

# Degree in Mathematics

---

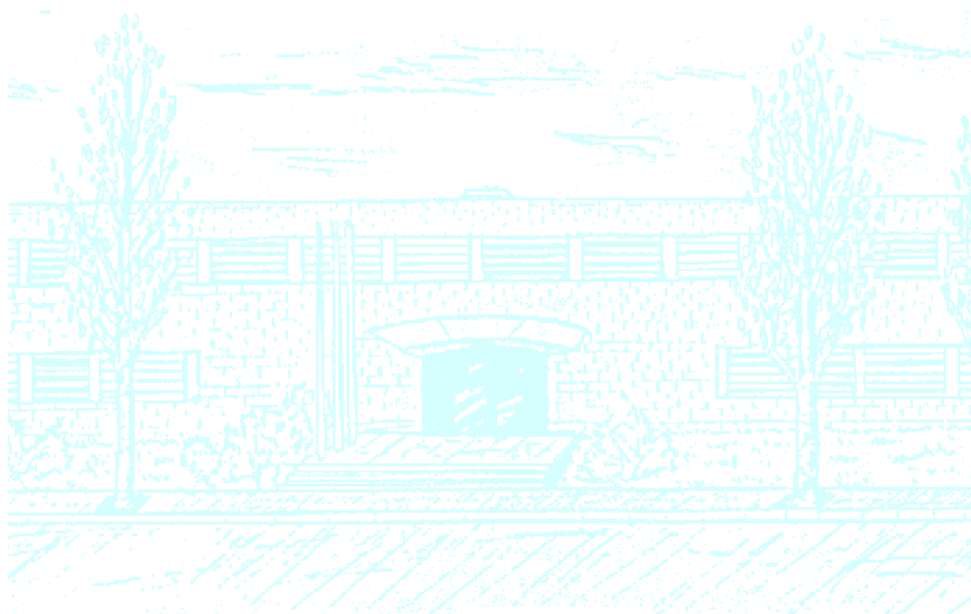
**Title:** Equacions en derivades parcials a les finances

**Author:** Pol Gonzàlez Sierras

**Advisor:** Jaume Soler Villanueva

**Department:** Mathematics

**Academic year:** 2021







## **Abstract**

Options trading is a fundamental part of finance. The Black-Scholes partial differential equation models the price of these contracts. For many options, there are well-known solutions to the equation but numerical problems arise with American style options and other type of options due to the lack of analytical solutions. This project aims to provide a mathematical model to solve numerically this type of pricing problems.

## **Keywords**

finance, options, Black-Scholes, numerical PDE, numerical methods

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>4</b>
1.1	Opcions	4
1.1.1	Altres tipus d'opcions i opcions exòtiques	5
1.2	Tipus d'interès lliure de risc i arbitratge	7
<b>2</b>	<b>L'equació de Black-Scholes</b>	<b>9</b>
2.1	Formulació	9
2.2	Opcions americanes	12
2.3	Opcions asiàtiques	14
<b>3</b>	<b>Mètodes numèrics per l'equació de Black-Scholes</b>	<b>16</b>
3.1	Mètodes de diferències finites	16
3.1.1	Aproximació de les derivades de $V(s, t)$	16
3.2	Opcions europees	17
3.2.1	Mètode Explícit	17
3.2.2	Mètode Implícit	19
3.2.3	Mètode Crank-Nicolson	21
3.2.4	Resolució de sistemes lineals	22
3.3	Mètodes de Montecarlo	23
3.3.1	Tècnica reducció variància	24
3.3.2	Exemple: Opcions europees	25
<b>4</b>	<b>Calcul d'opcions americanes i asiàtiques</b>	<b>26</b>
4.1	Opcions americanes	26
4.2	Opcions asiàtiques	27
4.3	Comparació dels preus entre diferents tipus d'opcions i efecte dels diferents paràmetres en el preu	28
<b>5</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>30</b>
<b>A</b>	<b>Codis Mètode Diferències Finites</b>	<b>31</b>
A.1	Mètode Explícit	31
A.2	Mètode Implícit	32
A.3	Mètode Crank-Nicolson	33
A.4	Mètode opcions americanes	35
A.5	Mètode de sobre-relaxació successiva per a sistemes lineals	35

<b>B Codi Mètode de Montecarlo</b>	<b>36</b>
B.1 Mètode opcions europees . . . . .	36
B.2 Mètode opcions asiàtiques . . . . .	36

# 1. Introducció

L'objectiu d'aquest treball de fi de grau és resoldre per diferents mètodes numèrics l'equació de Black-Scholes que regula el preu de les opcions als mercats financers. Primerament introduïrem els elements del món financer que intervenen en l'equació de Black-Scholes, que seguidament derivarem usant regles pròpies del món de les finances (per exemple el concepte d'arbitratge). Després resoldrem l'equació amb diversos mètodes numèrics per a poder finalment fer una comparació dels preus de diversos tipus d'opcions.

En aquest capítol introduïm el concepte d'opcions europees, americanes i asiàtiques que més tard seran l'objecte d'estudi i en modelarem el seu preu a través de resoldre numèricament l'equació de Black-Scholes. També introduïrem conceptes bàsics per al seu estudi com poden ser el tipus d'interès lliure de risc o l'arbitratge.

## 1.1 Opcions

Una opció és un producte financer derivat, és a dir, que depèn d'un altre producte financer subjacent, per exemple les accions d'una empresa o el preu d'una matèria prima.

**Definició 1.1.** Una **opció** és un contracte entre dues parts en què el comprador (posició llarga) adquireix al venedor (posició curta) el dret de comprar (o vendre) el producte subjacent a un cert preu fixat  $K$  en una data fixada  $T$ .  $K$  s'anomena el preu d'exercici (*strike price*) i  $T$  s'anomena el temps de venciment (*expiration date*).

*Observació 1.2.* El comprador de l'opció té el dret, però no l'obligació de comprar (o vendre) el subjacent.

*Observació 1.3.* Si el comprador adquireix el dret a comprar el subjacent estarem parlant d'una opció *call*, en cas de venda parlarem d'una opció *put*.

Distingim ara entre opcions europees i americanes.

**Definició 1.4.** Una **opció europea** és una opció que només pot ser executada a data de venciment.

**Exemple 1.5.** Un exemple d'un call europeu és un contracte entre  $A$  i  $B$  on  $A$  adquireix a  $B$  el dret a comprar 100 accions d'una companyia (subjacent) a un preu de  $K = 2$  per acció (*strike price*) d'aquí un any (*expiration date*), per tant  $T = 1$  any. Passat un any  $A$  té l'opció de comprar el paquet d'accions al preu acordat, però només ho farà si les accions valen en el mercat més del preu acordat, de no ser així les podria comprar a mercat a menor preu i el contracte no val res.

**Definició 1.6.** Una **opció americana** és una opció que pot ser executada en qualsevol moment des que es firma el contracte fins a temps de venciment.

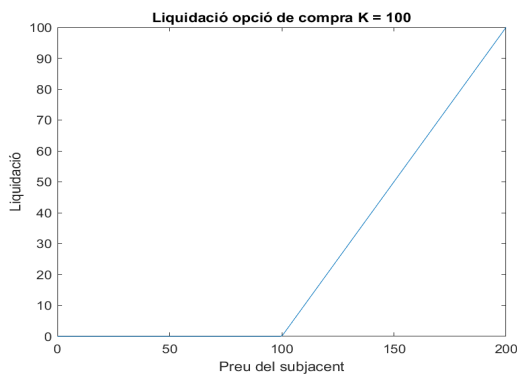
**Exemple 1.7.** Si ens posem en el mateix cas que en l'exemple anterior la diferència amb una opció europea està en el fet que  $A$  pot executar la opció (comprar el paquet d'accions al preu acordat) a temps  $t < T$ , si veu que en cert moment abans de la data de venciment obté benefici.

Molts cops es pensa que les opcions només serveixen com a eina especuladora. Les opcions també es poden usar per a cobrir el risc de certes operacions (així com ho faria una assegurança).

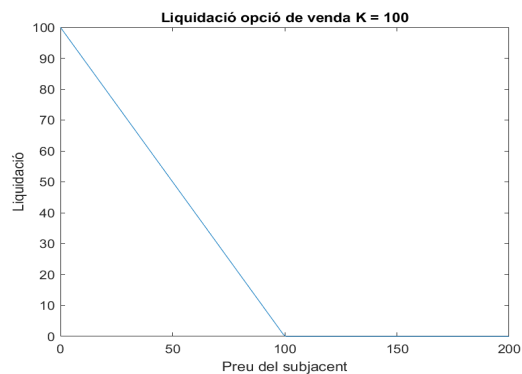
**Exemple 1.8.** Suposem que l'empresa A ven blat (subjacent) al mercat. Si el mercat actual està a  $1/kg$  i l'empresa A espera vendre el blat d'aquí un any pot adquirir un put europeu a  $K = 0.95/kg$ . A temps de venciment, si el mercat està per sobre del preu d'exercici A no executarà el *put* i vendrà el blat al mercat, només l'executarà si el preu del blat esta per sota del *strike price*. D'aquesta manera A es protegeix d'una eventual baixada del preu del blat.

Tractem ara la liquidació d'una opció (anomenat *payoff*). Sigui  $S_T$  el preu del subjacent a temps de venciment i  $K$  el seu preu d'exercici. Si s'executa una opció de compra s'obté  $S_T - K$ , de la mateixa manera, en executar una opció de venda s'obté  $K - S_T$ . Clarament les opcions només s'executen si la seva liquidació es positiva. D'aquesta manera, i sent  $s$  el preu del subjacent, denotem per  $\phi(s)$  la liquidació d'una opció:

$$\phi(s) = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & (\text{compra}) \\ \max(K - S_T, 0) & (\text{venda}) \end{cases}$$



(a) Liquidació opció de compra



(b) Liquidació opció de venda

Figura 1: Liquidacions per a opcions amb  $K = 100$

### 1.1.1 Altres tipus d'opcions i opcions exòtiques

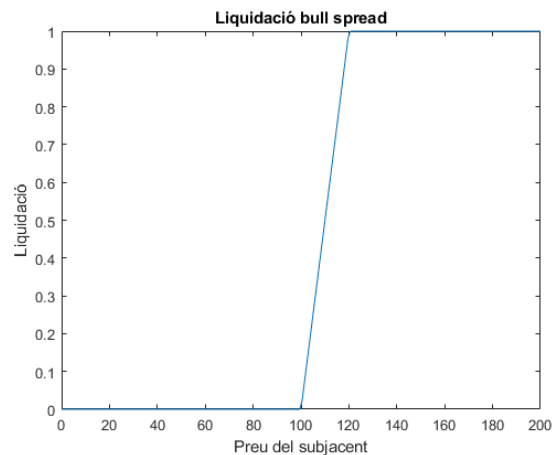
A part de les opcions que hem explicat es poden crear altres tipus d'opcions més complexes que les explicades anteriorment. Per exemple, suposem que comprem una call a preu d'exercici 100 i venem una call a preu d'exercici 120. Aleshores, acabem de crear una cartera d'opcions anomenat *bull spread*. En la següent figura mostrem el *payoff* de la nostra cartera. La fórmula general del *payoff* d'un *bull spread* amb una call comprada de preu d'exercici  $K_1$  i una venuda de preu d'exercici  $K_2$  (on  $K_2 > K_1$ ) és

$$\phi(s) = \frac{1}{K_2 - K_1} (\max(s - K_1, 0) - \max(s - K_2, 0))$$

De la mateixa manera que hem construït aquesta opció composta es pot arribar a construir una cartera d'opcions amb la funció de *payoff* desitjada. És un procés que no explicarem de manera detallada però que involucra una cartera d'opcions amb una idea similar a l'emprada per a crear les anomenades opcions de barrera.

