TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Index Cromàtic d'un multigraf i la conjectura de Goldberg-Seymour

Autor: Aleix Sarroca Soler

Director: Oriol Serra Albo

Departament: Matemàtiques

Convocatòria: 2020-21 (Q2)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en Matemàtiques

Treball de Final de Grau

Index Cromàtic d'un multigraf i la conjectura de Goldberg-Seymour

Aleix Sarroca Soler

Supervisat per Oriol Serra Albo

Juny, 2021

Per començar voldria donar les gràcies al tutor del treball, l'Oriol Serra Albo, per introduir-me en aquesta àrea de la teoria de grafs i per ajudar-me i guiar-me durant l'elaboració del treball. També agrair a la meva familia i amics el suport que m'han donat, i donar les gràcies per aguantar-me en els dies més estressants i pels ànims donats durant tot el treball.

Abstract

The main purpose of this work is to understand and analyze the edge-coloring problem of a multigraph and Goldberg's Conjecture. Given a multigraph G = (V, E), the edge-coloring problem (ECP) is to color the edges of G with the minimum number of colors so that no two adjacent edges have the same color. the optimal value of ECP is the chromatic index of G, denoted by $\mathcal{X}'(G)$. In the 1970s Goldberg conjectured that $\mathcal{X}'(G) = \max(\Delta(G) + 1, w(G))$. We will analyze several results regarding the ECP and the Goldberg conjecture, and we will give an algorism that outputs an edge coloring satisfying Goldberg's conjecture assymptotically.

Keywords

Multigraphs, Chromatic index, edge-coloring, Goldberg's conjecture

Index

1. Preliminars i notació

En aquesta secció es dona un glossari de conceptes i terminologia bàsics de teoria de grafs per a una còmode referència al lector. En el treball s'inclouen les nocions i terminologia més específics al problema de coloració que tracta el treball.

Definició 1.1 (Adjacència i Incidència)**.** Donat un graf G, sigui $e = \{u, v\} = uv$ una aresta de G, diem que els vèrtexs u, v són adjacents, i que l'aresta e és incident amb u i v.
Donada una parella d'arestes de G, diem que són adjacents si comparteixen com a mínim un vèrtex.

Definició 1.2 (Aparellament)**.** Donat un graf $G = (V, E)$, definim un aparellament de G com $M \subset E$ tal que les arestes de M no tenen vèrtexs en comú.

Definició 1.3 (Arbre)**.** Un arbre és un graf connex i acíclic.

Definició 1.4 (Cami)**.** Un camí entre dos vèrtexs u i v és un recorregut entre u i v tal que no es repeteixen vèrtexs.

Definició 1.5 (Cicle)**.** Un cicle és un recorregut amb com a mínim 3 vèrtexs tal que comença i acaba pel mateix vèrtex.

Definició 1.6 (Connectivitat)**.** Donat un graf G, diem que G és connex si per tota parella de vèrtexs $u, v \in V$ existeix un camí que els uneix. Si un graf no és connex, podem definir les seves components connexes com els seus subgrafs connexos maximals.

Definició 1.7 (Factorització d'un graf)**.** Donat un graf G, un factor de G és un subgraf de G amb el mateix conjunt de vèrtexs. Un k-factor de G serà un factor de G k-regular. Una k-factorització de G parteix les arestes de G en k-factors disjunts.

Definició 1.8 (Frontera)**.** Donat un graf $G = (V, E)$, sigui $X \subset V$, definim la frontera d'X en G com $\partial_G(X) = \{e \in E : e \text{ és incident amb un vèrtex de } X \text{ i amb un vèrtex de } V \backslash X\}$.

Definició 1.9 (Graf)**.** Un graf G és la parella ordenada $G = (V, E)$ on V és un conjunt finit no buit de vèrtexs i E és un conjunt d'arestes, on cada aresta es defineix com $e = \{u, v\}$ amb $u, v \in V$. Diem que un aresta és un llaç si la parella de vèrtexs que defineix una aresta són iguals. Diem que un graf admet arestes múltiples si admet diferents arestes definides pels mateixos vèrtexs. Diem que un graf és simple si no admet llaços o arestes múltiples. Diem que un graf és un multigraf si admet arestes múltiples.

Definició 1.10 (Graf acíclic)**.** Diem que un graf G és acíclic si no conté cap cicle.

Definició 1.11 (Graf bipartit)**.** Diem que un graf G és bipartit si existeixen $V_1, V_2 \subseteq V$ amb $V_1 \cup V_2 = V$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ tal que tota aresta de G és de la forma (u_1, u_2) amb $u_1 \in V_1$ i $u_2 \in V_2$.

Definició 1.12 (Graf crític)**.** Donat un graf G i un paràmetre ρ, diem que G és ρ-crític si $\rho(H) < \rho(G)$ per a tot subgraf $H \subset G$. Diem que $e \in E(G)$ és una aresta ρ-crítica si $\rho(G - e) < \rho(G)$.

Definició 1.13 (Graf dirigit)**.** Diem que $G = (V, A)$ és un graf dirigit si té arcs enlloc d'arestes. Definim un arc com un parell ordenat de vèrtexs.

Definició 1.14 (Graf isomorf)**.** Donats dos grafs $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, diem que són isomorfs si existeix una aplicació bijectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $uv \in E_1 \iff f(u)f(v) \in E_2$

Definició 1.15 (Graf regular)**.** Diem que un graf és regular si tots els seus vèrtexs tenen el mateix grau. A més, diem que un graf és k-regular si tots els seus vèrtexs tenen grau k.

Definició 1.16 (Grau i Multiplicitat)**.** Donat un graf G, i un parell de vèrtexs $u, v \in V(G)$. Definim el grau de v com el nombre d'arestes incidents amb v, i escriurem $d_G(v)$. Definim la multiplicitat de uv com el número d'arestes incidents amb u i v, $|E_G(u, v)|$, i escriurem $\mu_G(uv)$.
Definim el grau de G com $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)}(d_G(v))$, i la multiplicitat de G com $\mu(G) = \max\limits_{uv \in E(G)}(\mu_G(uv))$.

Definició 1.17 (Operacions amb grafs)**.** Donat un graf G, podem afegir o suprimir tant vèrtexs com arestes de la següent forma:

- Per afegir un vèrtex v escriurem $G + v$.
- Per suprimir un vèrtex v escriurem $G - v$, i s'eliminarà tant el vèrtex com totes les arestes incidents amb el vèrtex.
- Per afegir una aresta e escriurem $G + e$.
- Per suprimir una aresta e escriurem $G - e$.

Definició 1.18 (Ordre i Mida)**.** Sigui $G = (V, E)$ un graf, diem que l'ordre de G és $|V|$, i la mida de G és $|E|$.

Definició 1.19 (Paràmetre de Grafs)**.** Un paràmetre de grafs és una funció $\rho : G \to \mathbb{R}$, que assigna a cada graf G un nombre real tal que $\rho(G) = \rho(H)$ quan G i H són grafs isomorfs. Diem que un paràmetre ρ és monòton si $\rho(H) \leq \rho(G)$ quan H és un subgraph de G.
A més, donats dos paràmetres ρ i ρ', si $\rho(G) \leq \rho'(G)$ per a tot graf, aleshores diem que ρ' és una cota superior per ρ i que ρ és una cota inferior per ρ'.

Definició 1.20 (Recorregut)**.** Donat un graf G, definim un recorregut entre els vèrtexs u i v com una seqüencia alternada de vèrtexs i arestes incidents que comença per u i acaba en v.

Definició 1.21 (Subgraf)**.** Donat $G = (V, E)$ un graf, definim:

- $G' = (V', E')$ és un subgraf de G si G' és un graf i $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.
- Donat $V' \subseteq V$, definim el subgraf induït o generat per V' de G com $G' = (V', E')$ tal que $E' = E_{|V'}$ són el conjunt d'arestes del graf G entre vèrtexs de V'. Escriurem $G' = G[V']$.

2. Introducció

2.1 Motivació històrica

En teoria de grafs, la coloració d'un graf és l'assignació d'etiquetes, que anomenarem colors, als elements d'un graf, on l'assignació està subjecte a certes condicions. Existeixen diferents tipus de coloracions, i cada una té les seves aplicacions, tot i que estan estretament lligades. Els tipus de coloracions més importants són la coloració de vèrtexs, d'arestes, o en el cas de grafs planars, de cares. La condició usual és que dos elements adjacents o incidents no tenen el mateix color. En el cas de coloracions de vèrtexs, dos vèrtexs adjacents reben colors diferents i en el d'arestes dues arestes incidents tenen colors diferents. Aleshores es diu que la coloració és *pròpia*, i els conjunts d'elements d'un mateix color formen un conjunt *estable*, vèrtexs que no són adjacents dos a dos o arestes que no són incidents dos a dos. En el que segueix sempre considerarem coloracions pròpies i ometrem aquest adjectiu.

Tot i que nosaltres ens centrarem en la coloració de les arestes, convé donar context històric al problema de la coloració d'un graf en general.

L'estudi d'aquesta àrea de la teoria de grafs va començar el segle XIX, amb l'anomenat problema dels quatre colors, i es va imposar la tradició d'utilitzar colors com a etiquetes.

Al 1852 Francis Guthrie va conjecturar que només quatre colors eren necessaris per acolorir un mapa tal que no hi hagi regions fronteres amb el mateix color. Com és fàcil veure, aquesta conjectura és equivalent a que només quatre colors són necessaris per acolorir les cares d'un graf planar, i, tot i la aparent senzillesa d'aquest resultat, no va ser demostrat fins el 1976. La primera demostració va ser donada per Kenneth Appel i Wolfgang Haken [1] [2], i va ser la primera demostració d'un teorema important utilitzant un ordinador.

Respecte el tema que ens ocupa, que és la coloració de les arestes d'un graf, va ser iniciat per Peter Guthrie Tait, al 1880, quan va intentar demostrar el teorema dels quatre colors fent ús de l'equivalència entre aquest i la coloració de les arestes d'un graf cúbic amb només tres colors [3]. Aquest intent no va reeixir, i no es va poder provar fins a la demostració del teorema de quatre colors, però va servir per donar el tret de sortida a l'estudi de la coloració de les arestes d'un graf.

Tot i que la coloració de les arestes no ha rebut massa atenció fins les últimes dècades si ho comparem, per exemple, amb la coloració dels vèrtexs, sí que s'han donat resultats importants que ens donen una idea del mínim nombre de colors que podem utilitzar per acolorir un multigraf. Així com el mínim nombre de colors per acolorir els vèrtexs d'un graf (el seu nombre cromàtic) pot prendre qualsevol valor entre 2 i $\Delta(G)+1$, un dels resultats clàssics en coloració d'arestes, el teorema de Vizing (1964)[4], per Vadim G. Vizing,, diu que l'índex cromàtic, el mínim nombre de colors per acolorir les arestes d'un graf, només pot prendre dos valors, $\Delta(G)$ o $\Delta(G)+1$, i els dos són assolibles per classes infinites de grafs. Aquest resultat sembla que redueix el problema de l'aresta coloració a determinar quin dels dos valors és l'índex cromàtic d'un graf, un problema certament difícil però molt més específic. El problema canvïa substancialment si es consideren multigrafs, és a dir, grafs que poden tenir arestes múltiples. El primer resultat clàssic és el teorema de Shannon (1949) [5], establert per Claude E. Shannon, que va demostrar que sempre es pot acolorir un multigraf G amb un nombre de colors igual o inferior a $\frac{3}{2}\Delta(G)$. Aquest teorema va inspirar altres resultats com el teorema de Vizing (1964) [6] que estableix que tot multigraf es pot acolorir amb un nombre de colors igual o inferior a $\Delta(G)+\mu(G)$ on $\mu(G)$ és la multiplicitat màxima d'una aresta múltiple. Aquest últim resultat també va ser donat independentment per Gupta [7]. Com hem dit, aquests resultats ens donen una idea de l'índex cromàtic d'un multigraf, però per a casos generals, són cotes poc precises. La cota de Shannon només és justa per a casos on el graf contingui un subgraf en concret, i respecte la cota donada per Vizing, es pot donar el cas que sigui encara més gran que la cota donada per Shannon, si $\mu(G) > \frac{1}{2}\Delta(G)$.

Finalment arribem al 1970, quan Goldberg (1970) [8], buscant una millor aproximació a aquest índex cromàtic de multigrafs, va proposar la conjectura que afirma que un multigraf es pot acolorir amb com a molt $\max(\Delta(G), w(G))$ colors, on $w(G)$ és la densitat de G. Aquest resultat també va ser proposat independentment per Seymour [9] i es coneix avui com la conjectura de Goldberg-Seymour.

En el moment d'escriure aquest treball encara no s'ha acceptat cap prova per a la conjectura de Goldberg. Cal remarcar que tampoc s'ha descartat la prova donada per Chen, Jing i Zang, presentada al 2019 [10], on diuen demostrar la conjectura de Goldberg i l'existència d'un algorisme en temps polinòmic per a trobar una coloració òptima d'un multigraf. Això mostra la dificultat del problema de la coloració de les arestes d'un multigraf.

Tot i que la conjectura encara no hagi estat demostrada, en els últims any s'han fet diversos avenços en el camp. S'han definit noves eines per a facilitar l'estudi de la coloració d'arestes, com els Multi-Fans [4], proposats per Vizing, els camins de Kierstead [11], proposats per Kierstead, o la generalització d'ambdós, i l'eina que ha pres més rellevància en els últims resultats, els arbres de Tashkinov [12], proposats per Tashkinov. Amb l'ús d'aquestes eines s'han arribat a nous resultats que indiquen que la conjectura és plausible, com la demostració de la conjectura de Goldberg assimptòticament de Khan (1996) [13], la demostració de la conjectura de Goldberg per a multigrafs aleatoris de Kronenberg, Haxell i Krivelevich (2019) [14], altres aproximacions a la conjectura de Goldberg com la prova de la versió fraccional de la conjectura de Goldberg, i també la "demostració" [10] de la conjectura esmentada anteriorment. Tot i ser una eina potent, els arbres de Tashkinov tenen limitacions, com s'il·lustra a l'article de Asplund i McDonald (2016) [15], on es donen exemples de grafs pels que la tècnica mai proporciona el valor conjecturat de l'índex cromàtic. És per això que molts dels resultats mencionats anteriorment fan servir modificacions de la idea original de Tashkinov.
Hi ha una monografia sencera de Stiebitz en col·laboració amb Favrholt, Scheide i Toft (2012) [16] dedicada a tractar aquesta conjectura i que ha estat una de les referències bàsiques d'aquest treball.

L'estudi d'aquest camp de la teoria de grafs, com és d'esperar en tot camp de les matemàtiques, va estretament lligat a les aplicacions que pot tenir. Com ja hem vist, tot va començar amb la pregunta de quin és el mínim nombre de colors necessàris per acolorir un mapa. La coloració de grafs té moltes aplicacions, i amb el pas del temps se n'han trobat cada cop més. Una aplicació trivial de la coloració d'arestes podria ser el mínim nombre de colors necessàris per acolorir les connexions d'un circuit o d'una xarxa, però també hi ha aplicacions no tant directes, com alhora de dissenyar planificacions temporals òptimes, assignació de freqüències en sistemes de comunicació, distribució de fluxes en xarxes o programació en sistemes distribuïts, entre moltes altres.

2.2 Objectius

En aquest treball ens centrarem en estudiar el camí recorregut fins a l'actualitat al voltant de la conjectura de Goldberg i la coloració d'arestes per a multigrafs en general. Per fer-ho, analitzarem diferents resultats que s'han donat, centrant-nos en els que més es relacionen amb la conjectura de Goldberg. També estudiarem les eines que s'utilitzen, com els arbres de Tashkinov. L'objectiu principal d'aquest treball és entendre el problema de la coloració d'arestes en l'àmbit dels múltigrafs, analitzar resultats bàsics al respecte, i mirar d'entendre la conjectura de Goldberg, els problemes que planteja la seva demostració, i veure en quin punt ens trobem 50 anys després de la publicació de la conjectura. Un altre objectiu del treball era finalitzar amb la prova donada per Chen, Jing i Zang de la conjectura de Goldberg. Aquesta prova és molt tècnica i fa servir la majoria d'eines que es presenten al treball. Després de dos anys de la seva publicació com a manuscrit a Arxiv, la prova no ha estat encara validada i els experts encara no estan convençuts que sigui correcte. És per aquest motiu que no hem entrat en la seva lectura en aquest treball.

Per a poder assolir aquests objectius, el document consta de les següents parts. En el capítol 3 introduirem el concepte de la coloració de les arestes d'un graf, definirem l'índex cromàtic, i veurem la conjectura de Goldberg en detall explicant el seu significat.

Al capítol 4 veurem i provarem el Teorema de Shannon, que és probablement un dels resultats més importants en la coloració d'arestes per a multigrafs, i analitzarem les implicacions que s'en deriven.

Al capítol 5 veurem i provarem el Teorema de Vizing per a multigrafs, l'altre resultat clàssic en la coloració d'arestes per a multigrafs a part del Teorema de Shannon. També analitzarem les implicacions que s'en deriven.

En el capítol 6 definirem l'índex cromàtic fraccional, i mostrarem perquè és interessant per a la conjectura de Goldberg. A més veurem com podem trobar l'índex cromàtic fraccional d'un multigraf arbitrari.

A continuació, en el capítol 7, introduirem una eina molt necessària per a l'estudi de la conjectura de Goldberg, o l'estudi de la coloració d'arestes per a multigrafs en general, si es vol fer de forma precisa. Aquesta eina són els arbres de Tashkinov. Definirem els arbres de Tashkinov, veurem les seves propietats bàsiques i demostrarem alguns resultats que més endevant ens permetran trobar resultats més interessants per a la conjectura de Goldberg.

En el capítol 8 veurem que la conjectura de Goldberg es compleix assimptòticament. La prova proporciona un algorisme que permet obtenir un nombre de colors pròxim al predit per la conjectura de Goldberg en temps polinòmic. Una de les contribucions destacables del treball és la descripció precisa d'aquest algorisme en llenguatge d'alt nivell i la seva implementació explícita en python, el codi de la qual s'inclou a l'apèndix del treball.

Finalment en el capítol 9 veurem un resultat del 2019, que prova la conjectura de Goldberg per a multigrafs aleatoris. De fet, en la línea amb resultats anàlegs per a grafs aleatoris simples, el resultat identifica quin dels valors de la conjectura de Goldberg es satisfà amb alta probabilitat en un multigraf aleatori en termes de la densitat del nombre d'arestes. La prova fa servir una vegada més l'eina dels arbres de Tashkinov a més d'una colla de resultats del mètode probabilístic. En el capítol ens centrarem en els aspectes combinatoris de la prova i donarem per provats els resultats de naturalesa probabilística.

El treball conclou amb una secció de conclusions i un apèndix que conté la implementació de l'algorisme quasi òptim de coloració en Python.

3. Index cromàtic d'un graf i la Conjectura de Goldberg

En aquesta secció donarem les eines més bàsiques i necessàries per entendre el que es discutirà al llarg del document. Començarem introduint el concepte de coloració i altres definicions que s'en deriven, i un cop explicat això, definirem la Conjectura de Goldberg.
En aquesta secció i la resta del treball les principals referències que usarem són [16] i [12].

3.1 Coloració, l'índex cromàtic d'un graf

A partir d'ara, si no especifiquem el contrari, quan parlem d'un graf G ens referirem a un graf sense llaços que admet arestes múltiples.

Definició 3.1. Donat un graf $G = (V, E)$ i un nombre enter $k > 0$, definim una k-coloració de les arestes de G com una aplicació $\varphi : E(G) \to \{1, ..., k\}$ que assigna a cada aresta $e \in E(G)$ un color $\varphi(e) \in \{1, ..., k\}$. Si per a tota parella d'arestes adjacents e_1, e_2, tenim que $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$, direm que la coloració és pròpia.

Per referir-nos al conjunt de totes les coloracions amb k colors d'un graf G escriurem $C^k(G)$.

Definició 3.2. Donat un graf G, sigui φ una coloració de G. Per a un vèrtex $v \in G$, definim els colors presents a v com $\varphi(v) = \{\varphi(e) : e \in E_G(v)\}$ i els colors que falten a v com $\bar{\varphi}(v) = \{1, ..., k\} \backslash \varphi(v)$.
En altres paraules, $\varphi(v)$ és el conjunt de colors en arestes incidents a v i $\bar{\varphi}(v)$ la resta de colors.

Definició 3.3. Sigui G un graf i $\varphi \in C^k(G)$. Per a un conjunt de vèrtexs $X \subseteq V(G)$, definim $\bar{\varphi}(X) = \bigcup\limits_{v \in X} \bar{\varphi}(v)$.
A més, diem que X és elemental respecte φ si $\bar{\varphi}(u) \cap \bar{\varphi}(v) = \emptyset$ per a cada parella de vèrtexs u, v dins X. Diem que X és tancat respecte φ si per cada aresta $e \in \partial_G(X)$, $\varphi(e)$ és present a cada vèrtex $v \in X$, i finalment diem que és fortament tancat respecte φ si és tancat i es satisfà que $\varphi(e) \neq \varphi(e')$ per a cada parella d'arestes de la frontera de X, $e, e' \in \partial_G(X)$.

La motivació d'aquesta definició prové del fet que si dos vèrtexs adjacents u, v satisfan $\bar{\varphi}(u) \cap \bar{\varphi}(v) \neq \emptyset$ aleshores es pot substituïr el color de l'aresta uv per qualsevol color d'aquesta intersecció i la coloració segueix sent pròpia. Moltes de les tècniques que es veuran després es basen en modificacions d'aquesta mena a una coloració donada per estendre coloracions parcials reduïnt el problema a l'anàlisi de conjunts elementals.

Definició 3.4. Siguin un graf G, i una coloració φ de G. Donats dos vèrtexs $u, v \in V(G)$, diem que u, v és una (α, β)-parella respecte φ si $\alpha \in \bar{\varphi}(u)$ i $\beta \in \bar{\varphi}(v)$.

Definició 3.5. Donat un graf G i una k-coloració φ. Sigui $H \subseteq G$ amb $V(H) = V(G)$ i $E(H) = E_{\alpha,\varphi} \cup E_{\beta,\varphi}$, les arestes acolorides amb els colors α i β respecte φ. Aleshores cada component d'H serà o bé un camí o bé un cicle parell. Cadascuna de les components que són un camí els anomenarem (α, β)-cadena.

Definició 3.6. Donat un graf G, una coloració $\varphi \in C^k(G)$ i una (α, β)-cadena $= P$, si intercanviem els colors α i β dins la cadena, obtenim una nova coloració φ'. A aquesta operació l'anomenarem canvi de Kempe i escriurem $\varphi' = \varphi/P$.

Definició 3.7. Donat un graf G, definim l'índex cromàtic de G com el mínim enter $k > 0$ tal que existeix una coloració $\varphi \in C^k(G)$. Per referir-nos a l'índex cromàtic de G escriurem $\mathcal{X}'(G)$.

És trivial veure que l'índex cromàtic satisfà necessàriament que $\mathcal{X}'(G) \geq \Delta(G)$.
Amb aquesta definició també podem veure que l'índex cromàtic és un paràmetre de grafs i a més que és un paràmetre monòton. A continuació introduirem un resultat sobre els paràmetres de grafs que ens resultarà molt útil per a l'estudi de l'índex cromàtic.

Proposició 3.8. *Siguin ρ i ρ' dos paràmetres monòtons, aleshores:*

- *Tot graf G conté un subgraf ρ-crític H amb $\rho(H) = \rho(G)$*
- *Si tot graf ρ-crític H satisfà $\rho(H) \leq \rho'(H)$ aleshores $\rho(G) \leq \rho'(G)$ per a tot graf G.*

.

