PROBLEMES

DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA

ANÀLISI MATEMÀTICA 1

Albert Avinyó
Mª Àngela Grau
Fernando Martínez

EST
AM1

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Biblioteca
1400351436

1400351436

Diplomatura d'Estadística
Departament de Matemàtica Aplicada II
Facultat de Matemàtiques i Estadística. UPC

Facultat de
Matemàtiques i Estadística
BIBLIOTECA

ANÀLISI MATEMÀTICA 1

PROBLEMES

Curs 2000-2001. Primer quadrimestre

Albert Avinyó
Mª Àngela Grau
Fernado Martínez

Barcelona, setembre 2000

Funcions reals de variable real

Nom	Equació	Domini	Imatge	Característiques
Polinòmica	$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	$\mathbb{R}$		Contínua
Racional	$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$\mathbb{R}\backslash\{x \mid Q(x)=0\}$		Contínua en el domini
Sinus	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	Contínua, senar, fitada i 2π-periòdica
Cosinus	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	Contínua, parell, fitada i 2π-periòdica
Tangent	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$\mathbb{R}$	Contínua, senar i π-periòdica
Cotangent	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$	$\mathbb{R}$	Contínua, senar i π-periòdica
Secant	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$\mathbb{R}\backslash(-1,1)$	Contínua, parell i 2π-periòdica
Cosecant	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$	$\mathbb{R}\backslash(-1,1)$	Contínua, senar i 2π-periòdica
Arcsinus	$\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	Contínua, senar i fitada
Arccosinus	$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	Contínua i fitada
Arctangent	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	Contínua, senar i fitada
Exponencial	a^x $a>0,\ a\neq 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	Creix si $a>1$, decreix si $0<a<1$ Contínua
Logaritme	$\log_a x$ $a>0,\ a\neq 1$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	Creix si $a>1$, decreix si $0<a<1$ Contínua
Potencial	$x^a,\ a\neq 0$	$(0,+\infty)$		Contínua
Sinus hiperbòlic	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Contínua, creixent i senar
Cosinus hiperbòlic	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1,+\infty)$	Contínua i parell
Tangent hiperbòlica	$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$	$\mathbb{R}$	$(-1,1)$	Contínua, senar, fitada i creixent

Funcions reals de variable real

TAULA DE DERIVADES

Nom	**Equació**		**Funció derivada**
Constant	$f(x) = k\,,$	$k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identitat	$f(x) = x$		$f'(x) = 1$
Suma de funcions	$f(x) + g(x)$		$f'(x) + g'(x)$
Producte per constants	$cf(x)\,,$	$c \in \mathbb{R}$	$cf'(x)$
Producte de funcions	$f(x)g(x)$		$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Qüocient de funcions	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Composició de funcions	$(g \circ f)(x)$		$g(f(x))f(x)$
Potencial entera	$f(x) = x^n\,,$	$n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
	$f(x) = u(x)^n\,,$	$n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$
Arrel n-èsima	$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}\,,$	$n \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x) = e^x$		$f'(x) = e^x$
	$f(x) = e^{u(x)}$		$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
	$f(x) = a^{u(x)}\,,$	$a > 0$	$f'(x) = u'(x)a^{u(x)} \ln a$
Logaritme	$f(x) = \ln u(x)$		$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
	$f(x) = \log_a u(x)\,,$	$a > 0$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \log_a e$
Sinus	$f(x) = \sin u(x)$		$f'(x) = u'(x) \cos u(x)$
Cosinus	$f(x) = \cos u(x)$		$f'(x) = -u'(x) \sin u(x)$
Tangent	$f(x) = \tan u(x)$		$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x))}$
Arcsinus	$f(x) = \arcsin u(x)$		$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
Arccosinus	$f(x) = \arccos u(x)$		$f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
Arctangent	$f(x) = \arctan u(x)$		$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$

Nombres reals i complexos

1. Feu una demostració directa, una pel contrarrecíproc i una per reducció a l'absurd de l'afirmació següent: $n^2 \in \mathbb{N}$ senar $\Longrightarrow$ n senar.

2. Trobeu:

a) La representació decimal de $19/8$ i $23/29$.

b) Els nombres racionals que tenen per representació decimal $2.3\overline{292}$ i $0.\overline{917}$.

3. Si a,b són racionals i α, β són irracionals, digueu com són $a+b$, $\alpha+\beta$, ab, $\alpha\beta$, $a\alpha$ i $a+\alpha$. Expliqueu el motiu d'aquest fet i doneu exemples de nombres irracionals que sumats i multiplicats siguin racionals.

4. Un mòbil recorre un quadrat de vèrtex A,B,C i D amb velocitat constant i un altre mòbil es mou sobre la diagonal AC amb la mateixa velocitat, fent moviment d'anada i tornada. Si en un moment donat els dos mòbils coincideixen en el punt A, demostreu que no es tornen a trobar.

5. a) Si m/n i p/q són racionals diferents, aleshores proveu que $\dfrac{m}{n}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{p}{q}-\dfrac{m}{n}\right)$ és irracional.

b) Fent ús de l'apartat anterior, proveu que entre dos racionals diferents sempre hi ha un irracional.

6. Trobeu un nombre real α tal que α^2 sigui irracional i α^4 sigui racional.

7. Trobeu el suprem i l'ínfim, si existeixen, dels conjunts següents:

a) $E_1=\{1,2,3\}$, b) $E_2=\{x\in\mathbb{R}:\ |x-1|<2\}$,

c) $E_3=\mathbb{R}^+$, d) $E_4=\{x\in(0,1):$ el desenvolupament decimal de x no té nous$\}$.