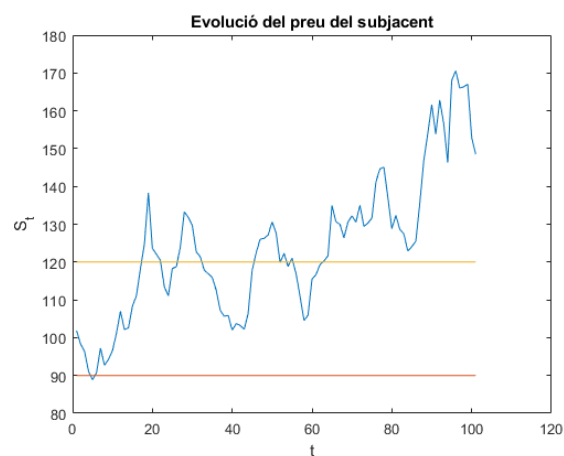
De totes formes modificar la funció de liquidació no és l'única manera de construir opcions més complexes. Una de les més conegudes són les opcions de barrera que consisteixen en opcions de compra i/o venda



Figura 2: Liquidació *bull spread*

estàndards amb l'afegit que si el preu del subjacent assoleix un cert preu (preu de barrera) l'opció perd tot el valor. D'aquesta manera s'introdueix un nou concepte, el de la dependència de camí, ja que es dona el cas que dos camins (entesos com l'evolució del valor del subjacent respecte el temps) que a temps d'exercici tinguin el mateix valor poden no tenir mateixa liquidació.

Com podem veure en la figura (13) a temps de venciment el preu del subjacent està per sobre el preu

Figura 3: Evolució del preu d'un subjacent en una call de *strike*  $K = 120$  amb barrera en  $S = 90$ .

d'exercici. De totes maneres l'opció no val res ja que abans el preu ha passat per sota el preu de barrera i per tant l'opció perd tot el seu valor en aquell moment.

Un altre tipus d'opcions amb dependència de camí són les opcions asiàtiques. En una opció asiàtica la liquidació depèn de la mitjana (aritmètica o geomètrica) del preu del subjacent des de l'inici del contracte fins a la data de venciment en comptes de dependre del preu a venciment. Aquesta mitjana pot ser calculada de forma contínua o discreta. A continuació enumerem les liquidacions de les diferents opcions asiàtiques per opcions de compra (per les opcions de venda són molt similars) amb temps de venciment  $T$  i on el preu del subjacent durant el contracte és  $S_t$ :

1. Mitjana aritmètica contínua:  $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K$

2. Mitjana aritmètica discreta ( $n$  punts equiespaiats):  $\frac{1}{n} \sum_0^n S(t_i)$  on  $t_i = i \frac{T}{n}$
3. Mitjana geomètrica contínua:  $\exp(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt)$
4. Mitjana geomètrica discreta ( $n$  punts equiespaiats):  $\exp(\frac{1}{n} \sum_0^n \log(S(t_i)))$  on  $t_i = i \frac{T}{n}$

## 1.2 Tipus d'interès lliure de risc i arbitratge

En aquesta secció definirem conceptes importants com són el tipus d'interès lliure de risc i l'arbitratge.

En finances es dona per suposat que existeixen inversions sense risc. Se sol considerar que els bons governamentals emesos per economies sòlides són inversions lliures de risc.

**Definició 1.9.** Definim com a **tipus d'interès lliure de risc** l'interès suposant que tots els participants en el mercat poden invertir i demanar-hi préstecs. El denotem per  $r$ .

*Observació 1.10.* Quan parlem de tipus d'interès lliure de risc ens referim a un tipus d'interès continu de forma que si invertim  $K$  a  $t = 0$ , en  $t = T$  tindrem  $Ke^{rT}$ .

D'aquesta forma, com que la inversió és lliure de risc diem que es realitza per tot el mercat i tenim que  $K$  diners a  $t = 0$  valen  $Ke^{rT}$  a  $t = T$ . De la mateixa manera  $K$  diners a  $t = T$  valen  $Ke^{-rT}$  a  $t = 0$ . Aquest fet ens diu que el valor dels diners es devalua amb el temps.

**Definició 1.11.** Una **oportunitat d'arbitratge** és una combinació de transaccions complementàries que s'aprofita de la diferència de preus entre productes financers per a poder obtenir un benefici sense risc.

**Exemple 1.12.** Suposem que a Barcelona el tipus de canvi de dòlars a euros és de 1 i que a Madrid és de 1.1. Aleshores podem convertir 10 euros per 10 dòlars a Barcelona i a Madrid desfer el canvi per a obtenir 11 euros. Aquest simple exemple s'anomena arbitratge triangular i és tant simple que és molt poc habitual als mercats reals.

Donades aquestes oportunitats d'arbitratge, hem de ser capaços de donar un preu adient a les opcions que eviti les oportunitats d'arbitratge. Demostrem ara usant arbitratge la següent proposició:

**Proposició 1.13.** Donat un call i un put de mateixa data de venciment i mateix preu d'exercici tenim la **Paritat Put-Call**.

$$\forall t \leq T \quad C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

on

- $r$ : Interès lliure de risc
- $T$ : data de venciment
- $K$ : preu d'exercici
- $C_t$ : preu call
- $P_t$ : preu put
- $S_t$ : preu actiu subjacent

Suposem que tant l'opció de compra com la de venda són a temps de venciment  $T$  i preu d'exercici  $K$ .

*Demostració.* Farem la demostració per parts; primerament provarem que  $C_t - P_t - S_t \leq -Ke^{-r(T-t)}$ . Suposem que  $C_t - P_t - S_t > -Ke^{-r(T-t)}$ . Aleshores construïm una oportunitat d'arbitratge realitzant les següents transaccions a temps  $t$ :

1. Comprem el subjacent per  $S_t$ , el put  $P_t$  i venem  $C_t$  (posició curta).
2. Cobrem  $A = C_t - S_t - P_t > -Ke^{-r(T-t)}$ .
3. Si  $A > 0$  s'inverteix a tipus  $r$ , si  $A < 0$  demanem un préstec de  $A$  a tipus  $r$ .

Aleshores, a temps  $T$  hi han dos casos; o bé  $S_t < K$  o  $S_t > K$ .

Si  $S_t > K$  aleshores el put no val res i s'exercita el call, entregant  $S_t$  a canvi de  $K$  i obtenim el següent balanç

$$K + Ae^{r(T-t)} > K - K = 0$$

i ja hem construït l'arbitratge.

Si  $S_t < K$  el call no val res i s'exercita el put, rebem  $K$  a canvi de  $S_t$  i obtenim el següent balanç

$$K + Ae^{r(T-t)} > K - K = 0$$

i de la mateixa manera obtenim l'arbitratge.

Per tant, sabem que si  $C_t - P_t - S_t > -Ke^{-r(T-t)}$ , existeix una oportunitat d'arbitratge, per tant  $C_t - P_t - S_t \leq -Ke^{-r(T-t)}$ . De la mateixa manera podem demostrar que  $C_t - P_t - S_t \geq -Ke^{-r(T-t)}$  per a obtenir finalment

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

□

*Observació 1.14.* La demostració ens diu que si  $C_t - P_t \neq S_t - Ke^{-r(T-t)}$  aleshores existeix una oportunitat d'arbitratge i per tant  $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$ . Però això no vol dir que no existeixin oportunitats d'arbitratge en aquest cas.

## 2. L'equació de Black-Scholes

Per a raonar el preu de les opcions primerament farem un seguit de suposicions per tal de poder obtenir l'equació de Black-Scholes.

1. El preu del subjacent es regeix per un camí aleatori lognormal.
2. L'interès lliure de risc és conegut en el temps.
3. El subjacent no té dividendes associats.
4. La cobertura es realitza de forma contínua.
5. No hi han costos de transacció.
6. No hi han oportunitats d'arbitratge.

### 2.1 Formulació

Sota aquestes suposicions podem obtenir l'equació de Black-Scholes. Suposem que  $V(s, t)$  és el preu de l'opció depenent del preu del subjacent i del temps. Realment el preu de l'opció depèn de més paràmetres, com per exemple el preu d'exercici o la data de venciment, però les considerem com a conegudes.

Ens construïm una cartera  $\Pi$  en la que comprem una opció i venem un cert nombre o quantitat  $\Delta$  del subjacent en curt.

$$\Pi = V(s, t) - \Delta s \quad (1)$$

Com hem comentat, estem suposant que el preu del subjacent segueix un camí aleatori lognormal, és a dir que el preu es regeix per la següent equació diferencial estocàstica:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dX \quad (2)$$

En aquest cas  $\mu$  i  $\sigma$  són paràmetres del actiu subjacent, anomenades deriva mitjana (o *drift* en anglès) i volatilitat. La deriva mitjana s'associa amb la tendència que suposem coneguda del subjacent (una deriva positiva significa que s'espera que el preu augmenti amb el pas del temps). En canvi la volatilitat és un factor associat a l'aleatorietat del preu del subjacent, com més alta sigui la volatilitat més ràpidament podrà variar el preu. En aquest cas  $dX$  es refereix a un moviment brownià que simula les fluctuacions aleatòries del preu. No entrarem en els detalls de com es calculen aquestes derivades, un tema de càlcul estocàstic. La figura (4) és un exemple de la simulació del preu d'un subjacent subjecte a un camí aleatori lognormal.

Derivant respecte el temps l'equació (1) obtenim el següent:

$$d\Pi = dV - \Delta ds \quad (3)$$

De la mateixa manera usant un argument de càlcul estocàstic (lema de Itô) calculem  $dV$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} dt \quad (4)$$

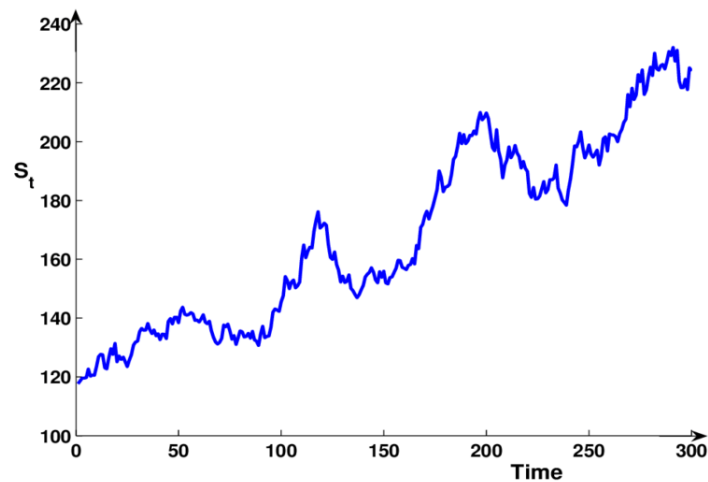


Figura 4: Evolució de  $S_t$  com a camí aleatori lognormal amb deriva positiva

I per tant clarament

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} dt - \Delta ds \quad (5)$$

Raonem ara que hem d'eliminar els termes  $ds$ . Si suposem que coneixem el valor de  $V$  i de les seves derivades aleshores coneixem  $d\Pi$  excepte pels termes  $ds$ . Aquests termes són els relacionats amb el risc i els canvis de preu del actiu subjacent, ja que fan variar el valor de la cartera quan varia el preu del subjacent, cosa que cal fer desaparèixer per fer que la cartera no es vegi afectada pel risc. Si triem de forma correcta  $\Delta$  podrem generar una cobertura que faci desaparèixer aquest risc. Tenim doncs

$$\left( \frac{\partial V}{\partial s} - \Delta \right) ds \quad (6)$$

I per tant la nostra tria és  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$ .

D'aquesta manera ara mateix la nostra cartera varia de la forma següent:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \right) dt \quad (7)$$

Com hem dit abans, una de les suposicions que hem fet és la no existència d'oportunitats d'arbitratge. Com acabem de raonar, aquesta variació en el preu de la nostra cartera és lliure de risc i per tant ha de ser igual a l'interès lliure de risc.