A partir d'ara, si no especifiquem el contrari, quan parlem d'un graf crític o d'una aresta crítica, estem dient que són crítics respecte l'índex cromàtic.
Fent ús de la proposició 3.8, tenim que qualsevol resultat de l'índex cromàtic que demostrem per a grafs crítics, quedarà demostrat per a un graf qualsevol.

3.2 La Conjectura de Goldberg

Abans de presentar la conjectura de Goldberg definirem un nou paràmetre que actua com a cota inferior de l'índex cromàtic:

Definició 3.9. Donat un graf G amb $|V(G)| \geq 2$,

$$w(G) = \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 2} \left\lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \right\rceil \tag{1}$$

Per veure que és una cota inferior de l'índex cromàtic, només hem de veure que, donada una coloració $\varphi \in C^k(G)$ de G i un subgraf H de G, per a cada color α, $E_{\alpha,\varphi} \cap E(H)$ és un aparellament i per tant $|E_{\alpha,\varphi} \cap E(H)| \leq \lfloor \frac{|V(H)|}{2} \rfloor$. Amb això tenim que $|E(H)| \leq k \lfloor \frac{|V(H)|}{2} \rfloor$ i ja estem.
Ara, si definim $w(G) = 0$ per a grafs amb $V(G) \leq 1$, tenim que w és un paràmetre monòton per tot G satisfent

$$\mathcal{X}'(G) \geq w(G).$$

També és interessant veure que per a grafs amb $|V(G)| \geq 3$, podem definir $w(G)$ com:

$$w(G) = \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 3 imparell} \left\lceil \frac{2|E(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil \tag{2}$$

$$w(G) = \max_{X \subseteq V(G), |X| \geq 3 imparell} \left\lceil \frac{2|E(G[X])|}{|X| - 1} \right\rceil \tag{3}$$

Per veure el resultat anterior, anem a suposar que el màxim d'(1) s'assoleix en un subgraf H d'ordre parell, i veurem que necessàriament també s'assoleix per algun d'ordre imparell, satisfent per tant (2) i (3). Si $|V(H)| = 2$ tenim que $w(G) = |E(G)|$ i per tant, per a qualsevol subgraf $H' \subseteq G$ amb tres vèrtexs tal que $H \subset H'$ tenim que $w(G) = \lceil 2|E(H')|/(|V(H')|-1) \rceil$. Altrament tenim $|V(H)| \geq 4$ i fem el següent. Sigui v el vèrtex de grau mínim dins H, agafem $H' = H - v$. Ara tenim $|V(H')| \geq 3$ imparell i $d_H(v) \leq 2|E(H)|/|V(H)|$. Aleshores:

$$w(G) \geq \left\lceil \frac{2|E(H')|}{|V(H')|-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2(|E(H)| - d_H(v))}{|V(H)|-2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \right\rceil = w(G)$$

I ja ho tenim.

Definició 3.10. Diem que un graf G és elemental si $\mathcal{X}'(G) = w(G)$.

Conjectura 3.11 (Conjectura de Goldberg [8])**.** *Tot graf G que satisfà $\mathcal{X}'(G) \geq \Delta(G) + 2$ és elemental, i.e, $\mathcal{X}'(G) = w(G)$.*

Per tant, la conjectura de Goldberg ens assegura que si un graf no és de classe 1, i.e, $\mathcal{X}'(G) = \Delta(G)$, ni de classe 2, i.e, $\mathcal{X}'(G) = \Delta(G) + 1$, aleshores és elemental.
També podem reescriure la conjectura de la següent forma:

Conjectura 3.12. *Tot graf G satisfà $\mathcal{X}'(G) \leq \max\{\Delta(G) + 1, w(G)\}$.*

Ara presentarem uns resultats que ens donen formes alternatives de presentar o demostrar la conjectura de Goldberg.

Proposició 3.13. *Sigui G un graf amb $\mathcal{X}'(G) = k + 1$ per un enter $k > \Delta(G)$. Si G és crític i elemental, aleshores:*

(a) $\mathcal{X}'(G) = w(G) = \left\lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \right\rceil$, i $|V(G)|$ és imparell.

(b) Per a cada aresta $e \in E(G)$ i cada coloració $\varphi \in C^k(G - e)$ tenim que $m_{\varphi,\alpha} = |\{v \in V(G) : \alpha \in \bar{\varphi}(v)\}| = 1$ per tots els colors $\alpha \in \{1, ..., k\}$, i.e, α és present a tots els vèrtexs menys un.

(c) $|E(G)| = k\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1$

Prova. Com tenim $\mathcal{X}'(G) \geq \Delta(G) + 1$, tenim que $|V(G)| \geq 3$ i $E(G) \neq \emptyset$. A més, per ser G crític i elemental, tot $H \subset G$ satisfà $w(H) \leq \mathcal{X}'(G) < \mathcal{X}'(G) = w(G)$. Això prova que

$$\mathcal{X}'(G) = w(G) = \left\lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \right\rceil$$

i $|V(G)|$ ha de ser necessàriament imparell ja que altrament tindriem $\mathcal{X}'(G) = \lceil 2|E(G)|/|V(G)| \rceil \leq \Delta(G)$, que contradiu la suposició de $\mathcal{X}'(G) \geq \Delta(G) + 1$. Això prova (a). Per provar (b) agafem una aresta $e \in E(G)$ i una coloració $\varphi \in C^k(G - e)$. Com $|V(G)|$ és imparell tenim que $m_{\varphi,\alpha} \equiv 1 \mod 2$. Ara, si tenim que $m_{\varphi,\alpha} \neq 1$ per algun color, implica que

$$\sum_{v \in V(G)} (k - d_G(v)) + 2 \geq k + 2$$

$$\frac{2|E(G)|}{|V(G)|-1} \leq k = \mathcal{X}'(G) - 1$$

i arribem a contradicció. Per tant $m_{\varphi,\alpha} = 1$ per a tot color i (b) queda provat. Per provar (c), per (b) tenim que $\sum_{v \in V(G)} (k - d_G(v)) + 2 = k$ i per tant $|E(G)| = k\frac{|V(G)|-1}{2} + 1$ i hem provat (c). $\square$

Teorema 3.14. *Sigui G un graf amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k > \Delta(G)$. Si G és crític, aleshores són equivalents:*

(a) G és elemental.

(b) Per a cada aresta $e \in E(G)$ i cada coloració $\varphi \in C^k(G-e)$, el conjunt $V(G)$ és elemental respecte φ.

(c) Existeix una aresta $e \in E(G)$ i una coloració $\varphi \in C^k(G-e)$ tal que $V(G)$ és elemental respecte φ.

(d) Existeix una aresta $e \in E(G)$, una coloració $\varphi \in C^k(G-e)$ i un subconjunt $X \subseteq V(G)$ tal que X conté els vertex incidents amb e, i X és elemental i fortament tancat respecte φ.

Prova. Per la proposició 3.13 (b) tenim que (a) implica (b). Evindentment (b) implica (c) i (c) implica (d), per tant només ens queda veure que (d) implica (a). Suposem que es satisfà (d). Sigui $H = G[X]$ i per a cada color α, $E_\alpha = E_{\alpha,\varphi} \cap E(H)$. Com e no té color assignat, i els seus vèrtexs adjacents pertanyen a X, sabem que $\bar{\varphi}(X) \neq \emptyset$ i $|X| \geq 2$.
Sigui $\alpha \in \bar{\varphi}(X)$, α només falta a un vèrtex de H, i com X és tancat, cap aresta de $\partial_G(X)$ està acolorida amb α. Com E_α és un aparellament d'H, tenim que $|X| = |V(H)|$ és imparell i $|E_\alpha| = \lfloor |V(H)|/2 \rfloor$. Ara, si agafem $\alpha \notin \bar{\varphi}(X)$, tots els vèrtexs de X tenen present α i com X és fortament tancat, com a molt una aresta de $\partial_G(X)$ està acolorida amb α. Com E_α és un aparellament d'H i $|V(H)|$ és imparell, tenim que exactament una aresta de $\partial_G(X)$ està acolorida amb α, i $|E_\alpha| = \lfloor |V(H)|/2 \rfloor$. Per tant:

$$|E(H)| = 1 + k\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor.$$

Com H és un subgraf de G amb $|V(H)| \geq 2$, tenim que:

$$w(G) \leq \mathcal{X}'(G) = k+1 = \left\lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \right\rceil \leq w(G).$$

Per tant, G és un graf elemental i tenim que (d) implica (a) i el teorema queda demostrat. $\square$

Aquest últim teorema ens mostra que si per tot graf crític amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k > \Delta(G)$ podem trobar una aresta $e \in E(G)$, una coloració $\varphi \in C^k(G-e)$ i un subconjunt $X \subseteq V(G)$ tal que X conté els vertex incidents amb e, i X és elemental i fortament tancat respecte φ, la conjectura de Goldberg queda demostrada per a grafs crítics, i per tant, per a tots els grafs.

4. Teorema de Shannon

A mitjans del segle passat es va suggerir el problema de coloració que es preguntava com acolorir els cables d'una unitat elèctrica per a que tots fossin distingibles. Al 1949 Claude E. Shannon va demostrar que, per a xarxes on cada cable només ajunta 2 nodes, i on de cada node surten com a molt m cables, teniem suficient amb $\lceil \frac{3}{2}m \rceil$ colors. Com és facil veure, el problema d'acolorir una xarxa elèctrica es pot reescriure com a un problema d'acolorir un graf com tenim a continuació:

Teorema 4.1 (Teorema de Shannon [5]). *Sigui G un multigraf de grau màxim Δ, G admet una coloració d'arestes amb com a molt $\frac{3}{2}\Delta$ colors. És a dir, $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta$*

Prova. Primer veurem que la fita és justa. Sigui G un graf format per 3 vèrtexs, adjacents un a un per n arestes, tenim que $\Delta = 2n$. Com que per a cada parella d'arestes es trivial veure que comparteixen un vèrtex, si volem acolorir totes les arestes adequadament, haurem d'usar diferents colors per a cada una, és a dir, $3n$ colors. Per tant, per a aquest graf tenim $\chi'(G) = 3n = \frac{3}{2}\Delta$, i tenim que la fita és justa.

Per veure que la fita és suficient, separarem la prova per a grafs amb grau màxim parell i grafs amb grau màxim imparell.

1. Cas $\Delta = 2n$:

   Farem la demostració per a grafs Δ-regulars, que s'extén a tots els grafs amb grau màxim Δ. Per veure això, donat un graf qualsevol G amb $\Delta(G) = 2n$, hem de veure que existeix un graf G' Δ-regular tal que $G \subseteq G'$. Construirem G' a partir de G iterativament.
   Donat G, definim el conjunt de vèrtexs $V_d = \{v \in V(G) : d_G(v) < \Delta(G)\}$. Si $V_d = \emptyset$, el graf és Δ-regular i ja estem. Altrament, mentre $|V_d| \geq 2$, podrem triar $v, u \in V_d$ i afegir arestes entre u i v fins que o bé $d_G(v) = \Delta(G)$ o bé $d_G(u) = \Delta(G)$. Veiem que podem repetir aquest procés fins que tinguem $|V_d| \leq 1$, i anomenem al graf resultant G'. Si $|V_d| = 0$ el nou graf és Δ-regular i ja estem. Altrament tenim $V_d = \{u\}$, amb $d'_G(u) = d < \Delta$, i podem definir el graf $G'' = G' + G'$, on tots els vèrtexs tenen grau Δ menys dos vèrtexs que tenen grau $d < \Delta$. Afegint $\Delta - d$ arestes entre aquests dos vèrtexs, obtenim el graf Δ-regular que buscàvem, i per com l'hem construit és clar que G és subgraf.
   Suposem ara que tenim un graf Δ-regular. Per continuar amb la demostració usarem el següent teorema donat per Petersen:

   Teorema 4.2. *Donat G un graf regular amb grau parell $\Delta = 2n$, el podem 2-factoritzar en n 2-factors.*

   Prova. És suficient fer la prova per a grafs connexos. Donat un graf connex amb grau parell, hi podem definir un camí eulerià, que genera una orientació tal que cada vértex té n arestes entrants i n arestes sortints. Ara generem un nou graf G' tal que per a cada vértex v a G tenim v' i v'' a G' i per a cada aresta dirigida (u, v) a G, amb l'orientació del camí eulerià, tenim $u'v''$ a G' sense dirigir. Això genera un graf bipartit n-regular, i el conjunt d'arestes es poden partir en n aparellaments perfectes pel teorema de Hall. Al refer el graf G, cada aparellament equivaldrà a un 2-factor de G. $\square$

   Es pot observar un exemple de l'aplicació del teorema de Petersen en la Figura 2

   Ara, donats els n 2-factors del graf regular que ens dona el teorema de Petersen, cada un d'ells pot ser acolorit amb com a molt 3 colors, i per tant podrem acolorir el graf com a molt $3n$ colors. És a dir que es satisfà $\chi'(G) \leq 3n = \frac{3}{2}\Delta$.

2. Cas $\Delta = 2n + 1$:

   Per a grafs amb grau màxim imparell usarem un raonament diferent. Eliminem un vèrtex v de grau màxim, juntament amb les seves arestes, i suposem el graf restant acolorit amb $3n + 1$ colors. Ens referirem als vertex adjacents a v com a $1, ..., s$ amb $s \leq 2n + 1$, i $p_i = |E(v, i)|$ amb $i \in \{1, ..., s\}$.

   Creem una matriu $M \in \mathcal{M}_{(2n+1)\times(3n+1)}$, on cada una de les $2n + 1$ files equival a una aresta de v i cada una de les $3n + 1$ columnes equival a un color de la coloració. Ara omplim $M = (m_{ij})$ amb 1's si el color j està disponible per a la aresta i i 0's altrament. Si tenim una coloració adequada de $3n + 1$ colors, obtindrem una coloració amb $3n + 1$ colors per al graf inicial si aconseguim omplir la diagonal amb 1's.

   Per a omplir la diagonal usarem les següents operacions en la matriu:

   (a) Intercanviar columnes, que equival a renombrar els colors

   (b) Intercanviar files, que equival a renombrar les arestes de v

   (c) Intercanviar un 1 i un 0 d'una mateixa fila. Donada la fila i, si tenim un 1 en la columna j, i un 0 en la columna k, intercanviar aquests 1 i 0 equival a fer un canvi de Kempe amb la (j, k)-cadena P que conté el vèrtex i. Vegeu que si P té un altre vèrtex final l amb $l \neq i$, l'operació també intercanviarà m_{lj} i m_{lk}.

   Suposem que tenim l'inici de la diagonal amb 1's seguit d'un 0 en la fila α i columna T. Ara mostrarem com podem posar-hi un 1 sempre:

   - Cas 1: Tenim algun 1 en α a la dreta de T:

     En aquest cas simplement hem d'intercanviar la columna T amb una de les columnes on hi hagi un 1.

   - Cas 2: No tenim cap 1 en α a la dreta de T

     Això vol dir que tindrem $n + p_i$ 1's a lesquerra de la columna $T + 1$, on $\alpha \in E(v, i)$, i per tant tindrem $n + p_i$ files per sobre d'α que tinguin 1 a la diagonal en la mateixa columna que tenim un 1 a α.

     – Cas 2.1: Alguna de les files esmentades té un 1 en T o a la dreta de T
     En aquest cas, si intercanviem la fila α amb la fila trobada ϕ, mantindrem l'1 a la diagonal en ϕ i en α tindrem un 1 a la dreta de T que podrem col·locar a la diagonal amb un intercanvi de columnes.

     – Cas 2.2: Totes les files esmentades tenen els 1 a l'esquerra de T
     En aquest cas escollim una fila no paral·lela a α, que anomenarem β, que tingui un 1 a la diagonal en la mateixa columna (R) que té un 1 en α. β tindrà $n + p_j$ 1's a l'esquerra de T i per tant $n + p_j$ files per sobre d'α tindran un 1 a la diagonal en la mateixa columna (S) que un 1 a β. D'aquestes últimes, com a mínim n files seran no paral·leles a β. A més, α té $n + 1$ files no paral·leles amb un 1 a la diagonal i a la mateixa columna en α. Com que α té com a molt $2n$ files per sobre, existirà com a mínim una fila γ amb un 1 a la diagonal tal que tindrà un 1 en la mateixa columna en β i en α, i un 0 en la columna T. Això vol dir que com a molt 2 de les 3 arestes (α, β, γ) formaran part de la mateixa cadena de dos colors, el de la columna T i el de la columna S.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\ddots & & & & & & & & & \\
 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \gamma \\
 & \vdots & \ddots & & & & \vdots & & & \\
 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & & \beta \\
 & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & 1 & \vdots & & & \\
 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & & \alpha \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & S & & R & & & T & & &
\end{array}
$$

Ara, si tenim que la cadena que comença a α, P_α, no conté ni β ni γ, intercanviem P_α i tenim l'1 a la diagonal sense afectar la resta de la diagonal. Si la cadena que comença en α acaba en γ, intercanviem la cadena que comença a β, P_β, i seguidament intercanviem les files α i β, aconseguint l'1 a la diagonal. Finalment, si la cadena que comença en α acaba en β, intercanviem la cadena que comença a γ, P_γ, i seguidament intercanviem les files α i γ aconseguint l'1 a la diagonal. Per tant la prova queda finalitzada.

$\square$

La prova que hem fet, és la presentada per Shannon en el treball original. D'aquesta forma hem vist com es va demostrar aquest resultat amb les eines del moment. Al llarg del temps però, han sortit altres proves alternatives, segurament més senzilles, Com la que va donar Vizing [4].

Aquest teorema ens dona una cota superior de l'índex cromàtic d'un graf en funció únicament del grau màxim del graf, $\Delta(G)$, i ens assegura que és la millor ja que és necessari per a alguns grafs en concret. D'una banda, és un resultat molt útil, ja que només sabent el grau d'un graf, que és un paràmetre fàcilment computable, tenim un algorisme, derivat de la prova, que ens assegura una coloració que utilitza com a molt $\frac{3}{2}\Delta(G)$ colors. El problema d'aquesta cota és que la diferència entre l'índex cromàtic del graf i aquesta pot ser molt gran, i per tant, a la pràctica no és tant útil ja que no podem saber si l'algorisme ens donarà una coloració propera a l'òptima o no.

Una de les conseqüències que va tenir el resultat va ser l'inici de la recerca d'una millor cota, i per tant d'una cota que no depengués únicament del grau del graf. Això va inspirar nous resultats com el teorema de Vizing, que veurem a continuació, on la cota depèn del grau i la multiplicitat del graf. Aquesta recerca va desembocar també en la conjectura de Goldberg, que introduiex el paràmetre de la densitat, i si es demostrés ens proporcionaria la millor cota possible.

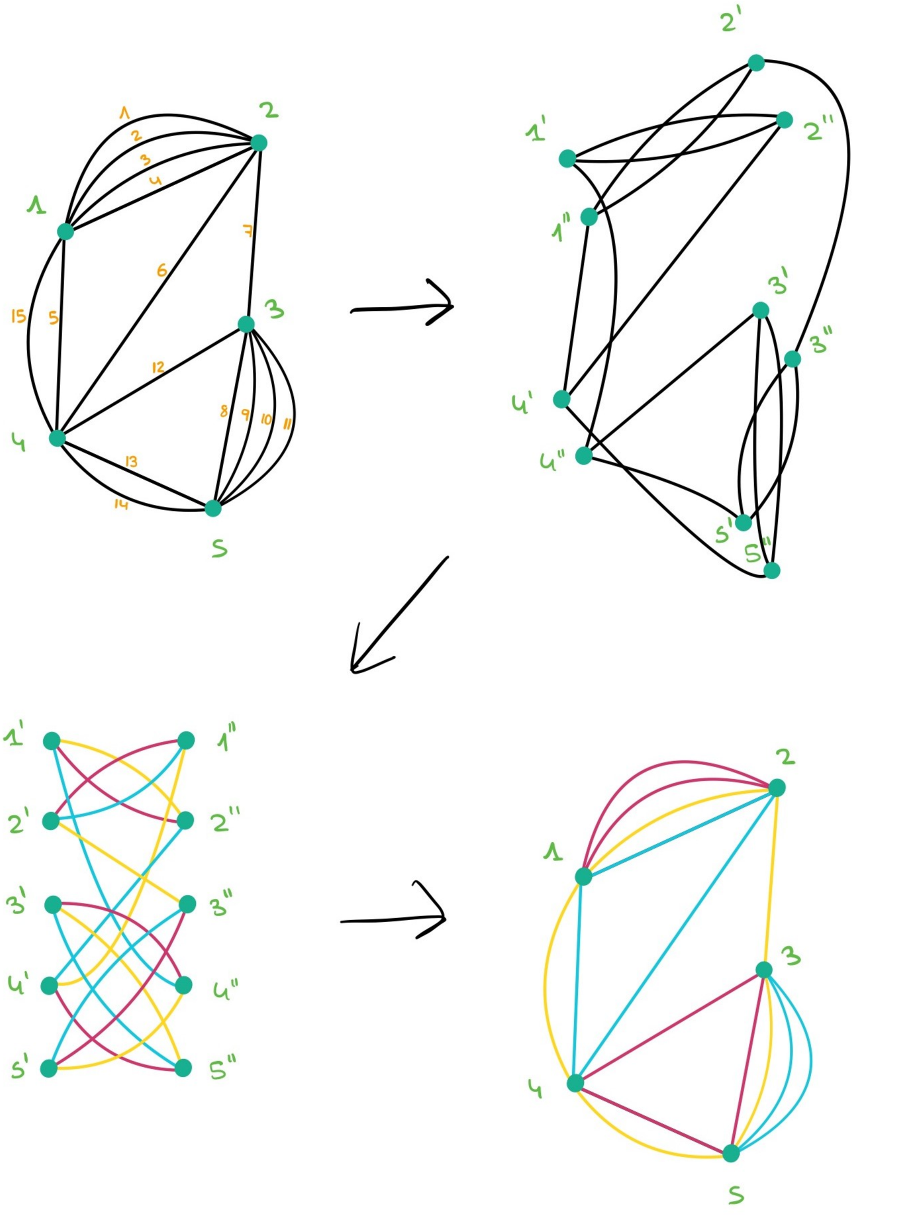

Figure 1: Exemple d'aplicació del teorema de Petersen per a un multigraf 6-regular.

5. Teorema de Vizing

Al 1964, inspirat pel teorema de Shannon [5], Vadim G. Vizing va donar una prova alternativa al teorema de Shannon, i va demostrar la següent cota de l'índex cromàtic.

Teorema 5.1 (Teorema de Vizing [4] [6])**.** *Tot graf G satisfà* $\mathcal{X}'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$

Per poder provar aquest resultat, Vizing va construir uns objectes nous, els multi-fans:

Definició 5.2. Donats G un graf i $e \in E_G(x, y)$ una aresta. Sigui $\varphi \in C^k(G - e)$ una coloració per algun enter $k \geq 0$. Un multi-fan a x respecte e i φ és una seqüencia $F = (e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$ amb $P \geq 1$ satisfent les següents condicions:

(F1) Les arestes $e_1, ..., e_p$ són diferents, $e_1 = e$ i $e_i \in E_G(x, y_i)$ per $i = 1, ..., p$.

(F2) Per a cada aresta e_i amb $2 \leq i \leq p$ tenim un vèrtex y_j amb $1 \leq j < i$ tal que $\varphi(e_i) \in \bar{\varphi}(y_j)$.