8. Trobeu, si existeixen, el suprem, l'ínfim, el màxim i el mínim dels conjunts següents:

a) $A=\{2,2.2,2.22,2.222,\dots\}$.

b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x=(-1)^n+\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+5x-6\leq 0\right\}$.

9. Fent ús de la propietat arquimediana, proveu que el suprem del conjunt definit per $\{(n-1)/2n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ és $1/2$.

10. Donats dos subconjunts A i B de $\mathbb{R}$ definim:

$$A + B = \{\, x + y \,|\, x \in A, y \in B\} \qquad AB = \{\, xy \,|\, x \in A, y \in B\}$$

Demostreu:

a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

b) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

d) $\sup(AB) \neq \sup A \cdot \sup B$

11. Escriviu les expressions següents prescindint dels valors absoluts:

a) $|x - y| - |x|$; b) $|x| - |x^2|$;

c) $\big||x| - 1\big|$; d) $x - \big|x + |x|\big|$.

12. Trobeu els nombres x tals que:

a) $|x - 3| = 2$; b) $|x - 1| + |x + 3| = 4$;

c) $|x + 1| < 4$; d) $|x + 1| + |x + 2| < 2$;

e) $|2x + 7| \geq 3$; f) $|x - 1| + |x + 1| = 0$;

g) $|x - 1||x + 2| = 3$; h) $|x + 1||x - 2| = -(x + 1)(x - 2)$.

13. Demostreu que:

a) $\big||x - y| - |y - z|\big| \leq |x - z| \qquad \forall x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$;

b) $\text{màx}\,\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2} \qquad \forall a,\, b \in \mathbb{R}$;

c) $\text{mín}\,\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2} \qquad \forall a,\, b \in \mathbb{R}$.

14. Resoleu les inequacions següents:

a) $\left|\dfrac{2x - 2}{x + 4}\right| < 1$; b) $1 \leq \left|\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}\right| < 2$;

c) $|3x - 5| - |2x + 3| > 0$; d) $|x^2 - 5x| > |x^2| - |5x|$.

15. Resoleu les desigualtats següents:

$$\text{a) } \frac{1}{4} < \frac{1}{x+3}; \qquad \text{b) } \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}.$$

16. Trobeu tots els nombres $x \in \mathbb{R}$ que compleixen $||x-1| - |x+1|| \leq 1$.

17. Proveu que si $|x| \leq 1$, llavors es té $\left| x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16} \right| < 2$.

18. Expresseu els nombres complexos següents de la forma $a + bi$:

$$\text{a) } (1+3i)^3; \qquad \text{b) } \frac{2+3i}{3-4i};$$

$$\text{c) } i^5 + i^{16}; \qquad \text{d) } \frac{\frac{1}{2}(1+i)}{1+i^{-8}}.$$

19. Siguin z, z_1 i z_2 tres nombres complexos. Comproveu que se satisfan les propietats següents:

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2; \qquad \text{b) } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2;$$

$$\text{c) } z \cdot \overline{z} = |z|^2; \qquad \text{d) } z + \overline{z} = 2a \quad (a = Re(z));$$

$$\text{e) } \frac{z - \overline{z}}{i} = 2b \quad (b = Im(z)).$$

20. Calculeu el conjugat d'un nombre complex expressat en forma polar.

21. Efectueu les operacions indicades:

$$\text{a) } \frac{2-3i}{(2+3i)(1+i)} - \frac{3+i}{4(2-i)}; \qquad \text{b) } (1+i)^{53};$$

$$\text{c) } (1 - i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}; \qquad \text{d) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{10};$$

$$\text{e) } (1-i)^{\frac{5}{4}}; \qquad \text{f) } (-1)^{\frac{1}{6}}.$$

22. Donat un nombre complex w diferent de zero, determineu per a quins complexos z diferents de w el quocient $\dfrac{z+w}{z-w}$ és un nombre real. Determineu també per a quins és imaginari pur.

23. Determineu a i b de forma que $\dfrac{3b-2ai}{4-3i}$ sigui real i de mòdul 1.

24. Descriviu geomètricament el conjunt dels nombres complexos z que satisfan cadascuna de les condicions següents:

a) $|z| = 2$; b) $|z| < \frac{1}{2}$; c) $|z| \leq 1$;

d) $z + \overline{z} = 1$; e) $z - \overline{z} = i$; f) $\overline{z} + z = |z|^2$.

25. Esbrineu l'error del raonament següent:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1.$$

26. Si z_1 i z_2 són nombres complexos, proveu:

a) $|z_1 - z_2| \leq (1 + |z_1|^2) + (1 + |z_2|^2)$;

b) si z_1 és no nul, llavors

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \frac{z_2}{z_1} \text{ és real i no negatiu.}$$

27. Demostreu la fòrmula de De Moivre, que diu que si n és un nombre enter, llavors

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

28. Resoleu l'equació $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\cos k\alpha + i\sin k\alpha) = 1$.

29. Calculeu les arrels setenes de la unitat.

30. a) Una de les arrels cúbiques d'un nombre complex és $3i$. Calculeu aquest nombre i les seves altres arrels cúbiques.

b) Sabent que $3i$ és una arrel n-èsima d'un nombre complex, calculeu aquest nombre i les seves altres arrels n-èsimes.