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (8)$$

De no ser d'aquesta manera podríem construir una oportunitat d'arbitratge de manera similar a com ho hem fet per a demostrar la paritat put-call. Suposem que  $d\Pi$  fos més gran que  $r\Pi dt$ . Aleshores podríem demanar un préstec a tipus  $r$  i invertir-lo en la nostra cartera sense risc que ens asseguraria un retorn superior a  $r$ . Per tant s'obté un retorn sense risc superior a  $r$ , cosa que és impossible. En el cas contrari suposant  $d\Pi$  menor que  $r\Pi dt$  podem actuar en curt sobre la cartera (la venem en comptes d'adquirir-la) i invertim a tipus  $r$  el capital de la venda obtenint també un benefici superior a  $r$ .

Finalment substituint (1),(7) en (8) amb la tria  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  i dividint per  $dt$  obtenim l'**equació de Black-Scholes**.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (9)$$

L'equació de Black-Scholes és una equació en derivades parcials de tipus parabòlic. Això serà important més endavant quan la resolguem numèricament.

Per a acabar, definim les seves condicions inicials a temps  $T$ . Aquesta depèn de si es tracta d'una opció de compra o de venda i serà igual al seu valor de liquidació a temps  $T$ . És a dir

$$V(s, T) = \begin{cases} \max(s - K, 0) & (\text{compra}) \\ \max(K - s, 0) & (\text{venda}) \end{cases} \quad (10)$$

Tant les opcions de compra com les de venda europees tenen solucions analítiques. En el cas d'una call de strike  $K$  i temps de venciment  $T$  tenim:

$$V(s, t) = sN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

on

$$d_1 = \frac{\log(s/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = \frac{\log(s/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

i  $r, \sigma$  representen l'interès lliure de risc i la volatilitat respectivament.  $N(x)$  és la distribució normal acumulada (és a dir,  $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ ).

En el cas d'una put de mateix strike i temps de venciment s'obté

$$V(s, t) = -sN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

tot i que també es pot obtenir a partir de la call i emprant la paritat put-call.

No entrarem en la derivació de la solució analítica ja que l'objectiu del treball es la resolució numèrica de

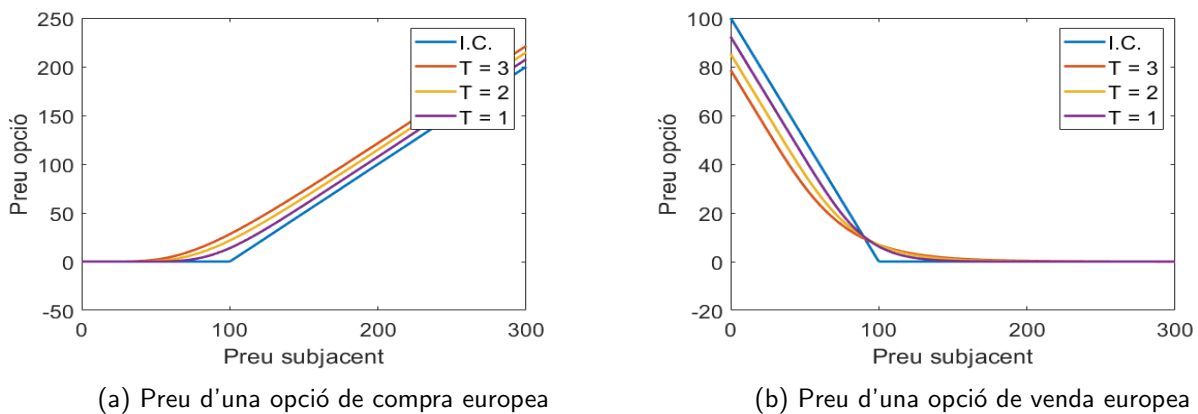


Figura 5: En aquestes dues figures representem els preus d'opcions de compra i venda respectivament per als paràmetres següents:  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $K = 100$ , i per a diversos valors de  $T$ . Apareixen també en blau les liquidacions de les opcions.

les equacions. A més a més, l'existència de solucions analítiques per a l'equació de Black-Scholes queda restringit a les opcions europees. Això fa present la necessitat d'utilitzar mètodes numèrics per a posar preu a opcions més complexes. La figura (12) mostra el valor d'opcions europees per a diversos valors de  $T$ .

## 2.2 Opcions americanes

El cas de les opcions americanes és una mica diferent al de les opcions europees ja que es flexibilitza el moment d'exercici de l'opció. Això fa que l'argument que s'ha desenvolupat en l'apartat anterior sigui una mica diferent.

Ens construïm una cartera de la mateixa manera que ho vam fer per a les opcions europees

$$\Pi = V(s, t) - \Delta s$$

Ara calculem la diferència entre el canvi de valor de la nostra cartera amb el tipus d'interès sense risc

$$d\Pi - r\Pi dt = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - r(V - \Delta s) \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial s} - \Delta \right) ds \quad (11)$$

Amb la tria  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$  obtenim

$$d\Pi - r\Pi dt = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV \right) dt \quad (12)$$

A l'equació de Black-Scholes original igualem aquesta expressió a zero per a evitar l'arbitratge. En aquest cas, com que el comprador de l'opció té el dret d'exercici en un cert període de temps i no només a venciment pot ser que si s'exerceix en un moment erroni la variació de preu de la cartera sigui menor al tipus d'interès lliure de risc.

$$d\Pi - r\Pi dt = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV \right) \leq 0 \quad (13)$$

En aquest cas diem que el que pren una posició curta en l'opció pot guanyar més que el tipus d'interès lliure de risc si el comprador no exerceix de forma òptima l'opció.

Tenim una altre restricció i és

$$V(s, t) \geq \phi(s, t) \quad (14)$$

on  $\phi(s, t)$  és el *payoff* de l'opció, ja que de no ser així existiria una oportunitat d'arbitratge molt senzilla que consistiria en comprar l'opció i executar-la al moment.

A més a més aquesta desigualtat a temps de venciment es torna igualtat i clarament tenim

$$V(s, T) = \phi(s, T) \quad (15)$$

Finalment sabem que el valor de l'opció es maximitza si la funció

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial s} \quad (16)$$

és contínua.

Per a veure perquè tractem primer amb un cas més simple, una put americana perpètua, és a dir, sense data de venciment. La primera observació és que el valor de l'opció només depèn del preu del subjacent i no del temps ja que l'opció no té data de venciment. Notem doncs el valor de l'opció com  $V(s)$ . Com hem comentat el valor de les opcions americanes sempre ha de ser major al seu *payoff* i per tant es té:

$$V(s) \geq K - s$$

Mentre el valor de l'opció sigui superior al del *payoff* el preu de l'opció satisfarà l'equació de Black-Scholes, tenint en compte que el valor de l'opció no depèn del temps obtenim:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0$$

si resollem aquesta equació diferencial de segon ordre la seva solució general és:

$$V(s) = As + Bs^{-2r/\sigma^2} \quad (17)$$

Clarament  $A = 0$  ja que si fem tendir el preu del subjacent a infinit el valor de l'opció (al ser una put) ha de tendir a 0. Tenim doncs  $V(s) = Bs^{-2r/\sigma^2}$  i suposem que existeix un valor  $\hat{s}$  tal que exercim l'opció (és a dir, tant bon punt el subjacent arriba a valdre  $\hat{s}$  exercirem el contracte). Tenim doncs a  $s = \hat{s}$  el següent:

$$V(\hat{s}) = B\hat{s}^{-2r/\sigma^2} = K - \hat{s}$$

De la segona igualtat podem aïllar  $B$  i si ho substituïm a (17) obtenim

$$V(s) = (K - \hat{s}) \left(\frac{s}{\hat{s}}\right)^{-2r/\sigma^2} \quad (18)$$

Sobre la tria de  $\hat{s}$ , hem de triar  $\hat{s}$  de forma que maximitzi el valor del contracte en qualsevol instant de temps abans del temps d'exercici. Això es fa ja que qui té l'opció de venda en vol maximitzar el seu valor. Derivant (18) respecte  $\hat{s}$  i igualant a 0 s'obté

$$\hat{s} = \frac{K}{1 + \sigma^2/2r}$$

de forma que ja tenim  $V(s)$  completament caracteritzada.

A partir d'això es pot veure que la derivada del valor del contracte i del *payoff* es la mateixa a  $s = \hat{s}$ . Això ens fa veure la necessitat que

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$$

sigui contínua.

Aquesta propietat no només s'aplica en el cas de la put perpètua sinó en totes les opcions americanes.

Finalment, les condicions (13),(14),(15) i (16) creen el problema a resoldre per a obtenir el valor de les opcions americanes. Aquest problema entra dintre de la categoria dels anomenats problemes de frontera lliure.

Expliquem ara perquè diem que es tracta d'un problema de frontera lliure. A cada temps  $t$  existeix un valor de  $s$  que fa de frontera entre la regió on és òptim exercir el contracte i en la que no. Aquesta frontera la podem notar per  $S_f(t)$ . Si  $S_f(t) < K$  (cas d'una put) aleshores el pendent del *payoff* al punt  $S_f(t)$  és  $-1$  i un argument d'arbitratge mostra que  $\frac{\partial V}{\partial s}$  ha de ser  $-1$  també (continuitat de la derivada).

Suposem que  $\frac{\partial V}{\partial s} < -1$ , cosa que es correspon al cas (b) de la figura (6). Aleshores  $V(s, t)$  passa per sota del *payoff* i això contradiu (14).

En el cas  $\frac{\partial V}{\partial s} > -1$ , cas (a) de la figura (6) existeix un argument a partir de l'estratègia de qui té l'opció per a maximitzar-ne el seu valor que indica que no està ben valorada.

$S_f(t)$  és de fet el valor que simultàniament maximitza el guany de la persona que té el contracte i n'evita la possibilitat d'arbitratge. Diem que es tracta d'un problema de frontera lliure ja que la frontera  $S_f(t)$  evoluciona amb el temps i és un valor desconegut a priori.

En la següent llista resumim totes les condicions a resoldre per a posar preu a les opcions americanes.



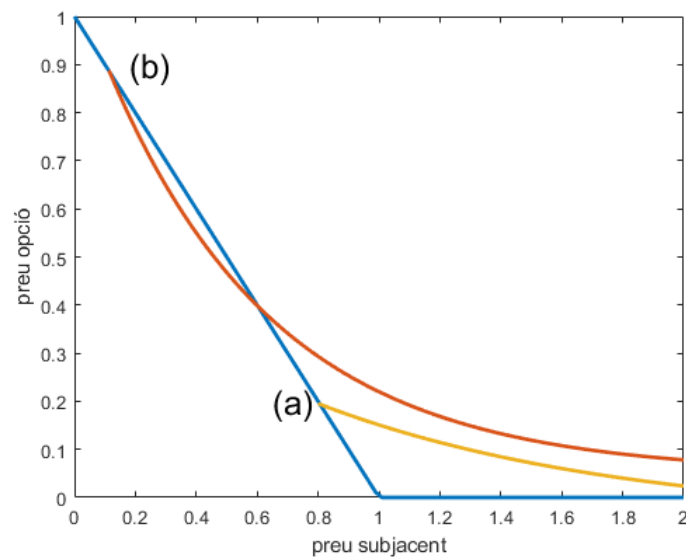


Figura 6: En aquesta figura podem observar el que passa quan (a) s'exercita l'opció massa tard o (b) massa d'hora.

- $\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) \leq 0$
- $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  contínua.
- $V(s, t) \geq \phi(s, t)$
- $V(s, T) = \phi(s, T)$  com a condició inicial.

## 2.3 Opcions asiàtiques

En aquesta secció tractem com modelar les opcions asiàtiques usant Black-Scholes. Recordem que les opcions asiàtiques empen una funció de liquidació que no només depèn del preu del subjacent en el moment del exercici sinó del camí que pren el preu del subjacent durant la durada de tot el contracte; sent normalment la mitjana aritmètica (contínua o discreta). En aquesta secció tractarem sobre una opció amb mitjana aritmètica contínua.