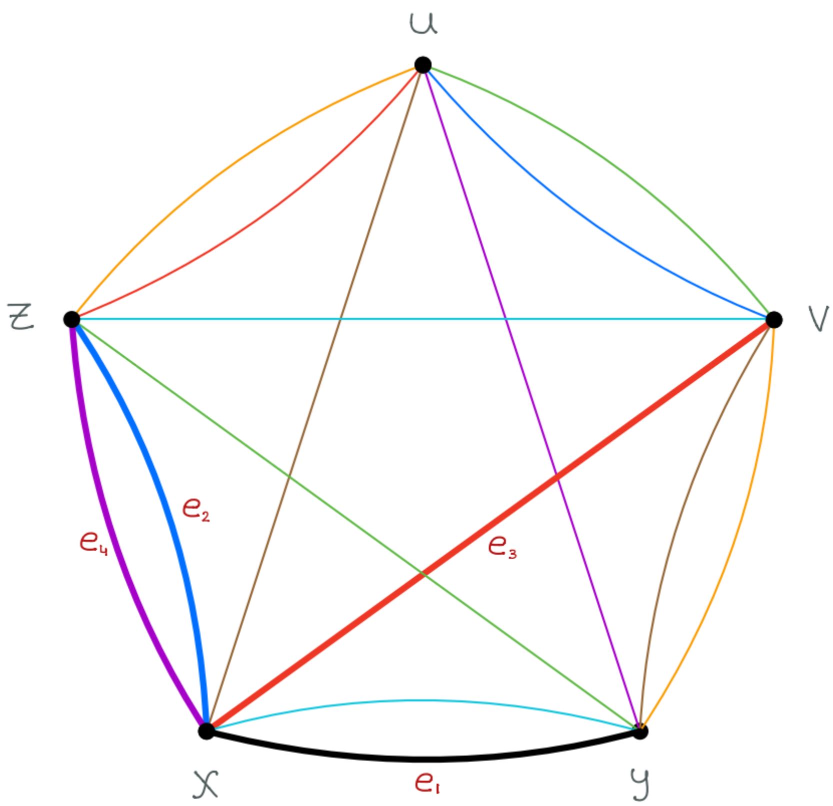

Figure 2: Exemple de multi-fan $F = (e_1, y, e_2, z, e_3, v, e_4, z)$ en x.

Amb aquesta definició dels multi-fans, tenim el resultat següent que ens permetrà demostrar el teorema de Vizing.

Teorema 5.3. *Donat un graf G amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per algun enter $k \geq \Delta(G)$. Sigui $e \in E_G(x,y)$ una aresta crítica de G i sigui $F = (e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$ un multi-fan a x respecte $\varphi \in C^k(G-e)$. Aleshores es satisfà el següent:*

(a) $\bar{\varphi}(x) \cap \bar{\varphi}(y_i) = \emptyset$ per $i = 1, ..., p$.

(b) Si $\alpha \in \bar{\varphi}(x)$ i $\beta \in \bar{\varphi}(y_i)$ per $1 \leq i \leq p$. Aleshores existeix una (α,β)-cadena respecte φ tal que té vèrtexs inicial i final x i y_i.

(c) Si $y_i \neq y_j$ per $1 \leq i, j \leq p$, aleshores $\bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_j) = \emptyset$

(d) (Equació de Fan) Si F és un multi-fan maximal respecte e i φ, aleshores $|V(F)| \geq 2$ i $\sum_{z \in V(F)} (d_G(z) + \mu_F(x,z) - k) = 2$.

Prova. Per provar (a), suposem el contrari. Triem φ i F tal que existeixi $\alpha \in \bar{\varphi}(x) \cap \bar{\varphi}(y_i)$ on i sigui el menor possible. Si $i = 1$ podem acolorir e amb α, contradient $\S'(G) = k+1$. Altrament, $i \geq 2$ i per a $\beta = \varphi(e_i)$ tenim $j < i$ amb $\beta \in \bar{\varphi}(y_j)$. Si acolorim e_i amb α, tenim una nova coloració φ' tal que $(e_1, y_1, ..., e_j, y_j)$, és un multi-fan respecte e i φ', amb $\beta \in \bar{\varphi}'(x) \cap \bar{\varphi}'(y_j)$, contradient la minimalitat de i. Per tant (a) està provat.

Per provar (b), suposarem que existeix un contraexemple. Escollim el contraexemple amb la menor i possible. Per (a) tenim $\alpha \in \varphi(y_j)$ per $j = 1, ..., p$. Com $\beta \in \bar{\varphi}(y_i)$, tenim que la (α,β)-cadena $P = P_{y_i}(\alpha,\beta)$ és un camí que acaba en $x' \notin \{x, y_1, ..., y_i\}$. A més, $E(P) \cap \{e_1, ..., e_i\} = \emptyset$ ja que $x \notin V(P)$. D'aquesta manera, definim una nova coloració $\varphi' = \varphi/P$, tenim que el multi-fan $(e_1, y_1, ..., e_i, y_i)$ respecte e i φ' compleix que $\alpha \in \bar{\varphi}(x) \cap \bar{\varphi}(y_i)$, contradient (a), i per tant (b) queda provat.

Per provar (c) assumirem el contrari. Tenim $\beta \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_j)$, i com $k \geq \Delta(G)$ tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(x)$. Aleshores, per (b) tenim un (α,β)-camí entre y_i i x, i un (α,β)-camí entre y_j i x, contradient que $i \neq j$, i (c) queda provat.

Finalment, anem a provar (d). Assumim que tenim un multi-fan F maximal. Ara definim $\Gamma = \{\varphi(e_2), ..., \varphi(e_p)\}$ i $\Gamma' = \bigcup_{z \in V(F)} \bar{\varphi}(z)$. Per (F2) tenim que $\Gamma \subseteq \Gamma'$. A més, si $\beta \in \Gamma'$, per (a) tenim que $\beta \in \varphi(x)$ i la maximalitat de F ens diu que $\beta \in \Gamma$. Ara, per (c), i com $y \in V(F)$ és incident amb l'aresta sense acolorir e, tenim:

$$p - 1 = |\Gamma| = |\Gamma'| = \sum_{z \in V(F)} |\bar{\varphi}(z)| = 1 + \sum_{z \in V(F)} (k - d_G(z)). \tag{1}$$

$$p = \sum_{z \in V(F)} \mu_F(x,z) \tag{2}$$

Ara si ajuntem els dos resultats obtenim el desitjat:

$$\sum_{z \in V(F)} (d_G(z) + \mu_F(x,z) - k) = 2.$$

I (d) queda provat i ja hem finalitzat la prova. □

Ara, si tenim G un graf, amb $k \geq \Delta(G) + \mu(G)$, l'equació de Fan fallarà, i per tant, necessàriament, $\mathcal{X}'(G) = k + 1 \leq \Delta(G) + \mu(G)$ i queda demostrat el teorema de Vizing.

6. Index Cromàtic Fraccional

La teoria de grafs fraccional, introduida per Berge [17] al 1978, estudia els anàlegs dels paràmetres de grafs amb valors enters, per a valors reals. Si un paràmetre de graf ρ, com l'índex cromàtic, pot ser expresat com el valor òptim d'un problema de programació entera, un paràmetre de graf fraccional ρ^* associat amb ρ pot ser definit com la relaxació del problema de programació entera a un problema de programació linial. D'aquesta manera problemes difícils en el context de la programació entera es redueixen a problemes de programació lineal que es poden resoldre en temps polinomial i són molt més abordables. Aquesta perspectiva condueix a la definició de paràmetres fraccionals, que són nombres reals, i que en molts casos donen bones aproximacions dels paràmetres enters originals i, en qualsevol cas, una indicació del valor del paràmetre.
Començarem la secció definint l'índex cromàtic fraccional, i després veurem perquè és útil per a l'estudi de l'índex cromàtic.

Definició 6.1. Una coloració d'arestes fraccional d'un graf és l'assignació de pesos ω_M no negatius a cada aparellament M de G, tal que per a cada aresta $e \in E(G)$ es satisfà:

$$\sum_{M:e\in M} \omega_M = 1.$$

Definició 6.2. L'índex cromàtic fraccional $\mathcal{X}'^*(G)$ és el mínim valor que pot prendre $\sum_M \omega_M$ d'entre totes les coloracions d'arestes fraccionals.

Per tant, tenim que l'índex cromàtic fraccional es pot entendre com un problema de programació linial:

$$\begin{array}{llcll}
\min & 1^T y & & & \\
\text{s.t.} & \sum\limits_{M:e\in M} y_M & \geq & 1 & \forall e \in E(G) \\
& y & \geq & 0 & \\
& y & \in & \mathbb{R}^{\mathcal{M}(G)} &
\end{array}$$

Una conseqüencia interessant d'aquesta definició és que també podem definir l'índex cromàtic de la mateixa manera, però com a problema de programació entera:

$$\begin{array}{llcll}
\min & 1^T y & & & \\
\text{s.t.} & \sum\limits_{M:e\in M} y_M & \geq & 1 & \forall e \in E(G) \\
& y & \geq & 0 & \\
& y & \in & \mathbb{Z}^{\mathcal{M}(G)} &
\end{array}$$

I aleshores és directe veure que $\mathcal{X}'(G) \geq \mathcal{X}'^*(G)$.

Ara veurem que, a diferència de l'índex cromàtic, l'índex cromàtic fraccional si és facilment computable:

Teorema 6.3 ([18] [19])**.** *Tot graf G satisfà* $\chi'^*(G) = \kappa^*(G) = \max\left\{\Delta(G), \max_{H\subseteq G, |V(H)|\geq 2} \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)|\rfloor}\right\}$

Prova. Primer veurem que $\chi'^*(G) \geq \kappa^*(G)$ i després $\chi'^*(G) \leq \kappa^*(G)$.

- $\chi'^*(G) \geq \kappa^*(G)$:
  Si escollim una coloració fraccional ω de G amb el mínim valor i agafem un vertex v amb grau màxim, tenim el següent:

$$\begin{aligned} \chi'^*(G) &= \sum_{M\in\mathcal{M}} \omega(M) \geq \sum_{M\in\mathcal{M}} \omega(M)|M\cap E_G(v)| \\ &= \sum_{e\in E_G(v)} \sum_{M\in\mathcal{M}:e\in M} \omega(M) = \sum_{e\in E_G(v)} 1 = \Delta(G) \end{aligned} \tag{1}$$

  A més, usant la mateixa coloració fraccional ω, per a cada $H \subseteq G$ amb $|V(H)| \geq 2$, obtenim el següent:

$$\begin{aligned} \chi'^*(G) &= \sum_{M\in\mathcal{M}} \omega(M) \geq \sum_{M\in\mathcal{M}} \omega(M)\frac{|M\cap E(H)|}{\frac{1}{2}|V(H)|} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}|V(H)|} \sum_{e\in E(H)} \sum_{M\in\mathcal{M}:e\in M} \omega(M) = \frac{|E(H)|}{\frac{1}{2}|V(H)|} \end{aligned} \tag{2}$$

- $\chi'^*(G) \leq \kappa^*(G)$:
  Abans de veure aquesta desigualtat, introduirem la següent notació i un resultat. Sigui $F \subseteq E(G)$, definim $\mathbf{x}_F : E(G) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}_F(e) = 1$ si $e \in F$ i $\mathbf{x}_F(e) = 0$ altrament. Ara, definim $\mathcal{P}(G) = \text{conv}(\mathbf{x}_F : F \in \mathcal{M}(G))$. A més, [20] ens assegura que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(G)$ si i només si $\mathbf{x}(E_G(v)) \leq 1$ per tot $v \in V(G)$ i $\mathbf{x}(E(G[U])) \leq \lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor$ per tot $U \in V(G)$ amb $|U| \geq 2$.
  Ara, definint $\mathbf{x} : E(G) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}(e) = \frac{1}{\kappa^*(G)}$ per a tot $e \in E(G)$, és trivial veure que es compleix $\mathbf{x}(E_G(v)) \leq 1$ per a tot $v \in V(G)$, i $\mathbf{x}(E(G[U])) \leq \lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor$ per a tot $U \subseteq V(G)$ amb $|U| \geq 2$. Per tant tenim que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(G)$. Sigui $\mathbf{1} : E(G) \to 1$ el vector format d'1,

$$\mathbf{1} = \kappa^*(G) \cdot \mathbf{x} = \sum_{M\in\mathcal{M}} \lambda_M \mathbf{x}_M \tag{3}$$

  per alguns $\lambda_M \geq 0$ amb $\sum_{M\in\mathcal{M}} \lambda_M = \kappa^*(G)$, implicant que la funció $\omega : \mathcal{M} \longrightarrow [0,1]$ amb $\omega(M) = \lambda_M$ per a cada $M \in \mathcal{M}$ es una coloració fraccional de G, i obtenim el resultat desitjat:

$$\chi'^*(G) \leq \sum_{M\in\mathcal{M}} \omega(M) = \kappa^*(G) \tag{4}$$

$\square$

Que immediatament ens dona el següent resultat:

Proposició 6.4. *(a) Si* $\mathcal{X}'^* = \Delta(G)$ *aleshores* $w(G) \leq \Delta(G)$.

(b) Si $\mathcal{X}'^* > \Delta(G)$ *aleshores* $w(G) = \lceil \mathcal{X}'^*(G) \rceil$ *i* $w(G)$ *és computable en temps polinòmic.*

Aquest resultat és interessant per a la conjectura de goldberg ja que ens permet reescriure la conjectura com a $\mathcal{X}'(G) \leq \{\Delta(G)+1, \lceil \mathcal{X}'^*(G) \rceil\}$.

7. Arbres de Tashkinov

Els arbres de Tashkinov són una eina introduida per Tashkinov amb l'objectiu d'estudiar i intentar provar la conjectura de Goldberg. Com hem vist abans, si aconseguim trobar un subconjunt dels vèrtexs satisfent 3.14(d) sota les condicions proposades, podrem demostrar la conjectura de Goldberg. L'objectiu de Tashkinov al crear els arbres de Tashkinov, era trobar un conjunt d'aquesta forma.
A continuació definim els arbres de Tashkinov, i introduim alguns dels resultats més importants que s'en deriven.

Definició 7.1. Sigui G un graf, $e \in E_G(x, y)$ una aresta, i $\varphi \in \mathcal{C}^k(G - e)$ una coloració per algun enter $k \geq 0$. Definim un arbre de Tashkinov respecte e i φ com la seqüencia $T = (y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$ amb $p \geq 1$, on $e_1, ..., e_p$ són arestes i $y_0, ..., y_p$ són vèrtexs satisfent les següents condicions:

- Els vèrtexs $y_0, ..., y_p$ són diferents, $e_1 = e$ i cada e_i uneix y_i amb algun dels vèrtexs a $\{y_0, ..., y_{i-1}\}$.
- Per a cada aresta e_i amb $2 \leq i \leq p$, existeix un vèrtex y_j amb $0 \leq j < i$ tal que $\varphi(e_i) \in \bar{\varphi}(y_j)$.

La primera condició assegura que un arbre de Tashkinov és efectivament un arbre.

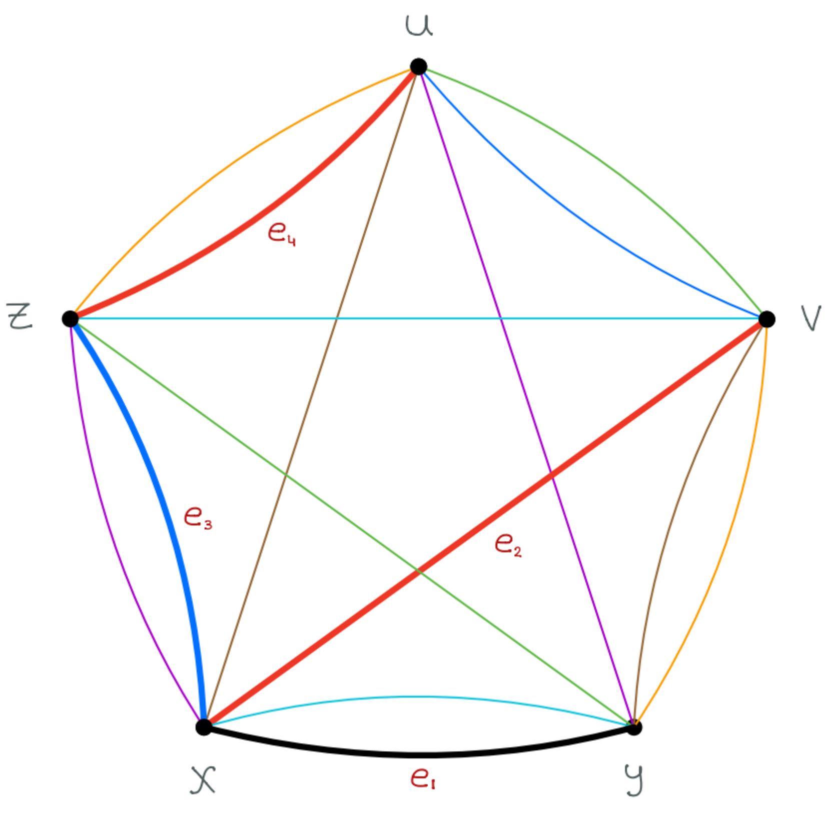

Figure 3: Exemple d'arbre de Tashkinov $T = (x, e_1, y, e_2, v, e_3, z, e_4, u)$ respecte l'aresta $e = e_1$ amb *path number*. $(T) = 3$

Abans d'entrar de ple en l'estudi dels arbres de Tashkinov, introduirem notació i conceptes relacionats. Sigui $T = (y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$, per referir-nos a $(y_i, e_{i+1}y_{i+1}, ..., e_p, y_p)$ escriurem y_iT i per referir-nos a $(y_0, e_1y_1, ..., e_i, y_i)$ escriurem Ty_i.

Definició 7.2. Donat un arbre de Tashkinov $T = (y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$ respecte e i φ, definim el *path number* de T com el menor enter $i \in \{0, ..., p\}$ tal que y_iT és un camí. Escriurem $p(T)$.

Definició 7.3. Donat un arbre de Tashkinov $T = (y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$ respecte e i φ, diem que el color α s'usa en T respecte φ si $\alpha \in \varphi(e_i)$ per alguna $i \in \{1, ..., p\}$. Altrament direm que α no s'utilitza en T respecte φ.

Teorema 7.4. *[[12]] Sigui G un graf amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k \geq \Delta(G)+1$, i sigui $e \in E(G)$ una aresta crítica de G. Si T és un arbre de Tashkinov respecte e i la coloració $\varphi \in \mathcal{C}^k(G-e)$, aleshores $V(T)$ és elemental respecte φ.*

Prova. Definim una parella dolenta com la parella (T, φ) on T és un arbre de Tashkinov i $\varphi \in C^k(G-e)$ és una coloració, tal que $V(T)$ no és elemental respecte φ. L'objectiu sera demostrar que no existeixen parelles dolentes.
Suposem que existeix alguna parella dolenta, aleshores escollim (T, φ_0) tal que:

(a) $p(T)$ és mínim.

(b) $|V(T)|$ és mínim subjecte a (a).

Sigui $\mathcal{P}$ el conjunt de totes les coloracions $\varphi \in C^k(G-e)$ tal que (T, φ) és una parella dolenta. Clarament $\varphi_0 \in \mathcal{P}$. Considerem una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ arbitrària. Per com hem definit T, sabem que Ty_{p-1} serà elemental respecte φ i definirem $I_\varphi = \{2 \leq i < p : \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}_0(y_p)\}$.
Sigui $T = (y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$, començarem per veure que $p(T) \geq 3$. Per veure-ho, suposem que $p(T) \leq 2$. Com $e_1 \in E_G(y_1, y_0)$, tenim que o bé $p(T) = 0$ o bé $p(T) = 2$. Si $p(T) = 2$ podem construir $T' = (y_1, e_1, y_0, ..., e_p, y_p)$ amb $p(T) = 0$, per tant no és mínim i arribem a contradicció.
Si tenim $p(T) = 0$, T és un camí. Si $\{y_0, y_1\}$ no són elementals, podem acolorir e amb el color que falta a y_0 i y_1 i arribem a contradicció. Si tenim que $\max(I_\varphi) = i = p-1$, tenim $\varphi(e_p) = \beta$, $\beta \in \bar{\varphi}(y_j)$, $j < p-1$, $\alpha \in \bar{\varphi}(y_{p-1}) \cap \bar{\varphi}(y_p)$ i podem definir una nova coloració φ' acolorint e_p amb α. Aleshores tenim que Ty_{p-1} no és elemental, contradient la minimalitat de T. Si $\max(I_\varphi) = i < p-1$, tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$. Sigui $\beta \in \bar{\varphi}(y_{i+1})$, sigui P la (β, α)-cadena que comença en y_i, P és un camí. Definint la coloració $\varphi' = \varphi/P$, si P no acaba en y_{i+1}, podem construir l'arbre de Tashkinov Ty_{i+1} respecte e i φ', que no és elemental, contradient la maximalitat de T. D'altra banda si P acaba en y_{i+1}, tenim $\max(I_{\varphi'}) = i+1$, i podrem iterar aquest procés fins obtenir un arbre de Tashkinov no elemental més petit o tenir una coloració amb $\max(I_{\varphi''} = p-1)$ que com hem vist ens portarà a una contradicció, per tant, tenim que $p(T) \geq 3$.
Abans de continuar amb la prova, provarem els següents resultats:

(c) Suposem que (y_i, y_j) és una (γ, δ)-parella respecte $\varphi \in \mathcal{P}$ tal que $0 \leq i < j < p$ i γ no s'usa en Ty_j respecte φ. Aleshores $\gamma \neq \delta$ i la (γ, δ)-cadena $P = P_{y_j}(\gamma, \delta, \varphi)$ és un camí que comença a y_i i acaba a y_j. A més per la coloració $\varphi' = \varphi/P$ tenim $\varphi' \in \mathcal{P}$ i es satisfà que $\bar{\varphi}'(y_i) = (\bar{\varphi}(y_i) \backslash \{\gamma\}) \cup \{\delta\}$, $\bar{\varphi}'(y_j) = (\bar{\varphi}(y_j) \backslash \{\delta\}) \cup \{\gamma\}$, i $\bar{\varphi}'(y_l) = \bar{\varphi}(y_l)$ per $l \neq i, j$. A més, escriurem $\varphi' = \varphi(i, j, \gamma, \delta)$.

(d) Si $1 \leq j < p$, aleshores existeixen com a mínim 4 colors dins $\bar{\varphi}(V(Ty_j))$ que no s'usen a Ty_j respecte φ.

