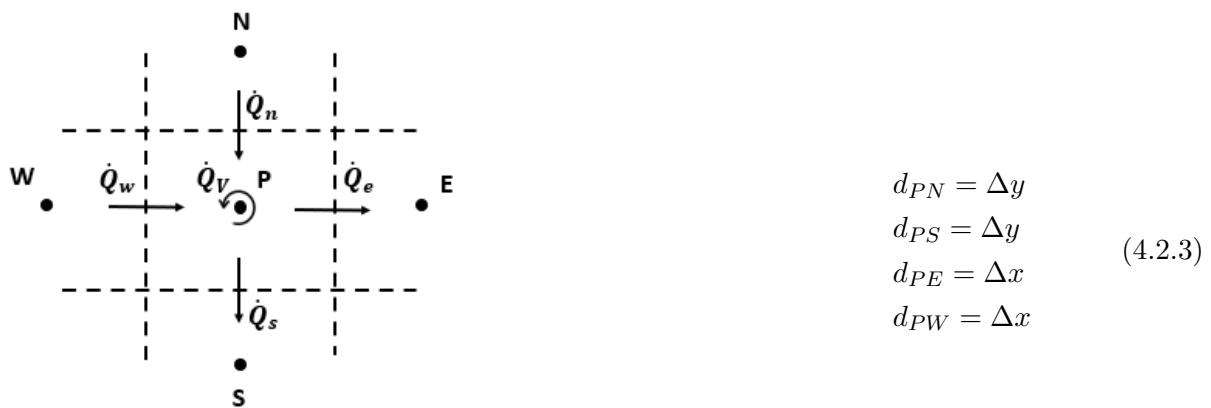
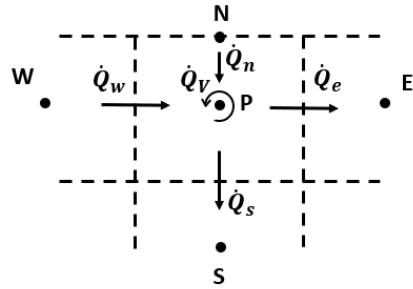


Figura 4.2.3: Esquema nodes centrals

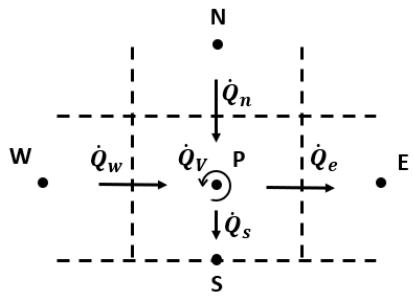
- **Nodes franja nord.** Són aquells amb $i \in [3, N]$, $j = 2$.



$$\begin{aligned}d_{PN} &= \frac{\Delta y}{2} \\d_{PS} &= \Delta y \\d_{PE} &= \Delta x \\d_{PW} &= \Delta x\end{aligned}\quad (4.2.4)$$

Figura 4.2.4: Esquema node franja N

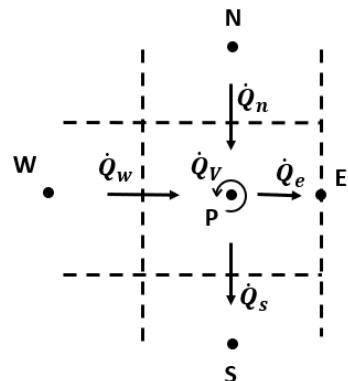
- **Nodes franja sud.** Són aquells amb $i \in [3, N]$, $j = M + 1$.



$$\begin{aligned}d_{PN} &= \Delta y \\d_{PS} &= \frac{\Delta y}{2} \\d_{PE} &= \Delta x \\d_{PW} &= \Delta x\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

Figura 4.2.5: Esquema node franja S

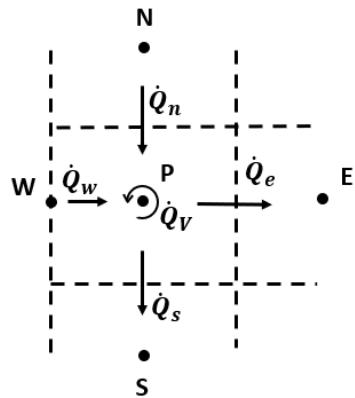
- **Nodes franja est.** Són aquells amb $i = N + 1$, $j \in [3, M]$.



$$\begin{aligned}d_{PN} &= \Delta y \\d_{PS} &= \Delta y \\d_{PE} &= \frac{\Delta x}{2} \\d_{PW} &= \Delta x\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

Figura 4.2.6: Esquema node franja E

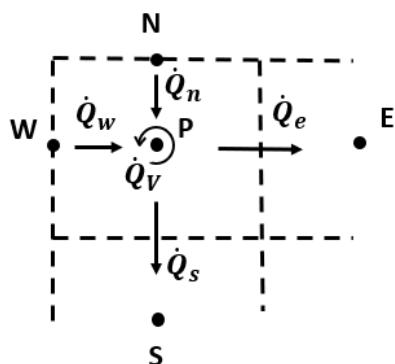
- **Nodes franja oest.** Són aquells amb $i = 2, j \in [3, M]$.



$$\begin{aligned}
 d_{PN} &= \Delta y \\
 d_{PS} &= \Delta y \\
 d_{PE} &= \Delta x \\
 d_{PW} &= \frac{\Delta x}{2}
 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Figura 4.2.7: Esquema node franja W

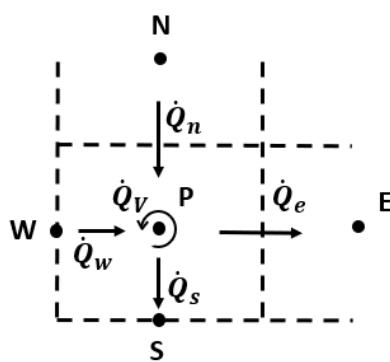
- **Node nord-oest.** És aquell amb $i = 2, j = 2$.



$$\begin{aligned}
 d_{PN} &= \frac{\Delta y}{2} \\
 d_{PS} &= \Delta y \\
 d_{PE} &= \Delta x \\
 d_{PW} &= \frac{\Delta x}{2}
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Figura 4.2.8: Esquema node N-W

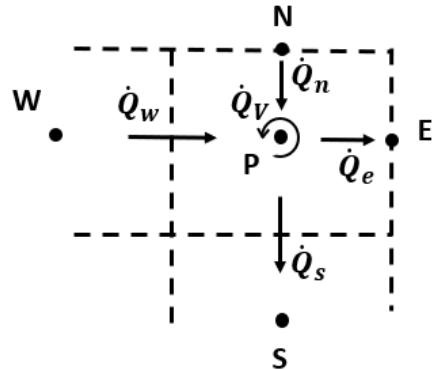
- **Node sud-oest.** És aquell amb $i = 2, j = M + 1$.



$$\begin{aligned}
 d_{PN} &= \Delta y \\
 d_{PS} &= \frac{\Delta y}{2} \\
 d_{PE} &= \Delta x \\
 d_{PW} &= \frac{\Delta x}{2}
 \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Figura 4.2.9: Esquema node S-W

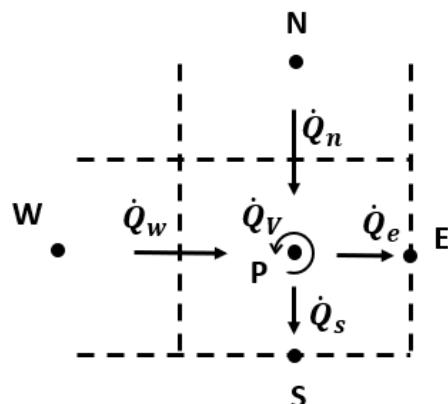
- **Node nord-est.** És aquell amb $i = N + 1, j = 2$.



$$\begin{aligned}d_{PN} &= \frac{\Delta y}{2} \\d_{PS} &= \Delta y \\d_{PE} &= \frac{\Delta x}{2} \\d_{PW} &= \Delta x\end{aligned}\quad (4.2.10)$$

Figura 4.2.10: Esquema node N-E

- **Node sud-est.** És aquell amb $i = N + 1, j = M + 1$.



$$\begin{aligned}d_{PN} &= \Delta y \\d_{PS} &= \frac{\Delta y}{2} \\d_{PE} &= \frac{\Delta x}{2} \\d_{PW} &= \Delta x\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

Figura 4.2.11: Esquema node S-E

4.2.3 Formulació nodes del contorn

Els nodes del contorn no tenen volum i només tenen la funció d'avaluar les condicions de contorn.

1. **Nodes contorn nord.** Són aquells amb $i \in [2, N + 1]$, $j = 1$.

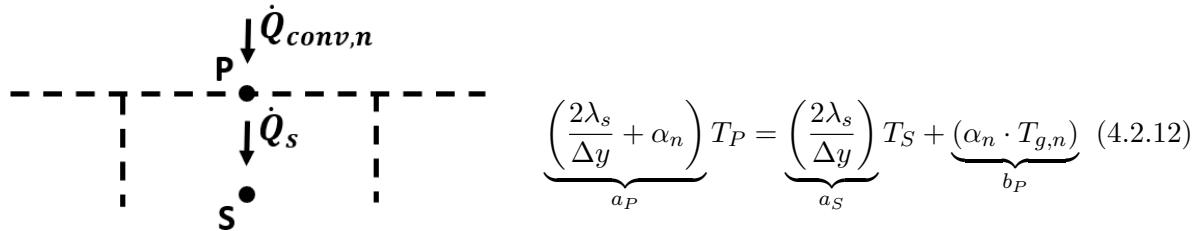


Figura 4.2.12: Esquema node N

2. **Nodes contorn sud.** Són aquells amb $i \in [2, N + 1]$, $j = 1$.

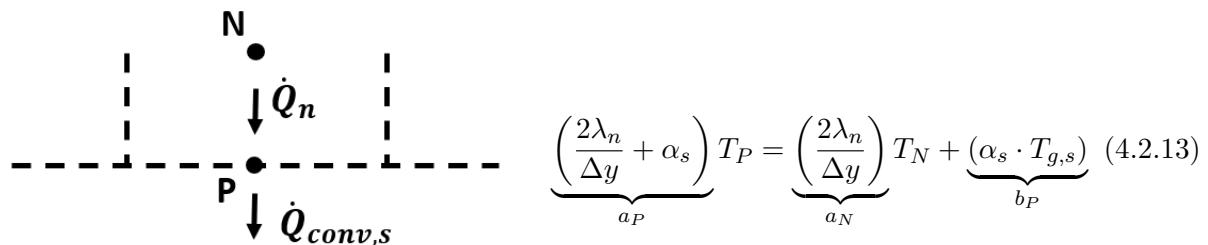


Figura 4.2.13: Esquema node S

3. **Nodes contorn est.** Són aquells amb $i \in [2, N + 1]$, $j = 1$.

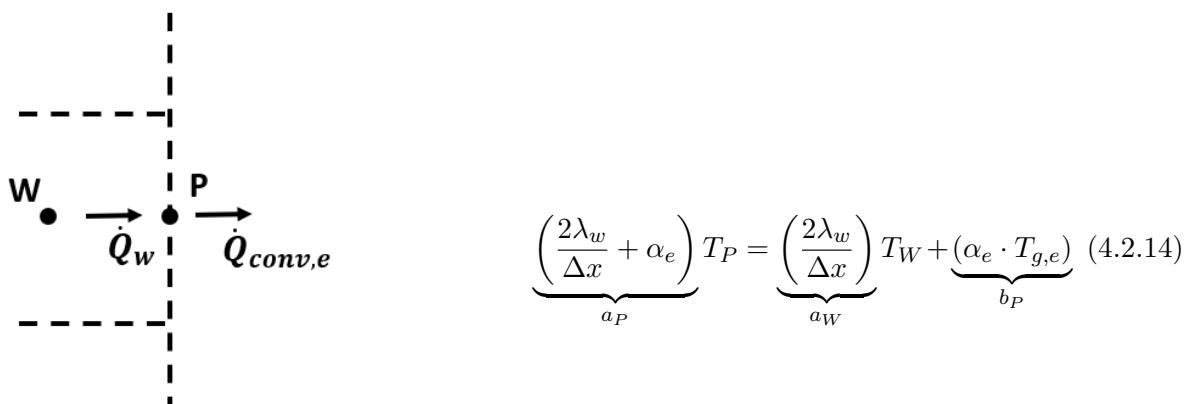


Figura 4.2.14: Esquema node E

4. Nodes contorn oest. Són aquells amb $i \in [2, N + 1]$, $j = 1$.

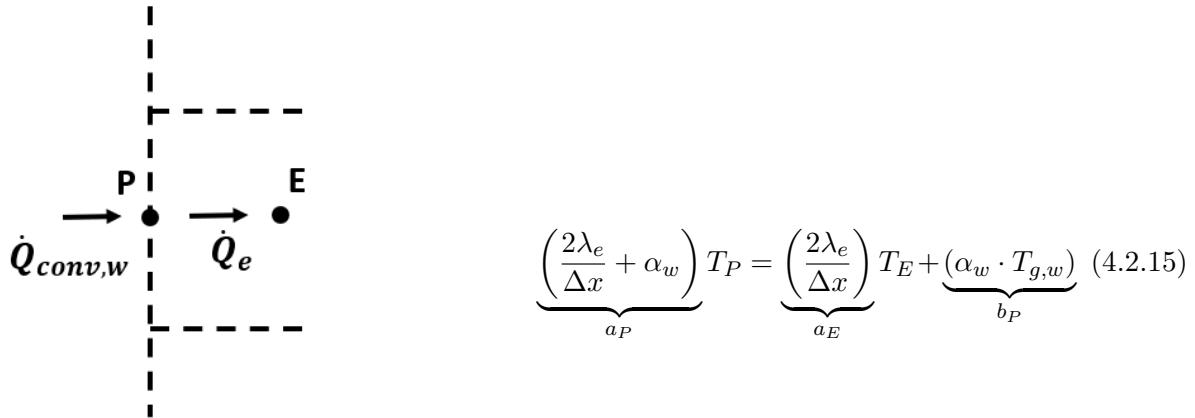


Figura 4.2.15: Esquema node W

4.2.4 Nodes dels vèrtexs

Els nodes dels vèrtexs no tenen volum ni superfície per poder fer un balanç d'energia, per la qual cosa es calculen com la mitjana entre els punts del seu voltant:

1. Node vèrtex nord-oest. És aquell amb $i = 1$, $j = 1$.

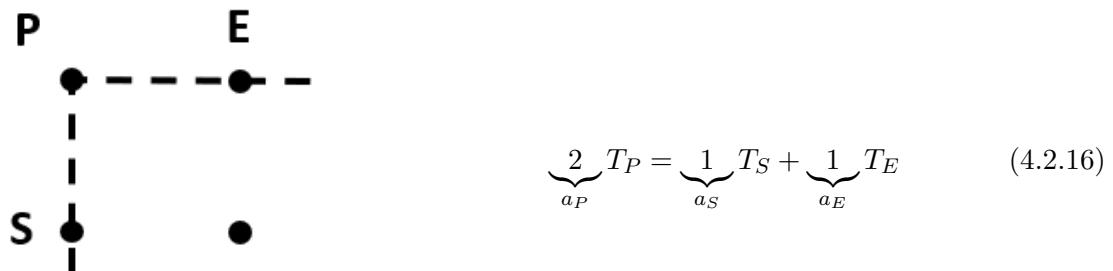
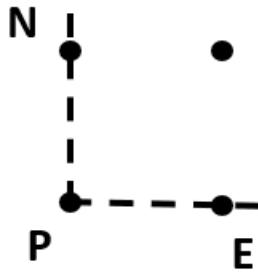


Figura 4.2.16: Esquema node N-W

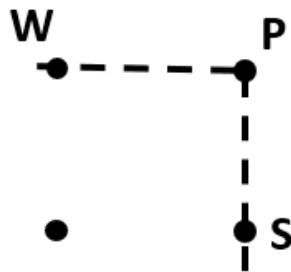
2. Node vèrtex sud-oest. És aquell amb $i = 1$, $j = M + 2$.



$$\underbrace{2}_{a_P} T_P = \underbrace{1}_{a_N} T_N + \underbrace{1}_{a_E} T_E \quad (4.2.17)$$

Figura 4.2.17: Esquema node S-W

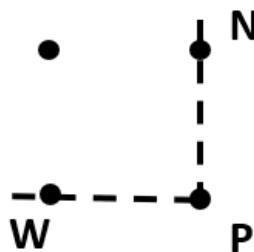
3. **Node vèrtex nord-est.** És aquell amb $i = N + 2, j = 1$.



$$\underbrace{2}_{a_P} T_P = \underbrace{1}_{a_S} T_S + \underbrace{1}_{a_W} T_W \quad (4.2.18)$$

Figura 4.2.18: Esquema node N-E

4. **Node vèrtex sud-est.** És aquell amb $i = N + 2, j = M + 2$.



$$\underbrace{2}_{a_P} T_P = \underbrace{1}_{a_N} T_N + \underbrace{1}_{a_W} T_W \quad (4.2.19)$$

Figura 4.2.19: Esquema node S-E

4.2.5 Mètode de resolució i algoritme

Per tal de resoldre el sistema d'equacions (de la forma $a_P \cdot T_P = a_N \cdot T_N + a_S \cdot T_S + a_E \cdot T_E + a_W \cdot T_W + b_P$) generat, s'ha utilitzat el mètode de Gauss-Seidel. L'algoritme és:

1. Estimar temperatures de tots els nodes del sòlid: $T^*[i, j] = 10^\circ C$ (p.e.)

2. Per cada node $[i,j]$, calcular la temperatura mitjançant:

$$T[i, j] = \frac{a_N \cdot T[i, j - 1] + a_S \cdot T^*[i, j + 1] + a_E \cdot T^*[i + 1, j] + a_W \cdot T[i - 1, j] + b_P}{a_P} \quad (4.2.20)$$

3. Evaluar la convergència de cada node mitjançant la condició $|T[i, j] - T^*[i, j]| < \delta$. Si no es compleix la condició en un o més nodes, es fa $T^*[i, j] = T[i, j]$ i es torna al punt 2.
4. Quan tots els nodes convergeixen, s'ha trobat la distribució de temperatures en l'estat estacionari.

4.2.6 Resultats obtinguts

La distribució de temperatures obtinguda en el cas de règim permanent és la següent:

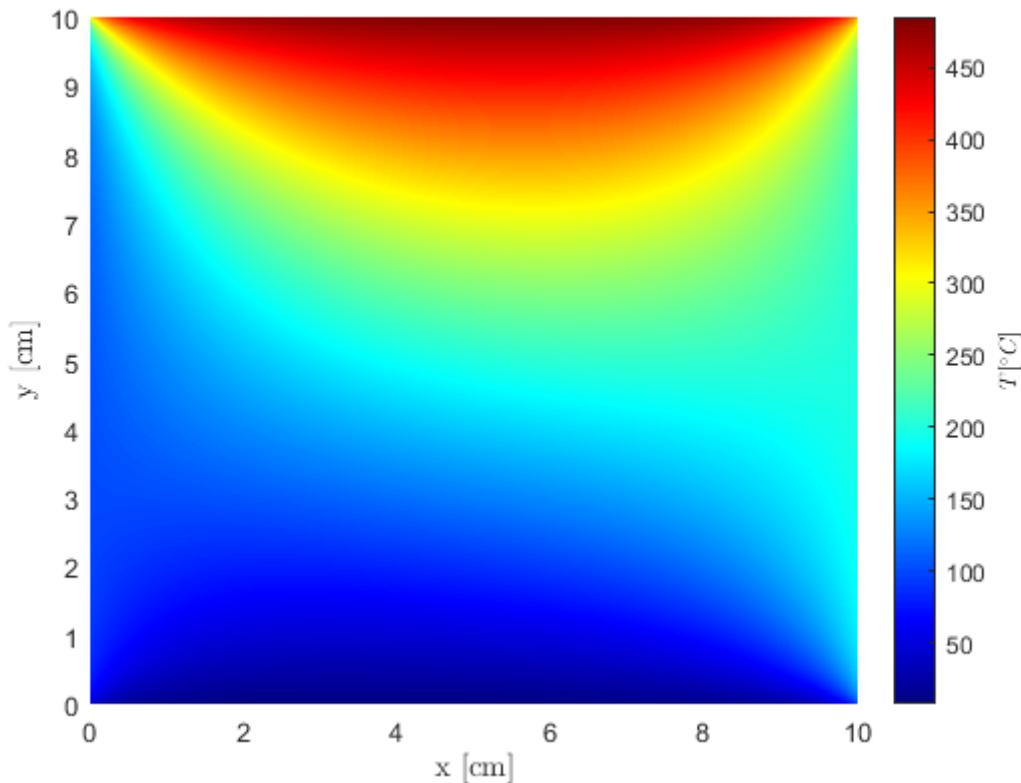


Figura 4.2.20: Distribució de temperatures en règim estacionari

S'assoleix un temperatura màxima de $484.9^\circ C$ a la posició $(5.5, 10)$ i una temperatura mínima de $7.951^\circ C$ a les coordenades $(3.35, 0)$.

4.3 Règim transitori

4.3.1 Discretització

En el cas de règim transitori, la discretització del sòlid és idèntica.

Pel que fa a la discretització temporal, es divideix el domini en L períodes de duració $\Delta t = \frac{t_f}{L}$

4.3.2 Formulació nodes genèrics

En els nodes genèrics ($i \in [2, N + 1]$, $j \in [2, M + 1]$), l'esquema i l'equació de l'energia canvién lleugerament respecte el cas estacionari:

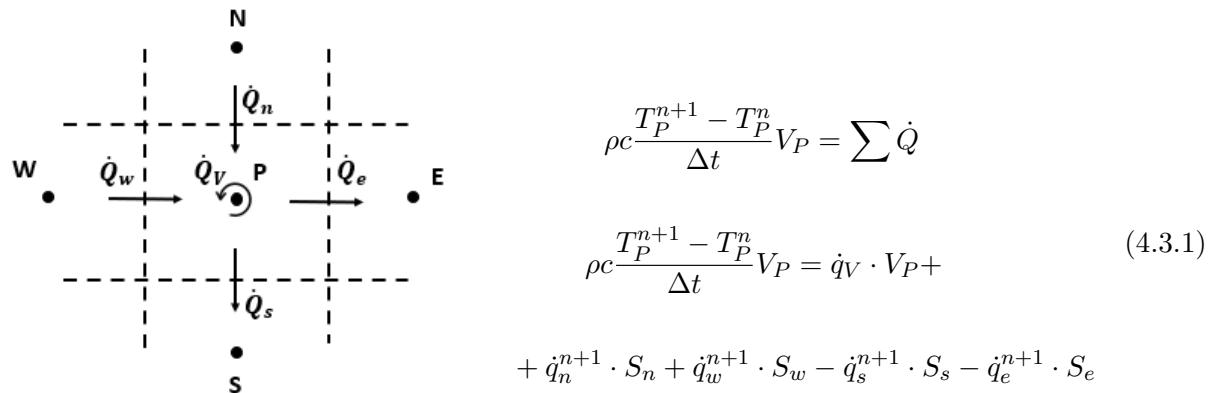


Figura 4.3.1: Esquema node genèric

Introduint la llei de Fourier, les àrees i volum diferencials i desenvolupant, podem obtenir una equació de la forma $a_P \cdot T_P^{n+1} = a_N \cdot T_N^{n+1} + a_S \cdot T_S^{n+1} + a_E \cdot T_E^{n+1} + a_W \cdot T_W^{n+1} + b_P$, que utilitza un esquema totalment implícit. Veure equació [3.2.11] amb $\beta = 1$.

$$\underbrace{\left(\frac{\rho c}{\Delta t} + \frac{\lambda_n}{d_{PN}} + \frac{\lambda_s}{d_{PS}} + \frac{\lambda_w}{d_{PW}} + \frac{\lambda_e}{d_{PE}} \right)}_{a_P} T_P^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{d_{PN} \cdot \Delta y} \right)}_{a_N} T_N^{n+1} + \underbrace{\left(\frac{\lambda_s}{d_{PS} \cdot \Delta y} \right)}_{a_S} T_S^{n+1} + \underbrace{\left(\frac{\lambda_e}{d_{PE} \cdot \Delta x} \right)}_{a_E} T_E^{n+1} + \underbrace{\left(\frac{\lambda_w}{d_{PW} \cdot \Delta x} \right)}_{a_W} T_W^{n+1} + \underbrace{\left(\dot{q}_V + \frac{\rho c}{\Delta t} T_P^n \right)}_{b_P} \quad (4.3.2)$$

Aquesta equació està en funció de les distàncies nodals d_{PN} , d_{PS} , d_{PE} i d_{PW} , les quals es poden trobar a les equacions [3] → [11].

4.3.3 Formulació nodes del contorn i vèrtexs

Les equacions característiques dels nodes del contorn i dels nodes dels vèrtexs no difereixen respecte del cas en règim estacionari, degut a que no tenen volum associat, i per tant, les seves equacions no contenen el terme temporal. Tot i això, les equacions canvien els termes de la temperatura de T_i a T_i^{n+1} .