Diem doncs que la liquidació depèn d'una integral d'una funció sobre el preu del subjacent ( $S_t$ ) des de  $t = 0$  fins a data de venciment  $t = T$ . En el nostre cas

$$I(T) = \int_0^T f(s, \tau) d\tau = \int_0^T S_\tau d\tau$$

I per tant que el *payoff* de l'opció és una funció  $\phi(s, I)$  a temps  $t = T$ . En el nostre cas  $\phi(s, I) = \frac{1}{T} I(T)$  Abans d'arribar a temps de venciment tenim informació parcial sobre el preu del subjacent a temps de venciment (com més alt estigui  $S_t$  per  $t$  abans del venciment podem esperar que  $S_T$  sigui més alt). De la mateixa manera a temps  $t$  també tenim informació parcial sobre el valor de  $I$  a temps de venciment amb

el valor de la integral fins a temps  $t$ :

$$I(t) = \int_0^t f(s, \tau) d\tau = \int_0^t S_\tau d\tau$$

D'aquesta manera ens podem imaginar que el valor de l'opció asiàtica a temps  $t$  no només depèn de  $S$  i  $t$ , sinó també de  $I$ .  $I$  serà una nova variable, anomenada *variable d'estat*.

De la mateixa manera que el preu del subjacent segueix una equació diferència estocàstica (com en (2)),  $I$  també ho fa. Emprant el lema de Itô tenim que

$$dI = f(s, t)dt.$$

Això ho fem ja que serà necessari per a l'argument que emprarem a continuació per a obtenir una equació que ens doni el preu a aquest tipus d'opcions.

Com acabem de comentar el valor de la nostra opció asiàtica (i més generalment d'una que depèn d'una funció  $f(s, t)$  sobre el subjacent) és una funció de tres variables;  $s, t$  i la variable d'estat  $I$ ,  $V(s, t, I)$ .

Considerem ara un argument similar al fet servir anteriorment i ens construïm una cartera amb una opció i venem un nombre  $\Delta$  d'unitats del subjacent.

$$\Pi = V(s, t, I) - \Delta s$$

Aleshores derivant de manera similar a la que hem emprat abans, però tenint en compte que ara  $V$  depèn de  $I$  obtenim:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial I} dI + \left( \frac{\partial V}{\partial s} - \Delta \right) ds$$

Si prenem  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$  fem una cobertura del risc i resulta

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + f(s, t) \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt$$

Com que sabem que amb la tria  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$  la nostra cartera és lliure de risc tenim  $d\Pi = r\Pi dt$  i per tant si ho ajuntem tot obtenim l'equació per a modelar el preu de les opcions.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + f(s, t) \frac{\partial V}{\partial I} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0 \quad (19)$$

En el cas d'una opció asiàtica amb mitjana aritmètica contínua obtenim doncs

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + s \frac{\partial V}{\partial I} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0$$

Aquesta equació diferencial estocàstica tindrà com a condicions inicials la funció de *payoff*  $\phi(s, I)$ .

Per tant, el problema de les opcions asiàtiques es pot resumir en:

1.  $I(T) = \int_0^T S_\tau d\tau$
2.  $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + s \frac{\partial V}{\partial I} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0$

## 3. Mètodes numèrics per l'equació de Black-Scholes

### 3.1 Mètodes de diferències finites

La primera família de mètodes numèrics que implementarem es basa en la tècnica de les diferències finites i ens servirà per a resoldre les opcions europees i també per a les americanes. Els mètodes de diferències finites no són tant adients per a resoldre opcions asiàtiques i per a resoldre-les emprarem mètodes de Montecarlo.

Suposem que volem resoldre l'equació de Black-Scholes per a una call amb  $K = 100$  i  $T = 3$  i no ens preocupem de les altres constants. Per tant, considerem resoldre l'equació en la regió  $[0, 3K] \times [0, 3]$ . Ara dividim l'interval  $[0, 3K]$  en  $m$  intervals de longitud  $\delta s$  i de la mateixa manera partim l'interval  $[0, 3]$  en  $n$  intervals de longitud  $\delta t$  obtenint una malla de  $(m + 1)(n + 1)$  nodes. La nostra idea és aproximar la funció  $V(s, t)$  en els nodes de la malla i aproximar els altres punts interpolant amb els punts de la malla.

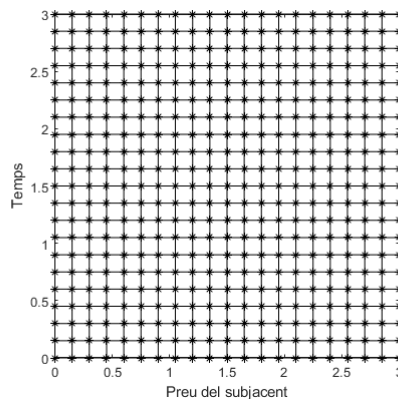


Figura 7: Malla mètode diferències finites

Numerem els nodes de la següent forma  $V_i^k$  on  $i \in [0, m]$  i  $k \in [0, n]$ . Aleshores tenim  $V_i^k = V(i\delta s, T - k\delta t)$ . Comptem el temps a la inversa ja que per  $k = 0$  es dona  $t = T$ , que és on imposarem la nostra condició inicial.

#### 3.1.1 Aproximació de les derivades de $V(s, t)$

Com a l'equació de Black-Scholes apareixen derivades de primer ordre respecte el temps i de primer i segon ordre respecte l'espai hem de construir unes aproximacions numèriques a partir dels punts de la malla. Prenent la definició estricta de la primera derivada respecte el temps tenim

$$\frac{\partial V}{\partial t}(s, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(s, t + h) - V(s, t)}{h}$$

i per tant naturalment, usant els punts de la malla, podem dir que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(s, t) \simeq \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t}$$

Fent l'expansió de Taylor de  $V(s, t)$  podem observar que té un error del ordre de  $O(\delta t)$ .

Per a calcular la primera derivada respecte l'espai usarem diferències centrades, és a dir, en comptes de

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s, t) \simeq \frac{V_{i+1}^k - V_i^k}{\delta s}$$

usarem

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s, t) \simeq \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta s}$$

La segona de les dues aproximacions és l'obtinguda per el *mètode de les diferències centrades* i la preferim per el seu menor error. Mentre que la primera de les aproximacions diferència endavant té un error del ordre de  $O(\delta s)$  la segona té un error de  $O(\delta s^2)$ .

Finalment per a poder calcular la segona derivada respecte al temps usem la següent aproximació

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(s, t) \simeq \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\delta s^2}$$

que també té error d'ordre  $O(\delta s^2)$ .

## 3.2 Opcions europees

### 3.2.1 Mètode Explícit

El primer dels mètodes numèrics que implementarem serà un model de diferències finites explícit. Si prenem l'equació de Black-Scholes en el tic de temps  $k$  tenim

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0 \quad (20)$$

i hi substituïm les derivades per les aproximacions usant els valors de la malla obtenim

$$\frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \left( \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\delta s^2} \right) + rs \left( \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta s} \right) - rV_i^k = O(\delta t, \delta s^2) \quad (21)$$

Si reordenem aquesta equació podem aïllar  $V_i^{k+1}$  com a funcions de  $V_{i-1}^k, V_i^k$  i  $V_{i+1}^k$ .

$$V_i^{k+1} = A_i^k V_{i-1}^k + (1 + B_i^k) V_i^k + C_i^k V_{i+1}^k \quad (22)$$

on

1.  $A_i^k = \frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta s} rs$
2.  $B_i^k = -2 \frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 - \delta tr$
3.  $C_i^k = \frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta s} rs$

**Observació 3.1.** Tant en aquest cas com en el cas del mètode implícit i en de Crank-Nicolson no és molt important si els coeficients A,B i C són avaluats en el tic de temps  $k$  o en el tic de temps  $k + 1$  ja que l'ordre de convergència dels mètodes no es veurà afectat.

D'aquesta manera podem calcular explícitament el vector  $V^{k+1}$  (que té per components els elements  $V_i^{k+1}$ ) a partir de  $V^k$  (amb components  $V_i^k$ ). Hi ha un detall, amb aquest mètode podem calcular tots els elements de  $V^{k+1}$ , excepte per el primer element i també per a l'últim, que els calcularem ajudant-nos de les condicions de contorn.

**Condicions de contorn** Podem triar entre diverses condicions de contorn. N'expliquem dues de senzilles. Podrem implementar a cada extrem un tipus de solució diferent, no cal usar el mateix mètode per als dos extrems.

1. Fixem els valors  $V_0^{k+1}$  i  $V_m^{k+1}$ . Per un call fixarem  $V_0^{k+1} = 0$  i  $V_m^{k+1} = K - Ke^{-r\delta tk}$ . D'altra banda per una put fixarem  $V_0^{k+1} = Ke^{-r\delta tk}$  i  $V_m^{k+1} = 0$ .
2. Podem fixar que la solució tingui derivada segona zero en l'extrem no nul, sempre que l'opció tingui un *payoff* com a molt lineal respecte el subjacent. Usant diferències centrades podem obtenir

$$V_0^{k+1} = 2V_1^{k+1} - V_2^{k+1}$$

i d'aquesta manera un cop coneguts  $V_1^{k+1}$  i  $V_2^{k+1}$  a partir del mètode explícit ja podem obtenir tots els valors de  $V^{k+1}$ . Aquesta condició de contorn té un avantatge addicional i es que és independent de l'opció triada sempre que el contracte tingui un *payoff* lineal respecte el subjacent.

Una vegada implementades les condicions de contorn ja podem completar el nostre mètode. L'anomenarem el **mètode explícit de diferències finites per a l'equació de Black-Scholes**.

*Observació 3.2.* En aquest esquema a cada pas estem ignorant un error d'ordre  $O(\delta t, \delta s^2)$ , anomenant **error local de truncament**.

Aquest mètode té l'avantatge que podem calcular explícitament la següent iteració a partir del vector anterior de manera que la seva implementació és prou simple.

**Convergència del mètode i regió d'estabilitat** Analitzem la convergència del mètode tant en espai com en temps. Ens interessa calcular l'ordre de convergència tant en espai com en temps del nostre mètode. Ho fem calculant el logaritme del error respecte el logaritme del pas de temps o espai en cada cas. Fent els càlculs obtenim el següent: calculant el pendent de les dues rectes podem observar la convergència d'ordre

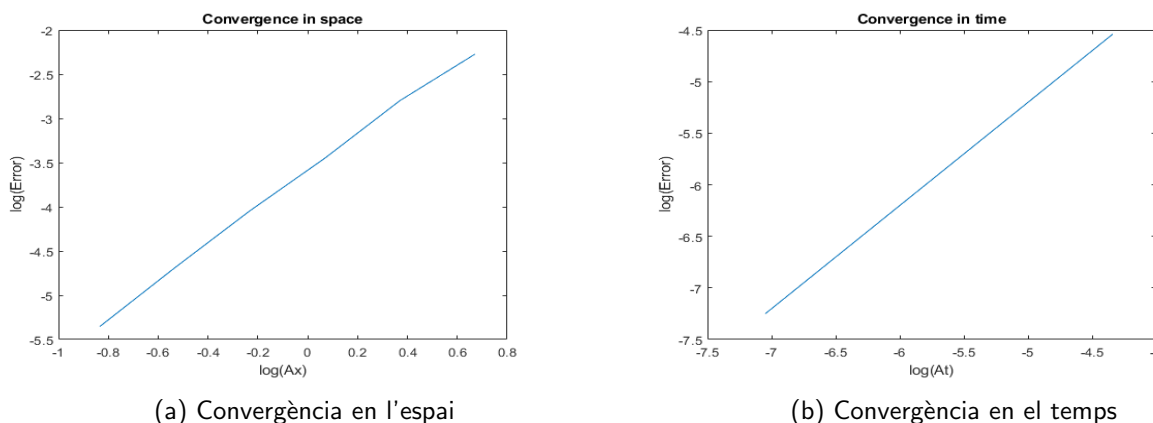


Figura 8: Gràfiques de convergència per el mètode explícit

2 en l'espai i d'ordre 1 en el temps.