Per veure (c), agafem $T' = Ty_j$. Com $\delta \in \bar{\varphi}(y_j)$ i $V(T')$ és elemental respecte φ, tenim que δ no s'usa a T'. Com γ tampoc s'usa a T', tenim que si $\delta \in \bar{\varphi}(y_l)$ aleshores $l \in \{j, p\}$ i $\gamma \in \bar{\varphi}(y_l)$ aleshores $l \in \{i, p\}$, per tant tenim que $\gamma \neq \delta$ i $\gamma \in \varphi(y_j)$. Per tant, la (γ, δ)-cadena $P = P_{y_j}(\gamma, \delta, \varphi)$ és un camí que comença en y_j i acaba en $z \neq y_j$. Sigui $\varphi' = \varphi/P$. Si $z \neq y_i$ aleshores, com γ i δ no s'usen en T', tenim que T' és un arbre de Tashkinov respecte e i φ', i no és elemental ja que $\gamma \in \bar{\varphi}'(y_i) \cap \bar{\varphi}'(y_j)$. Per tant tenim que (T', φ') és una mala parella amb $p(T') \leq p(T)$ i $|V(T')| < |V(T)|$, contradient (a) o (b). Per tant, $z = y_i$. T també és un arbre de Tashkinov respecte φ' i $V(T)$ no és elemental respecte φ'. Per tant $\varphi' \in \mathcal{P}$ i (c) queda provat.
Per veure (d), agafem $T' = Ty_j$. T' té $j+1$ vèrtexs i $j-1$ arestes acolorides. A més, per $v \in V(T)$ tenim que $|\bar{\varphi}(v)| = k - d_G(v) + 1 \geq 2$ si $v \in \{y_0, y_1\}$, i $|\bar{\varphi}(v)| = k - d_G(v) \geq 1$ altrament. Com $V(T')$ és elemental respecte φ, i $y_0, y_1 \in V(T')$, tenim que $|\bar{\varphi}(V(T'))| \geq j+3$. Per tant tenim que com a mínim 4 colors dins $\bar{\varphi}(V(T'))$ no s'usen a T' respecte φ, provant (d).
Ara podem continuar amb la prova del teorema. Per arribar a una contradicció distingirem 3 casos diferents.

Cas 1: $p(T) = p$

Primer veiem que existeix una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ tal que

$$I_\varphi \text{ conté un índex } i \neq p-1. \tag{1}$$

Donada una coloració arbitrària $\varphi \in \mathcal{P}$. Si no se satisfà (1), aleshores tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_p) \cap \bar{\varphi}(y_{p-1})$. Per (d) tenim que almenys 4 colors de $\bar{\varphi}(V(Ty_{p-2}))$ no s'usen en Ty_{p-2}. Per tant existeix $\beta \in \bar{\varphi}(V(Ty_{p-2}))$, amb $\beta \in \bar{\varphi}(y_i)$ que no s'usa en T. Com $V(Ty_{p-1})$ és elemental respecte φ tenim que β és diferent d'α. Ara, per (c), la coloració $\varphi' = \varphi(i, p-1, \beta, \alpha)$ pertany a $\mathcal{P}$ i satisfà (1).
Ara veurem que existeix una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ tal que

$$I_\varphi \text{ conté un índex } i \neq p-1 \text{ tal que per algun color } \alpha \in \bar{\varphi}(y_p) \cap \bar{\varphi}(y_i) \text{ no s'usa a } T \text{ respecte } \varphi. \tag{2}$$

Donada una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ que satisfà (1), tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_p) \cap \bar{\varphi}(y_i)$. Si α no s'usa en T, ja estem. Altrament, Per (d) tenim que almenys 4 colors de $\bar{\varphi}(V(Ty_{p-2}))$ no s'usen en Ty_{p-2}. Per tant existeix $\beta \in \bar{\varphi}(V(Ty_{p-2}))$, amb $\beta \in \bar{\varphi}(y_j)$ que no s'usa en T, i $\beta \neq \alpha$. Si $\beta \in \bar{\varphi}(y_p)$, ja estem. Altrament $\beta \in \varphi(y_p)$ i podem definir la (α, β)-cadena $P = P_{y_p}(\beta, \alpha, \varphi)$. P és un camí que comença en y_p. Si $V(P) \cap V(Ty_{p-1}) \neq \emptyset$, tenim un $i_0 \in \{0, ..., p-1\}$ tal que $y_{i_0} \in P$, i el subcamí $P' = (y_i 0, f_1, z_1, ..., f_m, z_m)$ amb $z_m = y_p$ no conté cap altre vèrtex de T. Sigui $l = \max(i_0, i, j)$, definim l'arbre de Tashkinov

$$T' = (y_0, e_1, y_1, ..., e_l, y_l, f_1, z_1, ..., f_m, z_m)$$

i tenim que T' és un arbre de Tashkinov no elemental respecte φ, amb $p(T') < p(T)$, contradient (a). Per tant $V(P) \cap V(Ty_{p-1}) = \emptyset$ i agafant $\varphi' = \varphi/P$, tenim que T segueix sent un arbre de Tashkinov respecte φ', i $\beta \in \bar{\varphi}(y_j) \cap \bar{\varphi}(y_p)$ amb β no usat en T respecte φ', satisfent (2).
Finalment volem veure que existeix una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ tal que

$$\varphi(e_p) \in \varphi(y_{p-1}). \tag{3}$$

Per veure-ho, agafem una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ satisfent (2). Ara, tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_p) \cap \bar{\varphi}(y_i)$ amb $i \leq p-2$ i α no usat en T respecte φ. Si $\beta = \varphi(e_p)$ pertant a $\varphi(y_{p-1})$ ja estem. Altrament tenim $\beta \in \bar{\varphi}(y_{p-1})$. Per (c) tenim que la coloració $\varphi' = \varphi(i, p-1, \alpha, \beta)$ pertany a $\mathcal{P}$ i com es manté que $\beta = \varphi'(e_p)$, i $\beta \in \varphi'(y_{p-1})$, tenim provat (3).
Ara, agafem una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ que satisfà (3). Si φ satisfà (1), $T' = (y_0, e_1, y_1, ..., e_{p-2}, y_{p-2}, e_p, y_p)$ és un arbre de Tashkinov respecte φ i per tant (T', φ) és una parella dolenta amb $p(T') < p = p(T)$

contradient (a). Altrament, si φ no satisfà (1), tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_p) \cap \bar{\varphi}(y_{p-1})$. Per (d), podem agafar $\beta \in \bar{\varphi}(V(Ty_{p-2}))$, amb β no usat en T i $\beta \in \bar{\varphi}(y_i)$ amb $i < p-1$. Ara, (c) implica que tenim una (α,β)-cadena P que és un camí amb vèrtexs finals y_i i y_{p-1}. Ara construim $T' = (y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p, e_{p-1}, y_{p-1})$, i tenim clarament que (T', φ) és una parella dolenta i podem aplicar altre cop (c), que implica que tenim una (α,β)-cadena P que és un camí amb vèrtexs finals y_i i y_p, per'això és una contradicció ja que les dos cadenes no poden coexistir. Per tant, necessàriament $p(T) \neq p$.

Cas 2: $p(T) \leq p-1$ i $\max(I_\varphi) \geq p(T)$.
De totes les coloracions que satisfan el cas 2, triem $\varphi \in \mathcal{P}$ tal que $i = \max(I_\varphi)$ sigui màxim. Ara veurem que $i = p-1$. Suposem el contrari, $i < p-1$. Tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$. Sigui $\beta \in \bar{\varphi}(y_{i+1})$, com $e_{i+1} \in E_G(y_i, y_{i+1})$, α no s'usa en Ty_{i+1} i per (c) tenim que $\varphi' = \varphi(i, i{+}1, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ i $\max(I_{\varphi'}) > \max(I_\varphi)$, contradient la tria de φ, per tant necessàriament $i = p-1$.
Per tant, per a la parella dolenta (T,φ) tenim que $\alpha \in \bar{\varphi}(y_{p-1}) \cap \bar{\varphi}(y_p)$. Si $\beta = \varphi(e_p)$, tenim que $\beta \in \bar{\varphi}(y_j)$ amb $j < p-1$. Si definim φ' recolorint e_p amb α, aleshores tenim que $T' = Ty_{p-1}$ és un arbre de Tashkinov respecte φ', amb $\beta \in \bar{\varphi}(y_{p-1}) \cap \bar{\varphi}(y_j)$, i per tant (T', φ') és una parella dolenta amb $p(T') = p(T)$, i $|V(T')| < |V(T)|$, contradient (b). Per tant el cas 2 no es pot donar mai.

Cas 3: $p(T) \leq p-1$ i $\max(I_\varphi) < p(T)$ per tot $\varphi \in \mathcal{P}$.
Sigui $j = p(T)$. Tenim $j \geq 3$ i $e_j \notin E_G(y_{j-1}, y_j)$. Triem una coloració $\varphi \in \mathcal{P}$ tal que $i = \min(I_\varphi)$ sigui mínima. Anem a provar que necessàriament $i < j-1$. Altrament tenim que $i = j-1$ i existeix $\alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$. Per (d) tenim que existeix $\beta \in \bar{\varphi}(V(Ty_{j-2}))$ que no s'utilitza a Ty_{j-1}, i $\beta \in \bar{\varphi}(y_h)$ per algun $h \leq j-2$. Aleshores per (c) tenim que la coloració $\varphi' = \varphi(h, j-1, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ i $\min(I_{\varphi'}) > i$, contradient la tria de φ, per tant necessàriament $i < j-1$.
Com $i \in I_\varphi$, tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$. Sigui $\delta \in \bar{\varphi}(y_j)$. Per (d) tenim que existeix $\beta \in \bar{\varphi}(V(Ty_{j-2})) \backslash \{\alpha\}$ que no s'utilitza a Ty_j, i $\beta \in \bar{\varphi}(y_h)$ per algun $h \leq j-2$. Necessàriament $\beta \neq \delta$. A més, $\beta \in \varphi(y_p)$ ja que altrament, per (c), tenim que $\varphi' = \varphi(h, j, \beta, \delta) \in \mathcal{P}$ i $\max(I_{\varphi'}) \geq j$, contradient la hipòtesis del cas 3. Per tant, podem definir la (α,β)-cadena $P = P_{y_p}(\beta, \alpha, \varphi)$. P és un camí que comença en y_p. Si $V(P) \cap V(Ty_{j-1}) \neq \emptyset$, tenim un $i_0 \in \{0, ..., j-1\}$ tal que $y_{i_0} \in P$, i el subcamí $P' = (y_i 0, f_1, z_1, ..., f_m, z_m)$ amb $z_m = y_p$ no conté cap altre vèrtex de T. Sigui $l = \max(i_0, i, h)$, definim l'arbre de Tashkinov

$$T' = (y_0, e_1, y_1, ..., e_l, y_l, f_1, z_1, ..., f_m, z_m)$$

i tenim que T' és un arbre de Tashkinov no elemental respecte φ, amb $p(T') < p(T)$, contradient (a). Per tant $V(P) \cap V(Ty_{j-1}) = \emptyset$ i agafem z el vèrtex final de P diferent de y_p. Com $V(Ty_{p-1})$ és elemental respecte φ, $z \notin V(T)$. Ara sigui $\varphi' = \varphi/P$, tenim que $\bar{\varphi}'(y_l) = \bar{\varphi}(y_l)$ per $l < p$, i $\bar{\varphi}'(y_p) = (\bar{\varphi}(y_p) \backslash \{\alpha\}) \cup \{\beta\}$. Com P no passa per Ty_{j-1}, és directe que T és un arbre de Tashkinov respecte φ', $\beta \in \bar{\varphi}'(y_h)$ continua sense ser usat en Ty_j respecte φ' i $\delta \in \bar{\varphi}'(y_j)$. Ara, per (c), la coloració $\varphi'' = \varphi'(h, j, \beta, \delta)$ pertany a $\mathcal{P}$. Com $\beta \in \bar{\varphi}''(y_j) \cap \bar{\varphi}''(y_p)$ tenim que $\max(I_{\varphi''}) \geq j$, contradient la hipòtesi del cas 3.
Per tant, cap cas es pot donar, i no existeix cap parella dolenta, demostrant el teorema. $\square$

Teorema 7.5. *Sigui G un graf, sigui $e \in E(G)$ una aresta, i sigui $\varphi \in \mathcal{C}^k(G-e)$ una coloració amb $k \geq \Delta(G)+1$. Si T és un arbre de Tashkinov respecte e i φ tal que $V(T)$ no sigui elemental respecte φ, aleshores després de $O(|V(T)||V(G)|^2)$ canvis de Kempe podem obtenir una coloració $\varphi' \in \mathcal{C}^k(G)$.*

Aquest teorema, que es dedueix de la demostració anterior, ens permet "refinar" una coloració qualsevol en temps polinòmic, mentre es satisfacin les condicions necessàries.

Teorema 7.6. *Sigui G un graf amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k \geq \Delta(G)+1$, i sigui $e \in E(G)$ una aresta crítica de G. Si T és un arbre de Tashkinov maximal respecte e i la coloració $\varphi \in \mathcal{C}^k(G-e)$, donat $T' = (y_0, e_1, y_1, \cdots, e_p, y_p)$ un arbre de Tashkinov qualsevol respecte e i φ, aleshores es compleix el següent:*

(a) $V(T)$ és elemental i tancat respecte φ

(b) $|V(T)| \equiv 1 \mod 2$ i $\delta(G[V(T)]) \geq (|V(T)|-1)(\mathcal{X}'(G)-\Delta(G)-1)+2$

(c) $V(T') \subseteq V(T)$

(d) Existeix un arbre de Tashkinov $\bar{T}$ respecte e i φ que satisfà $V(\bar{T}) = V(T)$ i $\bar{T}y_p = T'$

(e) Si existeix (y_i, y_j) una (λ, δ)-parella respecte φ amb $1 \leq i \leq j \leq p$, aleshores tenim que $\lambda \neq \delta$ i existeix una (λ, δ)-cadena P respecte φ amb les següents característiques:

(1) P és un camí amb vèrtexs finals y_i, y_j.
(2) $|E(P)|$ és parell.
(3) $V(P) \subseteq V(T)$.
(4) Si γ no s'usa en $T'y_j$, aleshores T' és un arbre de Tashkinov respecte e i $\varphi' = \varphi/P$.

(f) $G[V(T)]$ conté un cicle imparell.

Prova. Sigui $T = (z_0, f_1, z_1, ..., f_m, z_m)$, pel teorema 7.4 tenim que $V(T)$ és elemental respecte φ. Si agafem una aresta $f \in \partial_G(V(T))$, tal que f és adjacent amb $z \in V(G) \backslash V(T)$, $\varphi(f) \in \bar{\varphi}(V(T))$ ja que altrement T no és maximal, i pertant $V(T)$ és tancat respecte φ, i (a) queda demostrat.
Per provar (b), agafem $H = G[V(T)]$. Si $\alpha \in \bar{\varphi}(u)$ per $u \in V(H)$, tenim que tots els altres vèrtexs són incidents amb una aresta acolorida amb α, i per tant necessàriament $|V(T)| \equiv 1 \mod 2$. A més, si afagem $u \in V(H)$, tenim $|\bar{\varphi}(u)| = k - d_G(u) + a_u \geq \mathcal{X}'(G) - 1 - \Delta(G) + a_u$ on $a_u = 1$ si e és incident amb u, i 0 altrament, i ens queda:

$$d_H(z) \geq a_z + \sum_{u \in V(H), u \neq z} |\bar{\varphi}(u)| \geq (|V(T)|-1)(\mathcal{X}'(G)-\Delta(G)-1)+2$$

per a tot vèrtex $z \in V(H)$, demostrant (b).
Per provar (c), suposarem que $V(T')$ no està contingut en $V(T)$. Com $y_0, y_1 \in V(T)$, existeix un i mínim tal que $y_i \in V(T), y_{i+1} \notin V(T)$. Com $e_{i+1} \in E_G(y_{i+1}, y_j), j \leq i$, i $\varphi(e_{i+1}) \in \bar{\varphi}(y_l), l \leq i$, voldrà dir que $T'' = (T, e_{i+1}, y_{i+1})$ és un arbre de Tashkinov, contradient la maximalitat de T. Per tant arribem a contradicció i (c) queda provat.
Per provar (d), tenim T' un arbre de Tashkinov qualsevol respecte e i φ, existeix un arbre de Tashkinov $\bar{T}$ respecte e i φ tal que $\bar{T}y_p = T'$ i $\bar{T}$ és maximal. Ara, per (c), tenim $V(\bar{T}) \subseteq V(T)$. Usant el mateix argument que en (c), si $V(\bar{T}) \neq V(T)$, existeix un i mínim tal que $z_i \in V(\bar{T}), z_{i+1} \notin V(\bar{T})$ i podem construir $\bar{T}' = (\bar{T}, f_{i+1}, z_{i+1})$, contradient la maximalitat de $\bar{T}$. Per tant $V(T) = V(\bar{T})$ i (d) queda provat.
Per provar (e), usem que $V(T)$ és elemental respecte φ i $V(T') \subseteq V(T)$. Per tant, per la hipòtesis de (e), tenim que y_i és l'únic vèrtex de T amb $\gamma \in \bar{\varphi}(y_i)$, i y_j és l'únic vèrtex de T amb $\delta \in \bar{\varphi}(y_j)$. D'una banda ja tenim que $\gamma \neq \delta$, i que la (δ, γ)-cadena començant en y_i és un camí P on el vèrtex final és $z \neq y_i$. Com per (a) $V(T)$ és tancat respecte φ, és trivial que $V(P) \subseteq V(T)$, i pertant $z = y_j$ i $|E(P)|$ és parell,

provant (1), (2) i (3). Per veure (4), agafem $\varphi' = \varphi/P$ i $T_1 = T'_{y_j}$. Tenim que $\bar{\varphi}'(y_i) = (\bar{\varphi}(y_i)\backslash\{\gamma\}) \cup \{\delta\}$, $\bar{\varphi}'(y_j) = (\bar{\varphi}(y_j)\backslash\{\delta\}) \cup \{\gamma\}$ i $\bar{\varphi}'(y_l) = \bar{\varphi}(y_l)$ per $l \neq i, j$. Ara, sabem que δ no s'usa a T' i per tant a T_1, i trivialment γ no s'usa a T_1, i per tant T' és un arbre de Tashkinov respecte φ' i e i (4) queda provat, provant (e).
Finalment per provar (f), agafem $\alpha \in \bar{\varphi}(y_0)$, $\beta \in \bar{\varphi}(y_1)$ i construim la (α, β)-cadena que comença en y_1 i acaba en y_0, que sabem que és un camí P amb $|E(P)|$ parell. Per tant, si agafem $P + e$, tenim un cicle imparell i (f) queda demostrat. Amb això acabem la demostració del teorema. □

Teorema 7.7. *Sigui G un graf amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k \geq \Delta(G)+1$, sigui $e \in E(G)$ una aresta crítica de G, i sigui $\varphi \in C^k(G-e)$ una coloració. Aleshores tenim una arbre de Tashkinov maximal T respecte e i φ tal que s'usen com a molt $\frac{|V(T)|-1}{2}$ colors.*

Prova. Sigui T' un arbre de Tashkinov maximal respecte e i φ, pel teorema 7.6 tenim que $|V(T')| = 2l+1$ per algun enter $l \geq 1$. Per obtindre T, construirem $T_i = (y_0, e_1, y_1, ..., e_{2i}, y_{2i})$ per $i = 1, ..., l$ tal que com a molt i colors s'usin en T_i respecte φ. Com $|V(T_l)| = |V(T)|$ tenim que $T = T_l$ serà un arbre de Tashkinov maximal satisfent el teorema.
Sigui $T' = (z_0, e, z_1, f_1, z_2, ...)$, agafem $T_1 = T'z_2$, que clarament només utilitza un color i és un arbre de Tashkinov respecte e i φ.
Ara, suposem que per $1 \leq i < l$ hem construit T_i. Com $|V(T_i)| < |V(T')|$, pel teorema 7.6 tenim que existeix un arbre de Tashkinov maximal $\bar{T}$ respecte e i φ tal que $V(\bar{T}) = V(T')$ i $\bar{T}y_{2i} = T_i$. Això vol dir que existeix una aresta $f \in \partial_G(V(T_i))$ tal que $\varphi(f) \in \bar{\varphi}(V(T_i))$. Sigui z l'aresta incident amb f que no és de T_i, tenim $T'_i = (T_i, f, z)$ un arbre de Tashkinov respecte e i φ. Com $i \geq 1$, tenim almenys un color α usat a T'_i, i per tant un vèrtex $u \in V(T'_i)$ amb $\alpha \in \bar{\varphi}(u)$. Com $|V(T'_i)|$ és parell i les arestes acolorides amb α formen un aparellament, necessàriament tindrem una aresta $f' \in \partial_G(V(T'_i))$ tal que $\varphi(f') = \alpha$. Sigui z' l'aresta incident amb f' que no és de T'_i, $T_{i+1} = (T'_i, f', z')$ és un arbre de Tashkinov respecte e i φ tal que utilitza com a molt $i+1$ colors. Per tant el teorema queda demostrat. □

Definició 7.8. Sigui G un graf crític amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k \geq \Delta(G)+1$. Com G és crític, per a cada aresta $e \in E(G)$ i cada coloració $\varphi \in C^k(G-e)$, tenim un arbre de Tashkinov maximal T respecte e i φ. Per tant, existeix un enter mínim p tal que $p \geq |V(T)|$ per aquests arbres de Tashkinov maximals. Anomenarem $t(G) = p$ a l'ordre de Tashkinov de G.

A més, denotem per $\mathcal{T}(G)$ el conjunt de totes les tripletes (T, e, φ) amb $e \in E(G)$ i $\varphi \in C^k(G)$, i on T és un arbre maximal amb p vèrtexs respecte e i φ. Per a una tripleta (T, e, φ) com la definida, introduim la següent notació:

Per a un color $\alpha \in \{1, ..., k\}$, tenim $E_\alpha(T, e, \varphi) = \{e' \in E(G) - \{e\} : \varphi(e') = \alpha\} \cap \partial_G(V(T))$.

Diem que α és un color defectuós respecte la tripleta $(T, e, \varphi) \in \mathcal{T}(G)$ si $|E_\alpha(T, e, \varphi)| \geq 2$, és a dir, si la frontera de $V(T)$ conté dos o més arestes colorejades amb α. El conjunt de tots els colors defectuosos l'anomenarem $\Gamma^d(T, e, \varphi)$.

Diem que α és un color lliure respecte la tripleta $(T, e, \varphi) \in \mathcal{T}(G)$ si $\alpha \in \bar{\varphi}(V(T))$ i α no s'utilitza en T. El conjunt de tots els colors lliures l'anomenarem $\Gamma^f(T, e, \varphi)$.

A continuació anomenarem algunes de les propietats més importants d'aquesta extensió dels arbres de Tashkinov.

Proposició 7.9. *Sigui G un graf crític amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k \geq \Delta(G)+1$, i sigui $(T, e, \varphi) \in \mathcal{T}(G)$, es satisfan les següents afirmacions:*

(a) $|V(T)| = t(G)$, *$t(G)$ és imparell, i* $t(G) \geq 3$.

(b) $V(T)$ *és elemental i tancat respecte* φ.

(c) $V(T)$ *és fortament tancat respecte φ si i només si* $\Gamma^d(T, e, \varphi) = \emptyset$.

(d) *Si* $\alpha \in \bar{\varphi}(V(T))$, *aleshores* $E_\alpha(T, e, \varphi) = \emptyset$.

(e) *Si* $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi)$, *aleshores* $|E_\alpha(T, e, \varphi)|$ *és imparell i* ≥ 3.

(f) *Donat un vèrtex $x \in V(T)$, tenim $|\bar{\varphi}(x)| = k - d_G(x) + 1 \geq 2$ si $e \in E_G(x)$, i $|\bar{\varphi}(x)| = k - d_G(x) \geq 1$ altrament.*

(g) *Cada color dins* $\Gamma^d(T, e, \varphi) \cup \Gamma^f(T, e, \varphi)$ *no s'utilitza a* T.

Proposició 7.10. *Sigui G un graf crític amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k \geq \Delta(G)+1$, i sigui $(T, e, \varphi) \in \mathcal{T}(G)$. Sigui $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi)$, $u \in V(T)$ tal que $\bar{\varphi}(u)$ contingui un color lliure $\gamma \in \Gamma^f(T, e, \varphi)$. Aleshores per a la (α, γ)-cadena $P = P_u(\alpha, \gamma, \varphi)$, es satisfà el següent:*

(a) *P és un camí amb vèrtex inicial u i vèrtex final* $z \in V(G) \setminus V(T)$.