4.3.4 Mètode de resolució i algoritme

Per tal de resoldre el sistema d'equacions (de la forma $a_P \cdot T_P^{n+1} = a_N \cdot T_N^{n+1} + a_S \cdot T_S^{n+1} + a_E \cdot T_E^{n+1} + a_W \cdot T_W^{n+1} + b_P$) generat, s'ha utilitzat el mètode de Gauss-Seidel. L'algoritme és:

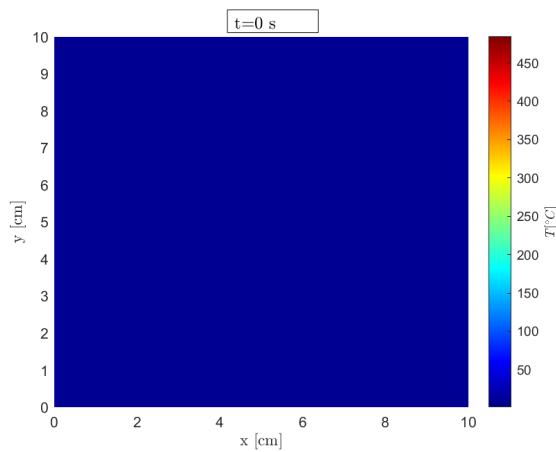
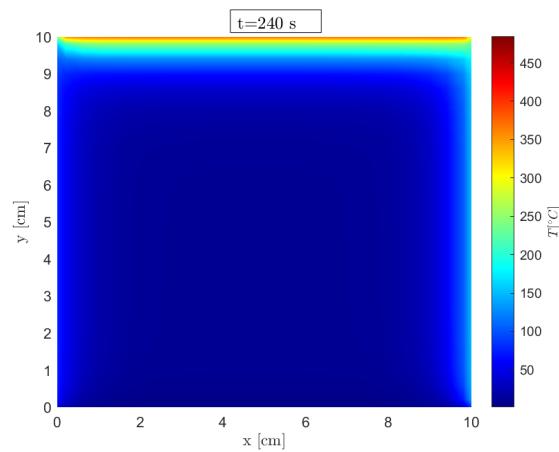
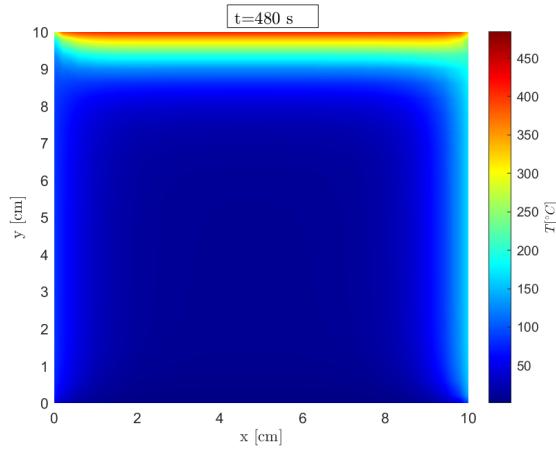
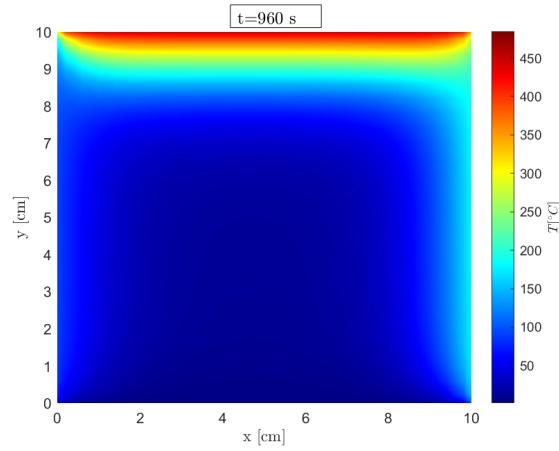
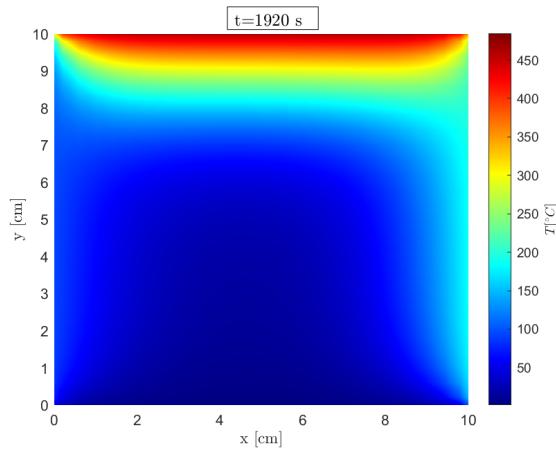
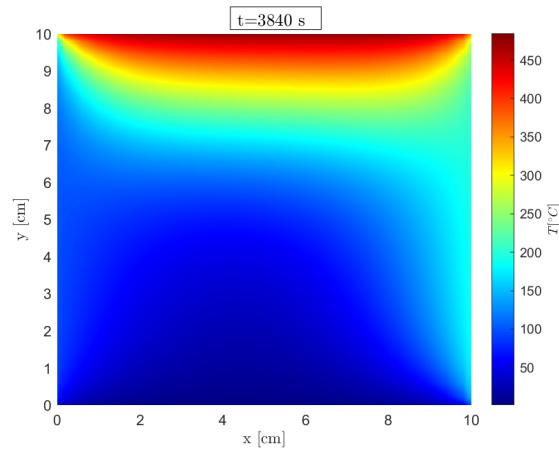
1. Fer el mapejat de temperatures inicials del sòlid per t=0.
2. Per cada instant de temps n:
 - 2.1. Estimar temperatures de tots els nodes del sòlid en n+1: $T^{n+1}[i, j]^* = 10^\circ C$ (p.e.)
 - 2.2. Per cada node [i,j], calcular la temperatura en l'instant n+1 mitjançant:

$$T^{n+1}[i, j] = \frac{a_N \cdot T^{n+1}[i, j - 1]^* + a_S \cdot T^{n+1}[i, j + 1]^*}{a_P} + \frac{a_E \cdot T^{n+1}[i + 1, j]^* + a_W \cdot T^{n+1}[i - 1, j]^* + b_P}{a_P} \quad (4.3.3)$$

- 2.3. Evaluar la convergència de cada node mitjançant la condició $|T^{n+1}[i, j] - T^{n+1}[i, j]^*| < \delta$. Si no es compleix la condició en un o més nodes, es torna al punt 2.2 amb $T^{n+1}[i, j]^* = T^{n+1}[i, j]$. En cas contrari, es passa al següent punt.
- 2.4. Quan tots els nodes convergeixen, s'ha trobat la distribució de temperatures de l'instant n+1. Si n<L, es torna al punt 2.1 fent n++.
3. Quan n=L, s'ha trobat el resultat desitjat per cada instant de temps.

4.3.5 Resultats obtinguts

A continuació es mostra la distribució de temperatures del sòlid per els següents instants de temps: t=0s, t=240s, t=480s, t=960s, t=1920s, t=3840s, t=7680s, t=15360s, t=20160s i t=24000s.


 Figura 4.3.2: Distribució per $t=0\text{s}$

 Figura 4.3.3: Distribució per $t=240\text{s}$

 Figura 4.3.4: Distribució per $t=480\text{s}$

 Figura 4.3.5: Distribució per $t=960\text{s}$

 Figura 4.3.6: Distribució per $t=1920\text{s}$

 Figura 4.3.7: Distribució per $t=3840\text{s}$

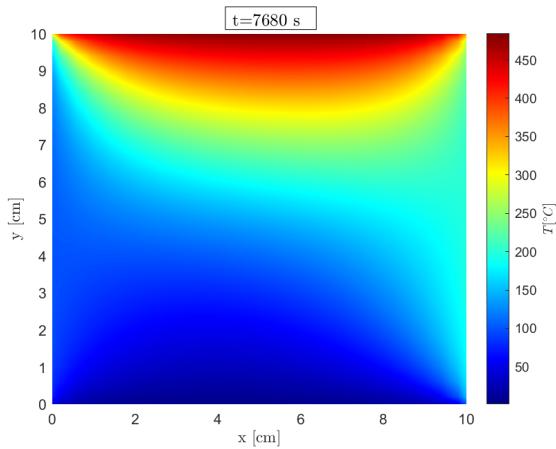


Figura 4.3.8: Distribució per $t=7680\text{ s}$

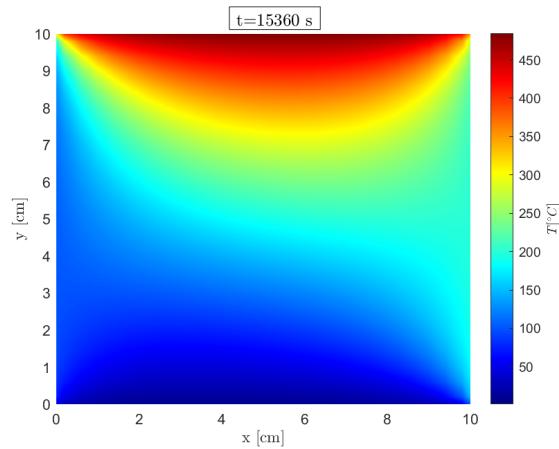


Figura 4.3.9: Distribució per $t=15360\text{ s}$

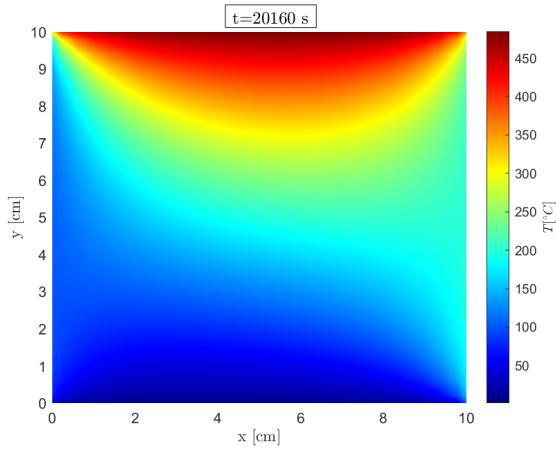


Figura 4.3.10: Distribució per $t=20160\text{ s}$

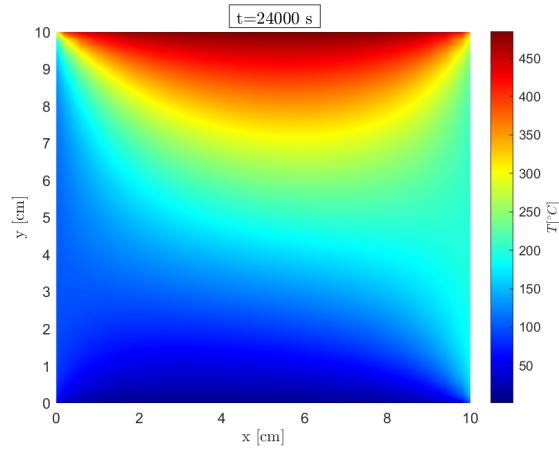


Figura 4.3.11: Distribució per $t=24000\text{ s}$

Tal i com es pot observar, inicialment el sòlid es troba a una temperatura uniforme de 10°C . A poc a poc, es produeix un augment de la temperatura en els extrems nord, est i oest, com a resultat de la convecció amb els gasos a 500 , 200 i $100\text{ }^\circ\text{C}$, respectivament. Per altra banda, a la cara sud, es produeix una pèrdua de calor com a conseqüència del gas exterior a una temperatura inferior de $0\text{ }^\circ\text{C}$.

A mesura que avança el temps, la calor penetra cada cop més, tot augmentant la temperatura de més superfície interna. Finalment, es pot observar que per un temps de 24000s (6 hores i 40 minuts), el sòlid ha assolit pràcticament l'estat estacionari descrit en l'apartat anterior.

Capítol 5

Cas bidimensional de transferència de calor per conducció amb múltiples materials

Un cas més complex que es pot plantejar és el de conducció en dues dimensions en un sòlid amb múltiples materials i condicions de contorn variables amb el temps. Aquesta última característica exigeix realitzar un tractament transitori del problema.

5.1 Descripció del problema

El sòlid a tractar té unes dimensions de $1,1 \times 0,8$ m amb una profunditat unitària i està format per quatre materials: M_1 , M_2 , M_3 i M_4 , distribuïts tal i com s'observa a la figura [5.1.1].

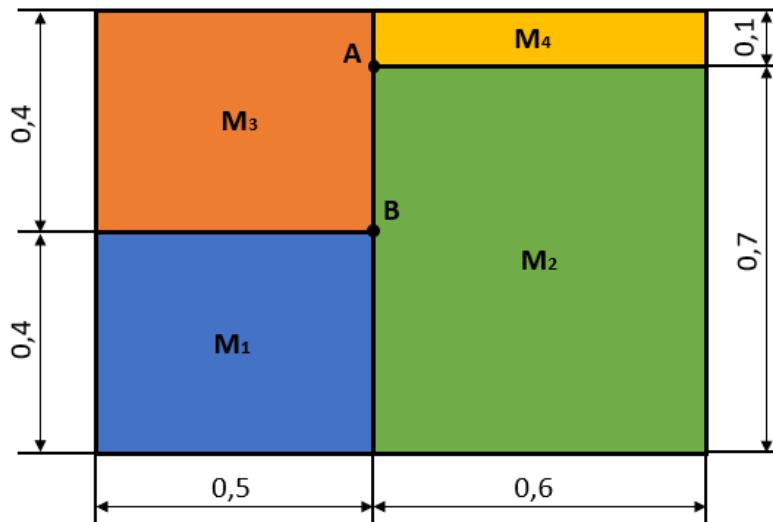


Figura 5.1.1: Distribució dels materials i geometria del problema

Les propietats termofísiques dels materials es detallen a la taula [5.1.1]. Aquestes propietats es suposen invariables amb la temperatura i el temps.

	$\rho [kg/m^3]$	$c [J/(kg \cdot K)]$	$\lambda [W/(m \cdot K)]$
Material 1	1.500	750	170
Material 2	1.600	770	140
Material 3	1.900	810	200
Material 4	2.500	930	140

Taula 5.1.1: Propietats termofísiques dels materials

Pel que fa a les condicions inicials, en l'instant inicial ($t = 0$), el sòlid es troba a una temperatura uniforme de $T_0 = 8^\circ C$. Les condicions de contorn son:

- Contorn superior: El sòlid absorbeix una calor de $\dot{Q} = 60 W/m$ del medi exterior.
- Contorn inferior: És una paret isoterma a una temperatura $T = 23^\circ C$.
- Contorn dret: Es tracta també d'una paret isoterma, en aquest cas però, la temperatura varia amb el temps de la següent forma: $T = 8 + 0,005 \cdot t^\circ C$, essent t el temps transcorregut.
- Contorn esquerre: La paret esquerra està en contacte amb un gas a una temperatura $T_g = 33^\circ C$ i un coeficient de transferència de calor $\alpha_g = 9 W/(m^2 K)$.

5.2 Discretització del domini

Pel que fa a la discretització espacial, s'ha dividit el domini de l'eix x en $N_1 + N_2$ volums de control (VC), donant lloc a $N_1 + N_2 + 3$ nodes. El domini en l'eix y queda discretitzat d'una forma similar en $M_1 + M_2 + M_3$ volums de control, donant lloc a $M_1 + M_2 + M_3 + 4$ nodes. Un esquema de la discretització es pot trobar a la figura [5.2.1].

Cal destacar que s'ha optat per subdividir el domini en varies seccions, coincidents amb les seccions ocupades pels diferents materials, tot creant una malla híbrida (Veure apartat [2.2]). Això permet fer la malla més fina en les seccions d'interès o allà on es produueixi un salt més brusc en la distribució de temperatura.

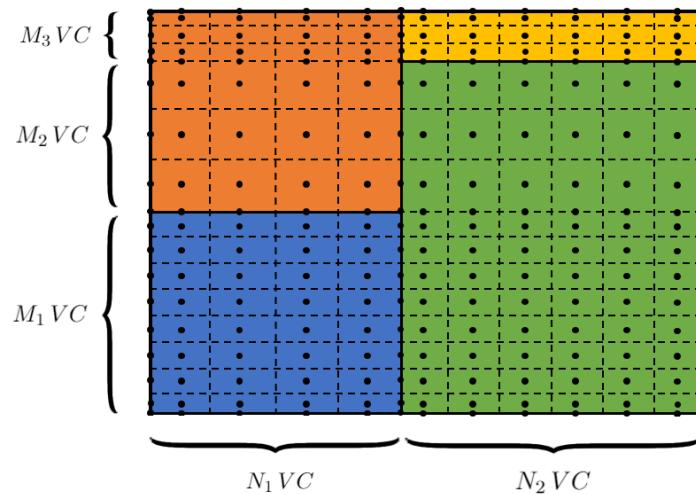


Figura 5.2.1: Discretització espacial del domini i localització dels nodes

A la figura [5.2.1] es pot observar també la col·locació de nodes al contorn i en les fronteres entre dos o més materials. S'ha optat per aquesta distribució per tal de poder aplicar amb més senzillesa les condicions de contorn, així com tenir un control més exacte del valor de les temperatures en les interseccions entre materials.

Pel que fa a la discretització temporal, s'ha optat per definir el temps final de la simulació a $t_f = 5000 \text{ s}$, corresponent al temps final del qual es disposa de resultats comparatius. Aleshores, per un nombre concret de discretitzacions (L), es pot obtenir l'increment de temps (Δt) utilitzat dividint el temps final entre el nombre d'instantes de temps.

5.3 Formulació utilitzada

Per a afrontar aquest problema s'ha utilitzat un esquema temporal totalment implícit ($\beta = 1$).

A l'hora d'abordar la formulació en cada un dels nodes, s'ha de discernir entre les següents categories:

1. Nodes interiors. L'equació discretitzada [3.2.10] i els coeficients d'aquesta queden particularitzats de la següent manera

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b_P \quad (5.3.1)$$

$$a_E = a_W = \frac{\lambda_i \Delta y_i}{\Delta x_i} \quad (5.3.2a)$$

$$a_N = a_S = \frac{\lambda_i \Delta x_i}{\Delta y_i} \quad (5.3.2b)$$

$$a_P^0 = \rho_i c_i \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\Delta t} \quad (5.3.2c)$$

$$a_P = a_P^0 + a_E + a_W + a_N + a_S + S_P \Delta x_i \Delta y_i \quad (5.3.2d)$$

$$b_P = a_P^0 T_P^0 + S_C \Delta x_i \Delta y_i \quad (5.3.2e)$$

essent λ_i , ρ_i i c_i les propietats termofísiques del material on està localitzat el volum de control analitzat, i Δx_i i Δy_i les mesures de l'element de volum corresponent.

2. Nodes contorn. Els nodes més externs no compten amb un volum associat, pel que únicament serveixen per igualar els fluxos que els travessen.

	a_P	a_E	a_W	a_N	a_S	b_P
Contorn superior	$\frac{2\lambda_i}{\Delta y_i}$	0	0	0	$\frac{2\lambda_i}{\Delta y_i}$	60
Contorn inferior	1	0	0	0	0	23
Contorn dret	1	0	0	0	0	$8 + 0,005 \cdot t$
Contorn esquerre	$\frac{2\lambda_i}{\Delta x_i} + \alpha_g$	$\frac{2\lambda_i}{\Delta x_i}$	0	0	0	$\alpha_g \cdot T_g$

Taula 5.3.1: Coeficients de les equacions en els nodes del contorn

3. Nodes interns de frontera. Aquests nodes tampoc compten amb un volum associat, sinó que es tracta d'una superfície en la qual s'igualen els fluxos entrants o sortints de cada un dels materials. En funció de si es tracta d'una frontera horitzontal o vertical la formulació canvia lleugerament. Veure taula [5.3.2].

	a_P	a_E	a_W	a_N	a_S	b_P
Node frontera horitzontal	$\frac{\lambda_s}{\Delta y_s} + \frac{\lambda_n}{\Delta y_n}$	0	0	$\frac{\lambda_n}{\Delta y_n}$	$\frac{\lambda_s}{\Delta y_s}$	0
Node frontera vertical	$\frac{\lambda_w}{\Delta x_w} + \frac{\lambda_e}{\Delta x_e}$	$\frac{\lambda_e}{\Delta x_e}$	$\frac{\lambda_w}{\Delta x_w}$	0	0	0

Taula 5.3.2: Coeficients de les equacions en els nodes interns de frontera

Els subíndexs n , s , e i w denoten les propietats del material que està situat al nord, sud, est i oest de la frontera, respectivament.

4. Nodes dels vèrtexs exteriors i interiors. Es tracta d'aquells nodes situats en un vèrtex, els quals no tenen ni volum ni superfície associats. Per tant, la formulació d'aquests nodes descriu que el valor de la temperatura en el node serà la mitjana dels nodes propers.

5.4 Algoritme

L'algoritme utilitzat segueix el següent esquema:

- Introducció de dades numèriques (Nombre de volums de control, criteri de convergència, nombre d'instants de temps calculats), físiques (Propietats termofísiques de cada material, condicions de contorn) i geomètriques.

2. Càlcul de la malla ($\Delta x[i]$, $\Delta y[j]$, Δt , $x[i]$, $y[j]$, t , $d_{PN}[i, j]$, $d_{PS}[i, j]$, $d_{PE}[i, j]$, $d_{PW}[i, j]$, etc.).
3. Mapejat inicial de temperatures per a $t = 0$.
4. Per cada instant de temps $n = 1$ fins a $n = L$ ($0 < t \leq 5000\text{ s}$):
 - 4.1. Estimació de temperatures $T^*[i, j] = T^0[i, j]$.
 - 4.2. Càlcul del coeficients de l'equació discretitzada ($a_P[i, j]$, $a_E[i, j]$, $a_W[i, j]$, $a_N[i, j]$, $a_S[i, j]$, $b_P[i, j]$)
 - 4.3. Càlcul de la distribució de temperatures $T[i, j]$ mitjançant un solver (Gauss-Seidel).
 - 4.4. Avaluació de la convergència: $\max(|T[i, j] - T^*[i, j]|) < \delta$. Si no es compleix, tornar al punt 4.2 amb $T^*[i, j] = T[i, j]$. Si es compleix, els resultats han convergit per l'instant de temps actual (Tornar al punt 4 amb n=n+1).
5. Un cop s'ha arribat a l'instant final $n = L$ ($t = 5000\text{ s}$), l'últim pas és la impressió de resultats.

5.5 Resultats

A la figura [5.5.1] es mostra la distribució de temperatures obtinguda en l'instant final, $t = 5000$ segons. Les temperatures màxima i mínima registrades en el domini són de 33°C i $22,387^\circ\text{C}$, respectivament. Per altra banda, als punts A i B s'han assolit unes temperatures de $23,283^\circ\text{C}$ i $23,397^\circ\text{C}$, respectivament. Pel que fa a la verificació dels resultats, s'han analitzat les temperatures als contorn dret i inferior del domini, que prenen uns valors de 33°C i 23°C , respectivament. Aquests valors resulten coherents, ja que al contorn dret s'ha imposat una temperatura de $T = 8 + 0,005 \cdot t^\circ\text{C}$, que per a un temps de 5000 segons és igual a 33°C ; i al contorn inferior s'ha imposat precisament una temperatura de 23°C .

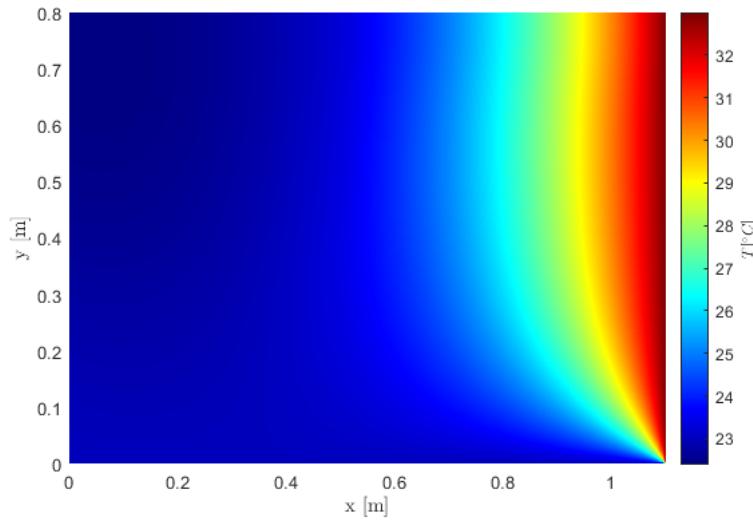


Figura 5.5.1: Distribució de temperatures calculada

Per altra banda, a la figura [5.5.2] es pot observar la distribució de temperatures calculada visualitzada amb les línies isotermes, mentre que la figura [5.5.3] correspon a la distribució de temperatures esperada. Comparant ambdues figures es pot concloure que existeix una gran concordança en els resultats obtinguts.

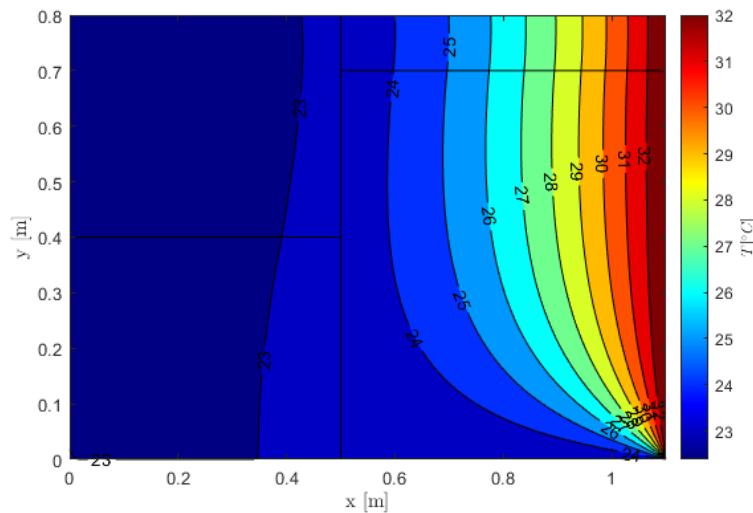


Figura 5.5.2: Isotermes de la distribució de temperatures calculada

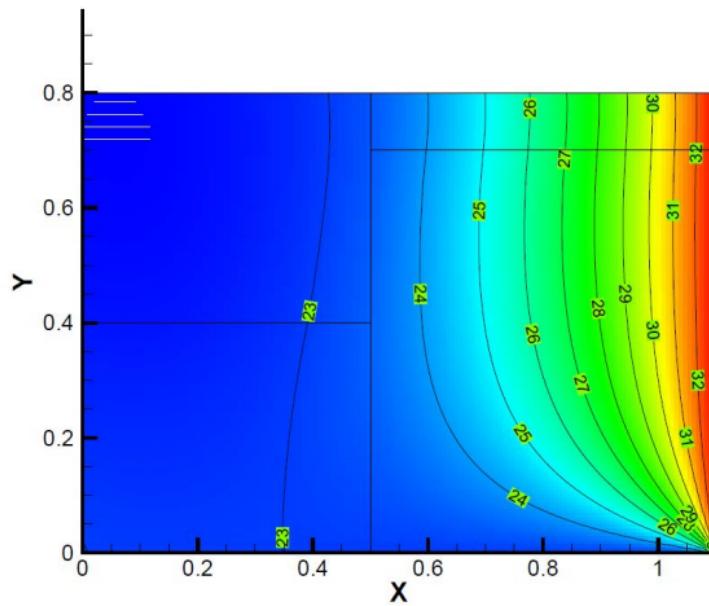


Figura 5.5.3: Distribució de temperatures esperada

Part IV

Equació de convecció-difusió

Capítol 6

Equació de convecció-difusió genèrica

6.1 Introducció

Les equacions de Navier-Stokes per a gasos perfectes ($c_v = \text{const}$) es poden escriure com: [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) + [\nabla \cdot (\vec{r} - \mu \nabla \vec{v}) - \nabla p + \rho \vec{g}] \\ \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} T) &= \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{c_v} \nabla T \right) + \left[\frac{-\nabla \cdot \vec{q}_R - p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{r} : \nabla \vec{v}}{c_v} \right] \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Aquestes equacions de transport de la massa, el *momentum* i l'energia, respectivament, tenen una mateixa estructura composta per termes temporals, convectius, difusius i termes extra.

Prenent ϕ com una variable genèrica (velocitat en x, velocitat en y, temperatura, entropia, etc.), es pot escriure l'equació genèrica de convecció-difusió:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) + \dot{s}_\phi \quad (6.1.2)$$

On Γ_ϕ és el coeficient de difusió i \dot{s}_ϕ és la font/embornal.