El major desavantatge del mètode explícit és la seva inestabilitat, és a dir, es pot provar que si

$$\delta t \leq \frac{\delta s^2}{\sigma^2 s^2}$$

no es compleix aleshores el mètode no serà estable i la seva convergència no estarà garantida. Això ens indica (prenent el denominador com a constant) que per a reduir el pas d'espai a la meitat hem de fer el pas de temps quatre vegades més petit, la limitació més important del mètode.

### 3.2.2 Mètode Implícit

Usem de la mateixa manera que amb el mètode explícit l'equació de Black-Scholes, però ara en el tic de temps  $k + 1$ . Obtenim doncs la següent equació:

$$\frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \left( \frac{V_{i+1}^{k+1} - 2V_i^{k+1} + V_{i-1}^{k+1}}{\delta s^2} \right) + rs \left( \frac{V_{i+1}^{k+1} - V_{i-1}^{k+1}}{2\delta s} \right) - rV_i^{k+1} = O(\delta t, \delta s^2) \quad (23)$$

Ara podem aïllar  $V_i^k$  i procedint de la mateixa manera que en el cas explícit però situats en el tic de temps  $k + 1$ . Obtenim doncs el següent esquema amb el que podem calcular  $V_i^k$  a partir de  $V_{i-1}^{k+1}, V_i^{k+1}$  i  $V_{i+1}^{k+1}$ .

$$V_i^k = A_i^{k+1}V_{i-1}^{k+1} + (1 + B_i^{k+1})V_i^{k+1} + C_i^{k+1}V_{i+1}^{k+1} \quad (24)$$

on

1.  $A_i^k = -\frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta s} rs$
2.  $B_i^k = 2 \frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \delta tr$
3.  $C_i^k = -\frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta s} rs$

Usant aquestes equacions podem construir un sistema d'equacions la solució del qual sigui el vector  $V^{k+1}$ .

$$\begin{bmatrix} A_2^{k+1} & 1 + B_2^{k+1} & C_2^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3^{k+1} & 1 + B_3^{k+1} & C_3^{k+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_{m-2}^{k+1} & 1 + B_{m-2}^{k+1} & C_{m-2}^{k+1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{m-1}^{k+1} & 1 + B_{m-1}^{k+1} & C_{m-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{k+1} \\ V_2^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2^k \\ V_3^k \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{m-1}^k \end{bmatrix} \quad (25)$$

Això ens indica que podem calcular l'iteració  $k + 1$  a partir de  $V^k$  i una matriu que ens acabarà resultant constant en el temps en el nostre cas. La nostra matriu tridiagonal tindrà un tamany  $(m - 2)m$  de manera que calen dues condicions més per a tal de poder resoldre el sistema de manera única. Aquest és el desavantatge del mètode implícit, per cada iteració hem de resoldre un sistema d'equacions lineal i no podem calcular-la de manera explícita, fent que requereixi més càlculs per iteració.

**Condicions de contorn** Hem de tenir en compte ara les condicions de vora. En podem considerar de diferents tipus de la mateixa manera que en el mètode explícit, però amb alguns petits detalls.

1. Si volem fixar els valors  $V_0^{k+1}$  i  $V_m^{k+1}$  reescrivim el nostre sistema d'equacions lineals eliminant la primera i l'última columna (les que afecten sobre els punts de la vora) de la nostra matriu i afegint els termes que s'eliminen com a un vector per tal de fer que el nostre sistema tingui solució única al tenir la nostra matriu mida  $(m-2)(m-2)$ .

$$\begin{bmatrix} B_2^{k+1} & C_2^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ A_3^{k+1} & 1+B_3^{k+1} & C_3^{k+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & A_{m-2}^{k+1} & 1+B_{m-2}^{k+1} & C_{m-2}^{k+1} & 0 \\ 0 & \dots & A_{m-1}^{k+1} & 1+B_{m-1}^{k+1} & C_{m-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^k \\ V_3^k \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{m-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2^k \\ V_3^k \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{m-1}^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_2^{k+1} V_1^{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ C_{m-1}^{k+1} V_m^{k+1} \end{bmatrix}$$

2. Si volem fixar la segona derivada com a nul·la hem d'incorporar la condició  $V_0^{k+1} = 2V_1^{k+1} - V_2^{k+1}$  al nostre sistema d'equacions. Ho fem substituint  $M^{k+1}V^{k+1}$  per

$$\begin{bmatrix} 1+B_2^{k+1}+2A_2^{k+1} & C_2^{k+1}-A_2^{k+1} & 0 & \dots \\ A_3^{k+1} & 1+B_3^{k+1} & C_3^{k+1} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & A_{m-2}^{k+1} & 1+B_{m-2}^{k+1} & C_{m-2}^{k+1} \\ \dots & 0 & A_{m-1}^{k+1} & 1+B_{m-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m^k \end{bmatrix}$$

on  $M^{k+1}$  és la matriu del nostre sistema en (25).

*Observació 3.3.* Podem usar en cada un dels extrems cada unes de les tècniques descrites, no cal usar per els dos extrems el mateix tipus de condicions de vora.

**Convergència del mètode i regió d'estabilitat** Analitzem ara l'ordre de convergència del nostre mètode la mateixa manera que ho vam fer per a la variant explícita. Obtenim els mateixos ordres de convergència

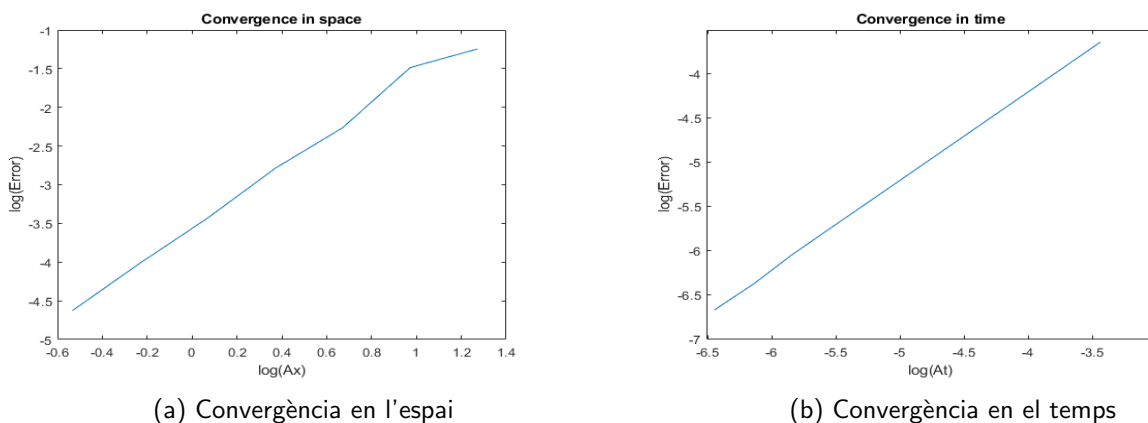


Figura 9: Gràfiques de convergència per el mètode implícit

que en el mètode explícit. S'observa una convergència d'ordre 2 respecte l'espai i d'ordre 1 respecte el

temps.

El principal avantatge respecte el mètode explícit recau en que és un mètode que sempre és numèricament estable, sense importar la relació entre  $\delta t$  i  $\delta s$ . Això ens permetrà evitar haver de triar un  $\delta t$  molt petit si volem fer prou petit  $\delta s$ .

### 3.2.3 Mètode Crank-Nicolson

El mètode de Crank-Nicolson és una combinació dels dos mètodes que acabem de descriure. Bàsicament per a cada iteració consisteix en calcular la solució amb la mitjana aritmètica entre el mètode explícit i el mètode implícit.

$$\begin{aligned} & \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t} + \frac{1}{4}\sigma s^2 \left( \frac{V_{i+1}^{k+1} - 2V_i^{k+1} + V_{i-1}^{k+1}}{\delta s^2} \right) + \frac{1}{4}\sigma s^2 \left( \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\delta s^2} \right) \\ & + \frac{rs}{2} \left( \frac{V_{i+1}^{k+1} - V_{i-1}^{k+1}}{2\delta s} \right) + \frac{rs}{2} \left( \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta s} \right) - \frac{rV}{2} V_i^{k+1} - \frac{rV}{2} V_i^k = O(\delta t, \delta s^2) \end{aligned} \quad (26)$$

En aquesta primera equació estem fent la mitjana aritmètica de les equacions (20) i (23) corresponents al mètode explícit i implícit. En aquest cas no aïllem  $V_i^k$  sinó que amb construir un sistema de la mateixa forma que en els dos mètodes anteriors (expressant l'equació com a suma dels nodes implicats multiplicats per els seus factors corresponents) n'hi haurà suficient. Obtenim aquest esquema

$$-A_i^{k+1} V_{i-1}^{k+1} + (1 - B_i^{k+1}) V_i^{k+1} - C_i^{k+1} V_{i+1}^{k+1} = A_i^k V_{i-1}^k + (1 + B_i^k) V_i^k + C_i^k V_{i+1}^k$$

amb aquests coeficients:

1.  $A_i^k = \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 + \frac{1}{4} \frac{\delta t}{\delta s} rs$
2.  $B_i^k = -\frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 + \frac{1}{2} \delta tr$
3.  $C_i^k = \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta s^2} \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 - \frac{1}{4} \frac{\delta t}{\delta s} rs$

D'aquestes equacions obtenim un sistema d'equacions lineal de la forma  $M^{k+1} V^{k+1} + r^k = N^k V^k$ .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_2^{k+1} & 1 + B_2^{k+1} & C_2^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_3^{k+1} & 1 + B_3^{k+1} & C_3^{k+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_{m-2}^{k+1} & 1 + B_{m-2}^{k+1} & C_{m-2}^{k+1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{m-1}^{k+1} & 1 + B_{m-1}^{k+1} & C_{m-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{k+1} \\ V_2^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m^{k+1} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -A_2^k & 1 - B_2^k & -C_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -A_3^k & 1 - B_3^k & -C_3^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -A_{m-2}^k & 1 - B_{m-2}^k & -C_{m-2}^k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -A_{m-1}^k & 1 - B_{m-1}^k & -C_{m-1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$



**Condicions de contorn** De manera similar a com es va fer amb el mètode implícit hem d'implementar les condicions de vora per aconseguir que el sistema tingui solució única. Tenim diverses opcions:

- Si volem fixar els valors de  $V_1^{k+1}$  i  $V_m^{k+1}$  aleshores usem la mateixa tècnica que en el cas del mètode implícit sobre la matriu  $M^{k+1}$ . N'eliminem la primera i la última de les columnes i afegim els termes eliminats en forma de vector lliure. Matricialment substituïm  $M^{k+1}V^{k+1}$  per

$$\begin{bmatrix} 1 + B_2^{k+1} & C_2^{k+1} & 0 & \dots \\ A_3^{k+1} & 1 + B_3^{k+1} & C_3^{k+1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & A_{m-2}^{k+1} & 1 + B_{m-2}^{k+1} & C_{m-2}^{k+1} \\ \dots & 0 & A_{m-1}^{k+1} & 1 + B_{m-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2^{k+1}V_1^{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ C_{m-1}^{k+1}V_m^{k+1} \end{bmatrix}$$

- Si volem fixar la segona derivada com a nul·la hem d'incorporar la condició  $V_0^{k+1} = 2V_1^{k+1} - V_2^{k+1}$  al nostre sistema d'equacions. Ho fem de la mateixa manera que en mètode implícit, substituïnt  $M^{k+1}V^{k+1}$  per

$$\begin{bmatrix} 1 + B_2^{k+1} + 2A_2^{k+1} & C_2^{k+1} - A_2^{k+1} & 0 & \dots \\ A_3^{k+1} & 1 + B_3^{k+1} & C_3^{k+1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & A_{m-2}^{k+1} & 1 + B_{m-2}^{k+1} & C_{m-2}^{k+1} \\ \dots & 0 & A_{m-1}^{k+1} & 1 + B_{m-1}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ V_m^k \end{bmatrix}$$

**Convergència del mètode i regió d'estabilitat** Si estudiem l'ordre de convergència del nostre mètode respecte l'espai i del temps de la mateixa manera que l'explicada en el mètode explícit podem obtenir una convergència d'ordre 2 tant en temps com en espai. Això es una millora respecte els mètodes explícit i implícit que només tenen ordre 1 de convergència respecte el temps. Aquesta és un dels grans avantatges del mètode de Crank-Nicolson i el perquè a la pràctica quasi mai es fa servir el mètode implícit ja que si per a cada iteració hem de resoldre un sistema d'equacions lineals millor fer servir el mètode de Crank-Nicolson que ens assegura un millor ordre de convergència.