31. Demostreu que la suma de les arrels cúbiques de qualsevol nombre complex és zero.

32. Trobeu totes les arrels de l'equació $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.

33. Resoleu a $\mathbb{C}$ les equacions següents:

a) $z^2 + iz + 1 = 0$; b) $\overline{z} = z^{-1}$;

c) $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$; d) $z^3 + (1+i)z^2 + (i-2)z - 2i = 0$.

34. Determineu el complexos z tals que el seu quadrat és igual al seu conjugat.

35. Proveu la igualtat $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = 2\cos\frac{n\pi}{3}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

36. Determineu la relació entre a i b per tal que el complex $z = a + bi$ satisfaci la desigualtat

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{4}{\overline{z}}\right) < 1.$$

37. Demostreu que la suma dels quadrats de les tres arrels cúbiques complexes de qualsevol nombre real és zero.

38. Calculeu $1 + i + i^2 + \cdots + i^{43}$.

39. Siguin $1, \alpha, \alpha^2$ les arrels cúbiques de la unitat, proveu que $(1+\alpha^2)^4 = \alpha$.

40. Trobeu els nombres complexos que compleixen $z^{10} - 2z^5 + 1 = 0$.

41. Resoleu a $\mathbb{C}$ l'equació $z^5 - (4-4i)z = 0$.

42. Donats dos nombres qualssevol $x, y \in \mathbb{R}$, proveu que:

$$|x+y| = |x| + |y| \Longleftrightarrow x\,y \geq 0.$$

43. Trobeu els nombres complexos z que satisfan simultàneament les condicions següents:

$$|z-2| = 2,$$

$$|z-i| = 1,$$

$$|z+i| = 1.$$

44. Descriu el conjunt de punts $z = a+bi$ del pla complex que satisfan la igualtat $|z+2| = 2|z-1|$.

Funcions reals de variable real. Límits i continuïtat

1. Trobeu el domini de les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; b) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x-2|}}$;

c) $h(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 5x + 4)}{x - 6}$; d) $k(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{cosec} x}$;

e) $m(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}}$; f) $n(x) = \arcsin(x^3 + 1)$.

2. Doneu un exemple de funció definida a l'interval $[0, 1]$ que no estigui fitada.

3. Trobeu les inverses de les funcions següents als intervals on sigui possible:

a) $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; b) $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$;

c) $h(x) = \ln(3 + e^x)$; d) $k(x) = \operatorname{argsinh} \dfrac{x^2}{1 + x^4}$.

4. Demostreu les identitats següents:

a) $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

b) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$.

c) $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$.

d) $\tanh x + \tanh y = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh x \cosh y}$.

5. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció qualsevol, proveu que $f(x) - f(-x)$ és una funció senar.

6. Proveu que la funció $g(x) = \sin 2x + \sin x + \sin \dfrac{x}{2}$ és periòdica. Quin és el seu període?

7. Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$, trobeu la relació existent entre la gràfica de la funció $f(x)$ i les de $f(x) + \alpha$, $f(x + \alpha)$, $\alpha f(x)$, $f(\alpha x)$, $|f(x)|$ i $\max\{f(x), 0\}$.

8. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ definida en $[1, +\infty)$. Demostreu que és una contracció, és a dir, existeix $K \in (0,1)$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\,|x_1 - x_2|$ per a tot $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$.

9. Fent servir la definició de límit, demostreu que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$.

10. Fent ús de la definició de límit, proveu que:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \infty$.

11. Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + x^3 + x}{x^2 - 2x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{5x+3} - \sqrt{3x+5}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} (\cot x - \cot 2x)$;

g) $\lim\limits_{x \to (-2)} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x+3}\right)^{x+1}$;

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)} - 1}{x}$;

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x - 2}{\sin^2 x - 4 \sin x + 3}$;

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$;

k) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$;

l) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{(x-1)^2}$;

m) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x - 1}$;

n) $\lim\limits_{x \to y} \frac{x^n - y^n}{x - y}$;

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$;

p) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}\right)$.

12. Demostreu la continuïtat de les funcions següents a partir de la definició:

a) $f(x) = 3x^2 + 5x$; b) $f(x) = |x| + 10$.

13. Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{\sin^2(2x) \ln|x+2|}{x^3 + x^2}$.

14. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{6}{4+e^{1/x}}$;

c) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1})$;

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$;

e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin x}$;

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)}{\ln\left(1+\frac{x+3}{x^2+7}\right)}$;

h) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$.

15. Demostreu que si una funció és contínua també ho ha de ser el seu valor absolut, i doneu un exemple que il·lustri que el recíproc no és cert.

16. Doneu un exemple de dues funcions discontínues en el punt $x=-3$ tals que la seva suma sigui contínua a tot arreu.

17. Considereu les funcions següents:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x>0; \\ -x+1, & \text{si } x\le 0; \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x>1; \\ -10, & \text{si } x\le 1. \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat de $g\circ f$ en el punt 0. Contradiu això el teorema sobre la composició de funcions contínues?

18. Sigui $f(x)$ una funció tal que $|f(x)|\le|x|$ per a tot x real. Demostreu que $f(x)$ és contínua en zero.

19. Fent servir que $|\sin x|\le|x|$ per a tot $x\in\mathbb{R}$, demostreu que la funció $y=\sin x$ és contínua en zero. Tenint en compte ara que $\sin x-\sin u=2\sin\frac{1}{2}(x-u)\cos\frac{1}{2}(x-u)$, demostreu que és contínua en tot $\mathbb{R}$.

20. Direm que una funció és additiva si compleix $f(x+y)=f(x)+f(y)$ per a qualssevol $x,y\in\mathbb{R}$. Demostreu que una funció additiva que és contínua en zero ho és en tots els reals.