Utilitzant l'equació de conservació de la massa, l'equació anterior es pot reescriure com:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) + \dot{s}_\phi \quad (6.1.3)$$

Partint d'aquesta equació, es pot arribar a qualsevol de les equacions de transport mencionades utilitzant els valors de ϕ , Γ_ϕ i \dot{s}_ϕ de la taula següent:

Equació	ϕ	Γ_ϕ	\dot{s}_ϕ
Massa	1	0	0
Momentum	\vec{v}	μ	$\nabla \cdot (\vec{r} - \mu \nabla \vec{v}) - \nabla p + \rho \vec{g}$
Energia	T	$\frac{\lambda}{c_v}$	$\frac{1}{c_v} (-\nabla \cdot \vec{q}_R - p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{r} : \nabla \vec{v})$

Taula 6.1.1: Valors de ϕ , Γ_ϕ , \dot{s}_ϕ per cada equació. Extret de [18]

6.2 Discretització de l'equació de convecció-difusió genèrica en 2D

Mitjançant el mètode de volums finits (FVM) per a nodes centrats i utilitzant un esquema implícit, es pot discretitzar l'equació genèrica de convecció-difusió (equació [6.1.2]) per a un volum de control rectangular. [19]

Abans però, s'introduceix el concepte de flux total J que inclou els fluxos de convecció i difusió:

$$\begin{aligned} J_x &= \rho u \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ J_y &= \rho v \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Introduint aquests dos termes, l'equació [6.1.2] esdevé:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = \dot{s}_\phi \quad (6.2.2)$$

Discretitzant la integral respecte el temps i al llarg del volum de control per cada un dels termes s'obté:

$$\frac{(\rho_P \phi_P - \rho_P^0 \phi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_C^\phi + S_P^\phi \phi_P) \Delta x \Delta y \quad (6.2.3)$$

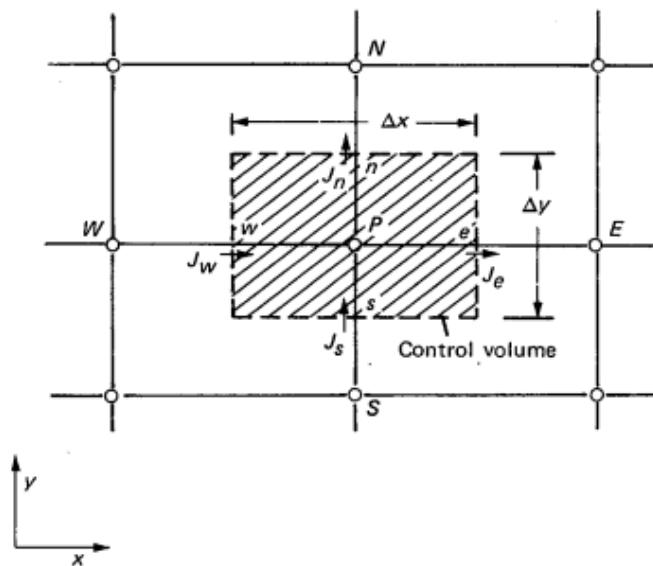


Figura 6.2.1: Esquema d'un volum de control genèric. Extret de [19]

Per altra banda, podem obtenir la discretització de l'equació de conservació de la massa, el

procediment de la qual és anàleg:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (6.2.4)$$

Amb $F_e = (\rho u)_e \Delta y$, $F_w = (\rho u)_w \Delta y$, $F_n = (\rho v)_n \Delta x$ i $F_s = (\rho v)_s \Delta x$

Finalment, si combinem l'equació de convecció-difusió genèrica i l'equació de conservació de la massa ([6.1.2] – $\phi_P \cdot [6.2.4]$) obtenim:

$$\begin{aligned} & (\phi_P - \phi_P^0) \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e \phi_P) - (J_w - F_w \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) \\ & - (J_s - F_s \phi_P) = (S_C^\phi + S_P^\phi \phi_P) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Per últim, tal com es dedueix a [19], els termes convectius/difusius ($J_e - F_e \phi_P$), ($J_w - F_w \phi_P$), ($J_n - F_n \phi_P$) i ($J_s - F_s \phi_P$) es poden linealitzar respectivament com $a_E(\phi_P - \phi_E)$, $a_W(\phi_W - \phi_P)$, $a_N(\phi_P - \phi_N)$ i $a_S(\phi_S - \phi_P)$.

D'aquesta manera, es pot obtenir una discretització final de la forma

$$a_P \phi = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_P \quad (6.2.6)$$

On

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_P^\phi \Delta x \Delta y \\ b_P &= S_C^\phi \Delta x \Delta y + a_P^0 \phi_P^0 \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Les variables D_e , D_w , D_n i D_s fan referència a les conductàncies a les cares est, oest, nord i sud del volum de control, respectivament. Aquestes prenen el següents valors

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{d_{PE}} \\ D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{d_{PW}} \\ D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{d_{PN}} \\ D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{d_{PS}} \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Les variables F_e , F_w , F_n i F_s fan referència als cabals màssics i prenen els valors expressats a l'equació [6.2.4].

Les variables P_e , P_w , P_n i P_s son el nombre de Péclet avaluat a cada una de les cares. Es pot obtenir com el quotient del cabal màssic i la conductància

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

La funció $A(|P|)$ depèn de l'esquema utilitzat. A la següent secció s'explica en detall cada un dels esquemes proposats i els valors que pren la funció per cada un d'ells.

6.3 Esquemes numèrics

Per tal d'avaluar els termes convectius de l'equació genèrica de convecció-difusió, s'han d'aproximar el valor de ϕ a cada una de les cares (i.e. ϕ_e , ϕ_w , ϕ_n , ϕ_s) a partir dels valors de ϕ dels nodes propers.

Per tal de fer-ho existeixen multitud d'esquemes numèrics. Els més rellevants es troben descrits a continuació.

6.3.1 Central Difference Scheme (CDS)

Aquest esquema assumeix una distribució lineal de la variable d'estudi ϕ . Per exemple, si volem avaluar la variable a la cara est del volum de control (ϕ_e):

$$\phi_e = \phi_P + f_e(\phi_E - \phi_P) \quad amb \quad f_e = dP_e/dPE \tag{6.3.1}$$

En cas d'assumir que les cares entre volums de control es troben a la meitat, f_e esdevé $1/2$ i l'anterior formulació resulta

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \tag{6.3.2}$$

Per un costat, aquest esquema compta amb una precisió de segon ordre, és a dir, l'error és proporcional al quadrat de la mida de la malla ($\mathcal{O}(\Delta x^2)$). Per altra banda, en algunes ocasions els coeficients poden resultar negatius, la qual cosa fa que els valors calculats a les cares sobrepassin

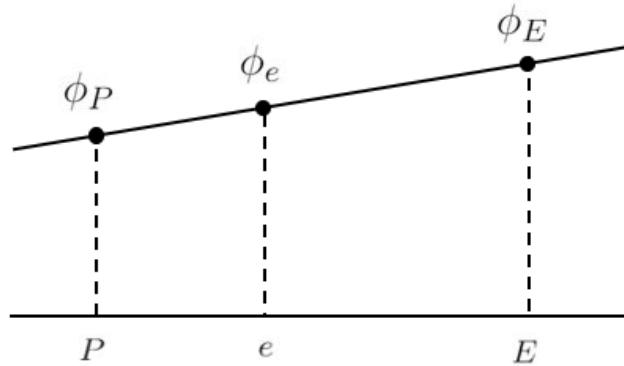


Figura 6.3.1: Central-difference scheme (CDS)

el rang establert per els nodes veïns. Això fa que els resultats no siguin realistes i fa que l'esquema sigui propens a tenir problemes d'estabilitat.

Seguint aquest esquema, es pot deduir la fórmula de $A(|P|)$, que vindria a ser $A(|P|) = 1 - 0.5 \cdot |P|$.

6.3.2 Upwind Difference Scheme (UDS)

En el cas de fluxos incompressibles o gasos a un Mach baix, les variables estan més influenciades per les condicions aigües amunt que per les condicions aigües avall. Aquest esquema té aquest argument en consideració i la variable interpolada pren el valor del node immediatament aigües amunt. Matemàticament, es pot expressar de la següent manera:

$$\phi_e = \phi_P + f_e(\phi_E - \phi_P) \quad \text{amb} \quad f_e = \begin{cases} 0 & \text{si } F_e > 0 \\ 1 & \text{si } F_e < 0 \end{cases} \quad (6.3.3)$$

O alternativament:

$$\phi_e = \frac{\phi_P \cdot \max(F_e, 0) - \phi_E \cdot \max(-F_e, 0)}{F_e} \quad (6.3.4)$$

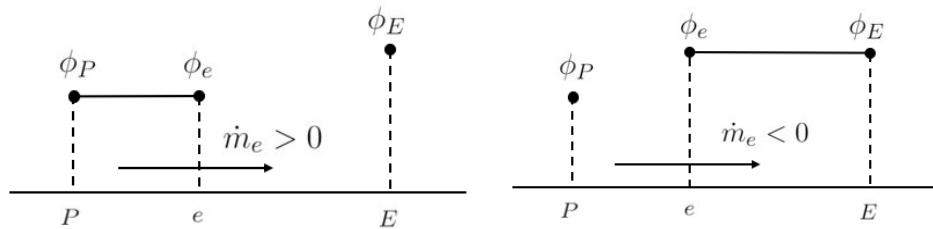


Figura 6.3.2: Upwind-difference scheme

Aquest esquema numèric soluciona el problema que tenia el CDS ja que els coeficients no poden ser negatius. Tot i això, és un esquema de primer ordre, és a dir l'error és proporcional a la

mida de la malla ($\mathcal{O}(\Delta x)$). És per això que és utilitzat amb malles fines, per tal de minimitzar l'error.

Utilitzant aquest esquema es pot deduir que la funció $A(|P|)$ val $A(|P|) = 1$.

6.3.3 Exponential Difference Scheme (EDS)

L'esquema exponencial està basat en la solució exacta obtinguda per el cas 1D estacionari, sense fonts externes i amb $\Gamma = \text{const}$, la qual és

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(P \cdot x/L) - 1}{\exp(P) - 1} \quad (6.3.5)$$

Utilitzant aquesta solució com la distribució de ϕ entre dos nodes consecutius, es pot expressar el valor de ϕ a una cara genèrica com:

$$\phi_e = \phi_P + f_e(\phi_E - \phi_P) \quad \text{amb} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_e = \frac{\exp(P_e \cdot d_{PE}/d_{PE}) - 1}{\exp(P) - 1} \\ P_e = \frac{(\rho u)_e d_{PE}}{\Gamma_e} = \frac{F_e}{D_e} \end{array} \right\} \quad (6.3.6)$$

Es tracta d'un esquema que dóna la solució exacta per el cas unidimensional, però no per el cas bidimensional, en el qual té un error de primer ordre.

Si es substitueix l'expressió trobada en l'equació general, es pot deduir fàcilment la fórmula de la funció $A(|P|)$, la qual és $A(|P|) = |P| / [\exp(|P|) - 1]$.

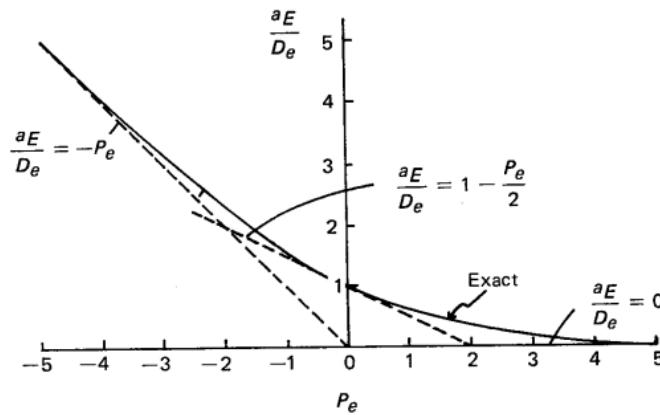
6.3.4 Hybrid Difference Scheme (HDS)

Partint de l'expressió adimensional d'un dels coeficients (a_E) obtinguda mitjançant l'esquema exponencial

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (6.3.7)$$

Es poden deduir els límits de la funció quan $P_e \rightarrow \infty$ i quan $P_e \rightarrow -\infty$ que valen $\frac{a_E}{D_e} \rightarrow 0$ i $\frac{a_E}{D_e} \rightarrow -P_e$, respectivament. Per altra banda, també es pot deduir el valor de la tangent quan $P_e = 0$, que és $\frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2}$.

Coneixent aquestes tres característiques, la funció es pot aproximar mitjançant tres rectes, tal i com es pot veure en el següent esquema, extret de [19].

Figura 6.3.3: Variació de a_E respecte el nombre de Péclet. Extret de [19]

Expressant els coeficients com l'aproximació esmentada, es pot deduir que el valor de la funció $A(|P|)$ és $A(|P|) = \max(0, 1 - 0.5 \cdot |P|)$

6.3.5 Power Law Scheme (PLS)

Aquest esquema, de manera similar a l'esquema híbrid, és una aproximació de l'esquema exponencial (solució exacta per el cas 1D). En aquest cas però, s'aproxima la funció amb més exactitud mitjançant funcions potencials, per tal d'aproximar amb més exactitud punts com $|P| = 2$, que en l'esquema híbrid tenen un error considerable.

Aquest mètode estableix els següents intervals.

$$\begin{aligned}
 \frac{a_E}{D_e} &= -P_e && \text{per } P_e < -10 \\
 \frac{a_E}{D_e} &= (1 + 0.1 \cdot P_e)^5 - P_e && \text{per } -10 \leq P_e < 0 \\
 \frac{a_E}{D_e} &= (1 - 0.1 \cdot P_e)^5 && \text{per } 0 \leq P_e \leq 10 \\
 \frac{a_E}{D_e} &= 0 && \text{per } P_e > 10
 \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Seguint aquest mètode es pot deduir que $A(|P|) = \max(0, (1 - 0.1|P|)^5)$.

En resum, els valors de $A(|P|)$ es troben recollits a la següent taula, en funció de l'esquema escollit.

Esquema	Fórmula $A(P)$
Central difference (CDS)	$1 - 0.5 \cdot P $
Upwind difference (UDS)	1
Hybrid	$\max(0, 1 - 0.5 \cdot P)$
Power Law	$\max(0, (1 - 0.1 \cdot P)^5)$
Exponential	$ P / [\exp(P) - 1]$

Taula 6.3.1: Fórmula de la funció $A(|P|)$ per cada esquema

Capítol 7

Resolució de l'equació de convecció-difusió en diferents situacions

A continuació es mostra la resolució de 3 casos d'interès: el cas de flux paral·lel, el cas de flux diagonal i el cas de Smith-Hutton. En tots ells, ϕ és una variable genèrica.

7.1 Flux paral·lel

El problema més senzill que podem estudiar és el cas de flux paral·lel, és a dir, el cas unidimensional. L'estudi es centra en un domini rectangular ($L \times H$) amb un camp de velocitats $(u, v) = (u_0, 0)$ amb $u_0 \neq 0$ i amb una variació de la variable d'estudi ϕ en la direcció del moviment del fluid. [18]

7.1.1 Condicions de contorn

Les condicions de contorn del problema son les següents:

- Valor inicial: $\phi = \phi_0$ a tot el domini
- Contorn esquerre: $\phi = \phi_{in}$
- Contorn dret: $\phi = \phi_{out}$
- Contorn superior i inferior: $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

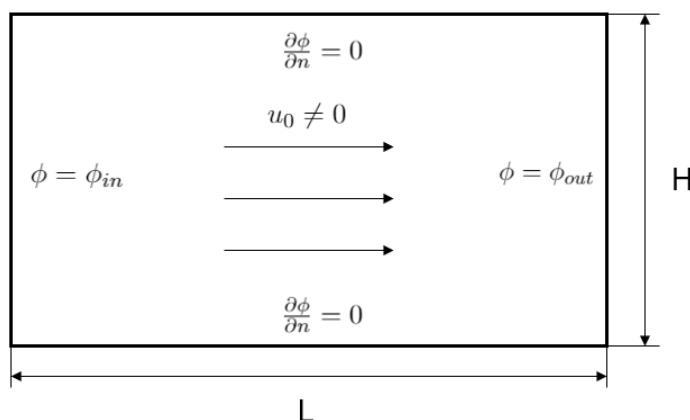


Figura 7.1.1: Esquema del cas de flux paral·lel

7.1.2 Paràmetres de la simulació

Els paràmetres físics i numèrics utilitzats en la simulació son els següents:

- Dimensions del domini: $L = 1\text{ m}$, $H = 1\text{ m}$
- Valors de ϕ : $\phi_0 = 25$, $\phi_{in} = 0$, $\phi_{out} = 100$
- Velocitat: Serà la variable independent, que servirà per modificar el nombre de Péclet i avaluar els resultats en funció d'aquest.
- Nombre de discretitzacions: $N = 250$, $M = 5$
- Criteri de convergència: $\delta = 10^{-4}$

7.1.3 Resultats en funció del nombre de Péclet

El cas unidimensional i estacionari sense fons externes es descriu mitjançant la següent equació diferencial, en la qual només hi ha el terme convectiu i difusiu.

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (7.1.1)$$

Aquesta equació, suposant Γ , ρ , $u = const$, té una solució exacta que es pot obtenir integrant dues vegades. La solució és:

$$\frac{\phi - \phi_{in}}{\phi_{out} - \phi_{in}} = \frac{\exp(P \cdot x/L) - 1}{\exp(P) - 1} \quad (7.1.2)$$

on P és el nombre de Péclet: $P = \frac{\rho u L}{\Gamma}$

Si representem la solució exacta de la distribució de ϕ en la direcció del flux per diferents valors del nombre de Péclet, obtenim la següent gràfica:

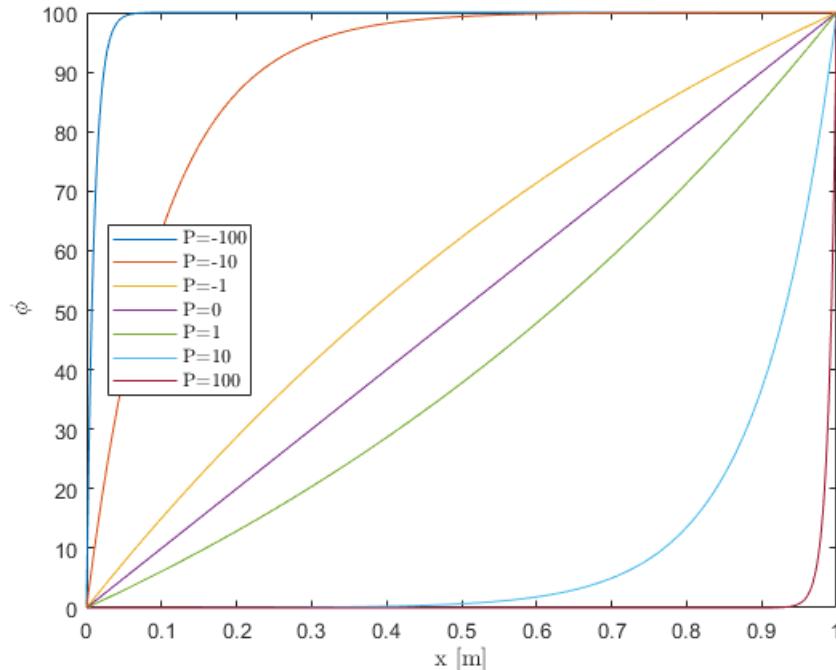


Figura 7.1.2: Solució exacta per a diferents nombres de Péclet

Tal i com es pot observar, per valors propers a 0, la distribució és lineal entre els valors de ϕ_{in} i ϕ_{out} . Aquest resultat denota que si no hi ha moviment del fluid, és com si es tractés de l'estudi d'un sòlid.

A mida que augmenta el nombre de Péclet (és l'equivalent a augmentar la velocitat, per exemple), es pot observar que el valor de ϕ en cada punt tendeix a ser més proper al valor aigües amunt, ϕ_{in} . En el cas extrem ($P \rightarrow \infty$), $\phi = \phi_{in}$ en tot el domini de x en excepció de $x = L$, on el valor és ϕ_{out} per la condició de contorn.

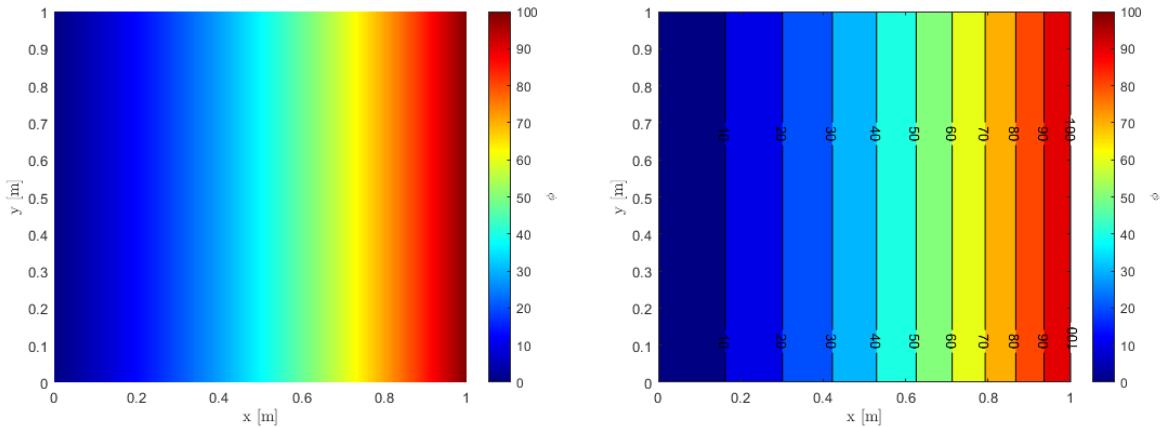
Per altra banda, si el nombre de Péclet és negatiu (simbolitza una velocitat negativa) es pot observar que ocorre el mateix a mida que $|P|$ augmenta. En aquest cas però, la tendència és a apropar-se a ϕ_{out} , que és el valor aigües amunt.

7.1.4 Resultats en funció de l'esquema utilitzat

Per tal d'avaluar l'exactitud de cada un dels esquemes (CDS, UDS, HDS, PLS, EDS), s'ha decidit fixar el nombre de Péclet a $P = 1$.

A continuació es pot observar la distribució de la variable ϕ per els paràmetres i condicions de contorn esmentats.

L'error relatiu obtingut utilitzant cada un dels esquemes és el següent:

Figura 7.1.3: Solució exacta del cas de flux paral·lel per $P = 1$

x [m]	ε_r (CDS)	ε_r (UDS)	ε_r (HDS)	ε_r (PLS)	ε_r (EDS)
0	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.05	9.0123E-07	1.1586E-03	9.0123E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.15	7.8773E-07	1.0283E-03	7.8773E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.25	6.9806E-07	9.1553E-04	6.9806E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.35	6.1020E-07	8.0212E-04	6.1020E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.45	5.2156E-07	6.8617E-04	5.2156E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.55	4.3131E-07	5.6729E-04	4.3131E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.65	3.3902E-07	4.4544E-04	3.3902E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.75	2.4438E-07	3.2070E-04	2.4438E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.85	1.4717E-07	1.9316E-04	1.4717E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
0.95	4.7207E-08	6.2914E-05	4.7207E-08	0.0000E+00	0.0000E+00
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

La taula mostra que tant l'esquema exponencial (EDS) com l'esquema potencial (PLS) tenen un error relatiu inexistent dins de l'apreciació del programa, ja que es tracta de la solució exacta i d'una molt bona aproximació, respectivament.

Per altra banda, podem observar que tant el CDS com el HDS tenen un error de l'ordre de 10^{-7} , mentre que l'UDS té un error relatiu de l'ordre de 10^{-4} , tres ordres de magnitud superior.

7.2 Flux diagonal

Aquest problema estudia la distribució de ϕ en un domini quadrat $L \times L$ quan el fluid es mou en línia recta a una velocitat u_0 , però amb un cert angle α . [18]

7.2.1 Condicions de contorn

Les condicions de contorn del problema son les següents:

- Valor inicial: $\phi = \phi_0$ a tot el domini
- Contorn esquerre i superior: $\phi = \phi_{high}$
- Contorn dret i inferior: $\phi = \phi_{low}$

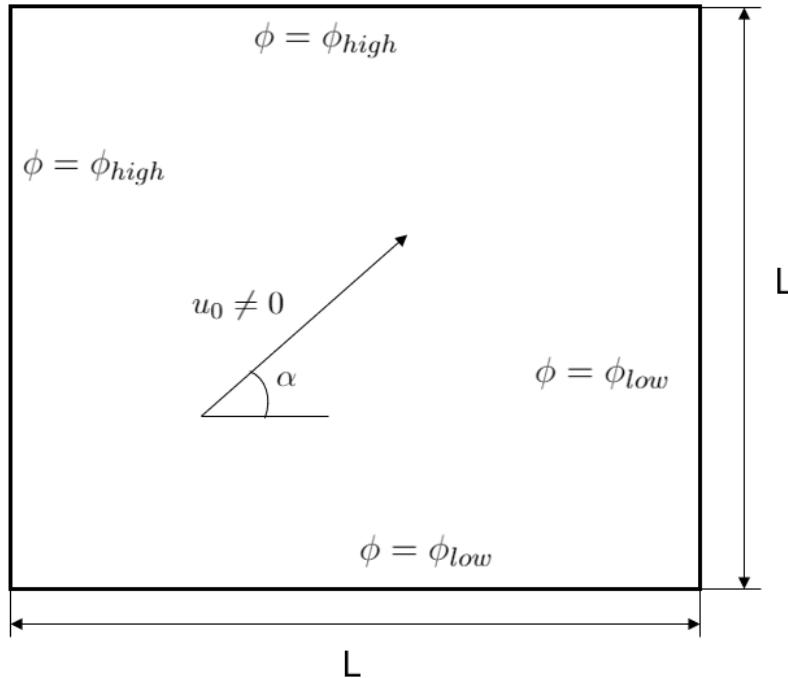


Figura 7.2.1: Esquema del cas de flux diagonal

7.2.2 Paràmetres de la simulació

Els paràmetres físics i numèrics utilitzats en la simulació son els següents:

- Dimensions del domini: $L = 1\text{ m}$
- Valors de ϕ : $\phi_0 = 25$, $\phi_{high} = 0$, $\phi_{low} = 100$
- Velocitat: Serà la variable independent, que servirà per modificar el nombre de Péclet i avaluar els resultats en funció d'aquest.
- Nombre de discretitzacions: $N = 150$, $M = 150$
- Criteri de convergència: $\delta = 10^{-4}$

7.2.3 Resultats en funció del nombre de Péclet

A continuació es pot observar la distribució de ϕ per alguns valors particulars del nombre de Péclet.

- $P \leq 1$: Per velocitats del fluid baixes o nul·les el terme difusiu és predominant respecte el convectiu ($D \gg F$) i es produeix un flux de ϕ al llarg del domini. La distribució pren la forma de la figura [7.2.2], que es correspon a la distribució en un sòlid amb les mateixes condicions de contorn.

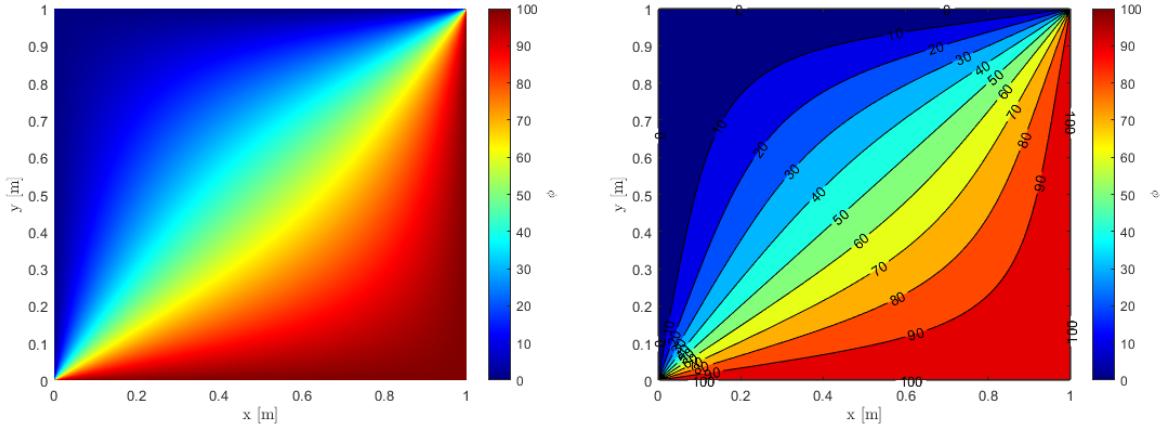


Figura 7.2.2: Distribució de ϕ per $P = 1$

- $1 < P < 1000$: Per velocitats mitjanes, els termes convectiu i difusiu tenen un ordre de magnitud similar ($F \sim D$). Els fenòmens de convecció i difusió es troben combinats i donen lloc a una distribució de ϕ que varia gradualment amb el nombre de Péclet. Veure figura [7.2.3].