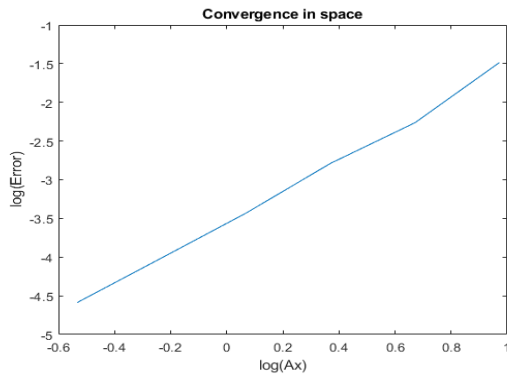
Respecte a la regió d'estabilitat del mètode es pot demostrar que el mètode és sempre estable, sense importar la tria de  $\delta t$  i  $\delta s$ .

### 3.2.4 Resolució de sistemes lineals

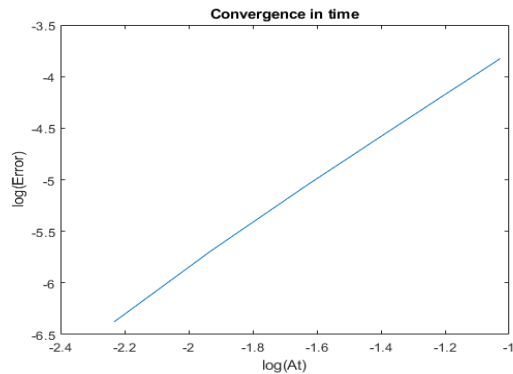
Tant en el mètode implícit com en el mètode de Crank-Nicolson necessitem resoldre sistemes lineals a cada pas per a trobar  $V^{k+1}$ . Normalment ho fem amb la rutina que ja té Matlab, però per a l'implementació a les opcions americanes necessitarem tenir implementat el mètode de sobre-relaxació successiva.

Suposem que volem resoldre un sistema estàndard d'equacions lineal  $Ax = b$  on  $A$  és una matriu  $n \times n$  d'elements  $a_{ij}$  i tant  $x$  com  $b$  són vectors de mida  $n$ . Primerament partim  $A$  en suma de tres matrius  $A = D + L + U$  on  $D$  és la seva diagonal i  $L, U$  les seves matrius triangulars inferiors i superiors respectivament. D'aquesta manera podem reescriure el sistema d'equacions d'aquesta manera:

$$(D + \omega L)x = \omega b - (\omega U + (\omega - 1)D)x$$



(a) Convergència en l'espai



(b) Convergència en el temps

Figura 10: Gràfiques de convergència per el mètode de Crank-Nicolson

El mètode de sobre-relaxació successiva és un mètode iteratiu que utilitza l'anterior aproximació  $x^k$  de  $x$  per a calcular-ne la següent  $x^{k+1}$  d'aquesta manera:

$$x^{k+1} = (D + \omega L)^{-1}(\omega b - (\omega U + (\omega - 1)D)x^k)$$

Com  $(D + \omega L)$  és una matriu triangular inferior podem calcular els valors  $x_i^{k+1}$  de manera seqüencial.

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^k \right) \quad (28)$$

Notem que un cop calculat  $x_i^{k+1}$  ja el comencem a fer servir per a calcular els valors de  $x_j^{k+1}$  amb  $j > i$  sense tenir que esperar-nos a la següent iteració.

La tria de  $\omega$  dependrà de diversos factors i pot ser un tema prou complicat per si mateix. Primerament hem de saber que el mètode de sobre-relaxació successiva només és convergent si el radi espectral de l'anomenada *matriu de sobre-relaxació successiva*

$$(I + \omega D^{-1}L)^{-1}((1 - \omega)I - \omega D^{-1}U)$$

és menor a 1 (on  $I$  representa la matriu identitat). També sabem que s'aconsegueix la màxima velocitat de convergència quan aquest mateix radi espectral és mínim.

A la pràctica inicialitzem el mètode amb  $\omega = 1$  i l'anirem augmentant a cada pas de temps una quantitat fixa (0.05 per exemple) controlant que el nombre d'iteracions que duu a terme el mètode va disminuint. Un cop al augmentar  $\omega$  observem que el nombre d'iteracions augmenta ens aturarem i fixarem  $\omega$  que minimitzi el nombre d'iteracions. Com que en el nostre cas la matriu de la qual en resollem el sistema és la mateixa per a cada pas de temps no necessitarem anar modificant  $\omega$ .

### 3.3 Mètodes de Montecarlo

En aquesta secció estudiem el mètode de Montecarlo per a opcions amb l'objectiu de posar preu a les opcions asiàtiques.

La idea principal del mètode és estimar el preu de l'opció  $V(s, t)$  (o  $V(s, t, I)$  en el cas de les opcions asiàtiques) a través d'una variable aleatòria l'esperança de la qual sigui el preu de l'opció.

És a dir, en termes més formals volem estimar l'esperança  $\theta = E(g(X))$  on  $g(X)$  és una variable aleatòria tal que  $E(g(x)) < \infty$ . Aleshores podem generar  $n$  observacions independents i idènticament distribuïdes  $X_i$  de manera que estimem  $\theta$  com

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

Com que tenim  $E(g(x)) < \infty$  podem aplicar la llei dels grans nombres sobre  $g$  per a justificar la convergència de  $\hat{\theta}$  a  $\theta$ .

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \rightarrow E(g(X)) = \theta \quad \text{quan } n \rightarrow \infty$$

Com ja sabem el mètode no és exacte i en podem estimar la variància:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (g(X_i) - \hat{\theta})^2$$

El teorema del límit central ens diu que

$$\sqrt{n} \frac{(\hat{\theta} - \theta)}{s} \rightarrow N(0, 1) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty$$

Per tant amb aquest mètode obtenim una aproximació de  $\theta$  i en controlem la variància. Podem dir doncs que  $\hat{\theta} - \theta$  (l'error de l'aproximació) és una variable aleatòria que és aproximadament una  $N(0, 1)$  escalada per  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ . Això ens fa veure el clar desavantatge d'aquest mètode i és la seva lenta velocitat de convergència, ja que per  $n$  prou gran sabem que  $s \approx \sigma$ , hem de fer  $n$  100 cops més gran per a reduir l'error estàndard  $\frac{s}{\sqrt{n}}$  per un factor de 0.1.

El mètode que acabem de descriure l'anomenem mètode cru de Montecarlo i molts cops podrà ser millorat amb algunes tècniques per a reduir-ne la variància i augmentar-ne l'ordre de convergència.

### 3.3.1 Tècnica reducció variància

En aquesta secció expliquem una petita tècnica per poder reduir la variància del mètode cru de Montecarlo sense tenir-ne que augmentar la  $n$  de forma tan dramàtica.

De la mateixa manera volem estimar  $\theta = E(g(X))$  i si en tenim dues mostres  $X_1$  i  $X_2$ . Aleshores clarament el nostre estimador és

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

Si en calculem la seva variància obtenim

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)}{4}$$

I per tant si triem les dues mostres de tal manera que estiguin negativament correlacionades podrem obtenir una reducció de la variància.

### 3.3.2 Exemple: Opcions europees

Volem ara donar preu a les opcions europees a partir del mètode de Montecarlo. Per a fer-ho hem de trobar una funció  $g(X)$  l'esperança de la qual sigui el valor de l'opció. Recordem que una de les nostres suposicions és que el preu del subjacent pren un camí aleatori lognormal. És a dir, recordant (2).

$$ds = \mu s dt + \sigma s dX$$

La solució d'aquesta equació diferencial estocàstica ens dóna una fórmula per a calcular  $s(T)$  a partir de  $s(t)$ .

$$s(T) = s(t) \exp\left((r - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}X\right)$$

on  $X$  es correspon amb una normal d'esperança 0 i variància 1. A partir d'aquí es fàcil construir la nostra funció  $g(X)$ . Farem que  $g(X) = \phi(s(T))$  on  $\phi(s)$  és la funció de liquidació de la nostre opció. Per tant per a una call tenim

$$g(X) = s(T) - K = s(t) \exp\left((r - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}X\right) - K$$

Aleshores, el mètode consisteix en generar  $n$  observacions  $X_i$  independents i idènticament distribuïdes d'una  $N(0, 1)$ . Finalment el preu de la nostra opció serà

$$\frac{\exp(-r(T - t))}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

on s'afegeix el factor  $\exp(-r(T - t))$ , ja que estem calculant la mitjana aritmètica per a totes les observacions de la liquidació de l'opció, que mesurem en diners a temps  $T$  i volem donar la resposta a temps  $t$ .

## 4. Calcul d'opcions americanes i asiàtiques

### 4.1 Opcions americanes

Volem ara resoldre el problema del preu de les opcions americanes. En aquest cas no estem resolent una equació en derivades parcials estàndard ja que el nostre és un problema de frontera lliure.

El problema a resoldre consisteix en les següents condicions:

- $\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs \frac{\partial V}{\partial s} - rV\right) \leq 0$
- $V(s, t) \geq \phi(s, t)$
- $V(s, T) = \phi(s, T)$
- $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$  contínua.

A primera vista el problema pot semblar més difícil de resoldre del que realment acaba sent. Sabem que a cada instant de temps el valor de l'opció haurà de ser com a mínim el seu *payoff*.

$$V(s, t) \geq \phi(s, t) \quad (29)$$

Aleshores, el que farem a la pràctica és el següent. Expliquem primer el cas del mètode explícit. Nosaltres procedim de manera usual com si d'una opció europea es tractes. Aleshores, un cop calculem  $V^{k+1}$  a partir de  $V^k$  sabem que  $V^{k+1}$  ha de verificar la condició que acabem d'esmentar de forma que actualitzem cada component  $x_i^{k+1}$  de  $V^{k+1}$  d'aquesta manera:

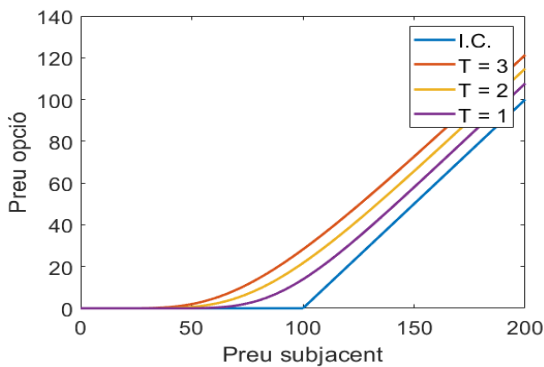
$$x_i^{k+1} = \max(x_i^{k+1}, \phi(i\delta s, (k+1)\delta t)) \quad (30)$$

En aplicar aquesta actualització al nostre mètode per a calcular opcions europees estem forçant la condició (29).