21. Sigui $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció que compleix $g(x+y)=g(x)g(y)$ per a tot $x,y\in\mathbb{R}$. Demostreu que si g és contínua en el zero ho és també en tots els altres punts de la recta real. Demostreu també que si existeix un nombre real a tal que $g(a)=0$ llavors $g(x)=0$ per a tot $x\in\mathbb{R}$.

22. Estudieu la continuïtat de les funcions següents:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament;} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament;} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament;} \end{cases} \qquad m(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x(x-1)}}, & \text{si } x > 1; \\ e^{\frac{-1}{x^2}}, & \text{si } x \leq 1; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

23. Traceu les gràfiques i trobeu els punts de discontinuïtat de les funcions:

$$f(x) = [x]; \qquad f(x) = [2\sin x];$$

$$f(x) = x - [x]; \qquad f(x) = \sin\frac{[x]}{2};$$

$$f(x) = [x] - [-x];$$

on $[r]$ indica la part entera del nombre r, és a dir, el nombre enter immediatament més petit o igual que r.

24. Trobeu quant ha de valer la funció següent en el punt 2 per tal que sigui contínua en tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 7x - 2}{3x - 6}, \qquad \text{si } x \neq 2.$$

25. Digueu per a quins valors de a és contínua la funció

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \leq 1; \\ 3 - a^2x^2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

26. Busqueu i classifiqueu els punts de discontinuïtat de les funcions següents:

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - x - 6}; \qquad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x};$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1; \\ 2, & \text{si } x = 1; \\ 2x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

27. Trobeu els valors A, B i C a fi que les funcions següents siguin contínues:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2; \\ A, & \text{si } x = 2; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ B, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5+3x^2+x}{x^2+1}, & \text{si } x \neq 0; \\ C, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

28. Demostreu que l'equació $\ln x = x^2 - 4x$ té almenys una solució real a l'interval $[1, +\infty)$

29. Demostreu que per algun $x \in \mathbb{R}$ es compleix la igualtat

$$x^{183} + \frac{567}{2 + x^4 + \cos^2 x} = 1.$$

30. Demostreu que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és una funció contínua, llavors existeix un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

31. Sigui $f : [a,b] \to [0, +\infty)$ una funció contínua. Demostreu que, donats n punts $x_1, \ldots, x_n$ de l'interval $[a,b]$, existeix un punt $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = (f(x_1) \cdots f(x_n))^{1/n}$.

32. Siguin f i g dues funcions contínues en $[a,b]$ tals que $f([a,b]) \subset g([a,b]) = [0,1]$. Demostreu que existeix $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

33. Sigui $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $f(0) = f(1)$. Demostreu que existeix un $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

34. Estudieu la continuïtat de les funcions següents en el punt 0:

$$\text{a) } f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{5 + e^{\frac{1}{x}}}; \qquad \text{b) } f(x) = \sin(\tfrac{1}{x}) + x.$$

35. Demostreu que l'equació $\sin x = x - 1$ té una solució real.

36. És possible aplicar el teorema de Bolzano a la funció $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ en l'interval $[-1, 1]$? Demostreu que l'equació $f(x) + \frac{1}{2} = 0$ té solució, i trobeu un interval de longitud menor o igual a $1/3$ que la contingui.

37. Trobeu les solucions de les equacions següents amb error més petit que 0.01:

a) $x^3 = 3x - 3$; b) $x = e^x - 2$;

c) $2x - \ln x = 4$; d) $2x^4 = 14x^2 - 14x + 1$.

38. Trobeu les assímptotes de les funcions següents:

a) $f(x) = xe^{1/x}$; b) $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$;

c) $f(x) = \cos x - \ln(\cos x)$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$.

39. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ per a $x \neq 0$. Es pot estendre per continuïtat a l'origen?

40. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} -3\sin x, & \text{si } x \leq -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{si } x \geq \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

escolliu a i b per tal que f sigui contínua en tots els punts de $\mathbb{R}$.

41. Siguin $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per

$$g(x) = 2^n f(x - n), \qquad \text{si } n \leq x < n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

a) Estudieu la continuïtat de g i doneu una condició sobre f necessària i suficient per tal que g sigui contínua.

b) Si $f(x) = ax + b$, digueu com han de ser a i b per tal que g sigui contínua.

42. Siguin $f_1(a)$ i $f_2(a)$ les dues arrels de l'equació $ax^2 + x - 2 = 0$. Són aquestes dues funcions contínues respecte el paràmetre a?

43. Demostreu que l'equació $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$ té quatre arrels reals.

44. a) Sigui f una funció contínua a tot $\mathbb{R}$ i periòdica de període p. Proveu que existeix $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = f\left(x_0 + \dfrac{p}{2}\right)$.
b) Fent ús de l'apartat anterior, proveu que un instant donat, hi ha dos punts oposats a l'equador de la Terra que tenen la mateixa temperatura.

45. Podem assegurar que la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ pren el valor 2.5 a l'interval tancat $[-2, 2]$?

46. Calculeu els límits seqüents:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x};$$

$$c)\ \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}; \qquad d)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1};$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; \qquad f)\ \lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2};$$

$$g)\ \lim_{x\to +\infty} (x^2+x^3)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

47. Quines de les funcions següents són fitades? Quins són els valors màxim i mínim que prenen?

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [0,5];$$

$$g(x) = \frac{3}{x+2}, \quad x \in [-3,2];$$

$$h(x) = x + [x], \quad x \in [-2,2].$$

48. Considereu les funcions següents:

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{si } x > 1, \\ x^2, & \text{si } x \le 1. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x/x, & \text{si } x > 0, \\ e^x, & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

a) Proveu que f i g són contínues a tot $\mathbb{R}$.

b) Està $g \circ f$ acotada a l'interval [-1, 2]?

c) Proveu que existeixen dos punts $x, y \in (1, e^2)$ tals que $f(x) = \pi/2$ i $f(y) = 3\pi/2$.

d) Fent ús de l'apartat anterior, proveu que existeix $z \in (1, e^2)$ tal que $(g \circ f)(z) = 0$.

49. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció periòdica de període T i contínua a l'interval tancat $[0, T]$. Aleshores:

a) Proveu que existeix un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = f(x_0 + 2T)$.

b) Proveu que f està acotada a tot $\mathbb{R}$.

50. Estudieu a $\mathbb{R}$ la continuïtat de la funció:

$$f(t) = \frac{\tan(t+1)\sin(t+1)}{|t^2-1|}.$$

51. Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x+2}, & \text{si } x < -2; \\ 1 + 2x - x^2, & \text{si } -2 \leq x < 3; \\ -3 + e^{3-x}, & \text{si } 3 \leq x. \end{cases}$$

52. Sigui $f(x) = \left(2\sin^2 x\right)^{1/\cos 2x}$, $\forall x \in [0, \pi/2] \setminus \{\pi/4\}$. Es pot estendre f per continuïtat al punt $x = \pi/4$?

53. Tot raonant les respostes, digueu quines de les afirmacions següents són certes:

a) Si f és una funció contínua, llavors existeix un real M tal que $f(x) \leq M$, per a tot x que pertany al domini de f.

b) Si f és una funció contínua en $[a, b]$, llavors existeix un $c \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$, per a tot $x \in [a, b]$.

c) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, llavors $f(x_0) > 0$.

Funcions reals de variable real. Derivabilitat

1. Calculeu, utilitzant la definició, la derivada de la funció $f(x) = \sin x$ en el punt $x = a$.

2. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demostreu que si $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ amb $\alpha > 1$, llavors f és derivable en zero, mentre que si f satisfà la condició $|f(x)| \geq |x|^\beta$ amb $0 < \beta < 1$ i $f(0) = 0$, llavors f no és derivable en zero.

3. Sigui f la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 2; \\ ax + b, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Determineu els valors de les constants a i b per tal que f sigui derivable en el punt $x = 2$.

4. Demostreu que si f és derivable en el punt $x = a$ llavors també ho és la funció $|f|$, sempre que $f(a) \neq 0$. Doneu un contraexemple pel cas que $f(a) = 0$.

5. Demostreu que si f és una funció contínua en $x = a$, aleshores la funció $F(x) = (x - a)f(x)$ és derivable en $x = a$. Quant val $F'(a)$?

6. Sigui g una funció contínua en l'origen. Proveu que la funció f definida per $f(x) = xg(x)$ és derivable en l'origen i trobeu $f'(0)$ en termes de g.

7. Trobeu f' en termes de g' en els casos següents:

a) $f(x) = g(x + g(a))$; b) $f(x) = g(x \cdot g(a))$;

c) $f(x) = g(x + g(x))$; d) $f(x) = g(x) \cdot (x - a)$;

e) $f(x) = g(a) \cdot (x - a)$.

8. Siguin f_1, f_2, g_1 i g_2 quatre funcions derivables en l'interval (a, b). Mitjançant el determinant següent, definim en (a, b) una nova funció F:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}.$$

Proveu que $F'(x)$ existeix per a tot $x \in (a, b)$ i que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}.$$

9. Calculeu i simplifiqueu les derivades de les funcions següents:

a) $y = \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

b) $y = \sin(\ln x)$;

c) $y = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

d) $y = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

e) $y = x^{x^{\ln x}}$;

f) $y = e^{\sin((2x)^{\frac{1}{3}})}$;

g) $y = \dfrac{2}{\sin a} \ln \dfrac{\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{a}{2}}{\tan \frac{x}{2} - \tan \frac{a}{2}}$;

h) $y = \ln \sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

10. Sigui $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$. Trobeu $f'(0)$.

11. Trobeu els valors de a, b, c per als quals les gràfiques de $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = x^3 - c$ es tallen al punt $(1, 2)$ i tenen la mateixa tangent en aquest punt.

12. Demostreu que per a tot $m \in \mathbb{R}$, la funció polinòmica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no té dues arrels en $[0, 1]$.

13. Sigui $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una funció contínua i derivable tal que $f'(x) \neq 1$ per a tot $x \in [0, 1]$. Demostreu que existeix un únic $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

14. Si f és una funció que posseeix tercera derivada finita en $[a, b]$ i si

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0,$$

demostreu que la tercera derivada també s'anul·la en un punt de l'interval (a, b).

15. Demostreu que si f i g són contínues en $[a, b]$ i derivables en (a, b) i $g'(x) \neq 0$ per a tot x de (a, b), llavors existeix algun x de (a, b) amb

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(b) - g(x)}.$$

16. Suposeu que f és derivable en $[a, b]$. Demostreu que si el mínim de f sobre $[a, b]$ està en a llavors $f'(a) \geq 0$ i que si està en b llavors $f'(b) \leq 0$.

17. Sigui f derivable tal que $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 0$. Proveu que $\lim_{x\to\infty} (f(3x+2) - f(x)) = 0$.

18. Demostreu que tota funció f definida en un cert interval $[a, b]$ i derivable en (a, b) que compleixi

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|^m$$

per a qualssevol x_1, x_2 i per a una certa constant $m > 1$ és una funció constant.

19. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua a l'interval $[a, b]$ i derivable a l'obert (a, b). Demostreu que existeix $t \in (a, b)$ tal que

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(b) & f(a) \end{vmatrix} = f(t) + tf'(t).$$

20. Demostreu les desigualtats següents:

a) $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$, si $x > 0$;

b) $\ln(1 + x^2) \leq x^2$, per a tot x;

c) $1 - \dfrac{a}{x} < \ln \dfrac{x}{a} < \dfrac{x}{a} - 1$, si $0 < a < x$.

21. Demostreu que si α i β són dos nombres diferents de l'interval $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ aleshores

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} \leq 1.$$

22. Calculeu, utilitzant la regla de l'Hôpital, els límits de les funcions següents:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\tan\frac{1}{x}}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

23. Raoneu perquè els límits següents no es poden calcular per la regla de l'Hôpital i calculeu-los per algun altre mètode:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$.

24. Estudieu si la funció següent és derivable a l'origen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

25. Estudieu si la funció següent és derivable a l'origen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

26. Resoleu pel mètode de Newton les equacions següents obtenint el resultat amb error més petit que 10^{-6}:

a) $x - \cos x = 0$;

b) $10^x = 6x + 30$;

c) $x^2 - 1 = \sin x$;

d) $x^x = 10$;

e) $5 \sin x = x + \dfrac{1}{x}$;

f) $xe^x = 1$;

g) $e^x = 5x + 10$,

h) $\ln x = 1 + \dfrac{1}{x}$;

i) $2x^2 - 10x + 10 + \cos \dfrac{x}{9} = 0$;

j) $x^4 - x - 3 = 0$.

27. Sigui $k \in \mathbb{R}$ i

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + kx, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Estudieu la derivabilitat de f.

b) Estudieu la continuïtat de f'.

28. Es considera la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Determineu a, b, c i d per tal que f sigui contínua i derivable a $\mathbb{R}$. És f dues vegades derivable a $\mathbb{R}$?

29. Sigui f una funció contínua al punt 0 tal que $\lim_{x \to 0} f(x)/x^2 = 2$, i sigui g una funció fitada. Demostreu que fg és derivable al punt 0 i calculeu $(fg)'(0)$.

30. Siguin f, g i h tres funcions derivables a tot $\mathbb{R}$, calculeu la funció derivada de $f\left(g\left(h^2(x+1)\right)\right)$ i $f\left(\dfrac{g(x)+1}{(g(x))^2+1}\right)$.

31. Proveu que l'equació $e^x = 1 + x$ té exactament una solució real.

32. Demostreu que existeix un únic $x \in (0, \pi/2)$ tal que $x = 1/\tan x$.

33. Estudieu el nombre d'arrels reals de la funció $f(x) = 2x^3 - 3bx^2 + 8$ segons els valors del paràmetre b. Per a $b = 3$, calculeu el valor aproximat de l'arrel més petita amb dues xifres decimals exactes.

34. Proveu la igualtat següent,

$$\arctan \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}x.$$

35. Fent ús del teorema del valor mitjà, calculeu

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{(x+1)^3 - 2} - \sqrt[3]{x^3 - 2}).$$

36. a) Siguin f i g dues funcions derivables en $\mathbb{R}$ tals que existeix $x_0 \in \mathbb{R}$ amb $f(x_0) = g(x_0)$ i $f'(x) \geq g'(x)$ per a tot $x > x_0$. Demostreu que si $x > x_0$ aleshores $f(x) \geq g(x)$.

b) Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que existeixen f' i f'' estrictament positives. Demostreu que $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Indicació: Apliqueu l'apartat a prenent com a g la recta tangent a f en el punt x_0.

37. Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x+2}, & \text{si } x < -2; \\ 1 + 2x - x^2, & \text{si } -2 \leq x < 3; \\ -3 + e^{3-x}, & \text{si } 3 \leq x. \end{cases}$$

a) Estudieu la seva derivabilitat.

b) Estudieu les seves asímptotes.

c) Proveu que existeix un únic $\alpha \in \mathbb{R}$ amb $\alpha < 0$ tal que $f(\alpha) = 3/4$.

38. Proveu que per a tot nombre natural n amb $n \geq 100$ es compleix la desigualtat

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{20}.$$

39. Proveu que existeix un únic $x \in (0, \pi/2)$ tal que $x = \cot x$.

El polinomi de Taylor i aplicacions

1. Trobeu l'equació de la paràbola que aproxima millor en el punt $(0,0)$ a la corba $f(x) = e^x \ln(x+1)$.

2. Quants termes s'han de prendre en el desenvolupament de Taylor de la funció $f(x) = \ln(1-x)$ per obtenir el valor de $\ln 0.75$ amb error més petit que 10^{-3} ?

3. Per a quins valors de x podem calcular $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ en lloc de e^x cometent un error menor que 10^{-4} ?

4. Trobeu el desenvolupament de Taylor d'ordre 3 de la funció $f(x) = e^{\sin x}$ en $x = 0$.

5. Fent ús de la fórmula de Taylor, desenvolupeu el polinomi $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ en potències de $(x-1)$. Feu el mateix per un altre mètode.

6. Trobeu el polinomi de Taylor de grau dos en 0 de la funció $f(x) = (c^3 + x)^{\frac{1}{3}}$, per a $c \neq 0$, i fiteu l'error comès en l'aproximació en el cas $c > 0$ i $x > 0$.