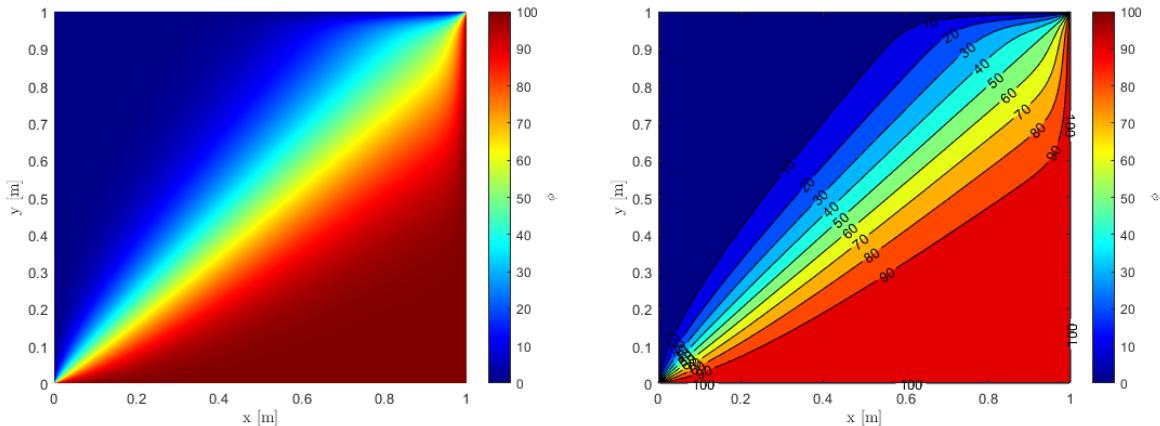
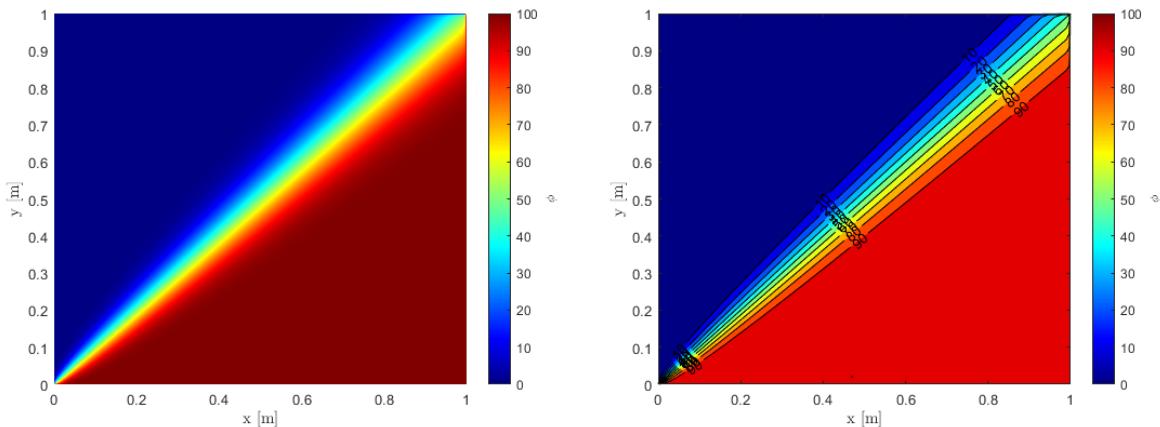


Figura 7.2.3: Distribució de ϕ per $P = 50$

- $P \geq 1000$: Per velocitats altes i fins a infinites el terme convectiu predomina respecte el difusiu ($F \gg D$). El domini es polaritza completament entre la zona nord-oest ($\phi = \phi_{high}$) i la zona sud-est ($\phi = \phi_{low}$), en excepció de la diagonal, on es produeix el flux de ϕ . Veure figura [7.2.4].

Figura 7.2.4: Distribució de ϕ per $P = 1000$

7.2.4 Resultats en funció de l'esquema utilitzat

Per tal d'avaluar l'exactitud de cada un dels esquemes, s'ha realitzat l'estudi de l'error relatiu de cada mètode per cada un dels valors particulars del nombre de Péclet graficats a l'apartat anterior ($P = 1$, $P = 50$, $P = 1000$). A falta d'una solució analítica del problema, s'han obtingut els errors relatius respecte de la solució de l'esquema exponencial. Per tal d'analitzar totes les seccions de les gràfiques, s'han comparat els valors de la diagonal transversal al moviment del fluid, és a dir, de $[x, y] = [0, L]$ a $[x, y] = [L, 0]$. Veure figures [7.2.2], [7.2.3], [7.2.4].

- $P = 1$. Per nombres de Péclet baixos en els que predomina el terme difusiu, es pot observar que l'error relatiu de cada un dels mètodes és bastant reduït. La millor aproximació és la de l'esquema potencial, que té un error relatiu màxim de l'ordre de 10^{-7} . En segon lloc trobem l'esquema CDS i l'híbrid, que per aquests valors del nombre de Péclet son esquemes idèntics, que compten amb un error relatiu màxim de $4.6855 \cdot 10^{-6}$. Per últim trobem l'UDS, que té un error relatiu màxim de l'ordre de 10^{-3} . Veure taula [7.2.1]

x [m]	y [m]	ε_r (CDS)	ε_r (UDS)	ε_r (HDS)	ε_r (PLS)	ε_r (EDS)
0	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.05	0.95	4.6855E-06	1.3433E-03	4.6855E-06	9.2790E-07	0.0000E+00
0.15	0.85	1.3251E-06	3.9525E-04	1.3251E-06	2.6245E-07	0.0000E+00
0.25	0.75	6.0938E-07	1.8755E-04	6.0938E-07	1.2071E-07	0.0000E+00
0.35	0.65	2.6754E-07	8.3925E-05	2.6754E-07	5.2998E-08	0.0000E+00
0.45	0.55	6.5838E-08	2.0653E-05	6.5838E-08	1.3043E-08	0.0000E+00
0.55	0.45	4.8006E-08	1.5530E-05	4.8006E-08	9.5098E-09	0.0000E+00
0.65	0.35	9.5345E-08	3.0260E-05	9.5345E-08	1.8887E-08	0.0000E+00
0.75	0.25	9.5846E-08	2.9743E-05	9.5846E-08	1.8985E-08	0.0000E+00
0.85	0.15	6.8378E-08	2.0513E-05	6.8378E-08	1.3543E-08	0.0000E+00
0.95	0.05	2.5663E-08	7.3727E-06	2.5663E-08	5.0821E-09	0.0000E+00
1	0	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Taula 7.2.1: Error relatiu per $P = 1$ segons cada un dels mètodes

- $P = 50$. Per nombres de Péclet mitjans en els que els termes difusiu i convectiu tenen un ordre similar, l'error relatiu obtingut per cada un dels mètodes és força superior a l'error per $P = 1$ i $P = 1000$ (com es veurà en el següent punt). El mètode més exacte segueix sent el PLS, amb un màxim error relatiu de $3.3678 \cdot 10^{-2}$. Per aquest nombre de Péclet es pot observar que els esquemes CDS i HDS donen també resultats idèntics, amb un error màxim de l'ordre de 10^{-1} . Finalment, utilitzant l'esquema UDS s'obté un màxim error relatiu de 3.3836. Veure taula [7.2.3].

x [m]	y [m]	ε_r (CDS)	ε_r (UDS)	ε_r (HDS)	ε_r (PLS)	ε_r (EDS)
0	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.05	0.95	2.3950E-01	3.3836E+00	2.3950E-01	3.3678E-02	0.0000E+00
0.15	0.85	1.6378E-01	1.6869E+00	1.6378E-01	2.1958E-02	0.0000E+00
0.25	0.75	9.4451E-02	7.4152E-01	9.4451E-02	1.2144E-02	0.0000E+00
0.35	0.65	4.1271E-02	2.7009E-01	4.1271E-02	5.1532E-03	0.0000E+00
0.45	0.55	8.5971E-03	5.1394E-02	8.5971E-03	1.0575E-03	0.0000E+00
0.55	0.45	4.2289E-03	2.5281E-02	4.2289E-03	5.2017E-04	0.0000E+00
0.65	0.35	4.2866E-03	2.8052E-02	4.2866E-03	5.3523E-04	0.0000E+00
0.75	0.25	1.4155E-03	1.1113E-02	1.4155E-03	1.8200E-04	0.0000E+00
0.85	0.15	2.0201E-04	2.0804E-03	2.0201E-04	2.7082E-05	0.0000E+00
0.95	0.05	8.7923E-06	1.2411E-04	8.7923E-06	1.2362E-06	0.0000E+00
1	0	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Taula 7.2.2: Error relatiu per $P = 50$ segons cada un dels mètodes

- $P = 1000$. Per nombres de Péclet alts, en els que predomina el terme convectiu, l'error relatiu es redueix una mica respecte l'anterior cas, però segueix sent superior a aquell per $P = 1$. En aquest cas, els esquemes PLS i HDS tenen un error relatiu màxim similar, de l'ordre de 10^{-4} . Per altra banda, els esquemes CDS i UDS tenen uns màxims errors relatius de 1.0015 i 5.1742, respectivament. Veure taula [7.2.4].

x [m]	y [m]	ε_r (CDS)	ε_r (UDS)	ε_r (HDS)	ε_r (PLS)	ε_r (EDS)
0	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.05	0.95	9.5764E-01	1.2703E-02	3.3577E-04	2.1508E-04	0.0000E+00
0.15	0.85	8.6935E-01	5.1742E+00	1.0604E-03	6.7214E-04	0.0000E+00
0.25	0.75	9.9961E-01	1.4709E+00	5.6360E-04	3.5705E-04	0.0000E+00
0.35	0.65	1.0015E+00	3.6524E-01	1.8454E-04	1.1690E-04	0.0000E+00
0.45	0.55	8.5290E-01	5.2782E-02	2.9685E-05	1.8804E-05	0.0000E+00
0.55	0.45	2.6924E-01	1.6662E-02	9.3710E-06	5.9361E-06	0.0000E+00
0.65	0.35	1.6715E-02	6.0961E-03	3.0800E-06	1.9511E-06	0.0000E+00
0.75	0.25	1.5297E-04	2.2499E-04	8.6218E-08	5.4621E-08	0.0000E+00
0.85	0.15	2.0610E-07	8.1654E-07	1.7931E-10	1.1374E-10	0.0000E+00
0.95	0.05	5.2046E-08	2.6558E-10	1.7810E-11	1.1409E-11	0.0000E+00
1	0	2.2777E-10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Taula 7.2.3: Error relatiu per $P = 1000$ segons cada un dels mètodes

7.3 Problema de Smith-Hutton

El problema de Smith-Hutton planteja un domini rectangular de dimensions $2L \times L$ amb un camp de velocitats solenoidal. [18]

7.3.1 Condicions de contorn

Les condicions de contorn del problema son les següents (Veure figura [7.3.1]):

- Valor inicial: $\phi = \phi_0$ a tot el domini
- Entrada ($-1 \leq x \leq 0, y = 0$): $\phi = 1 + \tanh[10 \cdot (2x + 1)]$
- Sortida ($0 < x < 1, y = 0$): $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$
- Resta de contorns ($x = -1, y \cup (-1 \leq x \leq 1, y = 1) \cup (x = 1, y)$): $\phi = 1 - \tanh(10)$.

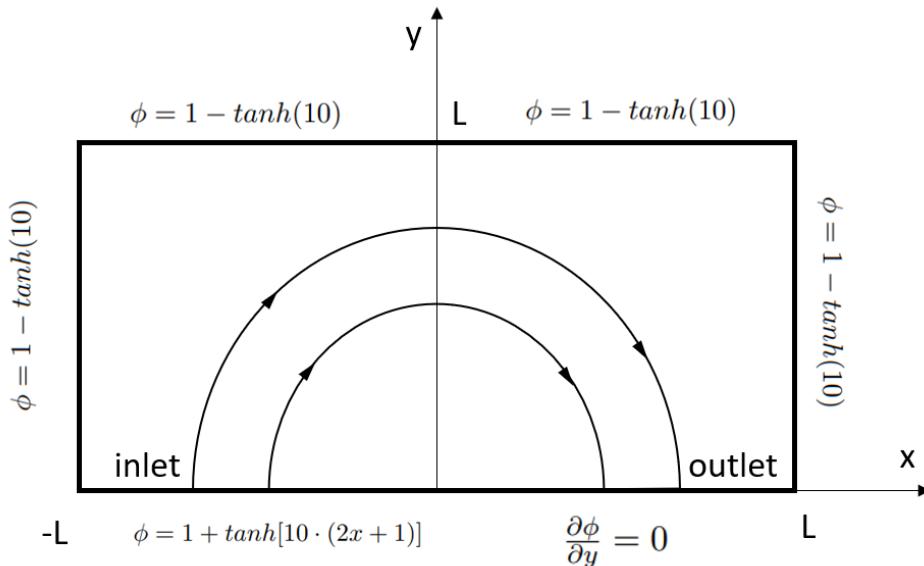


Figura 7.3.1: Esquema del problema de Smith-Hutton

7.3.2 Paràmetres de la simulació

Els paràmetres físics i numèrics utilitzats en la simulació son els següents:

- Dimensions del domini: $L = 1 \text{ m}$
- Valors de ϕ : $\phi_0 = 1$
- Camp de velocitats: $[u, v] = [2y \cdot (1 - x^2), -2x \cdot (1 - y^2)]$.
- Nombre de discretitzacions: $N = 150, M = 75$
- Criteri de convergència: $\delta = 10^{-4}$

7.3.3 Camp de velocitats i línies de corrent

A partir del camp de velocitats descrit, es pot obtenir fàcilment la funció de les línies de corrent

$$\psi = -(1 - x^2) \cdot (1 - y^2) \quad (7.3.1)$$

A les figures [7.3.2] i [7.3.3] es pot veure la representació del camp de velocitats, tant en mòdul com en direcció, i la representació de les línies de corrent.

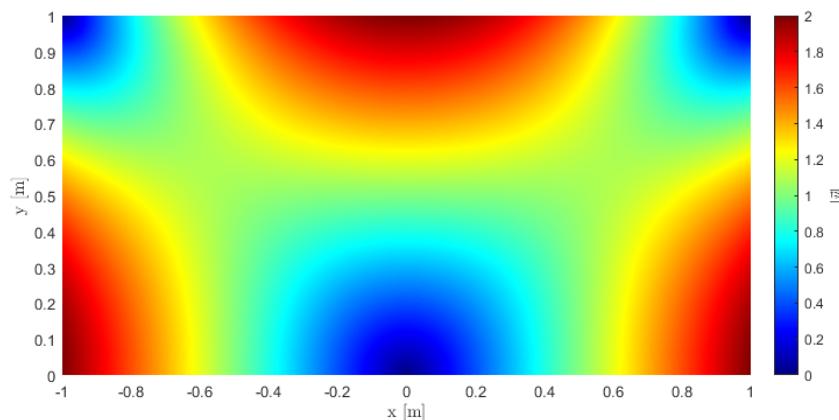


Figura 7.3.2: Camp de velocitats del problema (en mòdul)

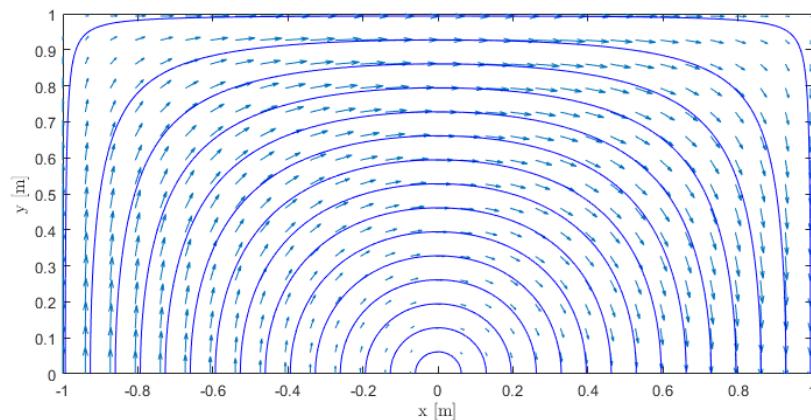


Figura 7.3.3: Línies de corrent i camp vectorial de velocitats del problema

7.3.4 Resultats en funció del nombre de Péclet

A continuació es pot observar la distribució de la variable ϕ pels nombres de Péclet estudiats ($P = 10$, $P = 10^3$, $P = 10^6$), suposant $\rho = v_0 = 1$:

- Cas 1: $\rho/\Gamma = 10$. Per nombres de Péclet baixos, el terme difusiu predomina per sobre el convectiu. Tal i com es pot observar a les figures [7.3.4] i [7.3.5], existeix una difusió entre les diferents línies de corrent, la qual cosa es mostra com un gradient de colors més suau.

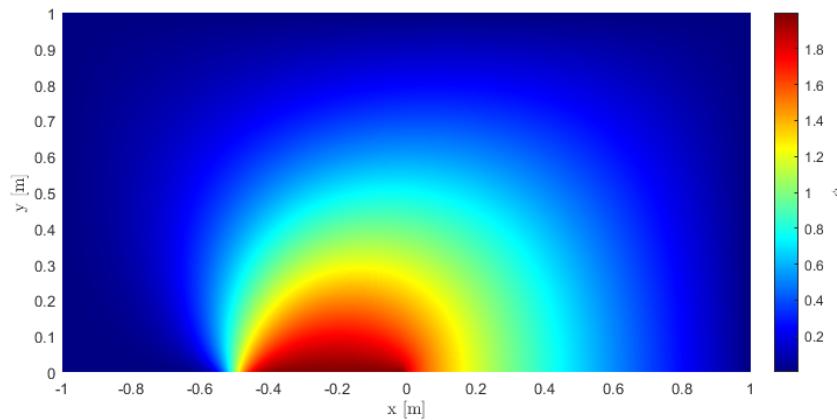


Figura 7.3.4: Distribució de ϕ per $\rho/\Gamma = 10$

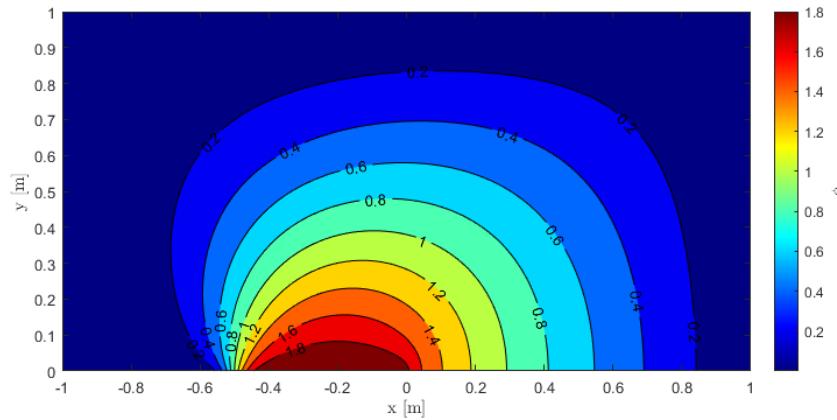
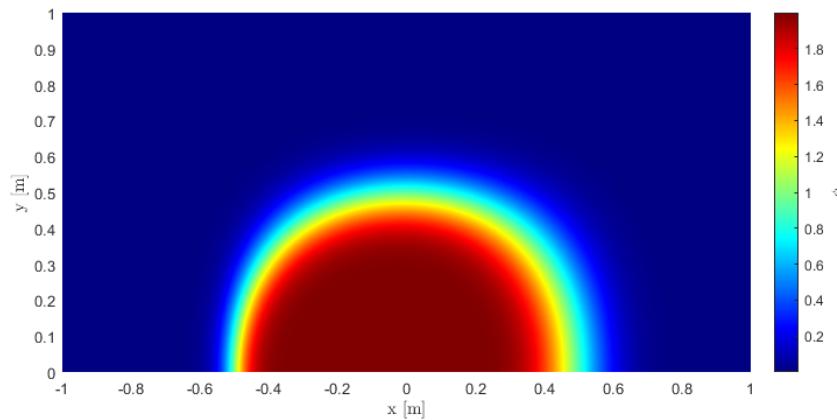
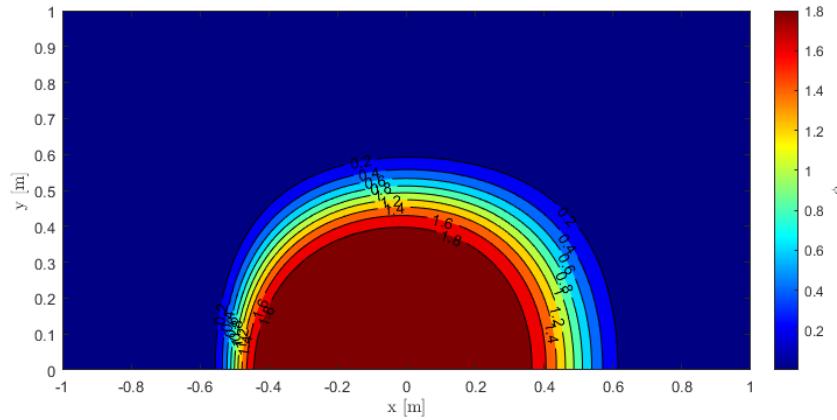
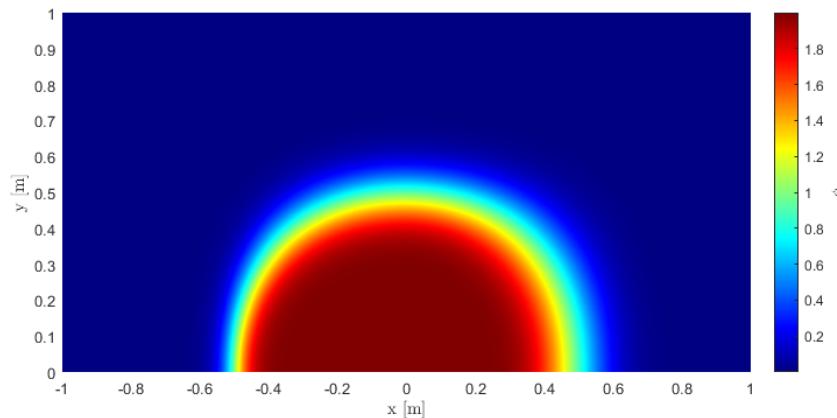


Figura 7.3.5: Corbes de nivell per $\rho/\Gamma = 10$

- Cas 2: $\rho/\Gamma = 10^3$. Amb un nombre de Péclet major a l'anterior es pot veure que el terme convectiu pren importància en front del convectiu, i es pot observar com no es produeix casi difusió entre les diferents línies de corrent. Aquest últim aspecte es reflexa en el gradient de l'escala de colors. Veure figures [7.3.6] i [7.3.7].

Figura 7.3.6: Distribució de ϕ per $\rho/\Gamma = 10^3$ Figura 7.3.7: Corbes de nivell per $\rho/\Gamma = 10^3$

- Cas 3: $\rho/\Gamma = 10^6$. Per últim, quan el nombre de Péclet alt, l'efecte de la difusió amb prou feines es pot observar. Els diferents valors de ϕ es mantenen al llarg de les línies de corrent. Veure figures [7.3.8] i [7.3.9]

Figura 7.3.8: Distribució de ϕ per $\rho/\Gamma = 10^6$

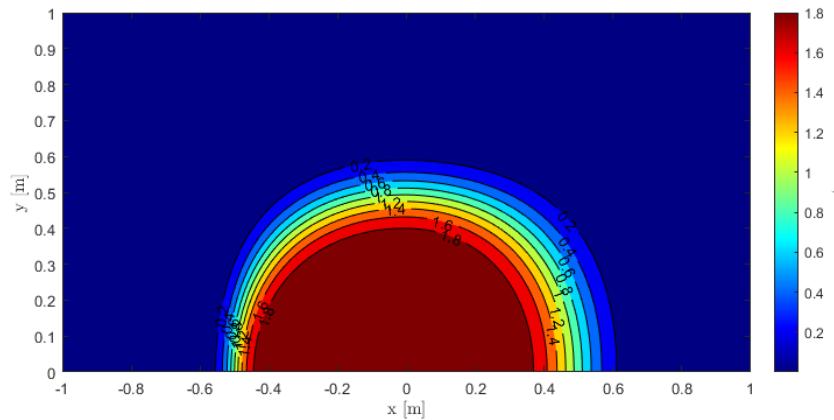


Figura 7.3.9: Corbes de nivell per $\rho/\Gamma = 10^6$

7.3.5 Resultats en funció de l'esquema utilitzat

Els resultats obtinguts a la sortida del domini ($0 < x < 1$, $y = 0$) utilitzant cada un dels esquemes són els següents:

- Cas 1: $\rho/\Gamma = 10$. A la taula [7.3.1] es poden observar els resultats obtinguts mitjançant la simulació amb cada un dels esquemes proposats. Per una banda, es pot observar que tots els esquemes, en excepció de l'UDS, tenen uns resultats molt similars, els quals s'aproximen força bé als resultats esperats. Per altra banda, l'esquema UDS proporciona uns resultats lleugerament més bons que els altres esquemes.

$x[m]$	Valor esperat	Valor obtingut amb cada esquema				
		CDS	UDS	HDS	PLS	EDS
0.0	1.989	1.898	1.897	1.898	1.898	1.898
0.1	1.402	1.412	1.406	1.412	1.412	1.412
0.2	1.146	1.173	1.166	1.173	1.173	1.173
0.3	0.946	0.984	0.976	0.984	0.984	0.984
0.4	0.775	0.819	0.811	0.819	0.818	0.819
0.5	0.621	0.667	0.659	0.667	0.666	0.666
0.6	0.480	0.523	0.517	0.523	0.523	0.523
0.7	0.349	0.386	0.381	0.386	0.386	0.386
0.8	0.227	0.254	0.251	0.254	0.254	0.254
0.9	0.111	0.126	0.124	0.126	0.126	0.126
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Taula 7.3.1: Valors esperats i resultats obtinguts amb cada esquema per $\rho/\Gamma = 10$

- Cas 2: $\rho/\Gamma = 10^3$. En aquest cas, l'esquema que té uns resultats més acurats és el CDS, mentre que els altres esquemes tenen certa variació dels resultats, la qual és més evident que per al cas de $\rho/\Gamma = 10$. Veure taula [7.3.2].

$x[m]$	Valor esperat	Valor obtingut amb cada esquema				
		CDS	UDS	HDS	PLS	EDS
0.0	2.0000	1.997	2.000	2.000	2.000	2.000
0.1	1.9990	1.998	2.000	2.000	2.000	2.000
0.2	1.9997	2.000	1.994	1.999	1.998	1.998
0.3	1.9850	1.992	1.917	1.957	1.953	1.953
0.4	1.8410	1.824	1.558	1.636	1.629	1.629
0.5	0.9510	0.967	0.880	0.887	0.888	0.888
0.6	0.1540	0.149	0.296	0.249	0.255	0.255
0.7	0.0010	0.006	0.053	0.031	0.033	0.033
0.8	0.0000	0.000	0.005	0.002	0.002	0.002
0.9	0.0000	0.000	0.005	0.002	0.002	0.002
1.0	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Taula 7.3.2: Valors esperats i resultats obtinguts amb cada esquema per $\rho/\Gamma = 10^3$

- Cas 3: $\rho/\Gamma = 10^6$. Per un nombre de Péclet més elevat com 10^6 , l'esquema CDS no convergeix. Per altra banda, els altres esquemes proporcionen una solució prou correcta per els valors propers a $x = 0$ i $x = 1$, però divergeixen força en els valors centrals. Veure taula [7.3.3].