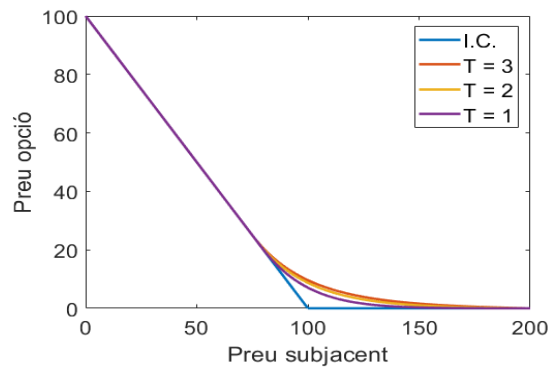
No és un tema trivial provar que aquest mètode convergeix a una funció que compleix la condició de continuïtat de  $\Delta$ . Aquest és un tema d'equacions diferencials prou complicat i que s'escapa de l'abast d'aquest treball. D'altra banda es pot comprovar experimentalment que l'ordre de convergència del mètode no es veu afectat i segueix sent el mateix que en el cas de les opcions europees.

En el cas del mètode implícit i de Crank-Nicolson podem fer exactament el mateix que acabem d'explicar i també es convergirà a la solució, però perdrem ordre de convergència en el camí ja que en el càlcul de  $V^{k+1}$  ell mateix hi intervé de manera implícita, afegint error. Ho podem solucionar si a cada pas actualitzem la nostra solució dintre de la resolució del sistema lineal pel mètode de sobre-relaxació successiva. Modifiquem l'esquema (30) d'aquesta manera:

$$x_i^{k+1} = \max\left(\left(1 - \omega\right)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^k\right), \phi(i\delta s, (k+1)\delta t)\right) \quad (31)$$



(a) Preu d'una opció de compra americana



(b) Preu d'una opció de venda americana

Figura 11: En aquestes dues figures representem els preus d'opcions de compra i venda americanes respectivament per als paràmetres següents:  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $K = 100$ , i per a diversos valors de  $T$ . Apareixen també en blau les liquidacions de les opcions. Observem que el preu d'una opció de compra americana és el mateix que el d'una europea però no amb les opcions de venda on s'aprecia clarament la condició de la continuïtat de la derivada de  $\Delta$  juntament amb la de que el valor de la opció sigui superior al seu *payoff*

## 4.2 Opcions asiàtiques

Per posar preu a opcions asiàtiques seguirem un procediment molt similar a l'emprat en les opcions europees. La nostra idea general és la mateixa, trobar una funció d'una variable aleatòria l'esperança de la qual sigui el valor de l'opció. En aquest cas, però, com que la liquidació de l'opció depèn de tot el camí no en tindrem prou amb simular el preu del subjacent en  $T$  i necessitarem simular l'evolució del preu durant tot el contracte.

Per tant partim l'interval  $T - t$  en  $m$  subintervalls de la mateixa longitud i aleshores en comptes de generar  $s(T)$  directament generem  $s((T - t)/m)$ ,  $s(2(T - t)/m)$  fins a  $s(T)$ . Ho fem de la mateixa manera que en les opcions europees. Després en calculem el *payoff* com

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s(i(T - t)/m) - k$$

en el cas d'una call asiàtica amb mitjana aritmètica discreta de  $m$  intervals. Per a calcular el preu de opcions asiàtiques contínues farem cada cop més gran  $m$  i el preu convergirà al d'una opció contínua.

D'aquesta manera i un cop sabem com calcular la liquidació generarem  $n$  observacions  $X_i$  independents i idènticament distribuïdes d'una  $N(0, 1)$  i el preu de l'opció serà aproximat per

$$\frac{\exp(-r(T - t))}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

Com podem veure a (13) s'han calculat els preus de les opcions asiàtiques amb uns certs paràmetres de la mateixa manera que ho vam fer per a les opcions europees i americanes. En aquest cas, però, hem hagut d'usar el mètode de Montecarlo i per aconseguir prou precisió hem usat  $n = 10000$  simulacions del preu a cada node del interval de  $s$ , a més d'usar mètodes de reducció de la variància.

Aquest fet posa de manifest el problema més gran dels mètodes de Montecarlo i és el seu ordre de

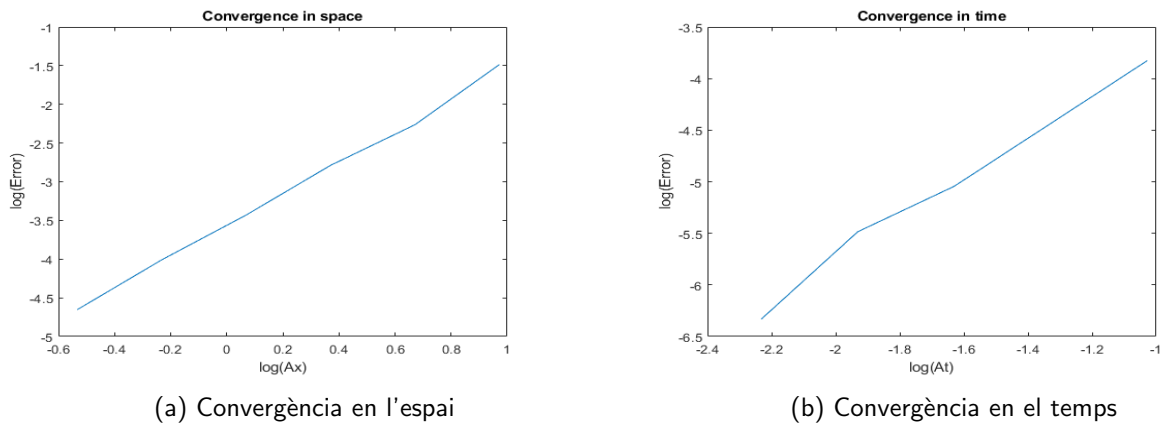


Figura 12: Gràfiques de convergència per al mètode de Crank-Nicolson per a opcions americanes usant el mètode de sobre-relaxació successiva

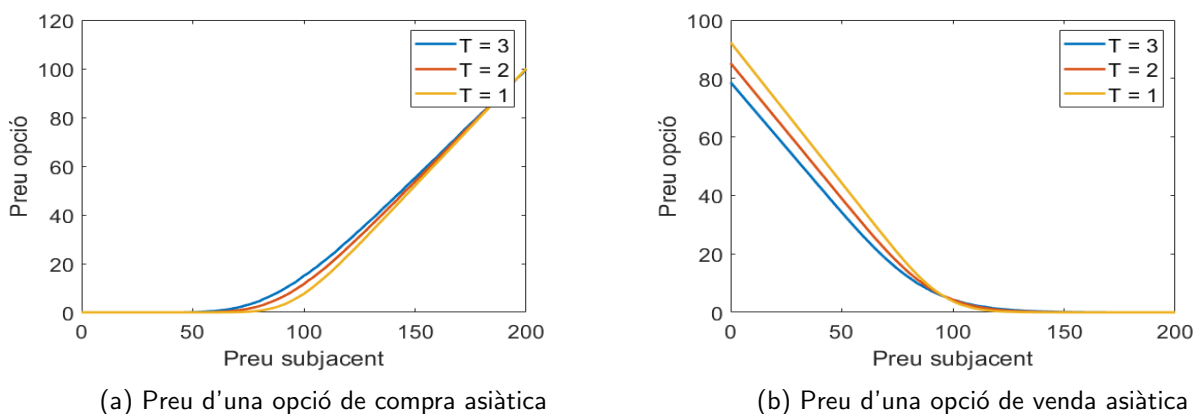


Figura 13: En aquestes dues figures representem els preus d'opcions de compra i venda asiàtiques respectivament per als paràmetres següents:  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $K = 100$ ,  $m = 100$ , i per a diversos valors de  $T$ .

convergència, generalment molt lent. Per contrapartida els mètodes de Montecarlo normalment són molt més fàcils d'implementar que per exemple els mètodes de diferències finites descrits en aquest treball. Aquest tipus de mètodes són molt útils per a problemes de matemàtica financera ja que tot i que l'ordre de convergència sigui lent en tenim prou amb una aproximació suficientment bona. Això és degut a que la majoria de cops els propis paràmetres (com per exemple la volatilitat) no es poden estimar prou bé com per necessitar una gran precisió en la solució.

### 4.3 Comparació dels preus entre diferents tipus d'opcions i efecte dels diferents paràmetres en el preu

Finalment, és interessant comparar els preus entre els diferents tipus d'opcions vistes en aquest treball. Clarament donats els mateixos paràmetres, una opció americana serà sempre igual o més cara que la seva contrapartida europea, però no està tant clar què passa amb les opcions asiàtiques.

Com podem observar en la Figura 14 es pot observar que el preu d'una opció asiàtica és una mica diferent

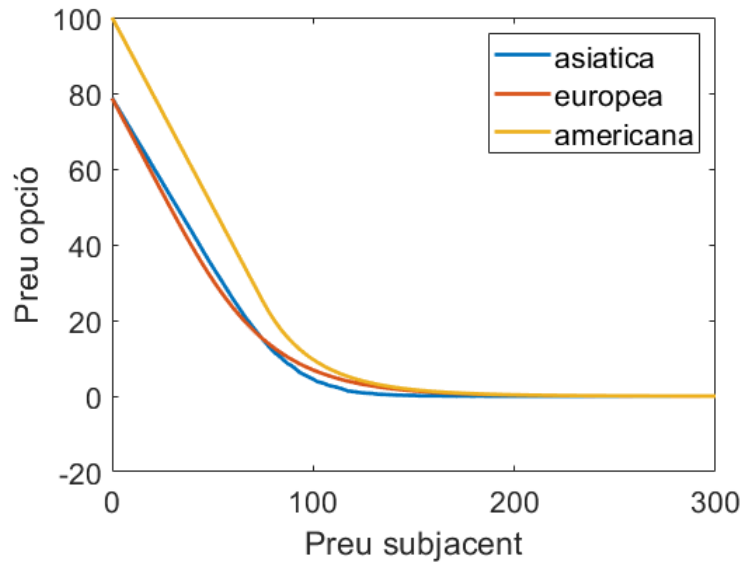
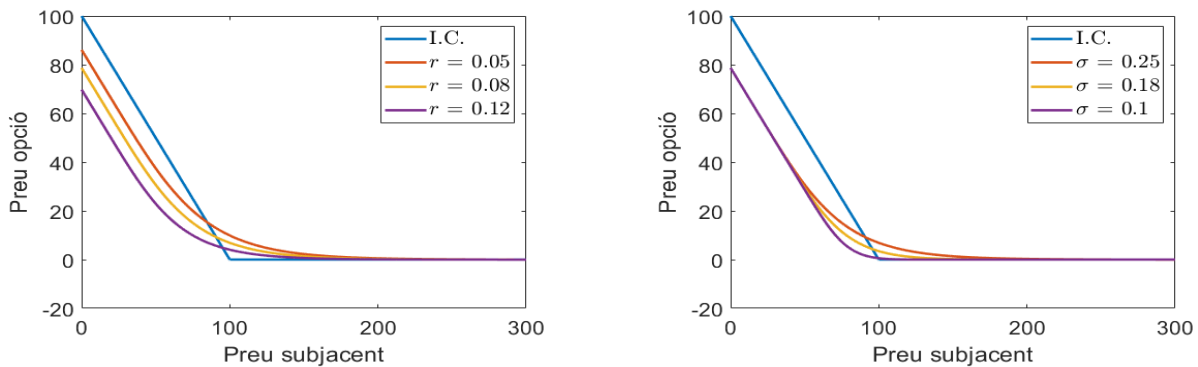


Figura 14: En aquesta figura veiem representats els preus de tres tipus d'opcions sota els mateixos paràmetres  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $K = 100$  i  $m = 100$  per a l'opció asiàtica.

del de la seva contrapartida europea. Això és així ja que la opció europea només té en compte el preu a temps final mentre que l'asiàtica té en compte tota l'evolució del preu, cosa que la protegeix una mica més contra la volatilitat del preu.