(b) $E_\alpha(T, e, \varphi) = E(P) \cap \partial_G(V(T))$.

(c) *Si definim l'ordre dels vèrtexs de la cadena $\preceq_{(u,P)}$, on el primer vèrtex és u i l'últim z, tenim un primer vèrtex v^1 tal que $v^1 \in V(G) \setminus V(T)$, i un últim vèrtex v^2 tal que $v^2 \in V(T)$, i es satisfà que $v^1 \preceq v^2$. A més, el vèrtex immediatament posterior a v^1, que anomenem w^1, compleix $w^1 \in V(G) \setminus V(T)$.*

(d) $\bar{\varphi}(v^2) \cap \Gamma^f(T, e, \varphi) = \emptyset$.

(e) $V(T) \cup \{v^1, w^1\}$ *és elemental respecte* φ.

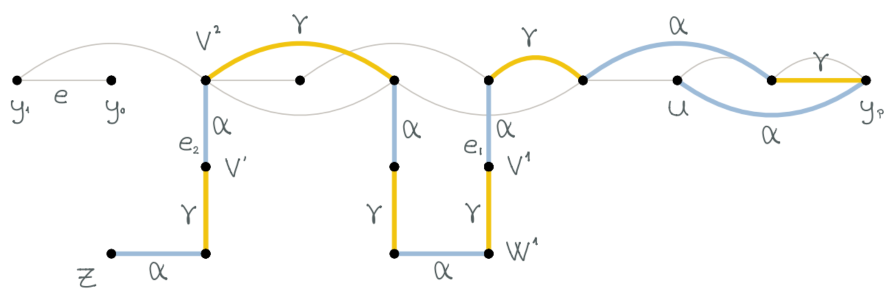

Figure 4: Exemple de tripleta $(T, e, \varphi) \in \mathcal{T}(G)$ amb $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi)$ i $\gamma \in \Gamma^f(T, e, \varphi)$.

Prova. Sigui $E_\alpha = E_\alpha(T, e, \varphi)$. De la proposició 7.9 tenim que $\alpha \in \varphi(v)$ per a tot $v \in V(T)$, $|E_\alpha| \geq 3$ i imparell, $E_\gamma(T, e, \varphi) = \emptyset$, i que $V(T)$ és elemental respecte φ. Per tant, tenim que u és l'únic vèrtex de T tal que $\gamma \in \bar{\varphi}(u)$, i P és un camí que comença en u i acaba en $z \in V(G)\backslash V(T)$, provant (a).
Per la prova de (b), com $E_\gamma(T, e, \varphi) = \emptyset$, serà suficient veure que cada aresta de E_α pertany a P. Suposem que és fals. Aleshores, tenim una aresta $e' \in E_\alpha \backslash E(P)$. Sigui $\varphi' = \varphi/P$, com α i γ no s'usen en T respecte φ per 7.9(g), T també és un arbre de Tashkinov respecte e i φ' i $(T, e, \varphi') \in \mathcal{T}$. A més tenim que $\alpha \in \bar{\varphi}'(u)$ i, com $e' \notin E(P)$, $\varphi'(e') = \alpha$ implicant que $E_\alpha(T, e, \varphi') \neq \emptyset$, contradient 7.9(d). Per tant tal e' no existeix i (b) queda demostrat.
Anem a veure (c). Com $E_\gamma(T, e, \varphi) = \emptyset$ i $|E_\alpha| \geq 3$ és imparell, l'existència de v^1 i v^2 són conseqüència d'(a) i (b). Clarament $v^1 \preceq_{(u,P)} v^2$. Com v^1 és el primer vèrtex en l'ordre $\preceq_{(u,P)}$ que no pertant a l'arbre T, (b) implica que existeix una aresta $e_1 \in E_\alpha \cap E(P)$ incident amb v^1. De la mateixa manera, sabem que existeix una aresta $e_2 \in E_\alpha \cap E(P)$ incident amb v^2. sigui v' l'altre vèrtex incident amb e_2, aleshores el camí $v'Pz \subset G - V(T)$. A més, v^1 té necessàriament un successor w^1 i tenim una aresta $f \in E_G(v^1, w^1) \cap E(P)$ amb $\varphi(f) = \gamma$. Com $E_\gamma(T, e, \varphi) = \emptyset$ és clar que $w^1 \in V(G)\backslash V(T)$ i per tant (c) queda provat.
Per a provar (d), assumirem que és fals. Aleshores tenim un color $\delta \in \bar{\varphi}(v^2)$ que no s'utilitza a T respecte φ. Per (c), $v^2 \neq u$, i com $\gamma \in \bar{\varphi}(u)$ tampoc s'utilitza en T, deduim de 7.6 que $\gamma \neq \delta$, existeix una (γ, δ)-cadena P_1 respecte φ que té vèrtexs finals u i v^2, $V(P_1) \subseteq V(T)$ i T és també un arbre de Tashkinov respecte e i $\varphi_1 = \varphi/P_1$. Això vol dir que tenim $(T, e, \varphi_1) \in \mathcal{T}(G)$ i que $E_\alpha(T, e, \varphi_1) = E_\alpha$, $\delta \in \bar{\varphi}_1(u)$ i $\delta \in \bar{\varphi}_1(v^2)$. Obviament, ni γ, δ o α s'usen a T respecte φ_1. Ara si agafem $P_2 = v^2Pz$, tenim una (α, γ)-cadena respecte φ_1. Com ni α ni γ s'usen en T respecte φ_1, se segueix qe T també és un arbre de Tashkinov respecte e i $\varphi_2 = \varphi_1/P_2$, i $(T, e, \varphi_2) \in \mathcal{T}(G)$. Però aleshores tenim que $\alpha \in \bar{\varphi}_2(v^2)$ i $e_1 \in E_\alpha(T, e, \varphi_2)$, contradient 7.9(d). Per tant (d) queda demostrat.
Finalment, per provar (e), primer veurem que $V(T) \cap \{v^1\}$ és elemental respecte φ. Suposem el contrari. Aleshores tenim $\beta \in \bar{\varphi}(V(T)) \cap \bar{\varphi}(v^1)$. Com v^1 és incident amb $e_1 \in E_\alpha$, els colors α i β són diferents. Com, per (c), $\gamma \in \varphi(v^1)$, la (β, γ)-cadena $P_3 = P_{v^1}(\gamma, \beta, \varphi)$ és un camí que comença per v^1. Com $\beta, \gamma \in \bar{\varphi}(V(T))$, per 7.9(d) tenim que $E_\gamma(T, e, \varphi) = E_\beta(T, e, \varphi) = \emptyset$. Això implica que el camí P_3 és contingut en $G - V(T)$, per tant, T també és un arbre de Tashkinov respecte e i $\varphi_3 = \varphi/P_3$ i $(T, e, \varphi_3) \in \mathcal{T}(G)$. A més tenim que $\gamma \in \bar{\varphi}_3(u) \cap \Gamma^f(T, e, \varphi_3)$, $\gamma \in \bar{\varphi}_3(v^1)$, $E_\alpha(T, e, \varphi_3) = E_\alpha$, i $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi_3)$ és un color defectuós. Com v^1 és el primer vèrtex en l'ordre $\preceq_{(u,P)}$ fora de T i P_3 també està fora de T, obtenim que $P_u(\alpha, \gamma, \varphi_3) = uPv^1$ i pertant que $P_u(\alpha, \gamma, \varphi_3)$ no conté totes les arestes de E_α, contradient (b), i per tant queda provat que $V(T) \cap \{v^1\}$ és elemental.
Ara veurem que $\{v^1, w^1\}$ també és elemental respecte φ. Suposem el contrari. Aleshores tenim $\beta \in \bar{\varphi}(w^1) \cap \bar{\varphi}(v^1)$ i podem obtenir φ' acolorint $f \in E_G(v^1, w^1) \cap E(P)$ amb β. Aleshores tenim que $(T, e, \varphi') \in \mathcal{T}(G)$, $\gamma \in \bar{\varphi}'(u) \cap \Gamma^f(T, e, \varphi')$,$P_u(\alpha, \gamma, \varphi') = uPv^1$, $E_\alpha(T, e, \varphi') = E_\alpha$ i $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi')$. Pertant $P_u(\alpha, \gamma, \varphi')$ no conté totes les arestes de E_α, contradient (b), i per tant queda provat que $\{v^1, w^1\}$ és elemental.
Finalment veurem que $V(T) \cap \{w^1\}$ és elemental respecte φ. Suposem el contrari. Aleshores tenim $\beta' \in \bar{\varphi}(V(T)) \cap \bar{\varphi}(w^1)$. Per 7.9(f) tenim $\beta \in \Gamma^f(T, e, \varphi)\backslash\{\beta', \gamma\}$. Com $\beta, \beta' \in \bar{\varphi}(V(T))$, 7.9(d) implica que $E_\beta(T, e, \varphi) = E_{\beta'}(T, e, \varphi) = \emptyset$ i pertant $\alpha \notin \{\beta, \beta'\}$ i $P_1 = P_{w^1}(\beta, \beta', \varphi)$ és un camí tal que no entra a T. Per tant, T també és un arbre de Tashkinov respecte e i $\varphi_1 = \varphi/P$, i tenim: $(T, e, \varphi_1) \in \mathcal{T}(G)$, $E_\alpha(T, e, \varphi_1) = E_\alpha$, $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi_1)$, $\gamma \in \bar{\varphi}_1(u))$, $P_u(\alpha, \gamma, \varphi_1) = P$, $\beta \in \bar{\varphi}_1(V(T)) \cap \bar{\varphi}_1(w^1)$ i $\beta, \gamma \in \Gamma^f(T, e, \varphi_1)$.
Ara, per 7.9(f) tenim un color $\delta \in \bar{\varphi}_1(v^1)$, i com $\{v^1, w^1\}$ és elemental respecte φ_1, tenim que $\delta \neq \beta$. Com $V(T) \cup \{v^1\}$ també és elemental respecte φ_1, $\delta \notin \bar{\varphi}_1(V(T))$ i per tant δ no està utilitzat en T respecte φ_1. És clar que $\delta \notin \{\alpha, \gamma\}$. Siguin $P' = P_{v^1}(\beta, \gamma, \varphi_1)$ i $\varphi' = \varphi_1/P'$. P' és un camí que comença a v^1 i acaba en $z^1 \neq v^1$, i com ni β ni γ s'utilitzen en T, T també és un arbre de Tashkinov respecte e

i φ' i $(T, e, \varphi') \in \mathcal{T}$. A més, tenim que $E_\alpha(T, e, \varphi') = E_\alpha$, $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi')$, $\gamma \in \bar{\varphi}'(u) \cap \Gamma^f(T, e, \varphi')$, i $P_u(\alpha, \gamma, \varphi') = P$. Això implica que tant $V(T) \cup \{v^1\}$ com $\{v^1, w^1\}$ són elementals respecte φ'. Ara, si $z^1 \neq w^1$, tenim que $\beta \in \bar{\varphi}'(v^1) \cap \bar{\varphi}'(w^1)$, i tenim contradicció, i si $z^1 = w^1$, $\beta \in \bar{\varphi}'(V(T)) \cap \bar{\varphi}'(v^1)$, una altra contradicció i per tant (e) queda provat finalitzant la prova. □

Teorema 7.11. *Sigui G un graf crític amb $\mathcal{X}'(G) = k+1$ per un enter $k \geq \Delta(G)+1$, i sigui $(T^*, e, \varphi) \in \mathcal{T}(G)$. Si G no és elemental, aleshores l'ordre de Tashkinov de G satisfà el següent:*

$$2(k - \Delta(G)) + 3 \leq t(G) \leq \frac{\Delta(G) - 3}{k - \Delta(G)} - 1 \tag{4}$$

A més, per a cada arbre de Tashkinov maximal T respecte e i φ, es satisfan les següents afirmacions:

(a) $V(T) = V(T^*)$, i $t(G) = |V(T)|$ és senar i $t(G) \geq 3$.

(b) $V(T)$ és elemental i tancat respecte φ, però no fortament tancat.

(c) Existeix un vertex $v \in V(T)$ tal que cada color en $\bar{\varphi}(v)$ és usat en T respecte φ, i com a mínim $k - \Delta(G) + 1$ colors s'usen en T respecte φ

Prova. De la proposició 7.9 se segueix que $|V(T^*)| = t(G) \geq 3$, $t(G)$ és imparell, i $V(T^*)$ és elemental i tancat respecte φ. Sigui $T = (y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$ un arbre de Tashkinov maximal arbitrari respecte e i φ, pel teorema 7.6 sabem que $|V(T^*)| = |V(T)|$ i per tant $(T, e, \varphi) \in \mathcal{T}(G)$. Com G no és elemental, el teorema 3.14 ens diu que $V(T)$ no és fortament tancat i per tant (a) i (b) queden demostrats.
Per la proposició 7.9 tenim un color defectuós $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi)$ i un color lliure $\gamma \in \Gamma^f(T, e, \varphi)$. A més, com $V(T)$ és elemental respecte φ, tenim un únic vèrtex $u \in V(T)$ amb $\gamma \in \bar{\varphi}(u)$. Donada la (α, γ)-cadena $P = P_u(\alpha, \gamma, \varphi)$, per la proposició 7.10 tenim que $E_\alpha(T, e, \varphi) = E(P) \cap \partial_G(V(T))$ i, a més, donat l'ordre $\preceq_{(u,P)}$, tenim un primer vèrtex v^1 fora de $(V(T))$, i un últim vèrtex v^2 dins de $V(T)$ amb $v^1 \preceq_{(u,P)} v^2$. Aleshores, la mateixa proposició 7.10 ens diu que $\bar{\varphi}(v^2) \cap \Gamma^f(T, e, \varphi) = \emptyset$ i per tant tot color de $\bar{\varphi}(v^2)$ s'utilitza en T respecte φ. Si $v^2 \in \{y_0, y_1\}$ tenim que $|\bar{\varphi}(v^2)| = k - d_G(v^2) + 1 \geq k - \Delta(G) + 1$ i per tant com a mínim $k - \Delta(G) + 1$ colors s'usen en T respecte φ. Altrament, $v^2 = y_j$ per $j = 2, ..., p$ i $|\bar{\varphi}(v^2)| = k - d_G(v^2) \geq k - \Delta(G)$. A més, tenim $\beta = \varphi(e_j)$ usat en T respecte φ, i per tant $\beta \notin \bar{\varphi}(v^2)$, i per tant com a mínim $k - \Delta(G) + 1$ colors s'usen en T respecte φ, provant (c).
Per provar la desigualtat final, la proposició 7.10 ens diu que amb l'ordre $\preceq_{(u,P)}$, v^1 té un successor w^1 fora de T i que $X = V(T) \cup \{v^1, w^1\}$ és elemental respecte φ. Com $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi)$, 7.9 ens diu que $\alpha \notin \bar{\varphi}(V(T))$, per tant $\alpha \notin \bar{\varphi}(X)$, i $|\bar{\varphi}(X)| \leq k - 1$. Com X és elemental respecte φ i $y_0, y_1 \in X$, per la proposició 7.9(f) tenim:

$$|\bar{\varphi}(X)| = 2 + \sum_{y \in X} (k - d_G(y)) \geq 2 + |X|(k - \Delta(G)).$$

Com $|X| = |V(T)| + 2$, obtenim que:

$$t(G) = |V(T)| \leq \frac{k - 3}{k - \Delta(G)} - 2 = \frac{\Delta(G) - 3}{k - \Delta(G)} - 1.$$

I ja tenim una part de la desigualtat provada. Per l'altre part, agafem el teorema 7.7 que ens diu que podem agafar un arbre de Tashkinov maximal T respecte e i φ tal que com a molt $\frac{|V(T)|-1}{2}$ colors s'utilitzen a T

respecte φ. Usant (c), obtenim:

$$k - \Delta(G) + 1 \leq \frac{|V(T)| - 1}{2}$$
$$2(k - \Delta(G)) + 3 \leq |V(T)| = t(G).$$

Que prova l'altre part de la desigualtat, i per tant el teorema queda demostrat. □

Del teorema 7.11 podem deduir les següents cotes superiors ε-depenent de l'índex cromàtic:

$$\tau(G) = \max\{\Delta(G) + \sqrt{(\Delta(G) - 1)/2}, w(G)\}. \quad (5)$$

$$\tau_\varepsilon(G) = \max\{(1+\varepsilon)\Delta + 1 - 3\varepsilon, \Delta - 1 + \frac{1}{2\varepsilon}, w(G)\} \quad (6)$$

Corol·lari 7.12. *Tot graf G satisfà $\mathcal{X}'(G) \leq \tau(G)$*

Prova. Com $\mathcal{X}'(G)$ i $\tau(G)$ són paràmetres monòtons, serà suficient fer la prova per a grafs crítics.
Si $\Delta(G) \leq 2$ aleshores $\mathcal{X}'(G) = w(G) \leq \tau(G)$ i ja estem. Altrament, tenim $\Delta(G) \geq 3$. Si $\mathcal{X}'(G) \leq \Delta(G) + 1$ i $\mathcal{X}'(G) \leq \tau(G)$ i ja estem. Si $\mathcal{X}'(G) = k + 1$ per un enter $k > \Delta(G)$, tenim el següent: Com G és crític, el teorema 7.11 ens diu que o bé $\mathcal{X}'(G) = w(G)$ o

$$2(k - \Delta(G)) + 3 \leq \frac{\Delta(G) - 3}{k - \Delta(G)} - 1$$

Que és equivalent a:

$$\mathcal{X}'(G) = k + 1 \leq \Delta(G) + \sqrt{(\Delta(G) - 1)/2}$$

I per tant en tots els casos obtenim que $\mathcal{X}'(G) \leq \tau(G)$ i el corol·lari queda demostrat. □

Corol·lari 7.13. *Tot graf G satisfà $\mathcal{X}'(G) \leq \tau_\varepsilon(G)$ per a tot $\varepsilon > 0$*

Prova. Com $\mathcal{X}'(G)$ i $\tau_\varepsilon(G)$ són paràmetres monòtons, serà suficient fer la prova per a grafs crítics.
Sigui $\varepsilon > 0$ un nombre real.

- Si $\Delta \leq 2$:

  Aleshores tenim que $\mathcal{X}'(G) = w(G) \leq \tau_\varepsilon(G)$ i ja estem

- Si $\Delta \geq 3$:

  En aquest cas tenim $\tau_\varepsilon(G) \geq \Delta(G) + 1$ i només ens caldrà considerar el cas on $\mathcal{X}`(G) = k + 1$ per algun enter $k \geq \Delta(G) + 1$.

  El teorema 7.11 ens diu que o bé $\mathcal{X}'(G) = w(G)$ o bé

  $$2(k - \Delta(G)) + 3 \leq \frac{\Delta(G) - 3}{k - \Delta(G)} - 1. \quad (7)$$

  En cas que $\mathcal{X}'(G) = w(G)$, ja estem, i altrament tornem a distingir 2 casos:

  – Si $2(k - \Delta(G)) + 3 \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1$:
    En aquest cas tenim que $\mathcal{X}'(G) = k + 1 \leq \Delta(G) - 1 + \frac{1}{2\varepsilon} \leq \tau_\varepsilon(G)$ i ja hem acabat.

- Si $2(k-\Delta(G))+3 > \frac{1}{\varepsilon}-1$:
  En aquest cas tenim que

$$\frac{\Delta(G)-3}{k-\Delta(G)} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{8}$$

  Com que tenim $\Delta(G) \geq 3$, això implica que $\mathcal{X}'(G) = k+1 \leq (1+\varepsilon)\Delta(G)+1-3\varepsilon \leq \tau_\varepsilon(G)$ i el corol·lari queda demostrat per a tots els casos.

,

$\square$

8. Conjectura de Goldberg assimptòticament:

En aquesta secció mostrarem com ens podem apropar a la conjectura de Goldberg assimptòticament. Aquest resultat ja s'ha vist en [21] i [22], però nosaltres el provarem millorant aquestes versions. Per a poder-ho fer, farem ús de les eines vistes prèviament, en concret, els objectes anomenats arbres de Tashkinov. La idea general serà agafar els paràmetres τ i τ_ε, que hem vist que satisfan $\mathcal{X}'(G) \leq \tau(G)$ i $\mathcal{X}'(G) \leq \tau_\varepsilon(G)$ per a tot $\varepsilon > 0$ i graf G. El paràmetre τ l'usarem per veure que l'índex cromàtic és assimptòticament igual a l'índex cromàtic fraccional, i el paràmetre ε, escollint un $\varepsilon > 0$ adient, l'usarem per reescriure el paràmetre τ_ε com una aproximació assimptòtica a l'índex cromàtic segons la conjectura de Goldberg, sobre el grau de G.

Per veure que l'índex cromàtic és assimptòticament igual a l'índex cromàtic fraccional tenim:

Teorema 8.1. *Tot graf G satisfà que $\mathcal{X}'(G) \leq \mathcal{X}'^*(G) + \sqrt{\mathcal{X}'^*(G)/2}$*

Prova. La desigualtat és trivialment certa si $\Delta(G) \leq 1$. Suposem $\Delta(G) \geq 2$. Pel corol·lari 7.12 tenim que

$$\mathcal{X}'(G) \leq \tau = \max\{\Delta(G) + \sqrt{(\delta(G)-1)/2}, w(G)\}.$$

Com que $\mathcal{X}'^* \geq \Delta(G) \geq 2$, que ens porta a

$$\mathcal{X}'^*(G) + \sqrt{\mathcal{X}'^*(G)/2} \geq \Delta(G) + \sqrt{(\delta(G)-1)/2}.$$

i per altra banda $\lceil \mathcal{X}'^* \rceil \geq w(G)$ que ens porta a

$$\mathcal{X}'^*(G) + \sqrt{\mathcal{X}'^*(G)/2} \geq \mathcal{X}'^*(G) + 1 \geq w(G).$$

Ja tenim el que voliem:

$$\mathcal{X}'^*(G) + \sqrt{\mathcal{X}'^*(G)/2} \geq \tau(G) \geq \mathcal{X}'(G).$$

que finalitza la prova. $\square$

Agafant els resultats vistos a la secció 6, és directe veure que això prova la conjectura de Goldberg assimptòticament.

Ara, una altra forma de veure el resultat és agafant el paràmetre τ_ε. Efectivament, donat un graf G, si agafem $m \geq 3$ un nombre senar tal que $\Delta(G) \geq \frac{1}{2}(m-3)^2$, escollint $\varepsilon = \frac{1}{1-m}$ tenim el següent.

Teorema 8.2. *Sigui $m \geq 3$ un nombre senar, i G un graf amb $\Delta(G) \geq \frac{1}{2}(m-3)^2$, aleshores tenim que:*

$$\mathcal{X}'(G) \leq \max\left\{\frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1}, w(G)\right\} \tag{1}$$

Prova. Sigui $\Delta = \Delta(G)$ i $\varepsilon = \frac{1}{m-1}$, per hipòtesis tenim que:

$$\Delta \geq \frac{1}{2}(m-3)^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - 2)^2 = \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon} + 2 \tag{2}$$

i pertant:

$$(1+\varepsilon)\Delta + 1 - 2\varepsilon \geq \Delta + 1 + \varepsilon(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon}) = \Delta - 1 + \frac{1}{2\varepsilon} \tag{3}$$

Ara, usant el corol·lari 7.13 tenim finalment que:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}'(G) \leq \tau_\varepsilon(G) &= \max\{(1+\varepsilon)\Delta + 1 - 3\varepsilon, \Delta - 1 + \frac{1}{2\varepsilon}, w(G)\} \\ &\leq \max\{(1+\varepsilon)\Delta + 1 - 2\varepsilon, w(G)\} \\ &= \max\left\{\frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1}, w(G)\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

□

Per tant, per a grafs amb grau màxim $\Delta(G)$ prou gran, que ens permetin agafar una $m \leq 3 + \sqrt{2\Delta(G)}$ senar prou gran, tindrem que $\frac{\frac{m}{m-1}\Delta(G)+\frac{m-3}{m-1}}{\Delta(G)+1}$ tendeix a 1 i per tant que assimptòticament es satisfà la conjectura de Goldberg.