$x[m]$	Valor esperat	Valor obtingut amb cada esquema				
		CDS	UDS	HDS	PLS	EDS
0.0	2.000	-	2.000	2.000	2.000	2.000
0.1	2.000	-	2.000	2.000	2.000	2.000
0.2	2.000	-	1.999	1.999	1.999	1.999
0.3	1.999	-	1.963	1.963	1.963	1.963
0.4	1.964	-	1.648	1.648	1.648	1.648
0.5	1.000	-	0.885	0.885	0.885	0.885
0.6	0.036	-	0.240	0.240	0.240	0.240
0.7	0.001	-	0.028	0.028	0.028	0.028
0.8	0.000	-	0.001	0.001	0.001	0.001
0.9	0.000	-	0.001	0.001	0.001	0.001
1.0	0.000	-	0.000	0.000	0.000	0.000

Taula 7.3.3: Valors esperats i resultats obtinguts amb cada esquema per $\rho/\Gamma = 10^6$

Part V

Equacions de Navier-Stokes

Capítol 8

Fractional Step Method

El Fractional Step Method (FSM) és una tècnica àmpliament utilitzada per a resoldre les equacions de Navier-Stokes per a un fluid incompressible, degut al seu rendiment superior respecte d'altres algoritmes i la simplicitat del codi.

8.1 Base teòrica

Les equacions de Navier-Stokes per un fluid incompressible i amb viscositat constant son [20]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (8.1.1a)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} \quad (8.1.1b)$$

essent $\vec{v} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$.

Introduint el terme $R(\vec{v}) = -(\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}$, que agrupa el terme difusiu i el terme convectiu de l'equació, es pot transformar l'equació [8.1.1b] en:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = R(\vec{v}) - \nabla p \quad (8.1.2)$$

El pròxim pas és la integració temporal de les equacions de continuïtat i de *momentum*. La primera s'integra implícitament, mentre que la segona s'integra a l'instant de temps $n + \frac{1}{2}$. Les equacions [8.1.1a] i [8.1.2] esdevenen:

$$\nabla \cdot \vec{v}^{n+1} = 0 \quad (8.1.3a)$$

$$\rho \frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} R(\vec{v}^n) - \frac{1}{2} R(\vec{v}^{n-1}) - \nabla p^{n+1} \quad (8.1.3b)$$

Aplicant el teorema de Helmholtz-Hodge, podem introduir la següent descomposició:

$$\vec{v}^p = \vec{v}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad \text{on } \nabla \cdot \vec{v}^{n+1} = 0 \quad (8.1.4)$$

Emprant aquesta equivalència, es pot transformar l'equació de *momentum* [8.1.3b] en l'equació

de la projecció de la velocitat:

$$\rho \frac{\vec{v}^p - \vec{v}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} R(\vec{v}^n) - \frac{1}{2} R(\vec{v}^{n-1}) \quad (8.1.5)$$

Per altra banda, aplicant la divergència a ambdues bandes de l'equació [8.1.4] i introduint l'equació de continuïtat [8.1.3a], és possible obtenir l'equació de Poisson per a la pressió:

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}^p \quad (8.1.6)$$

Finalment, es pot obtenir l'equació per calcular la velocitat \vec{v}^{n+1} directament de la descomposició original:

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^p - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (8.1.7)$$

Per altra banda, degut a que s'utilitza un esquema explícit en el càlcul de la projecció de la velocitat i en els passos posteriors, l'increment de temps Δt es calcula al final de cada instant de temps seguint la condició de Courant-Friedrich-Levy, la qual assegura la convergència de la solució.

$$\Delta t = \min(\Delta t_c, \Delta t_d) \quad (8.1.8a)$$

$$\Delta t_d = \min \left(0, 20 \frac{\rho \Delta x^2}{\mu} \right) \quad (8.1.8b)$$

$$\Delta t_c = \min \left(C \frac{\Delta x}{|\vec{v}|} \right) \quad (8.1.8c)$$

on el paràmetre C és el nombre de Courant i marca el límit superior de l'intervall de temps. Reduint aquest paràmetre es pot millorar la convergència de l'algoritme, sacrificant temps de computació.

8.2 Definició de la malla

A l'hora de definir la malla, es poden utilitzar dues estratègies diferenciades: malles esglaoades (*staggered meshes*) o malles col·locades (*collocated meshes*). Per altra banda, es poden utilitzar també malles estructurades o no-estructurades. Veure figura [8.2.1].

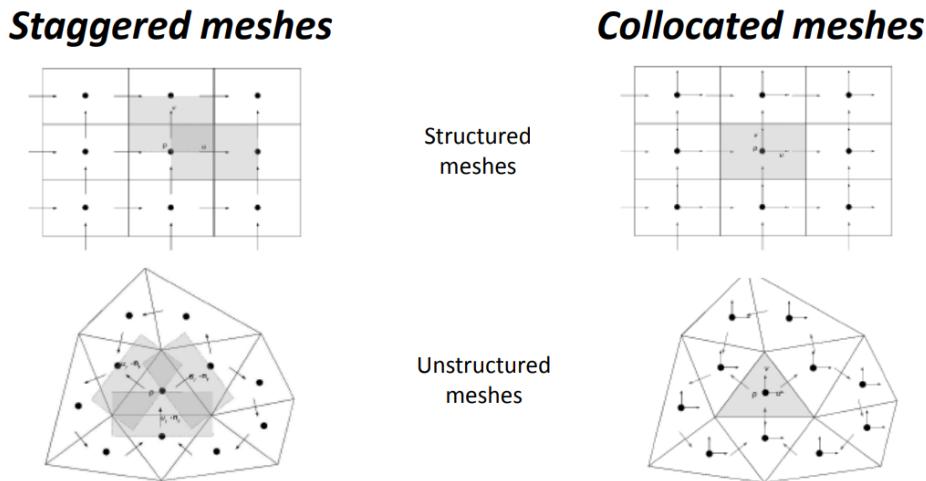


Figura 8.2.1: Tipus de malles aplicades al FSM. Extret de [20]

En aquest estudi s'ha optat per definir una malla esglaonada, ja que és senzilla d'implementar en malles estructurades. En aquest tipus de malla, els nodes de la pressió p i les velocitats u i v es troben totalment intercalats. A la figura [8.2.2] es troba un esquema de la malla. Es poden observar en verd, vermell i negre els nodes de la malla i els volums de control corresponents a les velocitats u i v i la pressió, respectivament.

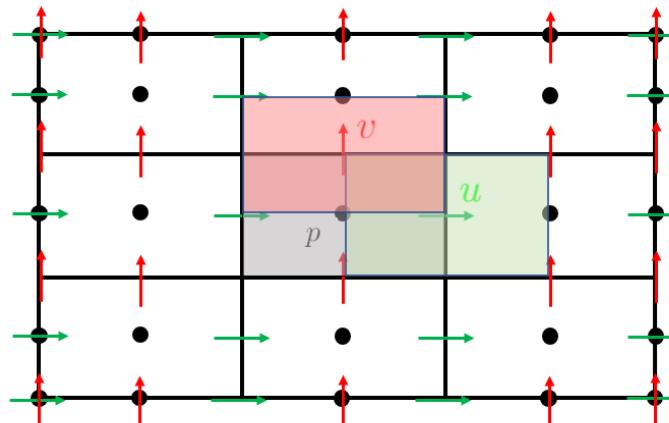


Figura 8.2.2: Esquema d'una malla esglaonada (Staggered mesh)

8.3 Algoritme del Fractional Step Method

En una malla esglaonada, l'algoritme del *Fractional Step Method*, que permet obtenir una única solució de la velocitat i la pressió en cada instant de temps, és el següent:

1. Avaluació de $R(\vec{v}^n)$
2. Càlcul projecció de la velocitat: $\vec{v}^p = \vec{v}^n + \frac{\Delta t}{\rho} [\frac{3}{2}R(\vec{v}^n) - \frac{1}{2}R(\vec{v}^{n-1})]$

3. Càlcul pressió: $\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}^p$
4. Càlcul velocitat: $\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^p - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1}$
5. Càlcul del nou increment de temps Δt utilitzant la condició de Courant-Friedrich-Levy.

8.3.1 Avaluació de $R(\vec{v})$

Per tal d'avaluar el terme $R(\vec{v})$, s'ha de discretitzar i resoldre l'equació

$$R(\vec{v}) = -(\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \mu \Delta \vec{v} \quad (8.3.1)$$

en cada una de les components de la velocitat.

- Component x de la velocitat. En l'eix x, l'equació [8.3.1] esdevé

$$R(u) = -(\rho \vec{v} \cdot \nabla) u + \mu \Delta u \quad (8.3.2)$$

Per obtenir l'equació discretitzada corresponent, s'integra l'equació [8.3.2] al llarg d'un volum de control en la malla esglaonada en x:

$$\int_{\Omega_x} R(u) d\Omega_x = - \int_{\Omega_x} (\rho \vec{v} \cdot \nabla) u d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \mu \Delta u d\Omega_x \quad (8.3.3)$$

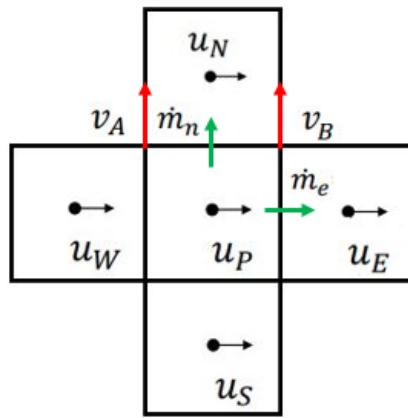
Aplicant el teorema de Gauss-Ostrogradski, la integral es transforma en:

$$\int_{\Omega_x} R(u) d\Omega_x = - \int_{\partial\Omega_x} (\rho \vec{v}) u \cdot \vec{n} dS + \int_{\partial\Omega_x} \mu \nabla u \cdot \vec{n} dS \quad (8.3.4)$$

Finalment, l'equació discretitzada d'on es pot obtenir $R(u)$ és:

$$R(u) \Omega_{xP} = - [\dot{m}_e u_e - \dot{m}_w u_w + \dot{m}_n u_n - \dot{m}_s u_s] + \left[\mu_e \frac{u_E - u_P}{d_{PE}} A_e - \mu_w \frac{u_P - u_W}{d_{PW}} A_w + \mu_n \frac{u_N - u_P}{d_{PN}} A_n - \mu_s \frac{u_P - u_S}{d_{PS}} A_s \right] \quad (8.3.5)$$

on $\dot{m}_e = (\rho u)_e A_e$, $\dot{m}_w = (\rho u)_w A_w$, $\dot{m}_n = (\rho v)_n A_n$, $\dot{m}_s = (\rho v)_s A_s$ amb \dot{m} positiu en la direcció positiva dels eixos. Veure figura [8.3.1].

Figura 8.3.1: Esquema de la malla de la velocitat u en el càlcul de $R(u)$

Per tal d'avaluar els cabals màssics que s'intercanvien entre els diferents volums de control, s'utilitzen les següents expressions:

$$\begin{aligned}\dot{m}_n &= \frac{(\rho v)_A + (\rho v)_B}{2} A_n \\ \dot{m}_e &= \frac{(\rho u)_E + (\rho u)_P}{2} A_e\end{aligned}\tag{8.3.6}$$

Pel que fa a la velocitat en la cara est del volum de control, u_e , s'avalua mitjançant algun dels esquemes numèrics estudiats en l'equació de convecció-difusió. Veure apartat [6.3].

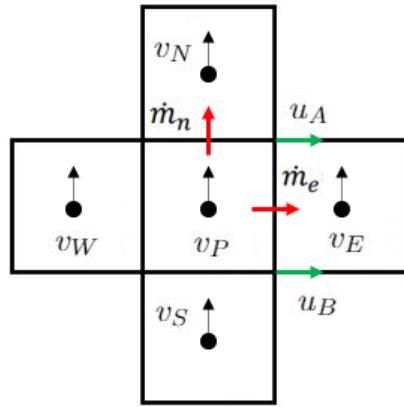
- Component y de la velocitat. En l'eix y, l'equació [8.3.1] és igual a

$$R(v) = -(\rho \vec{v} \cdot \nabla)v + \mu \Delta v\tag{8.3.7}$$

Realitzant una integració anàloga al cas de la velocitat en l'eix x però al llarg d'un volum de control de la malla esglaonada en y, es pot obtenir l'equació discretitzada que permet calcular $R(v)$:

$$\begin{aligned}R(v)\Omega_{yP} &= -[\dot{m}_e v_e - \dot{m}_w v_w + \dot{m}_n v_n - \dot{m}_s v_s] + \\ &\quad \left[\mu_e \frac{v_E - v_P}{d_{PE}} A_e - \mu_w \frac{v_P - v_W}{d_{PW}} A_w + \mu_n \frac{v_N - v_P}{d_{PN}} A_n - \mu_s \frac{v_P - v_S}{d_{PS}} A_s \right]\end{aligned}\tag{8.3.8}$$

on $\dot{m}_e = (\rho u)_e A_e$, $\dot{m}_w = (\rho u)_w A_w$, $\dot{m}_n = (\rho v)_n A_n$, $\dot{m}_s = (\rho v)_s A_s$ amb \dot{m} positiu en la direcció positiva dels eixos. Veure figura [8.3.2].

Figura 8.3.2: Esquema de la malla de la velocitat v en el càlcul de $R(v)$

Per tal d'avaluar els cabals màssics que s'intercanvien entre els diferents volums de control, s'utilitzen unes expressions anàlogues a les del cas de l'eix x .

$$\begin{aligned}\dot{m}_n &= \frac{(\rho v)_N + (\rho v)_P}{2} A_n \\ \dot{m}_e &= \frac{(\rho u)_A + (\rho u)_B}{2} A_e\end{aligned}\tag{8.3.9}$$

Pel que fa a la velocitat en la cara nord del volum de control, u_n , s'avalua mitjançant algun dels esquemes numèrics estudiats en l'equació de convecció-difusió. Veure apartat [6.3].

8.3.2 Càlcul distribució de pressió

Per al càlcul de la distribució de pressió, s'ha de resoldre l'equació de Poisson:

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}^p \tag{8.3.10}$$

Per fer-ho, en primer lloc s'integra l'equació al llarg del volum de control Ω , tot aplicant el teorema de Gauss-Ostrogradsky:

$$\int_{\partial\Omega} \nabla p^{n+1} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial\Omega} \rho \vec{v}^P \cdot \vec{n} dS \tag{8.3.11}$$

Resolent la integral s'obté la següent equació discretitzada:

$$\begin{aligned}\frac{p_E^{n+1} - p_P^{n+1}}{d_{PE}} A_e - \frac{p_P^{n+1} - p_W^{n+1}}{d_{PW}} A_w + \frac{p_N^{n+1} - p_P^{n+1}}{d_{PN}} A_n - \frac{p_P^{n+1} - p_S^{n+1}}{d_{PS}} A_s = \\ \frac{1}{\Delta t} [(\rho u^P)_e A_e - (\rho u^P)_w A_w + (\rho v^P)_n A_n - (\rho v^P)_s A_s]\end{aligned}\tag{8.3.12}$$

Reassigant els termes de l'equació es pot obtenir una equació discretitzada de la forma $a_P p_P^{n+1} = a_E p_E^{n+1} + a_W p_W^{n+1} + a_N p_N^{n+1} + a_S p_S^{n+1} + b_P$, ja tractada en anteriors capítols, la qual es pot resoldre mitjançant qualsevol dels *solvers* d'equacions lineals (Gauss-Seidel, TDMA line-by-line, etc.). Els coeficients de l'equació esdevenen:

$$a_E = \frac{A_e}{d_{PE}} \quad (8.3.13a)$$

$$a_W = \frac{A_w}{d_{PW}} \quad (8.3.13b)$$

$$a_N = \frac{A_n}{d_{PN}} \quad (8.3.13c)$$

$$a_S = \frac{A_s}{d_{PS}} \quad (8.3.13d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (8.3.13e)$$

$$b_P = -\frac{1}{\Delta t} [(\rho u^P)_e A_e - (\rho u^P)_w A_w + (\rho v^P)_n A_n - (\rho v^P)_s A_s] \quad (8.3.13f)$$

8.3.3 Càcul distribució de velocitats

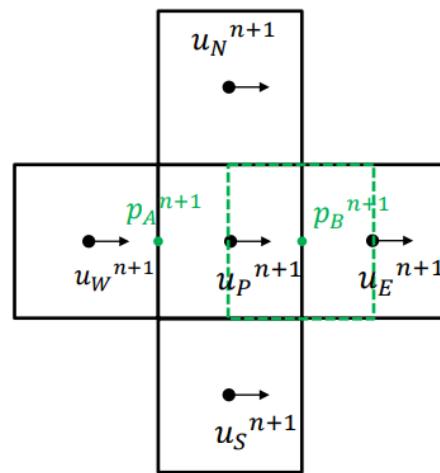
En el càcul de la distribució de velocitats es tracten les dues components per separat.

- Component x de la velocitat. Per al càcul de u , s'avalua la variable a partir de la component x de la projecció de la velocitat i la distribució de la pressió utilitzant l'equació

$$u_P^{n+1} = u_P^n - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_P^{n+1} \quad (8.3.14)$$

Aproximant l'equació mitjançant el mètode de diferències finites (FDM) s'obté l'expressió final per obtenir la velocitat. Veure figura [8.3.3].

$$u_P^{n+1} = u_P^n - \frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{p_B^{n+1} - p_A^{n+1}}{d_{AB}} \quad (8.3.15)$$

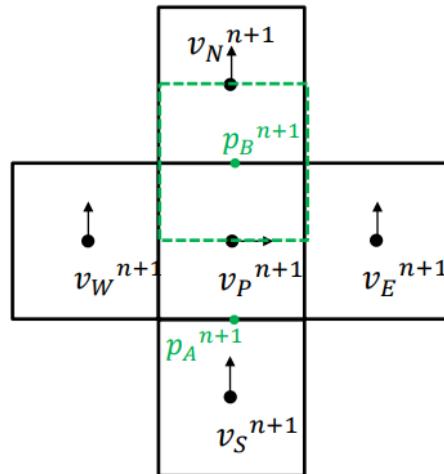
Figura 8.3.3: Esquema de la malla de u en el càlcul de la velocitat. Extret de [20]

- Component y de la velocitat. Per al càlcul de v , s'avalua la variable a partir de la component y de la projecció de la velocitat i la distribució de la pressió utilitzant l'equació

$$v_P^{n+1} = v_P^P - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_P^{n+1} \quad (8.3.16)$$

Aproximant l'equació mitjançant el mètode de diferències finites (FDM) s'obté l'expressió final per obtenir la velocitat. Veure figura [8.3.4].

$$v_P^{n+1} = v_P^P - \frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{p_B^{n+1} - p_A^{n+1}}{d_{AB}} \quad (8.3.17)$$

Figura 8.3.4: Esquema de la malla de v en el càlcul de la velocitat. Extret de [20]

Capítol 9

Resolució de les equacions de Navier-Stokes en diferents situacions

En el present capítol s'ha aplicat el mètode de resolució de les equacions de Navier-Stokes descrit a l'anterior capítol per a la resolució de dos casos d'interès. El primer d'ells és el del flux en una *lid-driven cavity*, mentre que el segon d'ells és el flux al voltant d'un cilindre quadrat.

9.1 Lid-driven cavity

9.1.1 Plantejament

El problema proposat consta d'una cavitat de dimensions $L \times L$ i profunditat unitària amb una obertura al contorn superior per on circula aire a una velocitat u_{ref} en una direcció paral·lela al contorn. La resta del contorn està format per parets, on la velocitat és nul·la ($u = v = 0$). A tot el contorn la pressió no varia ($\frac{\partial p}{\partial n} = 0$). Veure figura [9.1.1].

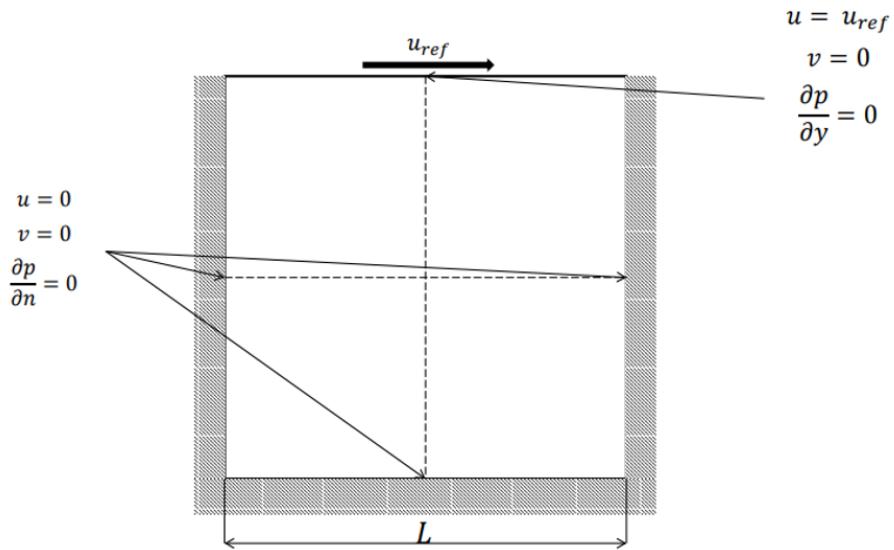


Figura 9.1.1: Esquema del cas i condicions de contorn. Extret de [20]

9.1.2 Resultats

En l'estudi del cas, s'han realitzat simulacions per a nombres de Reynolds de 100, 1.000 i 10.000. S'han realitzat les simulacions amb aire com a fluid principal a una temperatura ambient de $15^\circ C$ i pressió atmosfèrica. Amb aquestes condicions, les propietats de l'aire que intervenen en el càlcul del nombre de Reynolds són: [21]

$$\rho = \frac{p}{287T} = \frac{101300}{287 \cdot (15 + 273,15)} = 1,225 \text{ kg/m}^3 \quad (9.1.1a)$$

$$\mu = \frac{2,5393 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{T}{273,15}}}{1 + \left(\frac{122}{T}\right)} = \frac{2,5393 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{15+273,15}{273,15}}}{1 + \left(\frac{122}{15+273,15}\right)} = 1,8323 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(ms)} \quad (9.1.1b)$$

La distància característica té un valor de $L = 1 \text{ m}$ i la velocitat és la variable que es modifica per tal de generar els diferents nombres de Reynolds. Cal destacar que es podrien haver utilitzat unes variables completament aleatòries, ja que mentre es mantingui el nombre de Reynolds els resultats es mantenen constants.

A continuació es mostren els valors obtinguts per cada un dels valors del nombre de Reynolds estudiats:

- Re=100. Per a un nombre de Reynolds igual a 100, és necessari imposar un nombre de Courant petit ($C = 0,05$) per tal d'assegurar la convergència amb una malla de 128x128. Pel que fa al temps màxim de simulació, s'analitzarà un període de 10.800 segons, que equival a 3 hores. Finalment, per avaluar els termes convectius de les equacions de Navier-Stokes, s'ha implementat un esquema numèric CDS. El temps de computació per a aquestes condicions és relativament baix.

A les taules [9.1.1] i [9.1.2] es poden trobar els resultats obtinguts de les velocitats u i v adimensionals al llarg de la línies vertical i horitzontal que passen pel centre geomètric de la cavitat, respectivament. També s'hi poden apreciar els valors esperats, d'acord amb [22], i l'error absolut i relatiu entre els valors obtinguts i aquests.

Posició y	Valor esperat	Valor obtingut	Error absolut	Error relatiu
1,00000	1,00000	1,00000	0,000E+00	0,00%
0,97656	0,84123	0,84340	2,173E-03	0,26%
0,96875	0,78871	0,79152	2,807E-03	0,36%
0,96094	0,73722	0,74061	3,391E-03	0,46%
0,95313	0,68717	0,69108	3,912E-03	0,57%
0,85156	0,23151	0,23632	4,812E-03	2,08%
0,73438	0,00332	0,00402	7,044E-04	21,22%
0,61719	-0,13641	-0,13871	2,299E-03	1,69%
0,50000	-0,20581	-0,20883	3,017E-03	1,47%
0,45313	-0,21090	-0,21363	2,728E-03	1,29%
0,28125	-0,15662	-0,15747	8,467E-04	0,54%
0,17188	-0,10150	-0,10167	1,677E-04	0,17%
0,10156	-0,06434	-0,06439	4,894E-05	0,08%
0,07031	-0,04775	-0,04662	1,135E-03	2,38%
0,06250	-0,04192	-0,04196	4,478E-05	0,11%
0,05469	-0,03717	-0,03721	4,138E-05	0,11%
0,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%

Taula 9.1.1: Valors esperats i obtinguts de u/u_{ref} per a $Re = 100$

Posició x	Valor esperat	Valor obtingut	Error absolut	Error relatiu
1,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%
0,96875	-0,05906	-0,06229	3,233E-03	5,47%
0,96094	-0,07391	-0,07790	3,990E-03	5,40%
0,95313	-0,08864	-0,09333	4,694E-03	5,30%
0,94531	-0,10313	-0,10850	5,370E-03	5,21%
0,90625	-0,16914	-0,17710	7,964E-03	4,71%
0,85938	-0,22445	-0,23354	9,092E-03	4,05%
0,80469	-0,24533	-0,25320	7,873E-03	3,21%
0,50000	0,05454	0,05752	2,976E-03	5,46%
0,23438	0,17527	0,17928	4,009E-03	2,29%
0,22656	0,17507	0,17907	4,002E-03	2,29%
0,15625	0,16077	0,16452	3,749E-03	2,33%
0,09375	0,12317	0,12615	2,978E-03	2,42%
0,07813	0,10890	0,11156	2,664E-03	2,45%
0,07031	0,10091	0,10340	2,490E-03	2,47%
0,06250	0,09233	0,09462	2,294E-03	2,48%
0,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%

Taula 9.1.2: Valors esperats i obtinguts de v/u_{ref} per a $Re = 100$

Per altra banda, es pot observar la distribució de la velocitat, tant en mòdul com en components, i la distribució de la pressió.

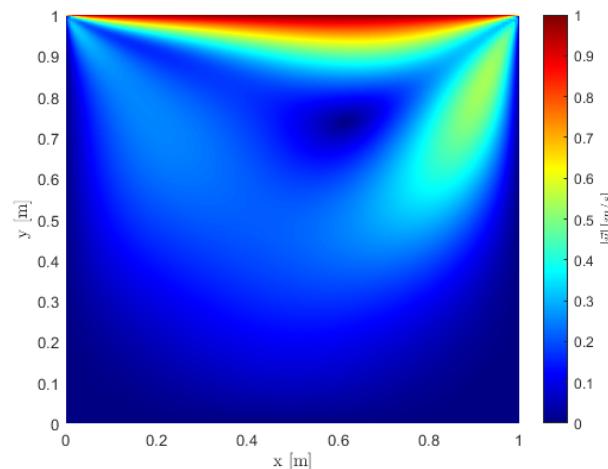


Figura 9.1.2: Distribució de la velocitat en mòdul per a $\text{Re}=100$

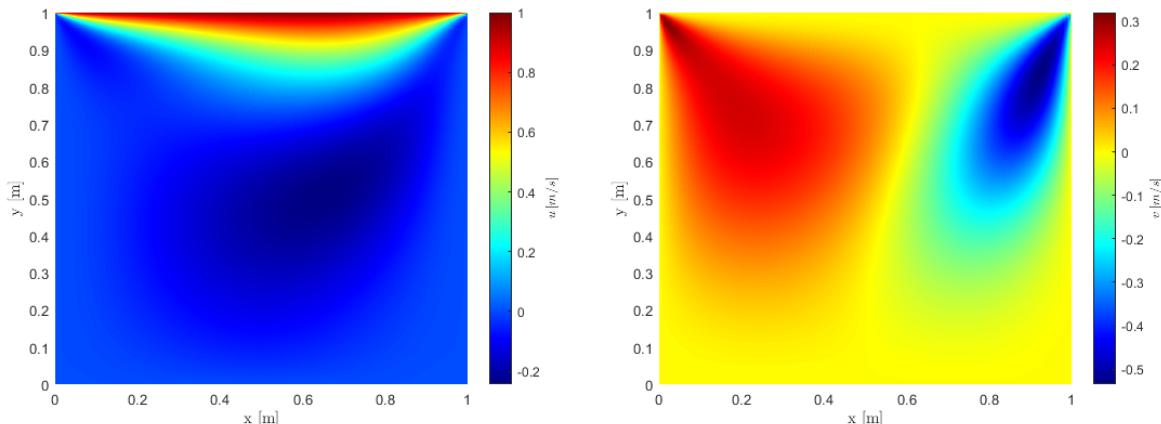


Figura 9.1.3: Distribució de les components x i y de la velocitat per a $\text{Re}=100$

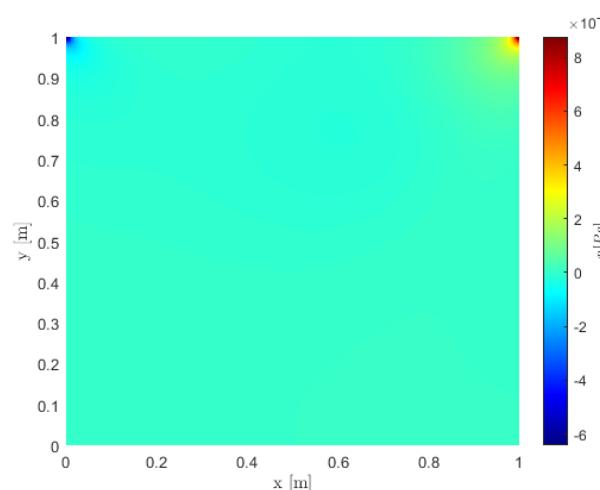


Figura 9.1.4: Distribució de la pressió per a $\text{Re}=100$

- $Re=1.000$. Per a aquest nombre de Reynolds, no és necessari reduir el nombre de Courant, i es pot definir a un valor de $C = 0,25 - 0,35$, el qual redueix el temps de computació. Com a esquema numèric per avaluar els termes convectius de les equacions de NS, s'ha utilitzat un CDS. Amb aquests paràmetres, s'ha obtingut un resultat per a un temps màxim de 7.200 segons, el qual pertany a l'estat estacionari del sistema. El temps de computació requerit per a aquestes condicions és relativament baix, però superior al del cas de $Re = 100$.