7. Fent ús dels polinomis de Taylor corresponents, calculeu $\sin 1$, $\sin \frac{1}{2}$ i e^2 amb un error més petit que 10^{-5}.

8. Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(ax)}{bx}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x \sin^2 x}$;

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cosh x - 1)\ln(1+x) - \frac{x^3}{2}}{x(\sin x - \arcsin x)}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos \frac{x}{2}}$.

9. Sigui f una funció contínua sobre l'interval $[0,1]$ tal que $f(0) = 0$ i $f'(x)$ és finita i creixent en l'interval $x \in (0,1)$. Proveu que si f és creixent en $(0,1)$ llavors també ho és la funció g definida per $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

10. Determineu els intervals de creixement i decreixement de cada una de les funcions següents i trobeu els seus extrems (en el cas que existeixin) en els dominis de definició:

a) $f(x) = \log(x^2 - 9), \quad |x| > 3;$

b) $f(x) = x^3 + ax + b, \quad x \in \mathbb{R};$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^4, \quad 0 \leq x \leq 1.$

11. Trobeu el màxim i el mínim de les funcions següents en els intervals corresponents:

a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$ en $[0, 3]$;

b) $f(x) = -\dfrac{1}{x} - 7$ en $[-5, 5]$;

c) $f(x) = \dfrac{5x^2}{4x-1}$ en $[-\frac{1}{3}, 2]$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+1}$ en $[-10, \frac{2}{5}]$.

12. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció dues vegades derivable en $\mathbb{R}$ que satisfà: $f(1) = 3, f(0) = 2$ i $|f''(x)| < 2$ per a tot $x \in (0, 1)$. Demostreu que f és estrictament creixent en un entorn de l'origen. Indicació: Utilitzeu la fórmula de Taylor de grau 1 de la funció f al voltant de l'origen.

13. Estudieu i representeu gràficament les funcions següents:

a) $y = (x-1)^2 \left(\dfrac{x+2}{2}\right)^3;$ b) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2};$

c) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2};$ d) $y = \dfrac{x}{x^{\frac{2}{3}} - 1};$

e) $y = \dfrac{x(x-1)}{x^2+1};$ f) $y = \dfrac{x}{(x-1)(x-3)};$

g) $y = e^{4x} - e^{2x};$ h) $y = x^3 e^{-x};$

i) $y = (x^2)^x;$ j) $y = \ln(x^3 - 3x + 2);$

k) $y = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2};$ l) $y = \dfrac{\sin(x+1) - 1}{x}.$

14. Sigui $f(x) = \alpha x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, on $\alpha > 1$.

a) És f derivable en 0?

b) Demostreu que f té un mínim en $x = 0$.

c) Demostreu que f no és creixent en cap interval del tipus $[0, b]$.

15. Trobeu un punt de la corba $y = 4 - x^2$ tal que la tangent a la corba per aquest punt determini amb els eixos un triangle d'àrea mínima al primer quadrant.

16. Calculeu l'àrea màxima d'un triangle isòsceles de perímetre 12.

17. Descomponeu el nombre 100 en dos sumands de manera que la suma dels seus cubs sigui mínima.

18. En un triangle isòsceles de base 6 i alçada 10 s'inscriu un altre triangle isòsceles de manera que les bases d'ambdós siguin paral·leles i el vèrtex del segon estigui en el punt mig de la base del primer. Calculeu les dimensions del que tindrà àrea màxima.

19. Donat un quadrat de costat l, separeu quatre petits quadrats en els seus vèrtexs, per tal de fabricar una capsa de base quadrada. Determineu quina és la capsa de volum màxim que es pot construir així.

20. Calculeu les dimensions del cilindre de volum més gran i àrea total igual a 300.

21. Una finestra té forma de rectangle amb un semicercle a sobre, el diàmetre del qual és igual a la base del rectangle. Si el perímetre total de la finestra és 2, trobeu les dimensions tals que la seva àrea sigui màxima.

22. D'entre tots els triangles rectangles d'àrea constant demostreu que el que té mínima la hipotenusa és l'isòscels.

23. Trobeu el punt de la corba $y = x^3$ més pròxim al punt $(0, 1)$.

24. Sigui $a, b \in \mathbb{R}$. Trobeu el nombre exacte de solucions de l'equació $\ln x = ax - b$. Indicació: En el cas $a > 0$, estudieu el màxim de la funció $f(x) = \ln x - ax + b$.

25. Demostreu que

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2} = e^{1/3}$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} = -\frac{1}{3}$.

26. Calculeu els límits següents:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}, \ (\beta \neq 0), \qquad \lim_{x\to a} \frac{\cos x \ln (x-a)}{\ln (e^x - e^a)}.$$

27. Donada la funció $f(x) = \sqrt{x+1}$:

a) Calculeu el polinomi de grau 4 de la funció f al voltant de l'origen.

b) Fent ús del polinomi de Taylor de grau dos, calculeu un valor aproximat de $\sqrt{1.02}$ i doneu una estimació de l'error comès.

28. Sense fer ús de la calculadora, digueu quin d'aquests dos nombres és més gran: 1000^{1000} o 1001^{999}. Indicació: Utilitzeu la funció $f(x) = (1000+x)^{1000-x}$.

29. Calculeu els extrems relatius de les funcions següents:

a) $f(x) = \ln \sqrt{2x^3 + 3x^2}$;

b) $g(x) = 1/\sqrt[3]{x^2 - 8x + 17}$.