A més, com aquests corol·laris es construeix a partir dels resultats 7.4, 7.6, 7.9, 7.10 i 7.11, podem construir un algorisme polinòmic sobre $|V(G)|$ i $|E(G)|$ que genera una coloració per un graf qualsevol satisfent $\varphi \in C^k(G)$ amb $k \leq, \tau, \tau_\varepsilon(G)$, que descriurem a continuació.

8.1 Algorisme

Un algorisme típic acoloreix les arestes d'un graf de forma seqüencial, fixant una aresta inicial i un ordre a seguir. L'objectiu llavors és aconseguir una subrutina que, donat l'*input* (G, e, x, y, k, φ), on G és el graf amb només l'aresta triada $e \in E_G(x, y)$ i les arestes ja acolorides segons la coloració $\varphi \in C^k(G - e)$, retorni una coloració $\varphi' \in C^{k'}(G)$, amb $k' = \{k, k+1\}$.

La nostra subrutina, donat l'*input* (G, e, x, y, k, φ), construirà un arbre de Tashkinov respecte e i φ, començant per $T = (x, e, y)$. Aleshores en cas que no sigui elemental, retornarà una coloració $\varphi' \in C^k(G)$, i altrament, intentarà engrandir l'arbre T per tornar a analitzar-lo o retornar una coloració $\varphi' \in C^{k+1}(G)$.

Dit això, procedim a escriure l'algorisme.

TasCol(G):

1. **If** $\Delta(G) \leq 2$ **then** es computa la coloració òptima φ de G i **return** (k,φ), amb $k = |\varphi(E(G))|$.
2. Definim G' el graf sense arestes amb $V(G') = V(G)$, φ la coloració buida de G' i $k = \Delta(G) + 1$.
3. **For** cada aresta $e \in E(G)$:
   (a) Agafem x, y els vèrtexs de e

(b) $E(G') \leftarrow E(G') \cup \{e\}$

(c) $(k, \varphi) \leftarrow$ **TasExt**$(G', e, x, y, k, \varphi)$.

4. **Return** (k, φ).

End.

Ara definim la subrutina **TasExt** com:

TasExt$(G', e, x, y, k, \varphi)$:

1. $p \leftarrow 1$, $e_p \leftarrow e$, $y_p \leftarrow y$, $y_0 \leftarrow x$, $T \leftarrow (y_0, e_p, y_p)$.
2. **If** $\bar{\varphi}(V(Ty_p - 1)) \cap \bar{\varphi}(y_p) \neq \emptyset$ **then**
   (a) Computar $\varphi' \in C^k(G')$
   (b) **Return** (k, φ')
3. **If** $\exists e_{p+1} \in \partial_{G'}(V(T)) : \varphi(e_{p+1}) \in \varphi(E(T))$ **then**
   (a) Sigui y_{p+1} el vèrtex d'e_{p+1} que no està dins $V(T)$
   (b) $T \leftarrow (T, e_{p+1}, y_{p+1})$, $p \leftarrow p + 1$.
   (c) **Goto** 2.
4. **If** $\exists e_{p+1} \in \partial_{G'}(V(T)) : \varphi(e_{p+1}) \in \bar{\varphi}(V(T)) \backslash \varphi(E(T))$ **then**
   (a) Sigui y_{p+1} el vèrtex d'e_{p+1} que no està dins $V(T)$
   (b) $T \leftarrow (T, e_{p+1}, y_{p+1})$, $p \leftarrow p + 1$.
   (c) **Goto** 2.
5. **If** $\Gamma^d(T, e, \varphi) = \emptyset$ **then**
   (a) $\varphi' \leftarrow \varphi$, $\varphi'(e) = k + 1$.
   (b) **Return** $(k + 1, \varphi')$.
6. Agafem $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi)$ i $\gamma \in \Gamma^f(T, e, \varphi)$. Agafem $u \in V(T)$ amb $\gamma \in \bar{\varphi}(u)$ i definim $P \leftarrow P_u(\alpha, \gamma, \varphi)$.
7. **If** $E_\alpha(T, e, \varphi) \nsubseteq E(P)$ **then**
   (a) Computem $\varphi' \in C^k(G' - e)$.
   (b) $\varphi \leftarrow \varphi'$.
   (c) **Goto** 3.
8. Definim v^1, v^2 com en la proposició 7.10(c) i definim w^1 com el veí de v^1 dins P que pertany a $V(G') \backslash V(T)$.
9. **If** $\bar{\varphi}(v^2) \cap \Gamma^f(T, e, \varphi) \neq \emptyset$ **then**
   (a) Computem $\varphi' \in C^k(G' - e)$.
   (b) $\varphi \leftarrow \varphi'$.

(c) **Goto** 3.

10. **If** $V(T) \cup \{u^1, w^1\}$ no és elemental respecte φ **then**

    (a) Computem $\varphi' \in C^k(G' - e)$.

    (b) $\varphi \leftarrow \varphi'$.

    (c) **Goto** 3.

11. $\varphi' \leftarrow \varphi$, $\varphi'(e) \leftarrow k+1$

12. **Return** $(k+1, \varphi')$.

Anem a veure més en detall com és la tupla (T, e, φ) a cada pas:

Quan entrem al pas 2, tenim $p \geq 1$ i l'arbre de Tashkinov $T(y_0, e_1, y_1, ..., e_p, y_p)$ respecte e i $\varphi \in C^k(G'-e)$, tal que $V(Ty_{p-1})$ és elemental respecte φ i el que fem és mirar si $(V(T))$ és elemental respecte φ. Si tenim que és elemental, anem al pas 3 per intentar engrandir l'arbre de Tashkinov, i si tenim que no és elemental, pels teoremes 7.4 i 7.5 sabem que podem trobar una coloració $\varphi' \in C^k(G')$ i retornem (k, φ').

Quan entrem als passos 3 o 4, tenim un arbre de Tashkinov T tal que $V(T)$ és elemental respecte φ, i intentem engrandar-lo. Si podem, tornem al pas 2 a mirar si aquest nou arbre de Tashkinov és elemental.

Quan entrem al pas 5 o més, tenim un arbre de Tashkinov T que és maximal respecte la coloració φ actual, i pertant és elemental i tancat. Al pas 5, mirem si T té algun color defectuós. Si no en té, tenim que $V(T)$ és elemental i fortament tancat, i pertant si volem acolorir l'aresta e, hem d'afegir un nou color $k+1$, i retornem $(k+1, \varphi')$.

Per al pas 7, si es satisfà la condició, tenim que no es compleix la proposició 7.10 (b), i tenim que amb la nova coloració $\varphi' = \varphi/P$, T es manté com a arbre de Tashkinov respecte φ', $V(T)$ segueix sent elemental respecte φ', però $V(T)$ deixa de ser tancat respecte φ', i tornem al pas 3, ja que amb aquesta nova coloració podrem engrandir l'arbre de Tashkinov.

Quan entrem al pas 9, mirem si $\bar{\varphi}(v^2)$ conté algun color lliure. En cas afirmatiu tenim que no es compleix la proposició 7.10 (d), i podem computar una coloració $\varphi' \in C^k(G'-e)$ tal que $V(T)$ segueix sent elemental respecte φ', però deixa de ser tancat. Ara, com en el pas 7, tornem al pas 3.

Al entrar al pas 10, mirem si es satisfà la condició. En cas afirmatiu, tenim que no es compleix la proposició 7.10 (e) i podem computar una coloració $\varphi' \in C^k(G'-e)$ tal que $V(T)$ segueix sent elemental respecte φ', però deixa de ser tancat. Ara, com en el pas 7 i 9, tornem al pas 3.

Finalment, en cas que les condicions 5, 7, 9 i 10 es satisfacin, tenim que es compleix la proposició 7.10 i per tant el graf és crític amb $\mathcal{X}'(G') = k+1$, i retornem $(k+1, \varphi')$ amb $\varphi' \leftarrow \varphi$ i $\varphi'(e) = k+1$.

A més, per veure que la subrutina ens dona un resultat, és a dir, que no es queda en un bucle, tenim el següent. Cada cop que **TasExt** salta al pas 2, prové dels passos 3 o 4 on s'ha incrementat p. Com p mai disminueix i està trivialment fitat per $p \leq |V(G')|$, tindrem un nombre finit de salts al pas 2. En cas que **TasExt** salti al pas 3, vindrem dels passos 7, 9 o 10, on s'ha creat una nova coloració φ que fa T

elemental respecte φ però no tancada respecte φ, i per tant, entrarà necessariament al pas 3 o al pas 4, i finalment saltarà al pas 2, i això ja hem vist que només pot passar un nombre finit de cops. Per tant, la subrutina **TasExt** acaba en algun moment, i retorna la parella (k', φ') amb $k' \in \{k, k+1\}$ i $\varphi' \in C^{k'}(G)$.

Un cop explicat l'algorisme, i vist que necessàriament ens retorna una coloració, anem a veure si aquesta coloració $\varphi' \in C^{k'}(G)$ satisfà l'objectiu $k' \leq \tau_\varepsilon(G), \tau(G)$.

Si tenim $k' = k + 1$, hi ha dues opcions, que **TasExt** hagi acabat al pas 5 o que hagi acabat al pas 12. Si **TasExt** ha acabat al pas 5, tenim que el conjunt de vèrtexs $V(T)$ és elemental i fortament tancat respecte φ', i per tant es satisfà $k + 1 = w(G')$, i en definitiva, $k + 1 \leq \tau_\varepsilon(G'), \tau(G')$. Altrament, **TasExt** acaba al pas 12 i tenim que per a G' es satisfan les condicions del teorema 7.11, on G' no és elemental, i per tant es satisfà:

$$2(k - \Delta(G)) + 3 \leq |V(T)| \leq \frac{\Delta(G) - 3}{k - \Delta(G)} - 1 \tag{1}$$

I un cop tenim aquesta desigualtat, seguint el mateix procediment que en la prova de 7.13, obtenim que $k + 1 \leq \tau_\varepsilon(G'), \tau(G)$.

Ara, analitzant **TasCol**, tenim que, si $\Delta(G) \leq 2$, es computa una coloració òptima de G i per tant $k = \mathcal{X}'(G) \leq \tau_\varepsilon(G), \tau(G)$. Altrament, si $\Delta(G) \geq 3$, comencem l'algorisme amb $k = \Delta(G) + 1$. Si **TasExt** mai utilitza un nou color, tenim que $k = \Delta(G)+1 \leq \tau_\varepsilon(G), \tau(G)$ i ja estem. Altrament, si agafem l'*output* de **TasExt** sobre l'última aresta que suma un color a la coloració, tenim la tupla (k', φ') que hem vist que satisfà $k' \leq \tau_\varepsilon(G), \tau(G)$, i per tant, hem acabat.

Per a veure amb més detall l'algorisme, aquí definirem com es defineixen les noves coloracions als passos 2, 7, 9 i 10.

Pas 2: Quan entrem al pas 2, tenim un arbre de Tashkinov T respecte e i la coloració $\varphi \in C^k(G' - e)$, amb $|V(T)| = p$. A més, sabem que el conjunt $V(Ty_{p-1})$ és elemental respecte φ. Aleshores mirem si $V(T)$ és elemental respecte φ i en cas que no ho sigui, usem l'algorisme definit per la demostració de 7.4, que 7.5 ens assegura que és polinòmic sobre l'ordre i mida de G', per trobar la coloració $\varphi' \in C^k(G')$.

Abans d'entrar a l'algorisme, definim primer I_φ i $p(T)$ com a la prova de 7.4 i tenim que l'*input* de l'algorisme serà la tupla $(T, e, \varphi, I_\varphi, p(T), p)$. Definim l'algorisme a continuació:

1. **If** $p = 1$ **then**

   Tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_0) \cap \bar{\varphi}(y_1)$ i podem acolorir e_1 amb α
   $\varphi' \leftarrow \varphi$, $\varphi'(e_1) \leftarrow \alpha$
   Return φ'

2. **If** $p(T) \leq 2$ **then**

   trivialment tenim que $p(T) = 0$ o $p(T) = 2$ ja que $e \in E_{G'}(y_0, y_1)$. Aleshores:

   (a) **If** $p(T) = 2$ **then** $T \leftarrow \{y_1, e_1, y_0, e_2, y_2, ..., e_p, y_p\}$, $p(T) \leftarrow 0$
   (b) **While** $\max(I_\varphi) \neq p - 1$
      i. $i \leftarrow \max(I_\varphi), \alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$, $\beta \in \bar{\varphi}(y_{i+1})$, $P = P_{y_{i+1}}(\beta, \alpha)$.

ii. **If** l'últim vèrtex de P no és y_i **then**
$\varphi' \leftarrow \varphi/P$, $T' \leftarrow Ty_{i+1}$, $p' \leftarrow i+1$ i $I'_\varphi = I_{\varphi'}$
Goto 1 $(T', e, \varphi', I'_\varphi, p(T), p')$

iii. $\varphi \leftarrow \varphi/P$, $I_\varphi \leftarrow I_\varphi \backslash \{i\} \cup \{i+1\}$

(c) Tenim $\alpha \in \bar\varphi(y_{p-1}) \cap \bar\varphi(y_p)$ i si colorejem e_p amb α,
$\varphi' \leftarrow \varphi, \varphi'(e_p) \leftarrow \alpha$, $T' \leftarrow Ty_{p-1}$, $p' \leftarrow p-1$ i $I'_\varphi = I_{\varphi'}$
Goto 1 $(T', e, \varphi', I'_\varphi, p(T), p')$

3. **If** $p(T) = p$ **then**

(a) **If** $\nexists i < p-1, i \in I_\varphi$ **then**

i. $\alpha \in \bar\varphi(y_{p-1}) \cap \bar\varphi(y_p)$. Tenim 4 colors dins $\bar\varphi(V(Ty_{p-2}))$ que no són usats a Ty_{p-2}, per tant $\exists \beta \in \bar\varphi(y_i)$ amb $i \leq p-2$ tal que β no està usat a T.

ii. $P \leftarrow P_{y_{p-1}}(\alpha, \beta)$

iii. **If** l'últim vèrtex de P no és y_i **then**
$\varphi' \leftarrow \varphi/P$, $T' \leftarrow Ty_{p-1}$, $p' \leftarrow p-1$, $p(T') = p(T) - 1$ i $I'_\varphi = I_{\varphi'}$
Goto 2 $(T', e, \varphi', I'_\varphi, p(T)', p')$

iv. $\varphi' \leftarrow \varphi/P$, $I'_\varphi = I_\varphi \backslash \{p-1\} \cup \{i\}$ i es satisfà (a)

(b) $\exists i < p-1$ amb $\alpha \in \bar\varphi(y_i) \cap \bar\varphi(y_p)$

(c) **If** α és usada en T **then**
$\exists \gamma \in \bar\varphi(y_j)$ amb $j \leq p-2$ tal que γ no està usat a T

i. **If** $\gamma \in \bar\varphi(y_p)$ **then**
Tenim $\gamma \in \bar\varphi(y_j) \cap \bar\varphi(y_p)$, $j < p-1$, amb γ no usat en T.

ii. **If** $\gamma \notin \bar\varphi(y_p)$ **then**
$P \leftarrow P_{y_p}(\alpha, \gamma)$

A. **If** $V(P) \cap V(Ty_{p-1}) \neq \emptyset$ **then**
Agafem $P' \leftarrow P_{y_{i_0}}$ amb y_{i_0} el primer vèrtex de T que apareix al camí.
$P' = (y_{i_0}, f_1, v_1, ..., f_m, v_m)$ amb $v_m = y_p$ i definim $n = \max(i, j, i_0)$.
$T' \leftarrow (y_0, ..., y_n, f_1, v_1, ..., f_m, v_m)$, $p(T)' \leftarrow n < p$.
Sigui a el major nombre amb $T'v_{a-1}$ elemental, $T'' \leftarrow T'v_a$, $p'' \leftarrow n + a$, recalculem I_φ.
Goto 2 $(T'', e, \varphi, I_\varphi, p(T)', p'')$

B. **If** $V(P) \cap V(Ty_{p-1}) = \emptyset$ **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$, i tenim $\gamma \in \bar\varphi(y_j) \cap \bar\varphi(y_p)$, $j < p-1$, amb γ no usat en T.

(d) $\exists i < p-1$ amb $\alpha \in \bar\varphi(y_i) \cap \bar\varphi(y_p)$, i α no usat en T

(e) **If** $\varphi(e_p) \notin \varphi(y_{p-1})$ **then**
Agafem $\alpha \in \bar\varphi(y_j) \cap \bar\varphi(y_p)$, $j < p-1$ i α no usat en T. Tenim $\beta = \varphi(e_p)$ i per tant $\beta \notin \bar\varphi(y_{p-1})$.
$P \leftarrow P_{y_{p-1}}(\beta, \alpha)$

i. **If** l'últim vèrtex de P no és y_j **then**
$\varphi' \leftarrow \varphi/P$, $T' \leftarrow Ty_{p-1}$, $p' \leftarrow p-1$, $p(T)' = p(T) - 1$
Goto 2 $(T', e, \varphi', I_\varphi, p(T)', p')$.

ii. P acaba en y_j i $e_p \notin P$

iii. $\varphi \leftarrow \varphi/P$ i $\varphi(e_p) = \varphi(y_{p-1})$

(f) Tenim $\varphi(e_p) \in \varphi(y_{p-1})$

(g) **If** $\exists i < p-1 \in I_\varphi$ **then**
Construim $T' = (y_0, e_1, y_1, ..., e_{p-2}, y_{p-2}, e_p, y_p)$ i recalculem I_φ i $p(T)$.
Goto 2 $(T', e, \varphi, I_\varphi, p(T), p-1)$

(h) Tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_{p-1}) \cap \bar{\varphi}(y_p)$
Agafem $\gamma \in \bar{\varphi}(y_i)$ amb $i < p-1$ i γ no usat a T i definim $P \leftarrow P_{y_{p-1}}(\alpha, \gamma)$.

i. **If** l'últim vèrtex de P no és y_i **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$, $T' \leftarrow Ty_{p-1}$, $p' \leftarrow p-1$ i recalculem $p(T)$ i I_φ.
Goto 2 $(T', e, \varphi, I_\varphi, p(T), p')$.

ii. **If** l'últim vèrtex de P és y_i **then**
$P_{y_p}(\alpha, \gamma)$ no acaba en y_i
$\varphi \leftarrow \varphi/P_{y_p}$, $T' \leftarrow (Ty_{p-2}, e_p, y_p)$, $p' \leftarrow p-1$ i recalculem $p(T)$ i I_φ.
Goto 2 $(T', e, \varphi, I_\varphi, p(T), p')$.

4. **If** $p(T) < p$ **and** $\max(I_\varphi) \geq p(T)$ **then**

(a) **If** $i = \max(I_\varphi) < p-1$ **then**
Tenim $\alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$, $\beta \in \bar{\varphi}(y_{i+1})$ i $e_{i+1} \in E_{G'}(y_i, y_{i+1})$, amb α i β no usats a Ty_{i+1}.
Definim $P \leftarrow P_{y_{i+1}}(\beta, \alpha)$

i. **If** l'últim vèrtex de P no és y_i **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$, $T' \leftarrow Ty_{i+1}$, i actualitzem I_φ i p.
$p(T') = p(T)$ es manté igual.
Goto 3 $(T', e, \varphi, I_\varphi, p(T), p)$

ii. **If** l'últim vèrtex de P és y_i **then**
$\varphi' \leftarrow \varphi/P$, T es manté igual, i tenim $\max(I_{\varphi'} = \max(I_\varphi) + 1$
Actualitzem $I_{\varphi'}$.
Goto 4 $(T, e, \varphi', I_{\varphi'}, p(T), p)$

(b) Tenim $\max(I_\varphi) = p-1$ i $\exists \alpha \in \bar{\varphi}(y_{p-1}) \cap \bar{\varphi}(y_p)$, $\varphi(e_p) = \beta$, i per tant $\exists j < p-1$ amb $\beta \in \bar{\varphi}(y_j)$.
Definim $\varphi' \leftarrow \varphi$, $\varphi'(e_p) = \alpha$, i tenim $T' \leftarrow Ty_{p-1}$.
Recalculem $I_{\varphi'}$, $p(T') = p(T)$ i $p' = p-1$
Goto 2 $(T', e, \varphi', I_{\varphi'}, p(T'), p'$.

5. **If** $p(T) < p$ **and** $\max(I_\varphi) < p(T)$ **then** Definim $j = p(T)$, $i = \max(I_\varphi)$, i tenim $j \geq 3$ i $e_j \notin E_{G'}(y_{j-1}, y_j)$.

(a) **If** $i = j-1$ **then**
$\alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$.
Agafem $\gamma \in \bar{\varphi}(Ty_{j-2})$ amb γ no usat a Ty_{j-1}, i tenim $\gamma \in \bar{\varphi}(y_h)$ amb $h \leq j-2$.
Definim $P_{y_i}(\alpha, \gamma)$.

i. **If** l'últim vèrtex de P no és y_h **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$, $\gamma \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_h)$ i tenim:
$T' = Ty_i$, $p' = i$ i recalculem I_φ i $p(T') < p(T)$.
Goto 2 $(T', e, \varphi, I_\varphi, p(T'), p')$.

ii. **If** l'últim vèrtex de P és y_h **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$, $\alpha \in \bar{\varphi}(y_h) \cap \bar{\varphi}(y_p)$ i mantenint el mateix arbre de Tashkinov obtenim $max(I_\varphi) < i = j-1$.

(b) Tenim $i = max(I_\varphi) < j-1$.
$\alpha \in \bar{\varphi}(y_i) \cap \bar{\varphi}(y_p)$, $\delta \in \bar{\varphi}(y_j)$, i $\gamma \in \bar{\varphi}(V(Ty_{j-2}))\backslash\{\alpha\}$ que no s'usa a Ty_j.
$\gamma \in \bar{\varphi}(y_h)$ amb $h < j-1$, i $\gamma \neq \delta$.

i. **If** $\gamma \in \bar{\varphi}(y_p)$ **then**
Definim $P \leftarrow P_{y_j}(\delta, \gamma)$

A. **If** l'últim vèrtex de P no és y_h **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$, $\gamma \in \bar{\varphi}(y_j) \cap \bar{\varphi}(y_h)$ i tenim:
$T' = Ty_j$, $p' = j$, $p(T') = p(T)$ i recalculem I_φ.
Goto 3 $(T', e, \varphi, I_\varphi, p(T'), p')$.

B. **If** l'últim vèrtex de P és y_h **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$, $\gamma \in \bar{\varphi}(y_j) \cap \bar{\varphi}(y_p)$ i tenim:
$\max(I_\varphi) \geq j = p(T)$. Recalculem I_φ.
Goto 4 $(T, e, \varphi, I_\varphi, p(T), p)$.

ii. Tenim $\gamma \in \varphi(y_p)$
Definim $P \leftarrow P_{y_p}(\alpha, \gamma)$.