Els resultats obtinguts tant per la velocitat en l'eix x (u) com en l'eix y (v) adimensionals, es troben recollits a les taules [9.1.3] i [9.1.4]. També s'hi poden veure els resultats esperats, extrets de [22] i l'error entre cada parella de valors.

Posició y	Valor esperat	Valor obtingut	Error absolut	Error relatiu
1,00000	1,00000	1,00000	0,000E+00	0,00%
0,97656	0,65928	0,66123	1,946E-03	0,30%
0,96875	0,57492	0,57719	2,272E-03	0,40%
0,96094	0,51117	0,51353	2,355E-03	0,46%
0,95313	0,46604	0,46824	2,198E-03	0,47%
0,85156	0,33304	0,33254	5,019E-04	0,15%
0,73438	0,18719	0,18625	9,431E-04	0,50%
0,61719	0,05702	0,05603	9,894E-04	1,74%
0,50000	-0,06080	-0,06171	9,099E-04	1,50%
0,45313	-0,10648	-0,10730	8,182E-04	0,77%
0,28125	-0,27805	-0,27809	3,528E-05	0,01%
0,17188	-0,38289	-0,38235	5,395E-04	0,14%
0,10156	-0,29730	-0,29474	2,560E-03	0,86%
0,07031	-0,22220	-0,21922	2,976E-03	1,34%
0,06250	-0,20196	-0,19909	2,874E-03	1,42%
0,05469	-0,18109	-0,17844	2,646E-03	1,46%
0,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%

Taula 9.1.3: Valors esperats i obtinguts de u/u_{ref} per a $Re = 1.000$

Posició x	Valor esperat	Valor obtingut	Error absolut	Error relatiu
1,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%
0,96875	-0,21388	-0,22402	1,014E-02	4,74%
0,96094	-0,27669	-0,28832	1,163E-02	4,20%
0,95313	-0,33714	-0,34940	1,226E-02	3,64%
0,94531	-0,39188	-0,40388	1,200E-02	3,06%
0,90625	-0,51550	-0,51812	2,624E-03	0,51%
0,85938	-0,42665	-0,42266	3,990E-03	0,94%
0,80469	-0,31966	-0,31714	2,516E-03	0,79%
0,50000	0,02526	0,02584	5,818E-04	2,30%
0,23438	0,32235	0,32197	3,766E-04	0,12%
0,22656	0,33075	0,33038	3,690E-04	0,11%
0,15625	0,37095	0,37104	9,117E-05	0,02%
0,09375	0,32627	0,32716	8,944E-04	0,27%
0,07813	0,30353	0,30446	9,318E-04	0,31%
0,07031	0,29012	0,29098	8,572E-04	0,30%
0,06250	0,27485	0,27557	7,242E-04	0,26%
0,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%

Taula 9.1.4: Valors esperats i obtinguts de v/u_{ref} per a $Re = 1.000$

Per altra banda, es pot observar la distribució de la velocitat, tant en mòdul com en components, i la distribució de la pressió.

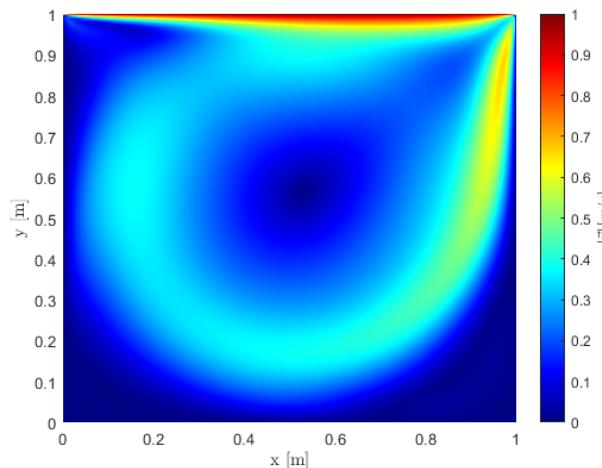


Figura 9.1.5: Distribució de la velocitat en mòdul per a $Re=1000$

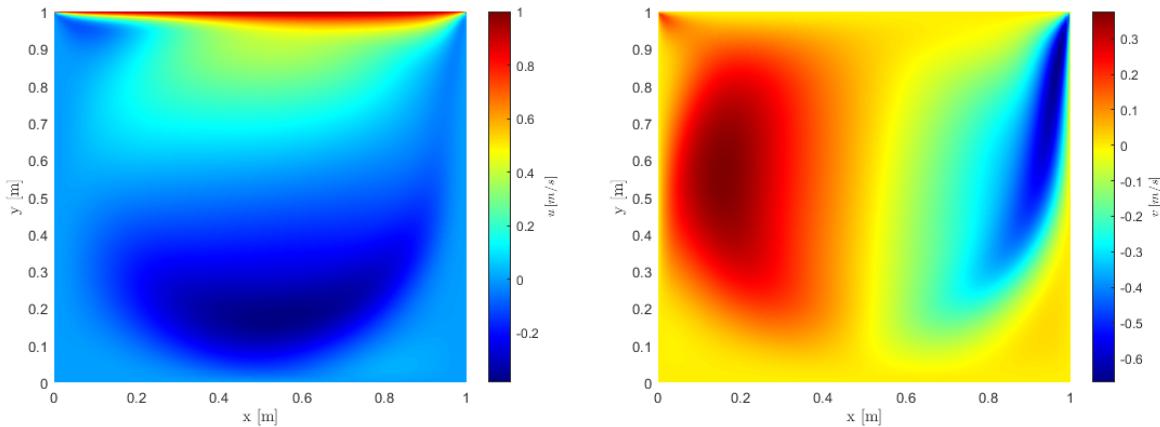


Figura 9.1.6: Distribució de les components x i y de la velocitat per a $Re=1000$

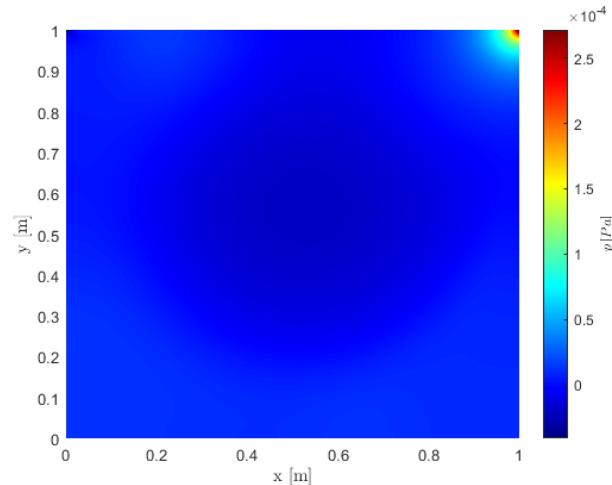


Figura 9.1.7: Distribució de la pressió per a $Re=1000$

- $Re=10.000$. Per a un nombre de Reynolds igual a 10.000, la convergència resulta complicada per a simulacions extenses amb la malla de 128×128 emprada. Per tal de poder abordar aquest problema, s'ha optat per definir el nombre de Courant amb un valor de $C = 0,05$. Utilitzant aquest criteri, el temps de computació augmenta considerablement, per la qual cosa s'ha realitzat la simulació en un interval de 1800 segons, és a dir, 30 minuts. Per últim, per avaluar els termes convectius de les equacions de Navier-Stokes s'ha utilitzat un esquema numèric de diferència central (CDS).

A les taules [9.1.5] i [9.1.6] es pot trobar el contrast entre els resultats obtinguts de u i v adimensionals i els resultats esperats (extrets de [22]), així com l'error absolut i relatiu entre ambdós.

Posició y	Valor esperat	Valor obtingut	Error absolut	Error relatiu
1,00000	1,00000	1,00000	0,000E+00	0,00%
0,97656	0,47221	0,42521	4,700E-02	9,95%
0,96875	0,47783	0,42821	4,962E-02	10,38%
0,96094	0,48070	0,43229	4,841E-02	10,07%
0,95313	0,47804	0,43104	4,700E-02	9,83%
0,85156	0,34635	0,29846	4,789E-02	13,83%
0,73438	0,20673	0,17113	3,560E-02	17,22%
0,61719	0,08344	0,06798	1,546E-02	18,52%
0,50000	0,03111	-0,02317	5,428E-02	174,48%
0,45313	-0,07540	-0,05860	1,680E-02	22,28%
0,28125	-0,23186	-0,19271	3,915E-02	16,88%
0,17188	-0,32709	-0,28415	4,294E-02	13,13%
0,10156	-0,38000	-0,34883	3,117E-02	8,20%
0,07031	-0,41657	-0,39382	2,275E-02	5,46%
0,06250	-0,42537	-0,40145	2,392E-02	5,62%
0,05469	-0,42735	-0,39970	2,765E-02	6,47%
0,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%

Taula 9.1.5: Valors esperats i obtinguts de u/u_{ref} per a $Re = 10.000$

Posició x	Valor esperat	Valor obtingut	Error absolut	Error relatiu
1,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%
0,96875	-0,54302	-0,49183	5,119E-02	9,43%
0,96094	-0,52987	-0,49135	3,852E-02	7,27%
0,95313	-0,49099	-0,46477	2,622E-02	5,34%
0,94531	-0,45863	-0,43604	2,259E-02	4,92%
0,90625	-0,41496	-0,37326	4,170E-02	10,05%
0,85938	-0,36737	-0,32134	4,603E-02	12,53%
0,80469	-0,30719	-0,26268	4,451E-02	14,49%
0,50000	0,00831	0,00623	2,082E-03	25,05%
0,23438	0,27224	0,23089	4,135E-02	15,19%
0,22656	0,28003	0,23815	4,188E-02	14,96%
0,15625	0,35070	0,30521	4,549E-02	12,97%
0,09375	0,41487	0,36945	4,542E-02	10,95%
0,07813	0,43124	0,38749	4,375E-02	10,15%
0,07031	0,43733	0,39510	4,223E-02	9,66%
0,06250	0,43983	0,39958	4,025E-02	9,15%
0,00000	0,00000	0,00000	0,000E+00	0,00%

Taula 9.1.6: Valors esperats i obtinguts de v/u_{ref} per a $Re = 10.000$

Per altra banda, es pot observar la distribució de la velocitat, tant en mòdul com en components, i la distribució de la pressió.

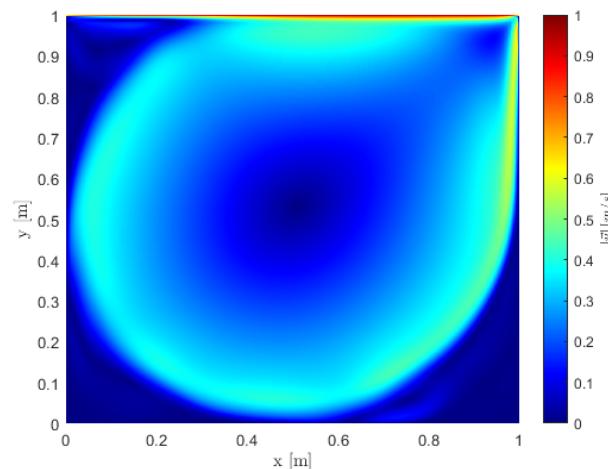


Figura 9.1.8: Distribució de la velocitat en mòdul per a $\text{Re}=10000$

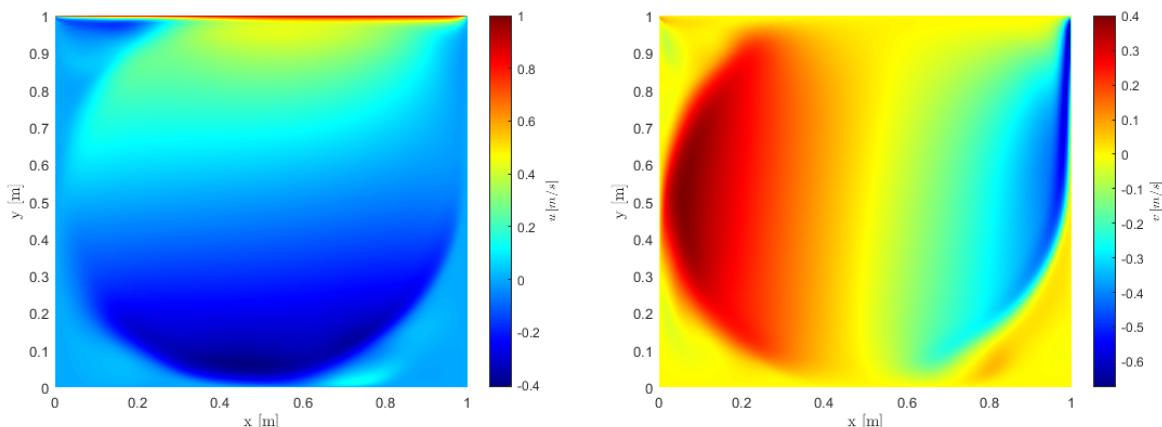


Figura 9.1.9: Distribució de les components x i y de la velocitat per a $\text{Re}=10000$

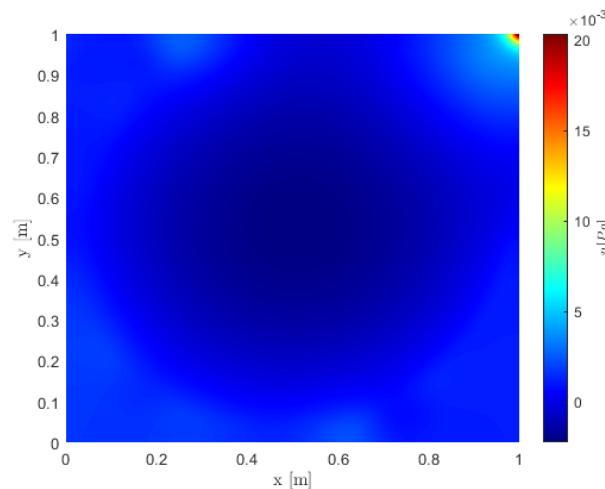


Figura 9.1.10: Distribució de la pressió per a $\text{Re}=10000$

9.2 Square cylinder

9.2.1 Plantejament

El segon problema proposat precisa l'estudi del flux d'un fluid al voltant d'un prisma rectangular (ortoedre) dins d'un tub. Primer de tot cal destacar que es realitza un tractament bidimensional del problema. El tub té un diàmetre H i llargada L i l'ortoedre té dimensions $D \times D$. El centroide de l'ortoedre es troba a una distància l de l'inici del tub en l'eix x i centrat en l'eix y . Veure figura [9.2.1].

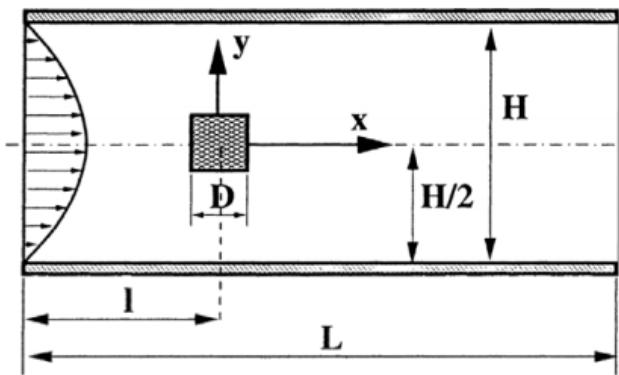


Figura 9.2.1: Esquema del cas i geometria. Extret de [20]

Per a poder contrastar els resultats amb els de la literatura, s'ha decidit utilitzar la següent geometria:

- La longitud d'estudi L està definida com 50 vegades la longitud característica del cilindre ($\frac{L}{D} = 50$).
- La distància entre l'entrada del tub i el centroide del cilindre l és igual a un quart de la longitud total ($l = \frac{L}{4}$).
- L'altura del tub H s'ha definit a 8 vegades la longitud del cilindre, de manera que la ràtio de longitud bloquejada pel cilindre és igual a $B = \frac{1}{8}$.

9.2.2 Condicions de contorn

Les condicions de contorn del problema es detallen a continuació: [23]

- Entrada. A l'entrada del tub (contorn esquerre del domini) s'ha simulat un flux totalment desenvolupat. És per això que s'ha definit un perfil de velocitats parabòlic amb una velocitat màxima u_{max} :

$$u = u_{max} \left(1 - \frac{4y^2}{H^2} \right) \quad (9.2.1)$$

- Sortida. A la sortida del tub (contorn dret del domini), la selecció d'una condició de contorn adequada és una qüestió crítica. En aquest estudi s'ha optat per definir un gradient de la velocitat en la direcció del flux igual a zero (condició de contorn de Neumann). Per definir de forma correcta aquesta condició però, s'ha d'imposar a una distància suficientment aigües avall del cilindre quadrat per tal que no afecti als resultats obtinguts. En el present treball s'ha definit a una distància de 100 vegades la longitud característica del cilindre respecte l'entrada del tub ($\frac{L'}{D} = 100$), mentre que la longitud d'estudi s'ha mantingut a la distància definida ($\frac{L}{D} = 50$). [24]
- Parets. Tant a les parets del tub (contorn superior i inferior del domini) com en el contorn de l'obstacle, s'ha definit una condició de contorn de no lliscament (*no-slip condition*). Aquesta condició és indispensable per a un fluid viscos newtonià en contacte amb un sòlid i defineix que la velocitat tangencial del fluid en la zona de contacte ha de ser nul·la. Per altra banda, també s'ha definit que la component de la velocitat normal a la paret és nul·la, per satisfer la condició de paret.

9.2.3 Resultats

Per tal d'analitzar el comportament del flux al voltant d'un cilindre quadrat, s'han dut a terme simulacions per a diferents nombres de Reynolds, compresos entre 1 i 200. A continuació s'expliquen les fases que experimenta el flux i es detallen les simulacions dutes a terme per il·lustrar aquests comportaments:

- Per a nombres de Reynolds de l'ordre de $Re \sim 6$ o inferiors, es pot observar un flux estacionari on les forces viscoses predominen sobre les inercials i no es produeix separació de la capa límit al voltant del cilindre.

Per a il·lustrar aquesta fase s'ha dut a terme una simulació per a $Re = 1$. La malla utilitzada és estructurada, cartesiana i ortogonal i té un total de 96 x 2400 volums de control. Per a assolir la convergència de la solució s'ha reduït el nombre de Courant dràsticament, fins a $C = 0.01$.

El camp de velocitats i la distribució de pressions es troben representats a les figures [9.2.2] i [9.2.3], respectivament. En aquestes gràfiques es pot observar el comportament estacionari del fluid i la pèrdua de pressió al tub. Per altra banda, la representació de les línies de corrent (figura [9.2.4]) permet comprovar el comportament estacionari del fluid i permet veure que el fluid es mou al voltant del cilindre sense que la capa límit d'aquest es separe en cap moment. Un detall de les línies de corrent a les proximitats del cilindre pot trobar-se a la figura [9.2.15a].

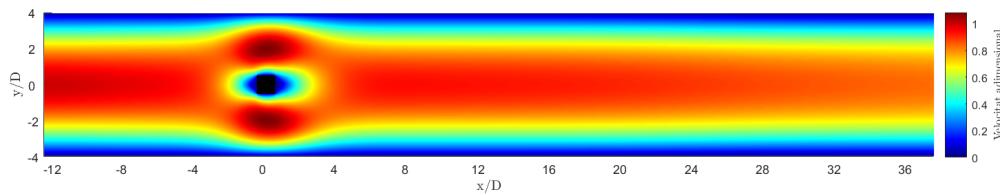


Figura 9.2.2: Camp de velocitats per a $Re=1$

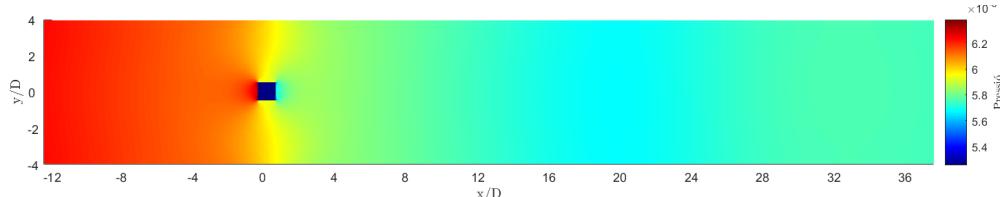


Figura 9.2.3: Camp de pressions per a $Re=1$

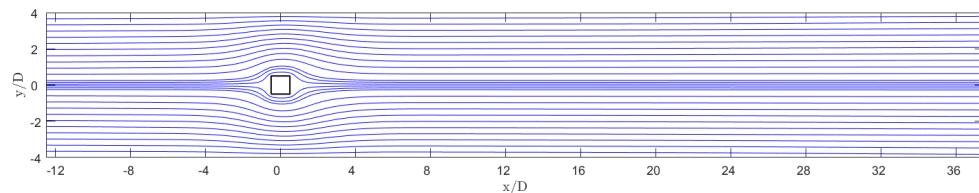


Figura 9.2.4: Línies de corrent per a $Re=1$

- Per a nombres de Reynolds majors que $Re \sim 6$, es produeix la separació de la capa límit al *trailing edge*, mentre que el flux a les parets laterals del cilindre segueix sense separar-se. Aquest fenomen crea una estela amb dos vòrtexs simètrics, un a cada banda de l'estela, l'amplitud dels quals augmenta amb el nombre de Reynolds. Aquest fenomen es pot observar a la progressió d'imatges de la figura [9.2.5].

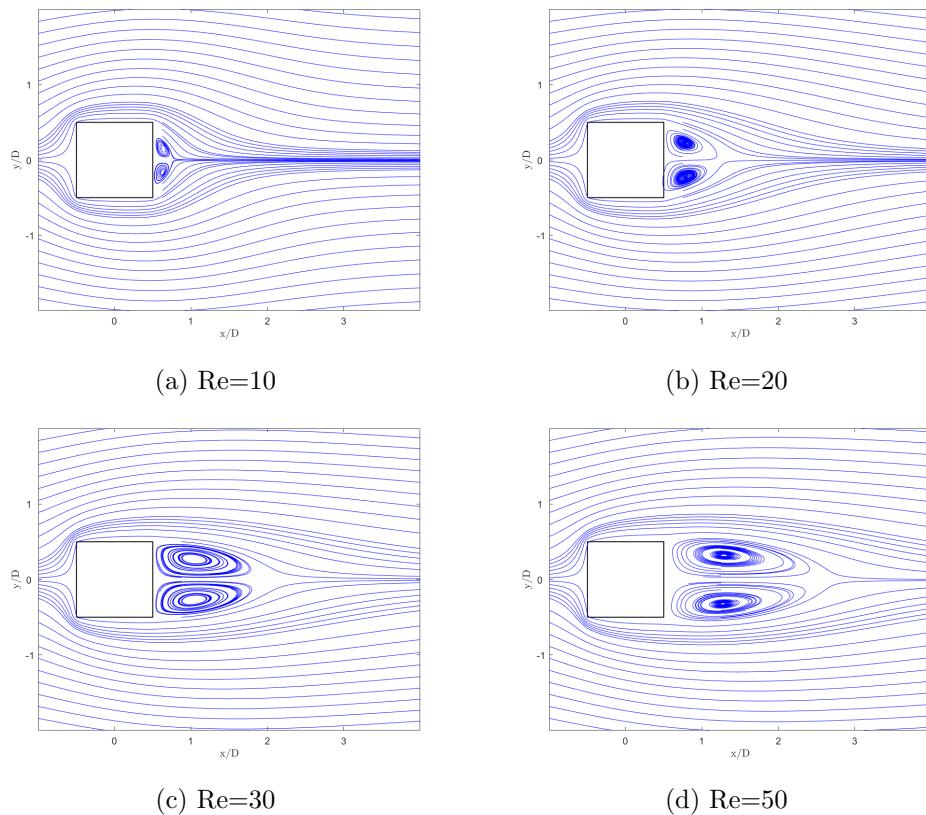


Figura 9.2.5: Details de les línies de corrent per a diferents nombres de Reynolds inferiors a Re_{cr}

Per estudiar aquest comportament del fluid s'ha dut a terme una simulació per a $Re = 30$. En aquesta simulació s'ha utilitzat una malla estructurada, cartesiana i ortogonal amb un total de 96×2400 volums de control. Per altra banda, s'ha utilitzat un nombre de Courant neutre de $C = 0.35$.

Al camp de velocitats de la figura [9.2.6] es pot observar, a diferència del camp de velocitats obtingut per a $Re = 1$, una zona amb velocitats properes a zero (color blau fosc) immediatament aigües avall del cilindre. Això denota la zona de re-circulació comentada. Per altra banda, a la figura [9.2.7] es pot visualitzar la distribució de pressions, la qual mostra una pèrdua de pressió en el conducte, així com una diferència més evident entre la pressió anterior i posterior al cilindre. Per últim, a la figura [9.2.8] es pot observar la representació de les línies de corrent, que evidencien la zona de re-circulació del fluid i també el comportament encara estacionari del fluid.