També podem comparar l'efecte dels paràmetres que podem observar en la figura respecte  $r$  i  $\sigma$  com podem veure en la Figura 15. Com podem veure l'augment de la volatilitat fa augmentar el preu de les opcions, en la figura només apareixen opcions de venda però augmenta el preu de totes les opcions. D'altra banda un augment en el tipus d'interès augmenta el valor de les opcions de compra ja que fa augmentar el preu final esperat, i per això fa disminuir de valor les opcions de venda.





(a) Preu d'una opció europea per diferents valors de  $r$       (b) Preu d'una opció europea per diferents valors de  $\sigma$

Figura 15: En aquestes dues figures representem els preus d'opcions de compra europees respectivament per als paràmetres següents:  $r = 0.08$ ,  $T = 3$ ,  $K = 100$ , i per a diversos valors de  $\sigma$ . Apareixen també en blau les liquidacions de les opcions.

## 5. Bibliografia

### Referències

- [1] Karel in 't Hout. *Numerical Partial Differential Equations in Finance Explained*, Palgrave Macmillan, 2017.
- [2] Paul Wilmott. *Derivatives. The theory and practice of financial engineering*, John Wiley & Sons, 1998.
- [3] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, Sam Howison. *Option pricing. Mathematical models and computation*, Oxford Financial Press, 1994.
- [4] Hongbin Zhang. *Pricing Asian Options using Monte Carlo Methods*, Project Report Uppsala Universitet, 2009.

# A. Codis Mètode Diferencies Finites

## A.1 Mètode Explícit

```
function U = parabolicEuler(x,Ax,At,nOfSteps,f,sigma,r,option,K)
%x : discretisation of the S interval
% Ax At space/time steps
% nOfSteps: number of time steps
% f: initial condition (payoff)
% sigma r K, option parameters
% option = 0 call // option = 1 put
NAssetSteps = size(f);

%Initialization
Un = zeros(NAssetSteps);
Derivative = zeros(NAssetSteps);
SDerivative = zeros(NAssetSteps);
Unm1 = f; %solution at time n-1
U = f;
halfsqsigma = (1/2)*sigma^2;
xsqd = x.*x;
%Loop in time steps
for n=1:nOfSteps
    for i = 2:NAssetSteps(2)-1
        %We approximate derivative and 2n derivative
        Derivative(i) = (Unm1(i + 1) - Unm1(i - 1))/(2*Ax);
        SDerivative(i) = (Unm1(i + 1) - 2*Unm1(i) + Unm1(i - 1))/(Ax^2);
        %interior node
        Un(i) = Unm1(i) +
            At*(halfsqsigma*xsqd(i)*SDerivative(i) +
                r*x(i)*Derivative(i) - r*Unm1(i));
    end

    %Boundary conditions
    if option == 0
        Un(1) = 0;
        Un(end) = 2*Un(end - 1) - Un(end - 2);
    else
        Un(1) = K*exp(-r*At*n);
        Un(end) = 0;
    end
    Unm1 = Un; %next step
    U = Un;
end
```

## A.2 Mètode Implícit

```

function U = implicitEuler(x,Ax,At,nOfSteps,f,sigma,r,option,K)

%x : discretisation of the S interval
%Ax At space/time steps
%nOfSteps: number of time steps
%f: initial condition (payoff)
%sigma r K, option parameters
%option = 0 call // option = 1 put

halfsigma = (1/2)*sigma^2;
function res = A(n)
    res = ((1/2)*r.*n - halfsigma.*n.*n)*At;
end
function res = B(n)
    res = (sigma^2.*n.*n + r)*At;
end
function res = C(n)
    res = -(halfsigma.*n.*n + (1/2)*r.*n)*At;
end
NAssetSteps = size(f);

%Initialization
Unm1 = f; %solution at time n-1
U = f; %solution vector (initiated by IC)

%Matrix Assembly
% diagonals
M_A = A(0:NAssetSteps(2) - 1);
M_A(1) = []; M_A(end) = [];
M_B = B(0:NAssetSteps(2) - 1) + ones(NAssetSteps);
M_B(1) = []; M_B(end) = [];
M_C = C(0:NAssetSteps(2) - 1);
M_C(end) = []; M_C(end) = [];
%sparse matrix creation
M = spdiags ([M_A;M_B;M_C]', -1:1, NAssetSteps(2) - 2, NAssetSteps(2) - 2);
%matrix display
%[M_A;M_B;M_C]
%full (M)

%Loop in time steps
for n=1:nOfSteps
    F = Unm1;
    F(1) = []; F(end) = [];

```

```

if option == 0
    %boundary conditions
    U_0 = 0;
    F(1) = F(1) - A(1)*U_0;
    U_end = x(end) - K*exp(-r*At*(n));
    F(end) = F(end) - C(NAssetSteps(2) - 2)*U_end;
    %solution of the lineal system
    U = M\F';

end
if option == 1
    %boundary conditions
    U_0 = K*exp(-r*At*(n));
    F(1) = F(1) - A(1)*K*exp(-r*At*(n));
    F(end) = F(end) - C(NAssetSteps(2))*0;
    U_end = 0;
    %solution of the lineal system
    U = M\F';
end
U = [U_0 U' U_end];
Unm1 = U; %next step
end
end

```

### A.3 Mètode Crank-Nicolson

```

function U = crank(x,Ax,At,nOfSteps,f,sigma,r,option,K)
halfsqsigma = (1/2)*sigma^2;

    %Wilmott pg638 functions
    function res = A(n)
        res = (1/2)*((1/2)*r.*n - halfsqsigma.*n.*n)*At;
    end
    function res = B(n)
        res = (1/2)*(sigma^2.*n.*n + r)*At;
    end
    function res = C(n)
        res = (halfsqsigma.*n.*n + (1/2)*r.*n)*At*(-1/2);
    end

NAssetSteps = size(f);

%Initialization
Unm1 = f; %solution at time n-1
U = f; %solution vector (initiated by IC)

```

```

xsqd = x.*x;

%Matrix Assembly
% diagonals
M_A = A(0:NAssetSteps(2) - 1);
M_A(1) = []; M_A(end) = [];
M_B = B(0:NAssetSteps(2) - 1) + ones(NAssetSteps);
M_B(1) = []; M_B(end) = [];
M_C = C(0:NAssetSteps(2) - 1);
M_C(end) = []; M_C(end) = [];
N_A = -A(0:NAssetSteps(2) - 1);
N_A(1) = []; N_A(end) = [];
N_B = -B(0:NAssetSteps(2) - 1) + ones(NAssetSteps);
N_B(1) = []; N_B(end) = [];
N_C = -C(0:NAssetSteps(2) - 1);
N_C(1) = []; N_C(end) = [];

%sparse matrix creation
M = spdiags([M_A;M_B;M_C]', -1:1, NAssetSteps(2) - 2, NAssetSteps(2) - 2);
N = spdiags([N_A;N_B;N_C]', 0:2, NAssetSteps(2) - 2, NAssetSteps(2));

%boundary conditions
M(1,1) = M(1,1) + 2*A(1);
M(1,2) = M(1,2) - A(1);
M(end,end) = M(end,end) + 2*C(NAssetSteps(2) - 2);
M(end,end - 1) = M(end,end - 1) - C(NAssetSteps(2) - 2);
%matrix display
%[M_A;M_B;M_C]
%full(M)
%full(N)
%Loop in time steps
for n=1:nOfSteps
    F = Unm1;
    F = N*F';
    %solution of the lineal system
    U = M\F;
    U_0 = 2*U(1) - U(2);
    U_end = 2*U(end) - U(end - 1);
    U = [U_0 U' U_end];
    Unm1 = U; %next step
end
end

```

## A.4 Mètode opcions americanes

## A.5 Mètode de sobre-relaxació successiva per a sistemes lineals

```
function [U,omega,optimum_reached ,nlts] =  
SOR(Lo,D,Up,q,n,option ,K,x,omega ,optimum_reached ,nlts)  
%SOR solution (wilmott 646)  
    tol = 1e-14;  
    v = zeros(1,n);  
    error = 1;  
    lts = 0;  
    while error > tol  
        error = 0;  
        for i = 2:n - 1  
            if option == 0  
                temp = max(v(i) + (omega/D(i)) *  
                    (q(i - 1) - Up(i) * v(i + 1) - D(i)  
                    * v(i) - Lo(i) * v(i - 1)),  
                    x(i) - K);  
            else  
                temp = max(v(i) + (omega/D(i)) *  
                    (q(i - 1) - Up(i) * v(i + 1) - D(i)  
                    * v(i) - Lo(i) * v(i - 1)),  
                    K - x(i));  
            end  
            error = error + (temp - v(i)) * (temp - v(i));  
            v(i) = temp;  
        end  
        lts = lts + 1;  
    end  
    v(1) = []; v(end) = [];  
    U = v';  
    if optimum_reached == false  
        if lts < nlts  
            omega = omega + 0.05;  
            nlts = lts;  
        else  
            optimum_reached = true;  
        end  
    end  
end  
end
```

## B. Codi Mètode de Montecarlo

### B.1 Mètode opcions europees

```

n = 10000;
S_0 = 100;
K = 100;
r = 0.08;
sigma = 0.25;
T = 3;
option = 0; %0 = call / 1 = put

%ANTITHETIC VARIATE METHOD
sum = 0;
for i = 0:n
    rand = normrnd(0,1);
    S_T = S_0*exp((r - (sigma^2/2))*T + sigma*sqrt(T)*rand);
    S_T2 = S_0*exp((r - (sigma^2/2))*T - sigma*sqrt(T)*rand);
    if option == 0
        sum = sum + max(S_T - K,0) + max(S_T2 - K,0);
    else
        sum = sum + max(K - S_T,0) + max(K - S_T2,0);
    end
end
res = exp(-r*T)*(sum/(2*n))

%CRUDE MONTECARLO METHOD
sum = 0;
for i = 0:n
    S_T = S_0*exp((r - (sigma^2/2))*T + sigma*sqrt(T)*normrnd(0,1));
    if option == 0
        sum = sum + max(S_T - K,0);
    else
        sum = sum + max(K - S_T,0);
    end
end
res = exp(-r*T)*(sum/n)

```

### B.2 Mètode opcions asiàtiques

```

n = 10000;
m = 100;
S_0 = 100;

```

```

K = 100;
r = 0.08;
sigma = 0.25;
T = 3;
option = 0; %0 = call / 1 = put

%ANTITHETIC VARIATE METHOD
sum = 0;
for i = 0:n
    S_T = S_0;
    S_T2 = S_0;
    parsum1 = 0;
    parsum2 = 0;
    for j = 0:m
        rand = normrnd(0,1);
        S_T = S_T*exp((r - (sigma^2/2))*(T/m) + sigma*sqrt(T/m)*rand);
        S_T2 = S_T2*exp((r - (sigma^2/2))*(T/m) - sigma*sqrt(T/m)*rand);
        parsum1 = parsum1 + S_T;
        parsum2 = parsum2 + S_T2;
    end
    if option == 0
        sum = sum + max(parsum1/(m + 1) - K,0) + max(parsum2/(m + 1) - K ,0);
    else
        sum = sum + max(K - parsum1/(m + 1),0) + max(K - parsum2/(m + 1),0);
    end
end
res = exp(-r*T)*(sum/(2*n))

%CRUDE MONTECARLO METHOD
sum = 0;
for i = 0:n
    S_T = S_0;
    parsum = 0;
    for j = 0:m
        S_T = S_T*exp((r - (sigma^2/2))*(T/m) + sigma*sqrt(T/m)*normrnd(0,1));
        parsum = parsum + S_T;
    end
    if option == 0
        sum = sum + max(parsum/(m + 1) - K,0);
    else
        sum = sum + max(K - parsum/(m + 1),0);
    end
end
res = exp(-r*T)*(sum/n)

```