A. **If** $V(P) \cap V(Ty_{j-1}) \neq \emptyset$ **then**
$\exists i_0, 0 \leq i_0 < j$ on y_{i_0} és el primer vèrtex de Ty_{j-1} del camí, i definim
$P_{i_0} = P' = \{y_{i_0}, f_1, v_1, ..., f_m, v_m\}$ amb $v_m = y_p$ i definim $n = \max(i, h, i_0)$.
$T' \leftarrow (y_0, ..., y_n, f_1, v_1, ..., f_m, v_m)$, $p(T)' \leftarrow n < j$.
Sigui a el major nombre amb $T'v_{a-1}$ elemental, $T'' \leftarrow T'v_a$, $p'' \leftarrow n + a$, recalculem I_φ.
Goto 2 $(T'', e, \varphi, I_\varphi, p(T)', p'')$

B. **If** $V(P) \cap V(Ty_{j-1}) = \emptyset$ **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P$ i ens queda $\gamma \in \bar{\varphi}(y_p)$.
Definim $P'' \leftarrow P_{y_j}(\delta, \gamma)$ i ens queda:

A. **If** l'últim vèrtex de P'' no és y_h **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P''$ i $\gamma \in \bar{\varphi}(y_h) \cap \bar{\varphi}(y_j)$ i ens quedem $T' \leftarrow Ty_j$.
Actualitzem I_φ, $p' = j$, i tenim $p(T') = p(T) = j$.
Goto 3 $(T', e, \varphi, I_\varphi, p(T'), p')$

B. **If** l'últim vèrtex de P'' és y_h **then**
$\varphi \leftarrow \varphi/P''$ i $\gamma \in \bar{\varphi}(y_j) \cap \bar{\varphi}(y_p)$ i tenim:
$\max(I_\varphi) \geq j = p(T)$. Recalculem I_φ.
Goto 4 $(T, e, \varphi, I_\varphi, p(T), p)$.

A grans trets, l'algorisme parteix d'un arbre de Tashkinov T amb $p(T)$ finit. A partir d'aquí, anirà fent canvis de Kempe que el permetran agafar un nou arbre de Tashkiov T' amb $p(T') < p(T)$ o $|V(T')| < |V(T)|$. Per tant, després de finits passos, arribarà al cas base per a $p(T)$, que és $p(T) \leq 2$. Ara, amb un arbre de Tashkinov satisfent $p(T) \leq 2$, és trivial trobar una recombinació de l'arbre que sigui un camí. Quan l'algorisme tingui T un camí amb $V(T)$ no elemental, amb un màxim de $|V(T)| - 1$ canvis de Kempe, trobarà la coloració $\varphi \in C^k(G')$ desitjada.

Pas 7: Per al pas 7 utilitzarem l'algorisme donat per la prova de 7.10(b). Quan entrem al pas 7 tenim un arbre de Tashkinov maximal respecte la coloració actual, elemental, i tancat. A més, hem definit un camí $P_u(\alpha, \gamma, \varphi)$, amb $u \in V(T)$, on $\alpha \in \Gamma^d(T, e, \varphi)$ i $\gamma \in \Gamma^f(T, e, \varphi)$ amb $\gamma \in \bar{\varphi}(u)$. Si entrem al pas 7 vol dir que $\exists e \in \partial_G(V(T))$ amb $\varphi(e) = \alpha$ tal que $e \notin E(P)$. Amb això, per a poder computar una coloració tal que l'arbre de Tashkinov T deixi de ser tancat i es pugui expandir, fem el següent:

A l'algorisme li donem l'*input* $(T, e, \varphi, P, \alpha)$

1. $\varphi' \leftarrow \varphi/P$. Com α i γ no s'usen a T, T és manté com a arbre de Tashkinov respecte φ'.
2. $\alpha \in \bar{\varphi}'(u)$ i $\exists e \in \partial_G(V(T))$ amb $\varphi'(e) = \alpha$
3. **Return** φ'

Pas 9: Per al pas 9 utilitzarem l'algorisme donat per la prova de 7.10(d). Quan entrem al pas 9 tenim que $\exists\delta \in \bar{\varphi}(v_2)$ tal que δ és un color lliure, i, a més, sabem que tenim $\gamma \in \bar{\varphi}(u)$ que també és lliure. Com $u, v_2 \in V(T)$, tenim que hi ha un (δ, γ)-camí P_1 entre u i v^2 amb $V(P_1) \subseteq V(T)$. i per tant T seguirà sent un arbre de Tashkinov respecte la corolació $\varphi_1 \leftarrow \varphi/P_1$. Ara, tindrem $\gamma \in \bar{\varphi}(v^2)$. Finalment, usant que cap dels colors α, γ, δ s'usa en T, i agafant la (α, γ)-cadena P_2, construim la coloració que busquem. $V(T)$ no és tancat respecte $\varphi_2 = \varphi_1/P_2$ i tornem al pas 3 perque es pugui augmentar l'ordre de T.

L'*input* de l'algorisme serà la tupla $(T, e, \varphi, v^2, u, \alpha, \gamma)$.

1. $\exists\delta \in \bar{\varphi}(v^2), \gamma \in \bar{\varphi}(u)$ colors lliures, definim $P_1 \leftarrow (\gamma, \delta)$-cadena amb vèrtexs finals u i v^2.
2. $\varphi_1 \leftarrow \varphi/P_1$. T segueix sent arbre de Tashkinov maximal respecte φ_1.
3. α, γ, δ no s'usen en T i $\gamma \in \bar{\varphi}_1(v^2)$.
4. Definim $P_2 \leftarrow v^2P$, que és una (α, γ)-cadena respecte φ_1.
5. $\varphi_2 \leftarrow \varphi_1/P_2$. T segueix sent arbre de Tashkinov respecte φ_2.
6. $\alpha \in \bar{\varphi}'(v^2)$ i $\exists e \in \partial_G(V(T))$ amb $\varphi'(e) = \alpha$
7. **Return** φ'

Pas 10: Quan entrem al pas 10, tenim que el conjunt $V(T) \cup \{v^1, w^1\}$ no és elemental. Aleshores distingim 3 casos. Quan $\{w^1, u^1\}$ no són elementals, construim una coloració tal que no sigui tancada, i tornem al pas 3. Quan $V(T) \cup \{u^1\}$ no són elementals, tornem a construir una coloració tal que no sigui tancada, i anem al pas 3. Finalment, quan $V(T) \cup \{w^1\}$ no són elementals, construim una coloració tal que o bé el conjunt $V(T) \cup \{u^1\}$ o bé $\{w^1, u^1\}$ no són elementals, i ja estem. Per a construir aquestes coloracions fem el següent:

L'*input* de l'algorisme serà la tupla $(T, e, \varphi, v^1, w^1, \alpha, \gamma)$.

1. **If** $\{w^1, v^1\}$ no són elementals **then**
   (a) $\exists\beta \in \bar{\varphi}(v^1) \cap \bar{\varphi}(w^1)$
   (b) $\varphi_1 \leftarrow \varphi$, sigui $e = E_{G'}(v^1, w^1) \cap P_u(\alpha, \gamma, \varphi)$, $\varphi_1(e) \leftarrow \beta$
   (c) $\varphi_2 \leftarrow \varphi_1/P_u(\alpha, \gamma, \varphi_1)$
   (d) $\alpha \in \bar{\varphi}_2(u)$ i $\exists e \in \partial_G(V(T))$ amb $\varphi_2(e) = \alpha$
   (e) **Return** φ_2

2. **If** $V(T) \cup \{v^1\}$ no és elemental **then**

   (a) $\exists \beta \in \bar{\varphi}(V(T)) \cap \bar{\varphi}(v^1)$, $\beta \neq \alpha$.
   (b) Definim $P_3 \leftarrow P_{v_1}(\beta, \gamma)$.
   (c) Com $\beta, \gamma \in \bar{\varphi}(V(T))$, $E_\gamma(T, e, \varphi) = E_\beta(T, e, \varphi) = \emptyset$ i per tant P_3 no entra a $V(T)$.
   (d) $\varphi_3 \leftarrow \varphi/P_3$, T és mante arbre de Tashkinov respecte φ_3
   (e) $P_u(\alpha, \gamma, \varphi_3) = Pv^1$
   (f) $\varphi_4 \leftarrow \varphi_3/P_u(\alpha, \gamma, \varphi_1)$
   (g) $\alpha \in \bar{\varphi}_4(u)$ i $\exists e \in \partial_G(V(T))$ amb $\varphi_4(e) = \alpha$
   (h) **Return** φ_4

3. **If** $V(T) \cup \{w^1\}$ no és elemental **then**

   (a) $\exists \beta' \in \bar{\varphi}(V(T)) \cap \bar{\varphi}(w^1)$, $\exists \beta \in \Gamma^f(T, e, \varphi) \backslash \{\beta', \gamma\}$.
   (b) Definim $P_4 \leftarrow P_{w_1}(\beta, \beta', \varphi)$.
   (c) Com $\beta, \beta' \in \bar{\varphi}(V(T))$, $E_\beta(T, e, \varphi) = E'_\beta(T, e, \varphi) = \emptyset$ i per tant P_5 no entra a $V(T)$.
   (d) $\varphi_5 \leftarrow \varphi/P_5$, T és mante arbre de Tashkinov respecte φ_5.
   (e) $\beta \in \bar{\varphi}_5(w^1)$, $\beta, \gamma \in \Gamma^f(T, e, \varphi_5)$.
   (f) Triem $\delta \in \bar{\varphi}_(v^1)$.
   (g) **If** $\delta = \beta$ **then Goto** 1.
   (h) **If** $\delta \in \bar{\varphi}_5(V(T))$ **then Goto** 2.

9. Conjectura de Goldberg per a multigrafs aleatoris

En aquesta secció analitzarem sense entrar molt en detall la prova de la conjectura de Goldberg per a multigraf aleatoris, vist per Penny Haxell, Michael Krivelevich i Gal Kronongberg [14].

Hi ha dos models clàssics de grafs aleatoris simples, el model binomial $G(n,p)$, en el que cada parell d'elements de $[n]$ es prèn independentment amb probabilitat p, i el model $G(n,m)$, d'Erdös i Rényi, on es tria un graf amb la distribució uniforme entre tots els que tenen n vèrtexs i m arestes. El model binomial és molt més fàcil d'analitzar, i per a $p=2$ dóna una distribució uniforme entre tots els grafs de n vèrtexs, mentre que el model $G(n,m)$ és més natural i permet analitzar l'evolució de les propietats de grafs aleatoris a mesura que m creix fins a $\binom{n}{2}$. En el cal de multigrafs els models aleatoris estan molt menys explorats, i l'article [14] citat anteriorment és un dels pocs exemples en els que hi ha un anàlisi d'un problema per a multigrafs aleatoris.
Començarem introduint l'espai de probabilitat on treballarem i veurem els resultats importants als que s'arriben, demostrant-ne la part de combinatòria partint de la part probabilística, que queda fora de l'àmbit d'aquest treball.

Definició 9.1. Siguin n, i m enters positius, definim el model $M(n,m)$ com l'espai de probabilitat definit per tots els multigrafs sense llaços amb n vèrtexs i m arestes, on cada aresta es escollida dins $\binom{[n]}{2}$ independentment, admetent repeticions.

Aquest model no es correspon amb la distribució uniforme entre tots els multigrafs de m arestes, ja que dóna més pes als multigrafs que tenen multiplicitats uniformes en detriment dels que tenen una distribució de multiplicitats més asimètrica. L'anàlisi de la conjectura de Goldberg en el model uniforme és encara un problema obert, tot i que el resultat en el model $M(n,m)$ que es discuteix a continuació fa preveure que, segons s'indica a [14], es pot estendre al cas uniforme. L'ús del model $M(n,m)$ té l'avantatge que es poden obtenir resultats sobre el grau i altres paràmetres típics per a un graf aleatori en aquest model.
Seguint la terminologia en models probabilístics discrets, es diu que una propietat P d'un graf es satisfà amb alta probabilitat si $\lim_{n\to\infty}(G\in P)=1$ on G és un graf aleatori en un model implícitament donat.

Ara veurem que l'índex cromàtic d'un graf típic M $M(n,m)$ és o bé $\Delta(M)$ o bé $\lceil w(M)\rceil$.

Teorema 9.2. *Siguin n i $m:=m(n)$ enters positius. Donat $M\sim M(n,m)$, aleshores, amb alta probabilitat, $\mathcal{X}'(M)=\max\{\Delta(M),\lceil\rho(M)\rceil\}$*

A més de provar la conjectura es pot especificar quin dels valors es prèn, establint un resultat paral·lel a la classificació dels grafs aleatoris simples (en el model $G(n,m)$) que tenen índex cromàtic $\Delta(G)$.

Teorema 9.3. *Sigui n un enter positiu parell i $m:=m(n)$ un enter positiu. Donat $M\sim M(n,m)$, aleshores, amb alta probabilitat, $\mathcal{X}'(M)=\Delta(M)$*

Els dos resultats anteriors es basen en una anàlisi diferenciada segons el nombre d'arestes del graf, distingint-los en cinc intervals segons la densitat d'arestes. En particular s'obté el següent corol·lari.

Corol·lari 9.4. *Sigui $\varepsilon>0$, i sigui $M\sim M(n,m)$ amb n un enter imparell, les següents afirmacions són certes:*

- *Si $m\le(1-\varepsilon)n^3\log n$, aleshores, amb alta probabilitat, $\mathcal{X}'(M)=\Delta(M)$.*

- *Si* $m \geq (1+\varepsilon)n^3 \log n$*, aleshores, amb alta probabilitat,* $\mathcal{X}'(M) = \lceil \rho(M) \rceil$.

Per a poder demostrar aquests teoremes, que proven la conjectura de Goldberg per a multigrafs aleatoris, necessitarem els següents resultats prèvis. Vegeu que les proves d'aquests resultats previs es fan sobretot amb eines de teoria de la probabilitat que s'escapen de l'objectiu d'aquest treball, i els prendrem com a certs. Els resultats són els següents:

Teorema 9.5. *Sigui* G *un multigraf amb un nombre* n *imparell de vèrtexs i seqüencia de graus* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$*. Si* $\mathcal{X}'(G) > k$ *aleshores alguna de les següents afirmacions és certa:*

1. $k \leq d_1 - 1$
2. $k \leq d_2 + 2$
3. $9\mu - 24 > 10\mu_{\text{min}}$
4. $|E(G)| > \frac{n-1}{2}k$

Lema 9.6. *Sigui* $k, l > 0$ *enters i* G *un multigraf amb* $\Delta(G) \leq k$ *i* $\mu(G) \leq l$*. Si es compleix que tots els vèrtexs de* G *menys un tenen grau com a molt* $k - t$ *on* $t \geq \max\{2, l\}$*, aleshores* $\mathcal{X}'(G) \leq k$

Corol·lari 9.7. *Sigui* G *un multigraf d'n vèrtexs amb la seqüencia de graus* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$*. Si es compleix* $d_1 - d_2 \geq \mu(G) - \mu_{\text{min}} \geq 2$*, aleshores* $\mathcal{X}'(G) = \Delta(G)$ *per a* n *parell i* $\mathcal{X}'(G) = \Delta(G) + \mu_{\text{min}}$ *per a* n *imparell*

Observació 9.8. *Siguin* n *i* $m := m(n)$ *enters positius i* $M \sim M(n, m)$*. Les següents afirmacions són certes:*

- *Si* $m \leq n \log^{100} n$*, aleshores la probabilitat de que existeixi una aresta* e *amb* $\mu(e) \geq 3$ *és com a molt* $O\left(\frac{log^{300} n}{n}\right)$.
- *Si* $m \leq n^2 \log^2 n$*, aleshores per a cada aresta* $e \in \binom{[n]}{2}$ *tenim* $\mu(e) \leq 30 \log^2 n$ *amb probabilitat* $1 - o\left(\frac{1}{n^4}\right)$
- *Si* $m = \omega(n^2 \log n)$*, aleshores per a cada aresta* $e \in \binom{[n]}{2}$ *tenim* $\mu(e) \in \left[\frac{m}{\binom{n}{2}} \pm \sqrt[4]{\frac{m}{\binom{n}{2}} \log n}\right] \log^2 n$ *amb probabilitat* $1 - o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Corol·lari 9.9. *Sigui* $m = \omega(n^2 \log n$ *i* $M \sim M(n, m)$*, aleshores, amb alta probabilitat,* $\mu(M) - \mu_{\text{min}} = O\left(\sqrt{\frac{m}{n^2} \log n}\right)$

Lema 9.10. *Sigui* n *un enter suficientment gran, i sigui* $m = \omega(n \log^5 n)$*. Donats* $M \sim M(n, m)$ *i* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ *la seqüencia ordenada dels graus de* M*, aleshores, amb alta probabilitat,* $d_1 - d_2 \geq \frac{1}{f(n)}\sqrt{\frac{2m}{n \log n}}$ *on* $f(n) = o(\log n)$ *és una funció que tendeix a infinit en* n

Observació 9.11. *Sigui* $m = \omega(n^2 \log n)$*, amb* n *un enter imparell, i sigui* $M \sim M(n, m)$*. Aleshores, amb alta probabilitat, tenim que* $\rho(M) = \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Basant-nos en els resultats anteriors, a continuació es descriu un esquema de la demostració dels teoremes 9.2 i 9.3

Prova. Per a demostrar els teoremes anteriors analitzarem diferents casos:

- Cas $m \leq \frac{100n}{\log\log n}$ Per a m així de petites, tenim que, amb alta probabilitat, no existirà cap cicle en $M \sim M(n, m)$. Com que tenim M un bosc, és trivial veure que $\mathcal{X}'(M) = \Delta(M)$.
- Cas $\frac{n}{\log\log n} \leq m \leq n\log^{100} n$:

  Per aquest cas ens centrarem amb els vèrtexs amb grau més elevats. Si definim $L_0 = \{v \in V | d(v) \geq d_0\}$, on $d_0 = \max\{d | \Pr[d(v) \geq d] \geq n^{-0.9}\}$ amb $v \in V$ qualsevol, tenim els següents resultats:

  1. Sigui $M \sim M(n, m)$. Donat $v \in V$, $\Pr[v \in L_0'] = O(n^{-0.9}\log^2 n)$
  2. Per a cada parella u, $v \in L_0$, amb alta probabilitat, no existeix cap camí de llargada ≤ 2 conectant u i v
  3. Existeixen u, $v \in L_0$ tal que $d(u) \neq d(v)$ amb alta probabilitat.
  4. Per a cada parella d'arestes amb multiplicitat almenys 2, la distancia entre elles serà, amb alta probabilitat, major a 2.

  Ara, donats $M \sim M(n, m)$, d_0, L_0 i $\Delta = \Delta(M)$, tenim que tots els vèrtexs amb grau Δ o $\Delta - 1$ pertanyen a L_0. A més, l'observació 9.8 ens diu que, amb alta probabilitat, $\mu(M) = 2$.

  Usant els resultats anteriors podem argumentar el següent:

  Agafem totes les arestes amb multiplicitat 2, que anomenarem E_1, i definim V_1 els vertex adjacents a E_1. Si per a cada $e \in E_1$ eliminem una multiplicitat, haurem eliminat un aparellament F_1. Ara tenim un graf simple, i agafem el conjunt de vèrtexs amb grau màxim que anomenem V_0. Vegeu que $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. El resultat (4) ens assegura que donat un vèrtex $v \in V$ amb $d(v) \geq 2$, aquest tindrà necessàriament un vèrtex adjacent que no pertanyi a V_1. Si trobem aquest vèrtex per a cada vèrtex de V_0 i eliminem l'aresta que els uneix, per (2), haurem eliminat un altre aparellament F_2, i clarament $F = F_1 \cup F_2$ és un aparellament. El graf restant serà un graf simple amb grau màxim $\Delta - 1$, tal que tots els vèrtexs amb grau màxim pertanyen a L_0 i per (2) formen un conjunt independent. Per Vizing, aquest graf es podrà acolorir amb $\Delta - 1$ colors, i afegint l'aparellament F, tenim que el graf M inicial es podrà acolorir amb Δ colors, és a dir, $\mathcal{X}'(M) = \Delta$
- Cas $n\log^9 n \leq m \leq n^2\log^2 n$:

  Usant l'observació 9.8 tenim que, amb alta probabilitat, $\mu(M) \leq log^3 n$. Ara, usant el lema 9.10, amb $f(n) = \log\log n$, tenim que, amb alta probabilitat, $d_1 - d_2 \geq \frac{1}{f(n)}\sqrt{\frac{2m}{n\log n}}$.

  Finalment, aplicant el lema 9.6 amb $k = d_1$, serà suficient veure que, amb alta probabilitat, $d_1 - d_2 \geq \max\{2, \mu(M)\}$.

  Tenim que $d_1 - d_2 \geq \frac{1}{f(n)}\sqrt{\frac{2m}{n\log n}} \geq \frac{1}{f(n)}\sqrt{2\log^8 n} \geq \frac{\log^4 n}{\log\log n} \geq \log^3 n$, i per tant, per una n prou gran, $d_1 - d_2 \geq 2$, i, amb alta probabilitat, $d_1 - d_2 \geq \mu(M)$.

  Per tant, si tenim $M \sim M(n, m)$, amb $n\log^9 n \leq m \leq n^2\log^2 n$, pel lema 9.6, $\mathcal{X}'(M) = \Delta(M) = d_1$
- Cas $m = \omega(n^2\log n)$ amb n parell:

  Pel corol·lari 9.9 tenim que, amb alta probabilitat, $\mu(M) - \mu_{\min} = O\left(\sqrt{\frac{2m}{n^2}\log n}\right)$. A més, usant el lema 9.10 tenim que, amb alta probabilitat, $d_1 - d_2 \geq \frac{1}{f(n)}\sqrt{\frac{2m}{n\log n}}$, on $f(n) \to \infty$ tant lent com es vulgui. Això vol dir que, per n prou gran, $d_1 - d_2 \geq \mu(M) - \mu_{\min} \geq 2$, i pel corol·lari 9.7 tenim que $\mathcal{X}'(M) = \Delta(M) = d_1$

- Cas $m = \omega(n^2 \log n)$ amb n imparell: Donats $\mathcal{X}'(M) = k+1$ i $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ la seqüencia de graus dels vèrtexs d'M. Tenim que pel teorema 9.5 alguna de les afirmacions (1), (2), (3), (4) es satisfà.

  El lema 9.10 ens diu que $d_1 - d_2 \geq \frac{1}{f(n)}\sqrt{\frac{2m}{n \log n}}$, i com $m = \omega(n^2 \log n)$ tenim que $d_1 - d_2 = \omega(1)$.

  Si es satisfà (2) tenim que, amb alta probabilitat, $\mathcal{X}'(M) \leq d_2 + 3 = d_1 - \omega(1)$, cosa que és impossible ja que $\mathcal{X}'(M) \geq d_1$.

  L'observació 9.8 també ens diu que, amb alta probabilitat, $\mu_{\text{min}} = (1 - o(1))\mu$, i per tant (3) tampoc pot ser certa.

  Si l'afirmació certa és (1) tenim $\mathcal{X}'(M) \leq d_1$ i per tant $\mathcal{X}'(M) = \Delta(M)$.

  Si l'afirmació certa és (4), tenim que $m > \frac{n-1}{2}k$. Si ara agafem l'observació 9.11, veiem que, amb alta probabilitat, $\rho(M) = \frac{m}{\frac{n-1}{2}}$ i per tant tenim que $\lceil \rho(M) \rceil \geq k+1$ i ens queda $\lceil \rho(M) \rceil = \mathcal{X}'(M)$.

I queden demostrats els resultats 9.2, 9.3 i 9.4.