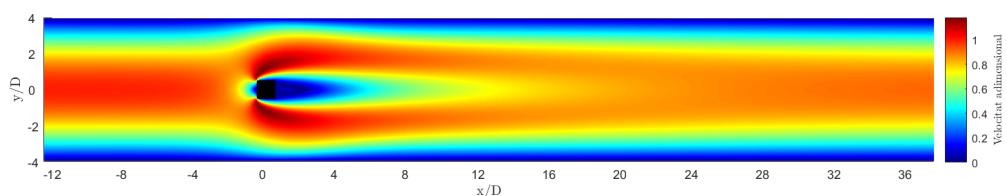


Figura 9.2.6: Camp de velocitats per a $Re=30$

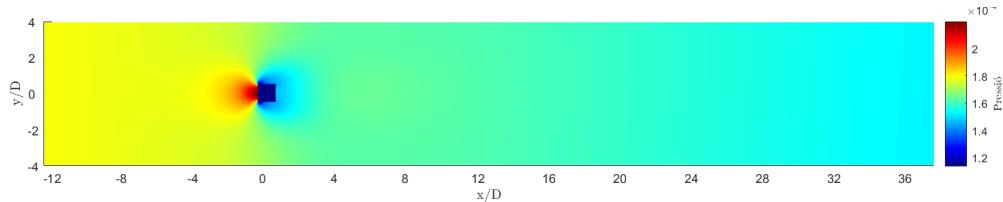


Figura 9.2.7: Camp de pressions per a $Re=30$

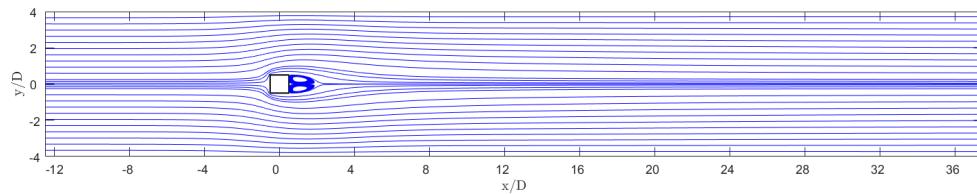


Figura 9.2.8: Línies de corrent per a $Re=30$

- Per a valors majors al nombre de Reynolds crític ($Re_{cr} \simeq 54$ [25]), l'estela immediatament posterior al cilindre esdevé inestable i inicia una oscil·lació que es propaga al llarg de l'estela i destrueix el comportament estacionari del fluid.

Per visualitzar aquest fenomen, s'ha simulat el flux al voltant del cilindre per un nombre de Reynolds de $Re = 60$. La malla utilitzada és estructurada, cartesiana i ortogonal i compta amb un total de 96×2400 volums de control. En aquesta simulació el nombre de Courant no és un factor determinant i s'ha optat per $C = 0.5$.

A la figura [9.2.9] s'ha representat el camp de velocitats en el domini estudiat. És fàcil observar la oscil·lació que es crea a les proximitats aigües avall del cilindre i que es propaga al llarg de l'estela fins a dissipar-se en el conjunt del fluid.

La figura [9.2.10] mostra la distribució de pressions. Aquesta figura no difereix molt de la distribució per a $Re = 30$, degut a la dèbil oscil·lació del fluid, la qual produceix unes variacions de pressió pràcticament negligibles.

Finalment, però no menys important, la figura [9.2.11] representa les línies de corrent que permeten veure exactament el moviment que segueixen les partícules de fluid. En aquesta figura, i sobretot en el detall al voltant del cilindre de la figura [9.2.15c], es poden apreciar els vòrtexs irregulars que es formen periòdicament a l'estela pròxima al cilindre. Per altra banda, també es pot veure que la capa límit del fluid a les parets laterals del cilindre segueix sense desprendre's.

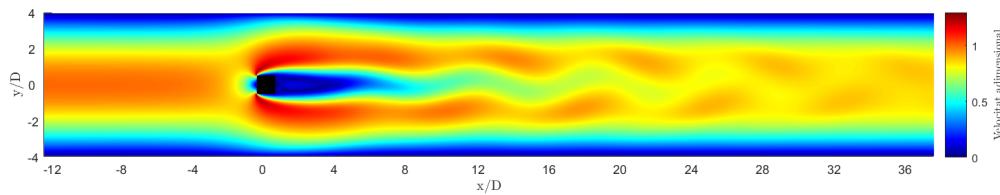


Figura 9.2.9: Camp de velocitats per a $Re=60$

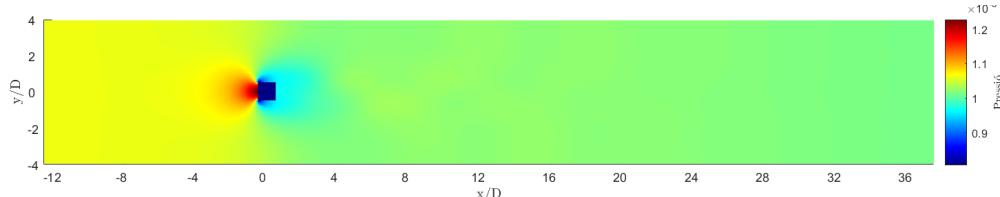


Figura 9.2.10: Camp de pressions per a $Re=60$

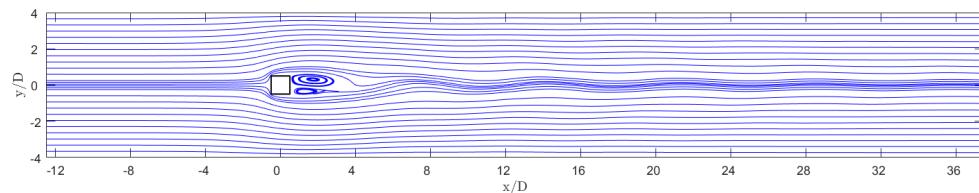


Figura 9.2.11: Línies de corrent per a $Re=60$

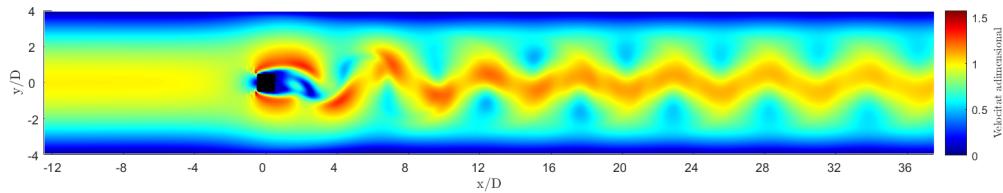
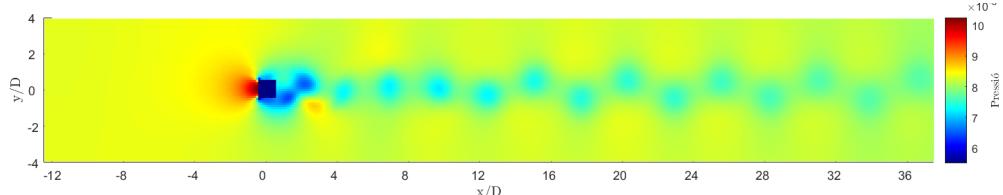
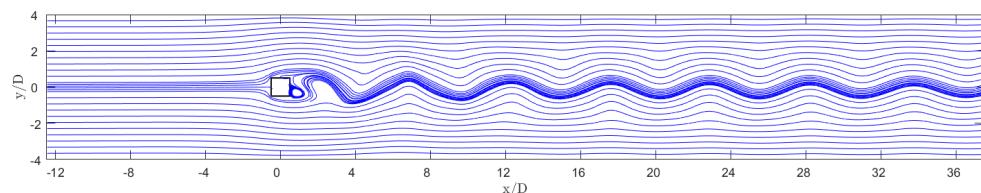
- Si es segueix incrementant el nombre de Reynolds, per sobre de $Re \sim 100$ el fluid comença a formar remolins, coneguts com a vòrtexs de Von Kármán. A més, a partir de $Re \sim 150$, la capa límit del fluid comença a desprendre's als laterals del cilindre.

Per tal d'il·lustrar aquests dos fenòmens s'ha dut a terme la simulació del cas per a $Re = 200$ amb una malla estructurada, cartesiana i ortogonal formada per 64×1600 volums de control. El nombre de Courant s'ha definit a un valor neutre de $C = 0.35$.

La distribució de velocitats de la figura [9.2.12] mostra la oscil·lació que es forma aigües avall del cilindre. A diferència d'aquella observada per a $Re = 60$, aquesta és molt més marcada.

Quant a la distribució de pressions, representada a la figura [9.2.13], es pot veure que per a nombres de Reynolds més elevats es produeixen zones de baixa pressió. Aquestes zones corresponen als centres dels nombrats vòrtexs de Von Kármán.

Finalment, a les figures [9.2.14] i [9.2.15d], es pot observar la major amplitud de la oscil·lació i la separació de la capa límit als laterals del cilindre, creant zones de re-circulació.


 Figura 9.2.12: Camp de velocitats per a $Re=200$

 Figura 9.2.13: Camp de pressions per a $Re=200$

 Figura 9.2.14: Línies de corrent per a $Re=200$

Per concloure aquesta secció, a la figura [9.2.15] s'han representat les línies de corrent en detall a les proximitats del cilindre. Aquestes figures mostren de forma més precisa els comportament del fluid comentats per cada nombre de Reynolds estudiat. Per altra banda, permeten contrastar els resultats obtinguts amb els de la literatura (veure figura [9.2.16]), concretament extrets de [23].

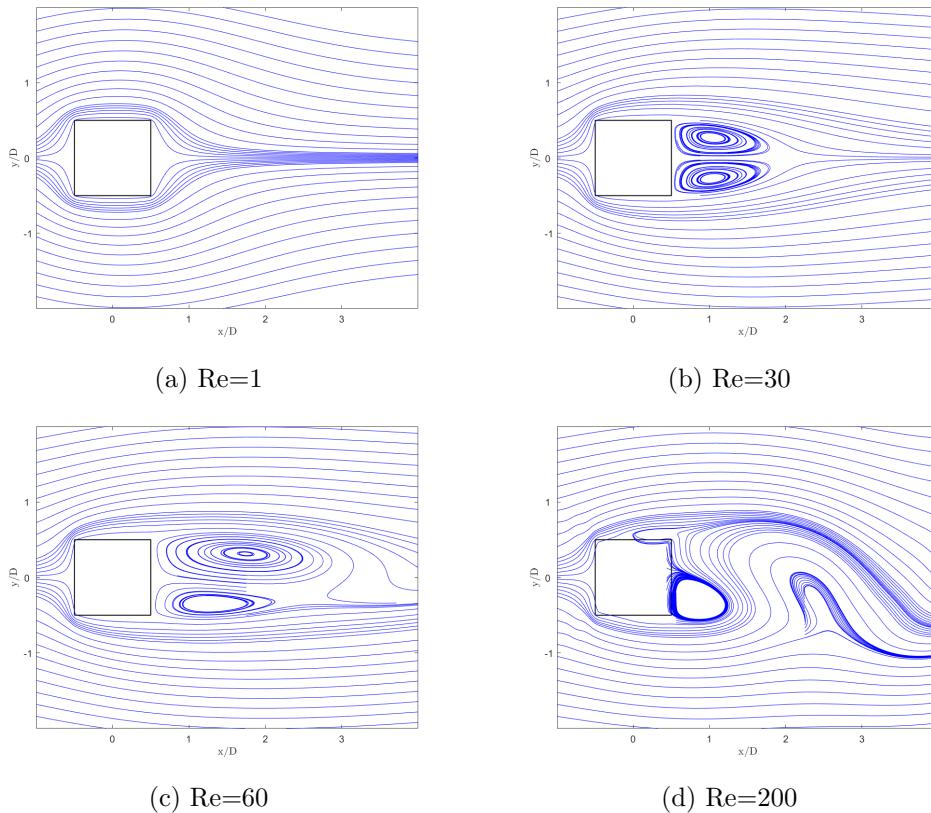


Figura 9.2.15: Detalls de les línies de corrent per a diferents nombres de Reynolds

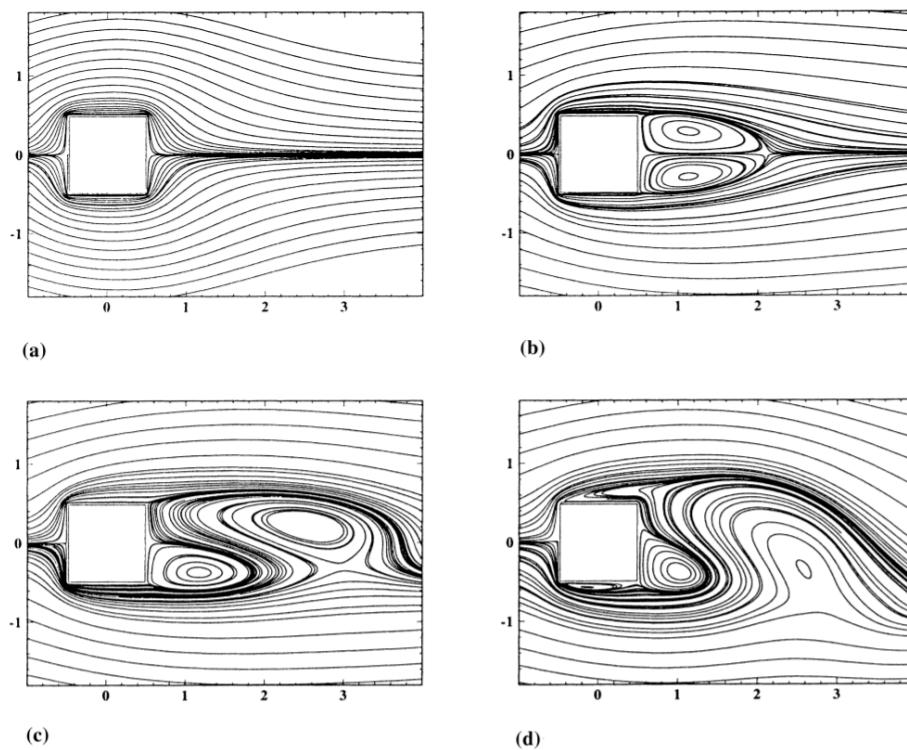


Figura 9.2.16: Línies de corrent esperades per a (a) $Re=1$; (b) $Re=30$; (c) $Re=60$; (d) $Re=200$.

Part VI

Cas d'estudi

Capítol 10

Resolució de les equacions de Navier-Stokes en fluxos al voltant de geometries complexes

En aquest capítol s'ha continuat amb la resolució de les equacions de Navier-Stokes, més concretament en el flux d'un fluid al voltant d'objectes amb formes complexes.

10.1 *Blocked-off method* i processament digital d'imatges

En l'anàlisi de geometries complexes, sovint s'opta per definir una malla no-ortogonal per tal d'aproximar de forma precisa els contorns del domini. Malgrat la seva gran fiabilitat, la definició de la malla i la posterior deducció i implementació de les equacions fonamentals acostuma a ser un procés complex.

El *blocked-off method* es basa en l'ús d'una malla cartesiana per a modelitzar geometries irregulars. Això s'aconsegueix dividint el domini en dues parts: l'activa i la inactiva. Per fer-ho s'adjudica cada element de la malla cartesiana a una de les parts en funció de la seva posició en el conjunt de la geometria. D'aquesta manera, es pot utilitzar la formulació i els algoritmes implementats en geometries regulars per a la modelització de geometries irregulars. [26]

Les figures [10.1.1] i [10.1.2] mostren dos exemples de la modelització de dues geometries (regular i irregular, respectivament) mitjançant el *blocked-off method*. La representació gràfica permet entendre de forma senzilla els fonaments del mètode. Mentre que en la figura [10.1.1] es defineixen els contorns de la geometria sense problema, en la figura [10.1.2] s'observa com el contorn corbat ha estat aproximat mitjançant els elements cartesians. En addició, és immediat veure que com més fina es defineixi la malla en les zones amb contorns irregulars, més bona serà l'aproximació d'aquests.

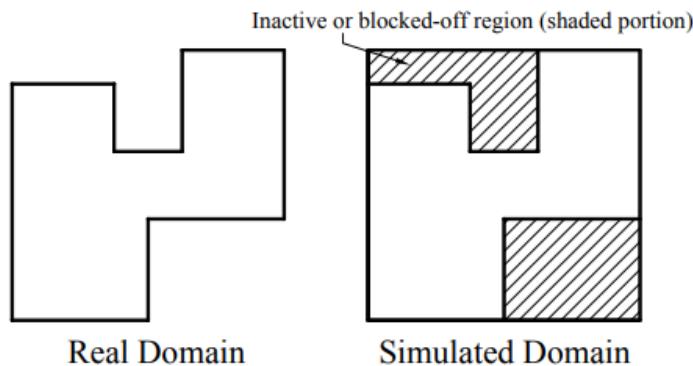


Figura 10.1.1: Modelització d'una geometria regular mitjançant el *blocked-off method*. Extret de [26]

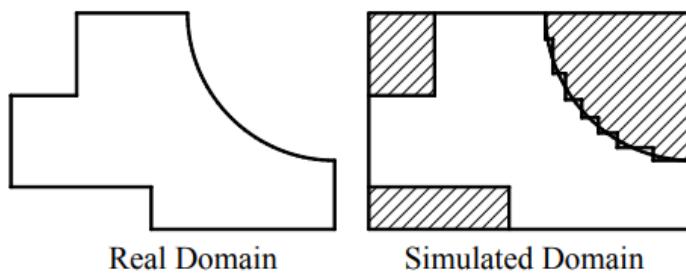


Figura 10.1.2: Modelització d'una geometria irregular mitjançant el *blocked-off method*. Extret de [26]

A l'hora d'aplicar el *blocked-off method* per a la resolució d'un flux al voltant d'una geometria complexa, un pot trobar-se davant de dos tipus de geometries:

- Geometries que, tot i ser irregualars, tenen una forma definida mitjançant una expressió matemàtica. D'aquesta manera es pot filtrar al llarg del domini per saber quins volums queden dins de la zona pertanyent a l'obstacle, i quins queden compresos en la zona aliena (zona d'interès).
- Geometries irregualars que no compten amb una expressió matemàtica que les delimiti. En aquest cas serà necessari un altre enfocament, el qual s'aconseguirà, en aquest estudi, mitjançant el processament digital d'imatges.

El processament digital d'imatges s'ha utilitzat per convertir una forma definida mitjançant una imatge en una matriu binària que permeti distingir les dues zones, l'activa i la inactiva. A més, es duu a terme una modificació d'aquesta matriu per adaptar-la a la malla global del domini. En el procés implementat mitjançant MATLAB, es distingeixen els següents passos:

1. Lectura de la imatge.
2. Conversió a escala de grisos en el cas que es tracti d'una imatge en color. Si la imatge és

ja en blanc i negre o en escala de grisos s'obvia automàticament aquest pas.

3. Conversió a un imatge binària. Per realitzar aquest pas es mesura la intensitat mitjana de la imatge per tal de definir un llindar per sobre del qual tot és blanc i per sota del qual tot és negre. D'aquesta manera, s'obté una imatge composta a base de píxels amb uns o zeros.
4. Rotació de la imatge. Un cop s'ha obtingut la imatge en format binari, es pot començar a editar la imatge. Una acció que resulta especialment fàcil amb aquest mètode és la de rotar una imatge. Això permet realitzar estudis de seccions en funció de l'angle d'atac o incidència.
5. Retall de la imatge. Aquest pas consisteix en retallar la imatge de manera que la forma ocupa el màxim espai dins del requadre.
6. Canvi de mida de la imatge per a comptar amb el nombre de nodes estipulat, tot mantenint la proporcionalitat de la imatge. D'aquesta manera es facilita el posterior acoblament dins la matriu.
7. Acoblament de la matriu binària obtinguda de la imatge dins de la matriu global del domini i generació de la matriu d'obstacle, la qual coincideix amb la malla de la pressió i mostra els nodes que pertanyen a l'obstacle.

Un cop definida la matriu global que distingeix la zona activa de la inactiva, el problema es pot resoldre mitjançant la metodologia implementada al capítol 9. Únicament s'ha de parar especial atenció a la definició de les condicions de contorn en aquells nodes en els que es produeixi un canvi entre la zona activa i inactiva.

10.2 Cilindre quadrat amb variació de l'angle d'incidència

10.2.1 Plantejament

Dins d'aquesta secció, s'ha estudiat l'efecte de l'angle d'incidència en el flux d'un fluid al voltant d'un prisma quadrat dins d'un tub. Es realitza un tractament bidimensional del problema. El tub té un diàmetre H i llargada L . L'ortoedre té dimensions $a \times a$, mentre que la longitud característica d'aquest, D , és la projecció de la secció del cilindre en l'eix x o y , i es pot obtenir amb la següent correlació: $D = a(\cos\alpha + \sin\alpha)$. El centroïde de l'ortoedre es troba a una distància l de l'inici del tub en l'eix x i centrat en l'eix y . Veure figura [10.2.1].

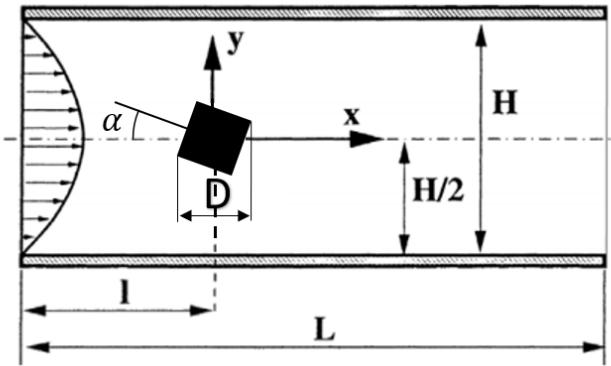


Figura 10.2.1: Esquema del cas i geometria.

Per a facilitar el contrast dels resultats amb els de la literatura, s'ha utilitzat la següent geometria:

- La longitud d'estudi L està definida com 32 vegades la longitud característica del cilindre ($\frac{L}{D} = 32$).
- La distància entre l'entrada del tub i el centroide del cilindre l és igual a un quart de la longitud total ($l = \frac{L}{4}$).
- L'altura del tub H s'ha definit a 8 vegades la longitud del cilindre, de manera que la ràtio de longitud bloquejada pel cilindre és igual a $B = \frac{1}{8}$.

10.2.2 Condicions de contorn

Les condicions de contorn del problema es detallen a continuació: [27]

- Entrada. A l'entrada del tub (contorn esquerre del domini) s'ha simulat un flux totalment desenvolupat. És per això que s'ha definit un perfil de velocitats parabòlic amb una velocitat màxima u_{max} :

$$u = u_{max} \left(1 - \frac{4y^2}{H^2} \right) \quad (10.2.1)$$

- Sortida. A la sortida del tub (contorn dret del domini), la selecció d'una condició de contorn adequada és una qüestió crítica. En aquest estudi s'ha optat per definir un gradient d'ambdues components de la velocitat en la direcció del flux igual a zero (condició de contorn de Neumann). Per definir de forma correcta aquesta condició però, s'ha d'imposar a una distància suficientment aigües avall del cilindre quadrat per tal que arribi el flux no pertorbat. En el present treball s'ha definit a una distància de 100 vegades la longitud característica del cilindre respecte l'entrada del tub ($\frac{L'}{D} = 100$), mentre que la longitud d'estudi s'ha mantingut a la distància definida ($\frac{L}{D} = 32$). [24]
- Parets. Tant a les parets del tub (contorn superior i inferior del domini) com en el contorn

de l'obstacle, s'ha definit una condició de contorn de no lliscament (*no-slip condition*). Aquesta condició és indispensable per a un fluid viscós newtonià en contacte amb un sòlid i defineix que la velocitat tangencial del fluid en la zona de contacte ha de ser nul·la. Per altra banda, també s'ha definit que la component de la velocitat normal a la paret és nul·la, per satisfer la condició de paret.

10.2.3 Resultats

En aquesta secció s'analitza la influència de l'angle d'incidència en el desenvolupament del flux del fluid al volant del cilindre quadrat. Per això, s'ha fixat el nombre de Reynolds a $Re = 100$ i s'ha definit un mateix domini d'estudi, per tal de mantenir les mateixes condicions i només variar l'angle d'incidència. Els casos estudiats són per uns angles d'incidència $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ i $\alpha = 45^\circ$. Veure figura [10.2.1].

- Angle d'incidència $\alpha = 0^\circ$. Per un angle d'incidència nul, el cas es transforma en l'estudiat al capítol anterior. A aquest nombre de Reynolds el fluid posterior al cilindre oscil·la de tal manera que produeix uns remolins de forma periòdica, anomenats vòrtexs de Von Kármán. A la figura [10.2.4] es poden observar dos vòrtexs, un de ja desenvolupat i un altre que s'està desenvolupant. També es pot apreciar que al lateral inferior del cilindre es produeix una separació de la capa límit que permet la recirculació del fluid.

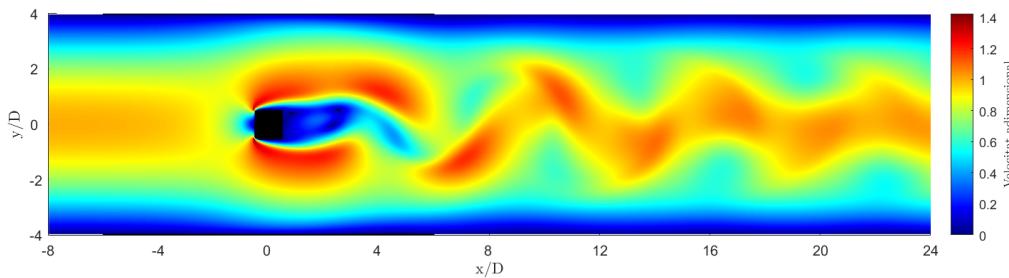


Figura 10.2.2: Camp de velocitats per a $\alpha = 0^\circ$

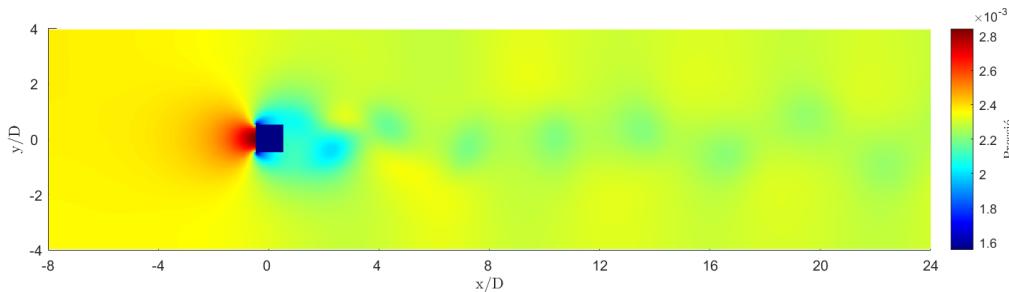


Figura 10.2.3: Camp de pressions per a $\alpha = 0^\circ$

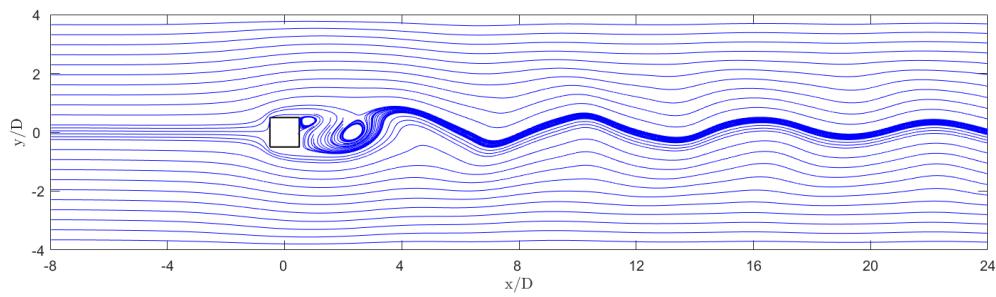


Figura 10.2.4: Línies de corrent per a $\alpha = 0^\circ$

- Angle d'incidència $\alpha = 10^\circ$. En augmentar l'angle d'incidència lleugerament, el fluid no se separa a la capa límit inferior, malgrat si que ho fa al lateral superior, en el qual es produeix una deflexió més pronunciada de la direcció del fluid respecte al cilindre.