$\square$

D'una banda, aquests teoremes ens mostren com es comporten els multigrafs en general, però no ens diuen res sobre multigrafs *especials* que no compleixin les condicions vistes d'un multigraf aleatori. Tot i això, a partir de la demostració, podriem ser capaços de construir un algorisme que, per a multigrafs aleatoris, ens asseguri trobar una coloració òptima en temps polinòmic.

10. Conclusions

En aquest treball s'ha mostrat el problema de la coloració de les arestes d'un multigraf i la conjectura de Goldberg, i s'ha donat context veient diferents resultats al respecte. A més, fent ús d'aquests resultats, s'ha presentat un algorisme que permet trobar una coloració propera a l'òptim conjecturat per Goldberg.
En particular, en les primeres seccions s'ha vist el teorema de Shannon i el teorema de Vizing, que mostren les primeres cotes per a l'índex cromàtic, i s'ha definit l'índex cromàtic fraccional veient l'estreta relació que té amb l'índex cromàtic i la conjectura de Goldberg. Als capítols 7 i 8 s'ha descrit els arbres de Tashkinov, s'ha mostrat com poden ser útils per a l'estudi de la conjectura de Goldberg veient les seves propietats, i s'han utilitzat aquests objectes per veure que la conjectura de Goldberg es satisfà assimptòticament. A l'apartat 8.1 s'ha donat l'algorisme esmentat en llenguatge d'alt nivell. Finalment, al capítol 9, s'ha analitzat la demostració de la conjectura de Goldberg per a multigrafs aleatoris.
Com s'ha dit anteriorment, no s'ha pogut mencionar la prova de la conjectura de Goldberg presentada per Chen, Jing i Zang ja que encara no ha estat validada.
A l'appèndix A del treball es pot veure l'algorisme programat en Python.

11. Bibliografia

References

[1] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. Every planar map is four colorable part i: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:429–490, 1977.

[2] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. Every planar map is four colorable part ii: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:491–567, 1977.

[3] Peter Guthrie Tait. Remarks on the coulorings of maps. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 10:729, 1880.

[4] Vadim G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz (Russian)*, 3:25–30, 1964.

[5] Claude E. Shannon. A theorem on coloring the lines of a network. *Journal of Mathematics and Physics*, 28:148–151, 1949.

[6] Vadim G. Vizing. The chromatic class of a multigraph. *Kibernetika (Kiev)*, 3:29–39, 1965.

[7] R. P. Gupta. Studies in the theory of graphs. *Ph.D. Thesis, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay*, 1967.

[8] M. K. Goldberg. On multigraphs of almost maximal chromatic class. *Diskret. Analiz. (Russian)*, 23:3–7, 1973.

[9] P. Seymour. On multicolorings of cubic graphs, and conjectures of fulkerson and tutte. *Proc. London Math. Soc.*, 38:423–460, 1979.

[10] Guantao Chen, Guangming Jing, and Wenan Zang. Proof of the goldberg-seymour conjecture on edge-colorings of multigraphs. 2019.

[11] H. A. Kierstead. On the chromatic index of multigraphs without large triangles. *J. Combin. Theory*, 36:156–160, 1984.

[12] V. A. Tashkinov. On an algorithm for the edge coloring of multigraphs. *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser (Russian)*, 7:72–85, 2000.

[13] D. Scheide. Graph edge colouring: Tashkinov trees and goldberg's conjecture. *J. Combin. Theory*, 100:68–96, 2010.

[14] Penny Haxell, Michael Krivelevich, and Gal Kronenberg. Goldberg's conjecture is true for random multigraphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 138:314–349, 2019.

[15] John Asplund and Jessica McDonald. On a limit of the method of tashkinov trees for edge-colouring. *Discrete Mathematics*, 339:2231–2238, 2016.

[16] Michael Stiebitz, Diego Scheide, Bjarne Toft, and Lene M. Favrholdt. Graph edge coloring. vizing's theorem and goldberg's conjecture. 2012.

[17] C. Berge. Fractional graph theory. *Indian Statistical Institute Lecture Note*, 1, 1978.

[18] P. Seymour. Some unsolved problems on one-factorizations of graphs. *Graph Theory and Related Topic*, pages 367–368, 1979.

[19] A. Stahl. Fractional edge colorings. *Cahiers Centre Etudes Rech. Oper*, 21:127–131, 1979.

[20] J Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0-1 vertices. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 69:125–130, 1965.

[21] J. Khan. Asymptotics of the chromatic index for multigraphs. *J. Combin. Theory*, 68:233–254, 1996.

[22] P. Sanders and D. Steurer. An asymptotic approximation scheme for multigraph edge coloring. *ACM Trans. Algorithm*, 4, 2008.

A. Algorisme Conjectura de Goldberg assimptòticament (Python)

```
import numpy as np


#---------------------------------FUNCIONS AUXILIARS------------------------------

def ColVertex(col, vertex, k):
    colors = [False] * k
    edgeSet = []
    for edge in col:
        if edge[0] == vertex or edge[1] == vertex:
            if edge[2] != -1:
                colors[edge[2]] = True
                edgeSet.append(edge)
    return [colors, edgeSet]


def ColVertexSet(col, vertexset, k):
    colors = [True] * k
    for v in vertexset:
        [colors1, edgeSet1] = ColVertex(col, v, k)
        for i in range(k):
            if not colors1[i]:
                colors[i] = False
    return colors


def FronteraVertexSet(col, vertexset):
    frontera = []
    for edge in col:
        if (edge[0] in vertexset and edge[1] not in vertexset) or \
                (edge[0] not in vertexset and edge[1] in vertexset):
            frontera.append(edge)
    return frontera


def GetEdge(edgeSet, a):
    for edge in edgeSet:
        if edge[2] == a:
            return edge


def ABcami(col, a, b, v1, k):
```

```
    aux = True
    cami = [[v1], []]
    color = a
    while aux:
        [colors, edgeSet] = ColVertex(col, cami[0][-1], k)
        if colors[color]:
            edge = GetEdge(edgeSet, color)
            cami[1].append(edge)
            cami[0].append(edge[0] + edge[1] - cami[0][-1])
            color = a + b - color
        else:
            aux = False
    return cami


def GrauG(matrix):
    return max(sum(fila) for fila in matrix)


def Available(edge, col, k):
    colors = [True] * k
    v1 = edge[0]
    v2 = edge[1]
    for e in col:
        if e[0] == v1 or e[1] == v1 or e[0] == v2 or e[1] == v2:
            colors[e[2]] = False
    for i in range(k):
        if colors[i]:
            return i
    return -1


def OptCol(edges):
    col = []
    colors = [False] * 3
    for edge in edges:
        color = Available(edge, col, 3)
        colors[color] = True
        col.append([edge[0], edge[1], color])
    return sum(colors), col


def CutTree(tree, v):
    tree[0] = tree[0][:v + 1]
    tree[1] = tree[1][:v]
    return tree
```

```
def DefectiveCol(frontera, k):
    colors = [0] * k
    defCol = []
    for edge in frontera:
        colors[edge[2]] += 1
    for i in range(k):
        if colors[i] > 1:
            defCol.append(i)
    return defCol


def FreeCol(colTree, misColTree, k):
    freeCol = []
    for i in range(k):
        if not colTree[i] and not misColTree[i]:
            freeCol.append(i)
    return freeCol


def CalculpT(tree, p):
    pT = p
    for i in range(p):
        v1 = tree[0][pT]
        v2 = tree[0][pT - 1]
        e = tree[1][pT - 1]
        if v1 + v2 == e[0] + e[1]:
            pT = pT - 1
        else:
            break
    return pT


def CalculiCol(tree, col, k):
    iCol = []
    [colors2, edgeSet2] = ColVertex(col, tree[0][-1], k)
    for j in range(len(tree[0][:-1])):
        [colorsvt, edgeSetvt] = ColVertex(col, tree[0][j], k)
        for i in range(k):
            if not colorsvt[i] and not colors2[i]:
                iCol.append((j, i))

    return iCol
```

```
def ColNotVertex(col, tree, v, k):
    [colors, edgeSet] = ColVertex(col, v, k)
    colorst = [e[2] for e in tree[1]]
    for i in range(k):
        if not colors[i] and i not in colorst:
            return i


def KempeChange(col, cami, alpha, beta):
    for i in range(len(cami[1])):
        e = cami[1][i]
        for j in range(len(col)):
            if e == col[j]:
                col[j][2] = alpha + beta - col[j][2]
    return col


def RecolorEdge(col, e, alpha):
    for j in range(len(col)):
        if e == col[j]:
            col[j][2] = alpha
            break
    return col


def UnusedColTree(col, tree, j, k, alpha=-1):
    colorsTree = [e[2] for e in tree[1]]
    for i in range(j):
        [colorsi, edgeSeti] = ColVertex(col, tree[0][i], k)
        for l in range(k):
            if not colorsi[l] and l not in colorsTree and l != alpha:
                return [i, l]


def Elemental(col, tree, n, k):
    for i in range(n, len(tree[0])):
        [colors1, edgeSet1] = ColVertexSet(col, tree[0][:i + 1], k)
        [colors2, edgeSet2] = ColVertex(col, tree[0][i + 1], k)
        for j in range(k):
            if not colors1[j] and not colors2[j]:
                return [CutTree(tree, i + 1), i + 1]


def VerticeTreeColor(col, tree, alpha, k):
    for i in range(len(tree[0])):
        v = tree[0][i]
```

```python
        [colorsv, edgeSetv] = ColVertex(col, v, k)
        if not colorsv[alpha]:
            return i


def NotElementary(col, set1, set2, k):
    [colors1, edgeSet1] = ColVertexSet(col, set1, k)
    [colors2, edgeSet2] = ColVertexSet(col, set2, k)
    for i in range(k):
        if not colors1(k) and not colors2(k):
            return [True, k]
    return [False, -1]


# -----------------------FUNCIO PER INICIALITZAR UN GRAF---------------------------

def initialize_graf_1():
    vertices = int(input("Número de vèrtexs: "))
    edges = []
    incidentMatrix = np.zeros((vertices, vertices), np.int8)
    print("Ara definirem les arestes. Definirem les arestes amb els 2"
          " vèrtexs adjacents i el número d'arestes entre ells,"
          " separats per un espai. Quan haguem acabat, escriurem -1.")
    edge = input()
    while edge != "-1":
        [a, b, c] = edge.split(" ")
        edge = input()
        for i in range(int(c)):
            edges.append((int(a), int(b)))
        incidentMatrix[int(a)][int(b)] += int(c)
        incidentMatrix[int(b)][int(a)] += int(c)
    return vertices, edges, incidentMatrix


# -----------------------------------ALGORISME------------------------------------

def TasCol(G):
    vertices = G[0]
    edges = G[1]
    incidentMatrix = G[2]

    grau = GrauG(incidentMatrix)
    k = grau + 1

    if grau < 3:
        return OptCol(edges)
```

```
    col = []
    Gp = [vertices, col, np.zeros((vertices, vertices), np.int8)]

    for edge in edges:
        Gp[1].append([edge[0], edge[1], -1])
        Gp[2][edge[0]][edge[1]] += 1
        Gp[2][edge[1]][edge[0]] += 1
        [kp, col] = TasExt(Gp, k, (edge[0], edge[1], -1))
        k = kp
        Gp[1] = col

    return (k, Gp[1])


def TasExt(G, k, edge):
    vertices = G[0]
    col = G[1]
    p = 1
    tree = [[edge[0], edge[1]], [edge]]

    return TasExt1(vertices, k, col, p, tree)


def TasExt1(vertices, k, col, p, tree):
    iCol = CalculiCol(tree, col, k)
    if len(iCol) > 0:
        pT = CalculpT(tree, p)
        return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

    return TasExt2(vertices, k, col, p, tree)


def TasExt2(vertices, k, col, p, tree):
    colorsTree = [e[2] for e in tree[1]]
    missColorsTree = ColVertexSet(col, tree[0], k)
    frontera = FronteraVertexSet(col, tree[0])

    for edge in frontera:
        if edge[2] in colorsTree:
            if edge[0] in tree[0]:
                tree[0].append(edge[1])
            else:
                tree[0].append(edge[0])
            tree[1].append(edge)
            return TasExt1(vertices, k, col, p + 1, tree)
```

```
for edge in frontera:
    if not missColorsTree[edge[2]]:
        if edge[0] in tree[0]:
            tree[0].append(edge[1])
        else:
            tree[0].append(edge[0])
        tree[1].append(edge)
        return TasExt1(vertices, k, col, p + 1, tree)

defectiveColors = DefectiveCol(frontera, k)
if len(defectiveColors) == 0:
    col[-1][2] = k
    return [k + 1, col]

freeColors = FreeCol(colorsTree, missColorsTree, k)
alpha = defectiveColors[0]
gamma = freeColors[0]
u = 0
for v in tree[0]:
    [colorsv, edgeSetv] = ColVertex(col, v, k)
    if not colorsv[gamma]:
        u = v
camiU = ABcami(col, alpha, gamma, u, k)
for edge in frontera:
    if edge[2] == alpha and edge not in camiU[1]:
        col = Recolor2(col, camiU, alpha, gamma)
        return TasExt2(vertices, k, col, p, tree)
v1 = 0
v2 = 0
w1 = 0
for i in range(len(camiU[0])):
    if camiU[0][i] not in tree[0]:
        v1 = camiU[0][i]
        w1 = camiU[0][i + 1]
        break
for i in range(1, len(camiU[0]) + 1):
    if camiU[0][-i] in tree[0]:
        v2 = camiU[0][-i]
        break

[colorsv2, edgeSetv2] = ColVertex(col, v2, k)
for i in range(k):
    if not colorsv2[i] and i in freeColors:
        col = Recolor3(col, v2, u, alpha, gamma, camiU, freeColors, k)
        return TasExt2(vertices, k, col, p, tree)
[colorsv1, edgeSetv1] = ColVertex(col, v1, k)
```

```
    [colorsw1, edgeSetw1] = ColVertex(col, w1, k)
    for i in range(k):
        if colorsv1[i] + colorsw1[i] + missColorsTree[i] < 2:
            col = Recolor4(col, tree, camiU, w1, v1, u, alpha, gamma, freeColors, k)
            return TasExt2(vertices, k, col, p, tree)

    col[-1][2] = k
    return [k + 1, col]


def Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k):
    if p == 1:
        alpha = iCol[0][1]
        col[-1][2] = alpha
        return [k, col]
    if pT < 3:
        if pT == 2:
            aux = tree[0][0]
            tree[0][0] = tree[0][1]
            tree[0][1] = aux
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        while max([v[0] for v in iCol]) != p - 1:
            i = max([v[0] for v in iCol])
            alpha = -1
            for v in iCol:
                if v[0] == i:
                    alpha = v[1]
            beta = ColNotVertex(col, tree, tree[0][i + 1], k)
            cami1 = ABcami(col, alpha, beta, tree[0][i + 1], k)
            if cami1[0][-1] != tree[0][i]:
                col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
                tree = CutTree(tree, i + 1)
                p = i + 1
                iCol = CalculiCol(tree, col, k)
                pT = CalculpT(tree, p)
                return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)
            else:
                col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
                iCol = CalculiCol(tree, col, k)

        alpha = -1
        for v in iCol:
            if v[0] == p - 1:
                alpha = v[1]
        ep = tree[1][-1]
        col = RecolorEdge(col, ep, alpha)
```

```
        tree = CutTree(tree, p - 1)
        p = p - 1
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        pT = CalculpT(tree, p)
        return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

    if pT == p:
        i = min([v[0] for v in iCol])
        alpha = -1
        if i == p - 1:
            alpha = iCol[0][1]
            [i, beta] = UnusedColTree(col, tree, p - 2, k)
            cami1 = ABcami(col, beta, alpha, tree[0][p - 1], k)
            if cami1[0][-1] != tree[0][i]:
                col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
                tree = CutTree(tree, p - 1)
                p = p - 1
                iCol = CalculiCol(tree, col, k)
                pT = CalculpT(tree, p)
                return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)
            else:
                col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
                iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        else:
            for v in iCol:
                if v[0] == i:
                    alpha = v[1]

        if alpha in [e[2] for e in tree[1]]:
            [j, gamma] = UnusedColTree(col, tree, p - 2, k)
            [colorsp, edgeSetp] = ColVertex(col, tree[0][-1], k)
            if colorsp[gamma]:
                cami1 = ABcami(col, gamma, alpha, tree[0][-1], k)
                for l in range(len(cami1[0])):
                    if cami1[0][l] in [vertex for vertex in tree[0][:-1]]:
                        cami2 = CutTree(cami1, l)
                        n = max(i, j, l)
                        tree1 = CutTree(tree, n)
                        cami2[0].pop()
                        cami2[0].reverse()
                        cami2[1].reverse()
                        tree1[0] = tree1[0] + cami2[0]
                        tree1[1] = tree1[1] + cami2[1]
                        [tree, p] = Elemental(col, tree1, n, k)
                        pT = CalculpT(tree, p)
                        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
```

```
                    return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

            col = KempeChange(col, cami1, gamma, alpha)
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        alpha = gamma
        i = j
    beta = tree[1][-1][2]
    [colors1, edgeSet1] = ColVertex(col, tree[0][-2], k)
    if not colors1[beta]:
        cami1 = ABcami(col, alpha, beta, tree[0][-2], k)
        if cami1[0][-1] != tree[0][i]:
            col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
            tree = CutTree(tree, p - 1)
            p = p - 1
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

        col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
    j = min([v[0] for v in iCol])
    if j < p - 1:
        tree[0][-2] = tree[0][-1]
        tree[1][-2] = tree[1][-1]
        tree[0].pop()
        tree[1].pop()
        p = p - 1
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        pT = CalculpT(tree, p)
        return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

    else:
        alpha = iCol[0][1]
        [i, gamma] = UnusedColTree(col, tree, p - 2, k)
        cami1 = ABcami(col, gamma, alpha, tree[0][p - 1], k)
        if cami1[0][-1] != tree[0][i]:
            col = KempeChange(col, cami1, gamma, alpha)
            tree = CutTree(tree, p - 1)
            p = p - 1
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)
        else:
            cami2 = ABcami(col, gamma, alpha, tree[0][-1], k)
            col = KempeChange(col, cami2, gamma, alpha)
            tree[0][-2] = tree[0][-1]
```

```
            tree[1][-2] = tree[1][-1]
            tree[0].pop()
            tree[1].pop()
            p = p - 1
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

i = max([v[0] for v in iCol])
if pT < p and i >= pT:
    alpha = -1
    while i < p - 1:
        for v in iCol:
            if v[0] == i:
                alpha = v[1]
        beta = ColNotVertex(col, tree, tree[0][i + 1], k)
        cami1 = ABcami(col, alpha, beta, tree[0][i + 1], k)
        if cami1[0][-1] != tree[0][i]:
            col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
            tree = CutTree(tree, i + 1)
            p = i + 1
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

        col = KempeChange(col, cami1, alpha, beta)
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        i = max([v[0] for v in iCol])
    # i = p-1
    for v in iCol:
        if v[0] == p - 1:
            alpha = v[1]
        ep = tree[1][-1]
        col = RecolorEdge(col, ep, alpha)
        tree = CutTree(tree, p - 1)
        p = p - 1
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        pT = CalculpT(tree, p)
        return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

if p > pT > i:
    alpha = -1
    for v in iCol:
        if v[0] == i:
            alpha = v[1]
    if i == pT - 1:
```

```
        [h, gamma] = UnusedColTree(col, CutTree(tree, pT - 1), pT - 2, k)
        cami1 = ABcami(col, gamma, alpha, tree[0][i], k)
        if cami1[0][-1] != tree[0][h]:
            col = KempeChange(col, cami1, gamma, alpha)
            tree = CutTree(tree, i)
            p = i
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)
        col = KempeChange(col, cami1, gamma, alpha)
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        i = max([v[0] for v in iCol])

    delta = ColNotVertex(col, CutTree(tree, pT), tree[0][pT], k)
    [h, gamma] = UnusedColTree(col, CutTree(tree, pT), pT - 2, k, alpha)
    [colorsp, edgeSetp] = ColVertex(col, tree[0][-1], k)
    if not colorsp[gamma]:
        cami1 = ABcami(col, gamma, delta, tree[0][pT], k)
        if cami1[0][-1] != tree[0][h]:
            col = KempeChange(col, cami1, gamma, delta)
            tree = CutTree(tree, pT)
            p = pT
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

        col = KempeChange(col, cami1, gamma, delta)
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

    cami1 = ABcami(col, gamma, alpha, tree[0][-1], k)
    for l in range(len(cami1[0])):
        if cami1[0][l] in [vertex for vertex in tree[0][:pT - 1]]:
            cami2 = CutTree(cami1, l)
            n = max(i, h, l)
            tree1 = CutTree(tree, n)
            cami2[0].pop()
            cami2[0].reverse()
            cami2[1].reverse()
            tree1[0] = tree1[0] + cami2[0]
            tree1[1] = tree1[1] + cami2[1]
            [tree, p] = Elemental(col, tree1, n, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)
```

```
        col = KempeChange(col, cami1, gamma, alpha)
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        cami3 = ABcami(col, gamma, delta, tree[0][pT], k)
        if cami3[0][-1] != tree[0][h]:
            col = KempeChange(col, cami1, gamma, delta)
            tree = CutTree(tree, pT)
            p = pT
            iCol = CalculiCol(tree, col, k)
            pT = CalculpT(tree, p)
            return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)

        col = KempeChange(col, cami1, gamma, delta)
        iCol = CalculiCol(tree, col, k)
        return Recolor1(p, tree, col, iCol, pT, k)


def Recolor2(col, camiU, alpha, gamma):
    col = KempeChange(col, camiU, alpha, gamma)
    return col


def Recolor3(col, v2, u, alpha, gamma, camiU, freeColors, k):
    [colorsv2, edgeSetv2] = ColVertex(col, v2, k)
    delta = -1
    for color in freeColors:
        if not colorsv2[color]:
            delta = color
            break
    cami1 = ABcami(col, delta, gamma, u, k)
    col = KempeChange(col, cami1, delta, gamma)
    camiU[0].reverse()
    camiU[1].reverse()
    p = 0
    for i in range(len(camiU[0])):
        if camiU[0][i] == v2:
            p = i
            break
    cami2 = CutTree(camiU, p)
    col = KempeChange(col, cami2, gamma, alpha)
    return col


def Recolor4(col, tree, camiU, w1, v1, u, alpha, gamma, freeColors, k):
    [notElem, color] = NotElementary(col, [w1], [v1], k)
    if notElem:
        for e in camiU[1]:
```

```
            if e[0] + e[1] == w1 + v1 and (e[0] == v1 or e[1] == v1):
                for i in range(len(col)):
                    if col[i] == e:
                        col[i][2] = color
                        break
                break
        cami1 = ABcami(col, alpha, gamma, u, k)
        col = KempeChange(col, cami1, alpha, gamma)
        return col
    [notElem, color] = NotElementary(col, tree[0], [v1], k)
    if notElem:
        cami2 = ABcami(col, gamma, color, v1, k)
        col = KempeChange(col, cami2, gamma, color)
        cami3 = ABcami(col, alpha, gamma, u, k)
        col = KempeChange(col, cami3, alpha, gamma)
        return col
    [notElem, color] = NotElementary(col, tree[0], [w1], k)
    color2 = -1
    for colorp in freeColors:
        if colorp != color and colorp != gamma:
            color2 = colorp
            break
    if notElem:
        cami4 = ABcami(col, color2, color, w1, k)
        col = KempeChange(col, cami4, color2, color)
        return Recolor4(col, tree, camiU, w1, v1, u, alpha, gamma, freeColors, k)

    return
```