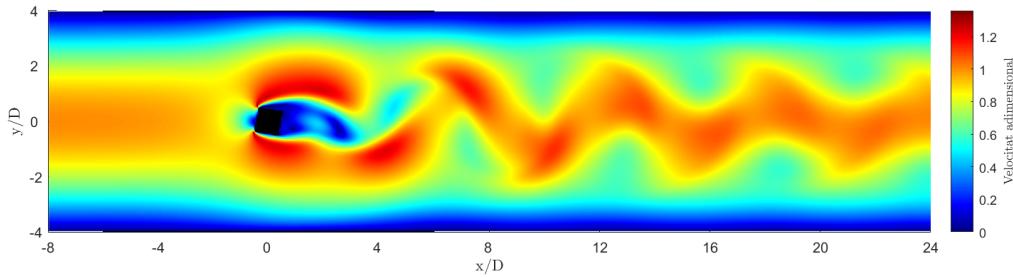


Figura 10.2.5: Camp de velocitats per a $\alpha = 10^\circ$

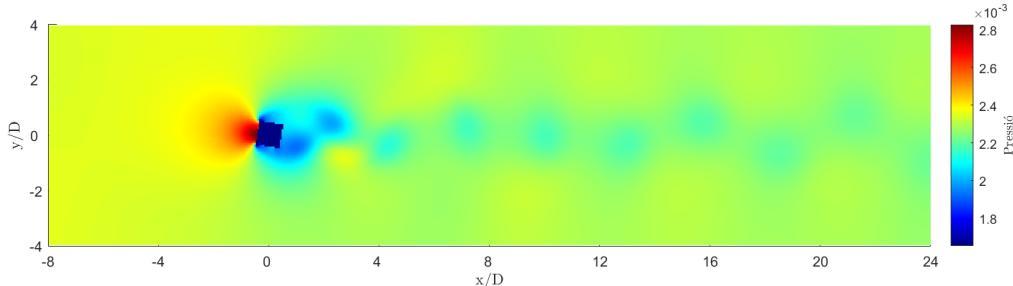


Figura 10.2.6: Camp de pressions per a $\alpha = 10^\circ$

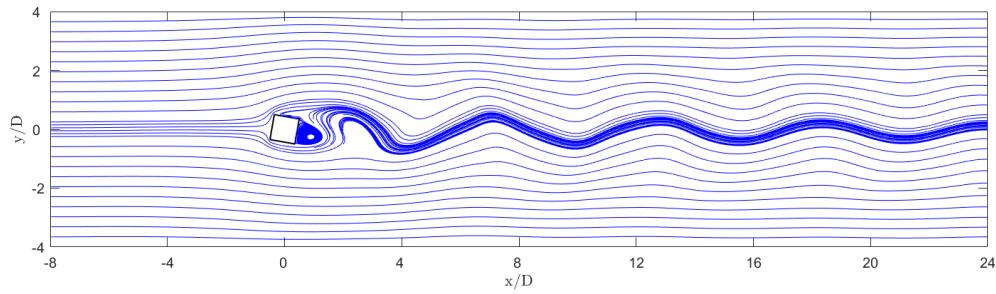


Figura 10.2.7: Línies de corrent per a $\alpha = 10^\circ$

- Angle d'incidència $\alpha = 30^\circ$. Per un angle d'incidència encara major, els dos costats frontals del cilindre deflecten el fluid, que en arribar al final d'aquests es troba amb un canvi de direcció del sòlid de 90° , el qual no pot resseguir i acaba separant-se, propiciant l'aparició de zones de recirculació a ambdós punts de la rereguarda del cilindre.

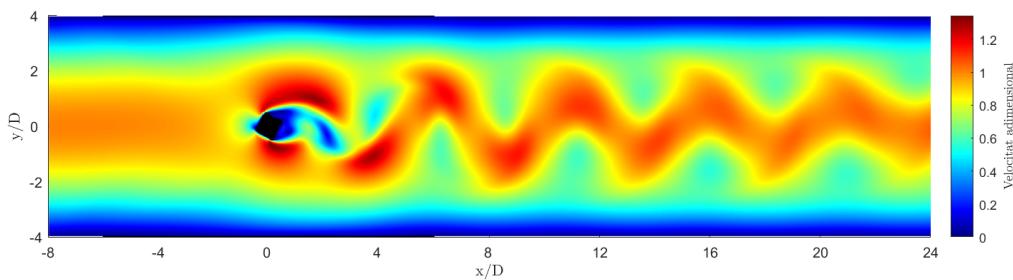


Figura 10.2.8: Camp de velocitats per a $\alpha = 30^\circ$

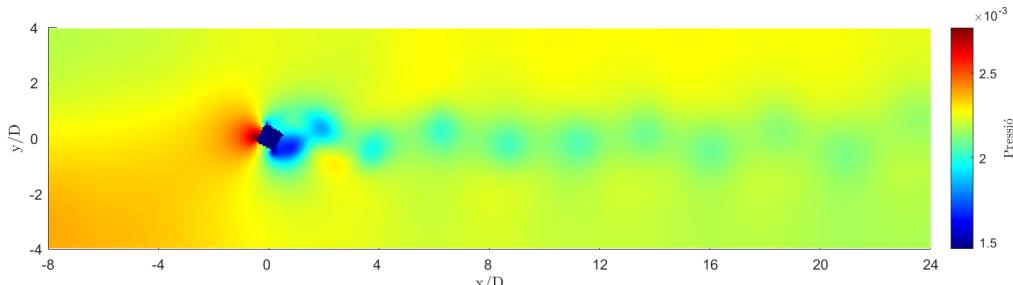


Figura 10.2.9: Camp de pressions per a $\alpha = 30^\circ$

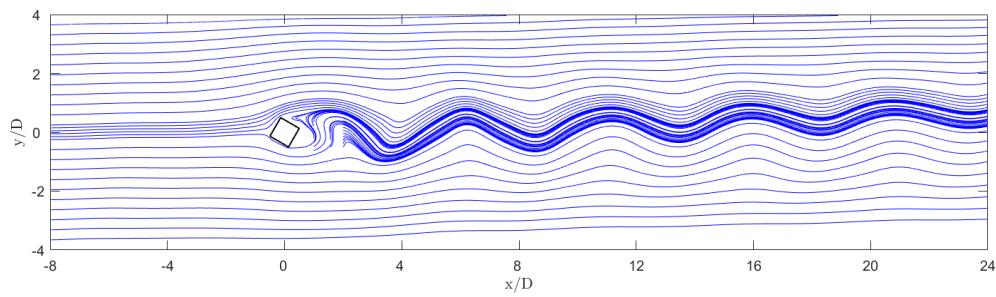


Figura 10.2.10: Línies de corrent per a $\alpha = 30^\circ$

- Angle d'incidència $\alpha = 45^\circ$. En realitzar aquesta rotació, el cilindre de secció quadrada es pot veure com un rombe de diagonals idèntiques. En aquest cas, el flux torna a ser simètric com en el cas de $\alpha = 0^\circ$ i la separació del flux es produeix anàlogament als vèrtexs superior i inferior.

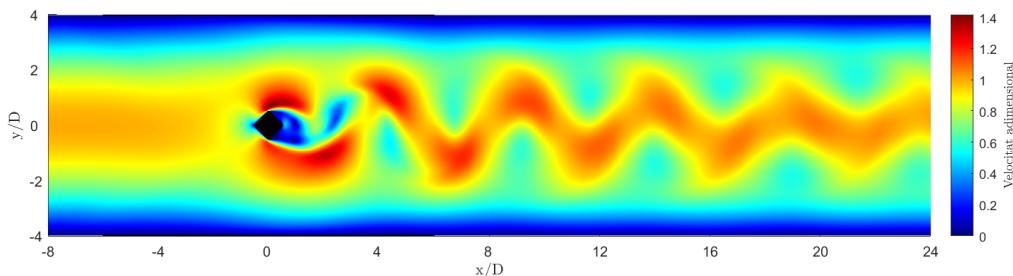


Figura 10.2.11: Camp de velocitats per a $\alpha = 45^\circ$

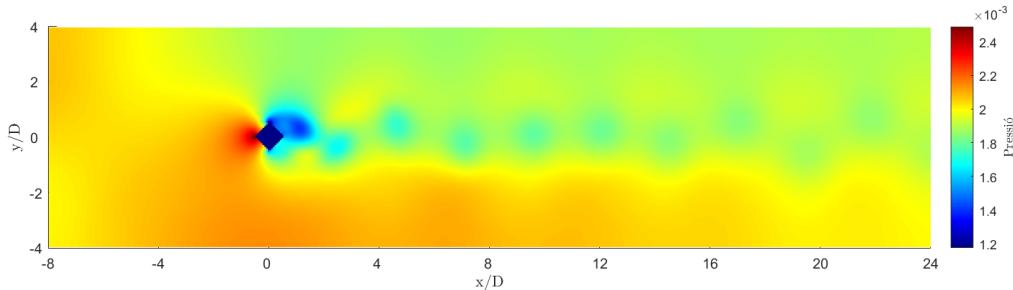
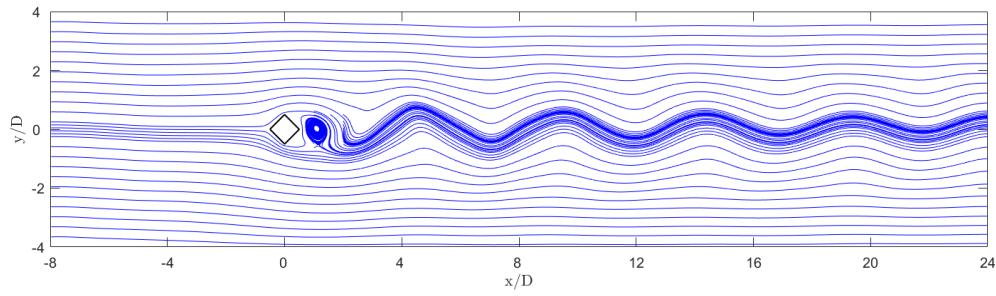
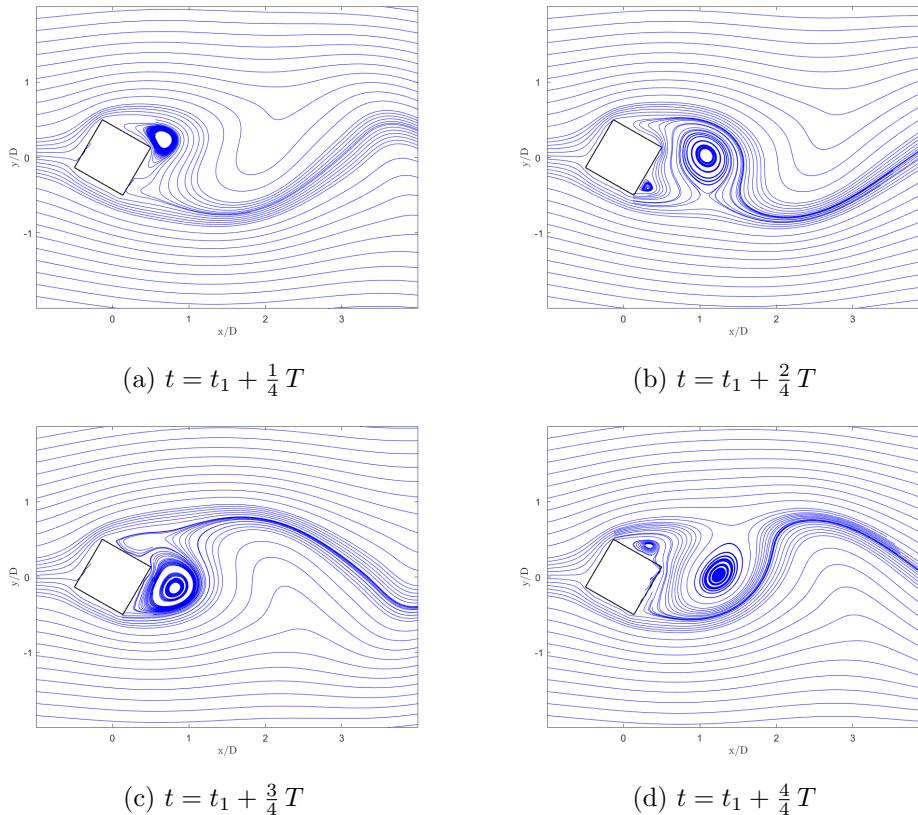


Figura 10.2.12: Camp de pressions per a $\alpha = 45^\circ$


 Figura 10.2.13: Línies de corrent per a $\alpha = 45^\circ$

Per últim, s'ha analitzat un període de formació de vòrtexs a partir de cert instant de temps t_1 . Fixant un nombre de Reynolds de $Re = 100$ i un angle de $\alpha = 30^\circ$, a la figura [10.2.14], s'han representat les línies de corrent al llarg d'un cicle de període T , on cada imatge representa un quart d'aquest període, és a dir, $\frac{1}{4}T$. Per altra banda, a la figura [10.2.15], es pot veure la forma esperada de les línies de corrent d'acord amb la literatura. [27], [28]


 Figura 10.2.14: Línies de corrent en un cicle de formació de vòrtexs per $\alpha = 30^\circ$

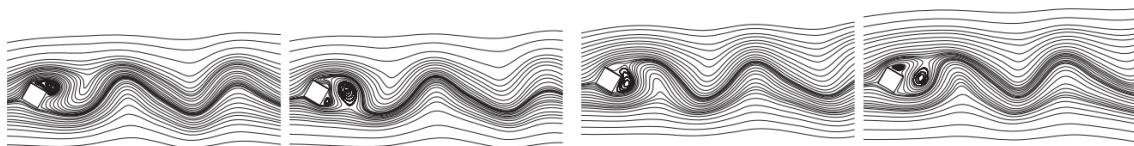


Figura 10.2.15: Cicle de formació de vòrtexs per un angle $\alpha = 30^\circ$.

10.3 Anàlisi de formes complexes

Aquesta metodologia pot resultar especialment útil per a l'anàlisi de formes complexes, les quals no s'han tractat en aquest estudi però es podrien incloure en un futur. Entre aquestes formes més complexes es podria incloure tota classe de perfils alars, qualsevol secció 2D que pugui ser dibuixada en un software de disseny assistit per ordinador (CAD), o absolutament qualsevol forma de la qual es disposi d'un dibuix o il·lustració.

Com a exemple, a les figures [10.3.1] i [10.3.2] podem veure els resultats de la simulació d'un perfil NACA 4412 a $Re = 100$.

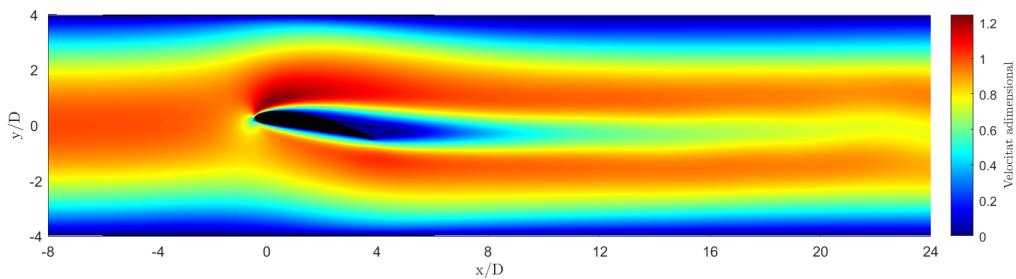


Figura 10.3.1: Camp de velocitats d'un perfil NACA 4412

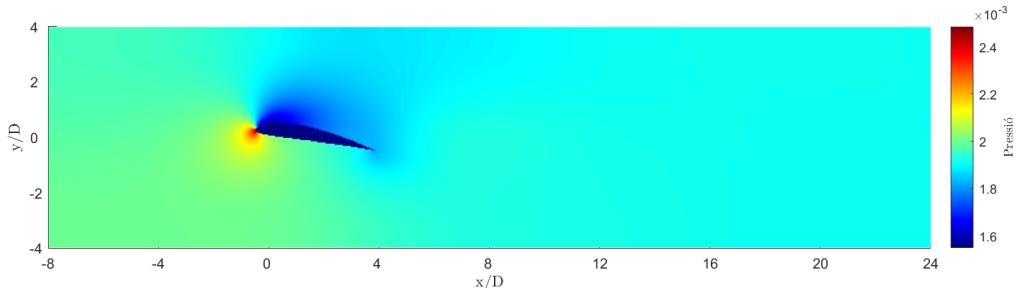


Figura 10.3.2: Camp de pressions d'un perfil NACA 4412

Com a segon exemple, a les figures [10.3.3] i [10.3.4] es poden observar els resultats d'una simulació aplicada a una forma complexa com podria ser la illa de Tenerife amb un vent del NE de 11 km/h.

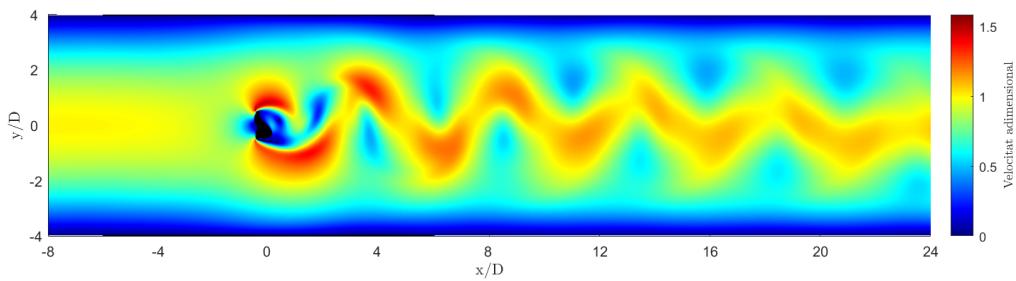


Figura 10.3.3: Camp de velocitats al voltant de l'illa de Tenerife

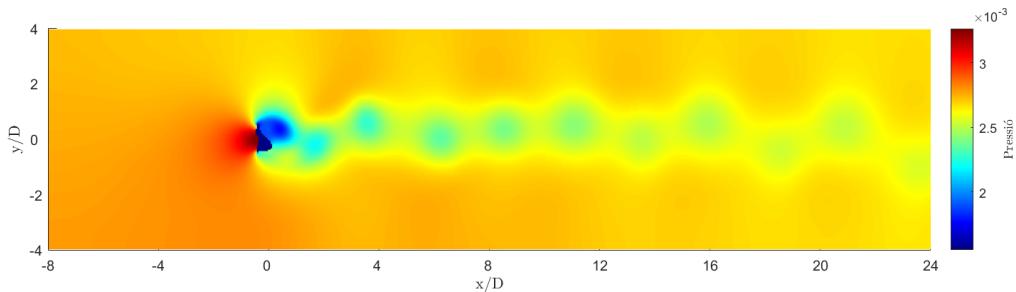


Figura 10.3.4: Camp de pressions al voltant de l'illa de Tenerife

Part VII

Resum de resultats

Capítol 11

Estudi econòmic

En aquest apartat es resumeix l'anàlisi econòmic de l'estudi, el qual s'ha desenvolupat al document "Pressupost".

Els elements que s'han tingut en compte per al càlcul del cost total de l'estudi es troben a la taula [11.1], juntament amb el cost (en euros) i la contribució al cost total de cada un.

Categoría	Cost (€)	Contribució al cost total
Cost de recursos humans	4.800	95 %
Cost del hardware	202,19	4 %
Cost del software	35	< 1 %
Cost de l'energia	15,18	< 1 %
Cost total	5.052,37	100 %

Taula 11.1: Desglossament del cost total de l'estudi

Observant el desglossament del cost de l'estudi, es pot extreure que la major part d'aquest pertany al cost de recursos humans, degut a les hores de treball requerides. Concretament, un 95 % del cost total pertany als recursos humans. En segon lloc, es troba el cost del hardware, amb una representació escassa del 4 %. Finalment, el cost del *software* i de l'energia corresponen ambdós a menys d'un 1 % del cost total.

De manera global, l'estudi ha generat un cost aproximat de 5.052,37 euros. Aquest valor no és exageradament elevat, tenint en compte que el treball ha estat realitzat al llarg de 8 mesos naturals.

Capítol 12

Anàlisi de les implicacions ambientals

També s'ha dut a terme un estudi ambiental del projecte. Es tracta d'un projecte sense cap impacte ambiental més enllà de les emissions de CO_2 produïdes per la generació de l'electricitat consumida per l'ordinador. Segons les dades emeses per la *Red Eléctrica de España* [29], les emissions mitjanes anuals de CO_2 se situen entorn a 0,13 tones de CO_2 per MWh (0,13kg/kWh). Tenint en compte la potència de l'ordinador (100W), les emissions totals són:

$$\text{Emissions de } CO_2 = 100W \cdot \frac{1kW}{1000W} \cdot 600 \text{ hores} \cdot \frac{0,13\text{kg de } CO_2}{kWh} = 7,8 \text{ kg de } CO_2 \quad (12.1)$$

Aquesta quantitat no resulta gens significativa tenint en compte que una persona expulsa, només pel simple fet de respirar, aproximadament 1 kg de CO_2 cada dia.

Capítol 13

Conclusions i accions futures

13.1 Conclusions

En primer lloc, l'objectiu principal de l'estudi ha estat assolit, tot recorrent els camps de la transferència de calor i la dinàmica de fluids de forma teòrica i pràctica.

Des del punt de vista teòric, s'han estudiat en detall els mètodes numèrics per a la resolució d'equacions diferencials en derivades parcials, la bona comprensió dels quals és molt important per a la progressió adequada en la resta de temàtiques. També s'ha pogut realitzar un estudi exhaustiu de la transferència de calor per conducció, així com la deducció de l'equació general de la calor. Pel que fa a la mecànica de fluids, s'ha estudiat el tractament de les equacions de Navier-Stokes en un flux laminar, incompressible i amb viscositat constant.

Des del punt de vista pràctic, s'han desenvolupat una sèrie de codis en llenguatge C++ per tal de resoldre diferents problemes, ja siguin per verificar els propis codis o casos d'especial interès en el camp. Aquests codis han permès resoldre els següents casos: la transferència de calor per conducció bidimensional amb varis materials; el flux paral·lel, diagonal i problema de Smith-Hutton per a l'equació de convecció-difusió; i els problemes de *Lid-driven Cavity* i *Square Cylinder*, amb angle d'incidència positiu o nul, per a les equacions de Navier-Stokes incompressibles.

Per concloure, des d'un punt de vista personal, he pogut enriquir-me amb la major comprensió d'algunes equacions importants de la física clàssica, així com introduir-me en el món de la dinàmica de fluids computacional des d'un punt de vista pràctic però sense desprendre's del rerefons físic.

13.2 Accions futures

Finalment, les accions futures a realitzar es poden dividir en dos grans grups:

- Pel que fa als aspectes teòrics, continuar amb l'estudi de les equacions de Navier-Stokes per a resoldre casos en flux compressible i/o turbulent. També, continuar amb l'estudi dels mètodes numèrics per a poder realitzar anàlisis més precisos, ja sigui mitjançant la introducció de malles no-estructurades i/o no-ortogonals o la introducció de *solvers* més potents.

- Quant als aspectes pràctics, continuar amb la resolució numèrica de casos d'interès, així com la implementació dels aspectes apresos en referència al mallat i la resolució de les equacions fonamentals. Per altra banda, continuar amb l'aprenentatge del llenguatge C++ per tal de poder implementar solucions més optimitzades i reduir el cost computacional.

Bibliografia

- [1] E. E. Khalil, *CFD history and applications*, 2012.
- [2] J. S. Shang, “Three decades of accomplishments in computational fluid dynamics,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 40, núm. 3, pàg. 173 - 197, 2004.
- [3] J. D. Anderson, “Brief History of the Early Development of Theoretical and Experimental Fluid Dynamics,” *Encyclopedia of Aerospace Engineering*, pàg. 1 - 22, 2010.
- [4] J. A. Ezquerro Fernández, *Iniciación a los métodos numéricos*, Universidad de La Rioja, ed. 2012.
- [5] N. Ashgriz i J. Mostaghimi, “Fluid Flow Handbook,” *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, 2007.
- [6] R. Eymard, T. Gallouët i R. Herbin, *Finite volume methods*, gen. de 2000.
- [7] M. Bern i P. Plassmann, “Mesh Generation,” a *Handbook of Computational Geometry*, 2000, pàg. 291 - 332.
- [8] J. F. Thompson, B. K. Soni i N. P. Weatherill, *Handbook of Grid Generation*. CRC Press, 1998.
- [9] A. Keshmiri, *All there is to know about different mesh types in CFD!* 2001.
- [10] J. Tu, G. H. Yeoh i C. Liu, *Computational Fluid Dynamics*. Elsevier Ltd, 2013.
- [11] U. Centre Tecnològic de Transferència de Calor, *Numerical Methods*.
- [12] M. Botsch, D. Bommes i L. Kobbelt, “Efficient linear system solvers for mesh processing,” *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, vol. 3604 LNCS, pàg. 62 - 83, 2005.
- [13] W. T. Lee, “Tridiagonal Matrices: Thomas Algorithm,” *MS6021, Scientific Computation, University of Limerick*, pàg. 1 - 3, 2011.
- [14] G. W. S., G. H. Golub i C. F. V. Loan, “Matrix Computations.,” *Mathematics of Computation*, vol. 56, núm. 193, pàg. 380, 1991.
- [15] G. Dessalew, T. Kebede, G. Awgichew i A. Walelign, “Generalized Refinement of Gauss-Seidel Method for Consistently Ordered 2-Cyclic Matrices,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2021, 2021.
- [16] A. Hadjidimos, “Successive overrelaxation (SOR) and related methods,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 123, núm. 1-2, pàg. 177 - 199, 2000.
- [17] J. S. V. R. K. Prasad i P. V. Patil, “Algorithm for Solving Tri-diagonal Finite Volume Discretized Linear Systems,” *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, vol. 10, núm. 2, pàg. 995 - 1006, 2015.
- [18] U. Centre Tecnològic de Transferència de Calor, “Numerical resolution of the generic convection-diffusion equation,” *Course on Numerical Methods in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, 2017.

- [19] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington : Hemisphere Pub. Corp., 1980, pàg. 197.
- [20] U. Centre Tecnològic de Transferència de Calor, “Fractional Step Method. Staggered and Collocated Meshes,” *Course on Numerical Methods in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, 2017.
- [21] ——, “Formulae for the resolution of fluid dynamics and heat and mass transfer problems,” 2017.
- [22] U. Ghia, K. N. Ghia i C. T. Shin, “High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 48, núm. 3, pàg. 387- 411, 1982.
- [23] M. Breuer, J. Bernsdorf, T. Zeiser i F. Durst, “Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: Lattice-Boltzmann and finite-volume,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 21, núm. 2, pàg. 186- 196, 2000.
- [24] N. Hasan, S. F. Anwer i S. Sanghi, “On the outflow boundary condition for external incompressible flows: A new approach,” *Journal of Computational Physics*, vol. 206, núm. 2, pàg. 661 - 683, 2005.
- [25] K. M. Kelkar i S. V. Patankar, “Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 14, núm. 3, pàg. 327 - 341, 1992.
- [26] M. Zabihi, K. Lari i H. Amiri, “Comparison of the blocked-off and embedded boundary methods in radiative heat transfer problems in 2D complex enclosures at radiative equilibrium,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 31, núm. 7, pàg. 3539 - 3551, 2017, ISSN: 1738494X.
- [27] J. P. Dulhani, S. Sarkar i A. Dalal, “Effect of angle of incidence on mixed convective wake dynamics and heat transfer past a square cylinder in cross flow at $Re = 100$,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 74, pàg. 319 - 332, 2014.
- [28] D. H. Yoon, K. S. Yang i C. B. Choi, “Flow past a square cylinder with an angle of incidence,” *Physics of Fluids*, vol. 22, núm. 4, pàg. 1 - 12, 2010, ISSN: 10706631.
- [29] REE, *REData - No renovables detalle emisiones CO₂ — Red Eléctrica de España*, 2021. adr.: <https://www.ree.es/es/datos/generacion/no-renovables-detalle-emisiones-CO2>.