30. Calculeu els extrems absoluts de la funció $f(x) = |\sin x| + x$ a l'interval $[0, 2\pi]$.

31. Dibuixeu la gràfica de la funció $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$.

32. Trobeu el nombre d'arrels reals del polinomi $P(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + b$, segons els valors del paràmetre b. Indicació: Estudieu la gràfica de la funció.

33. Sigui $g(x)$ una funció dues vegades derivable i estrictament positiva a $\mathbb{R}$. Definim la funció $f(x) = (1 + x - x^3)g(x)$. Es demana:

a) Estudiar el nombre d'arrels de $f(x)$.

b) Trobar els nombres reals tals que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

c) Demostrar que dins l'interval $(-1, 1)$ existeixen com a mínim dos punts amb $f'(x) = g'(x)$, i com a mínim un amb $f''(x) = g''(x)$

34. Sigui $g(x) = \dfrac{|\ln(1+\sin x)|}{x}$ per a tot $x \neq 0$.

a) Pot definir-se g al punt $x = 0$ de manera que sigui contínua?

b) Representeu gràficament la funció $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ i, a partir d'ella, representeu $h(x) = |\ln(1 + \sin x)|$.

c) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 5 de la funció f en un entorn del punt $x_0 = 0$.

d) Calculeu de tres maneres diferents el límit següent:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x^5}.$$

e) Demostreu que $1+\sin x \leq e^x$ per a tot $x \in [0, \pi/2]$.

35. A les dues de la tarda un cotxe passa pel punt kilomètric 400 de l'autopista A-7 a una velocitat de 70 Km/h. Deu minuts més tard passa pel punt kilomètric 425 d'aquesta mateixa autopista a una velocitat de 80 Km/h.

a) Proveu matemàticament que en algun instant la velocitat del cotxe és de 72 Km/h.

b) Fent ús del teorema del valor mitjà sobre la funció que mesura l'espai recorregut, proveu que en algun instant aquest cotxe ha superat la velocitat màxima permesa (120 Km/h.)

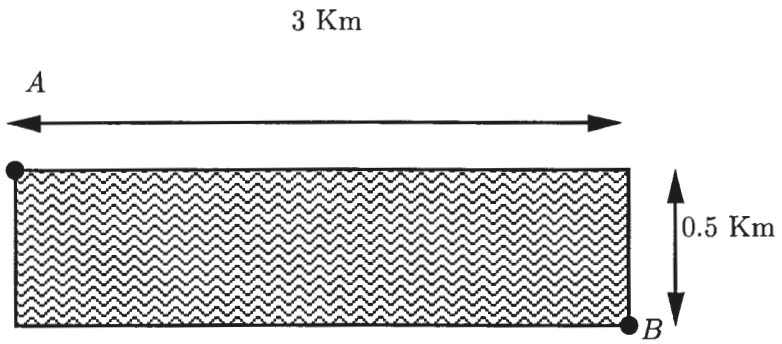
36. Raoneu la certesa o falsedat de l'afirmació següent:

Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua amb $f(0) = -1$ i $f(x) > x^2$ si $|x| > 3$. Aleshores existeixen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ que compleixen $f(a) = f(b) = 0$.

37. Calculeu el polinomi de Taylor de grau n en el punt $x = 0$ de la funció

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

38. Dos pobles A i B estan situats a diferents ribes d'un riu:

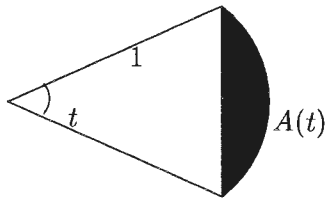


Un noi que viu a A té una amiga en el poble B i vol anar a veure-la en un temps mínim. Trobeu el camí óptim, sabent que el noi neda en línea recta a una velocitat uniforme de 3 Km/h., camina a una velocitat també uniforme de 5 Km/h. i surt del poble A sempre nedant.

39. Estudieu si el punt $x = 0$ és un extrem relatiu de les funcions següents:

$$a)\, f(x) = x^5 \sin^2 x, \qquad b)\, g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

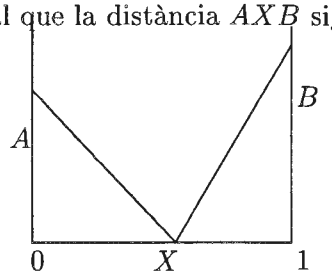
40. Sigui $A(t)$ l'àrea del segment circular següent:



a) Proveu que $A(t) = \frac{1}{2}(t - \sin t)$. *Indicació:* L'àrea d'un sector circular d'angle t i radi r és igual a $tr^2/2$.

b) Fent ús del polinomi de Taylor per a la funció $\sin t$, calculeu $A(0.1)$ amb un error més petit que 10^{-3}.

41. Trobeu el valor de $X \in [0,1]$ tal que la distància AXB sigui mínima.



42. Trobeu els valors reals de a i b pels quals la funció $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ té extrems en $x = 1$ i $x = 2$. De quin tipus són?

43. Fent ús dels polinomis de Taylor de les funcions $\sin x, \cos x$ i e^x, calculeu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\cos x + b\sin x + ce^x + d}{x^3} = 1.$$

Examen parcial 3.11.98

1. Determineu els reals dels conjunts següents:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x + 2 < 0\} \quad \text{i} \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x(x^2 - 3x + 2) < 0\}.$$

Són fitats els conjunts A i B? Existeixen el suprem, l'¡nfim, el màxim i el m¡nim d'aquests conjunts? En cas afirmatiu, calculeu-los.

2. Trobeu el nombre complex, $z = a + bi$, que sumant-li $\dfrac{3-i}{1+2i}$ el resultat tingui mòdul 4 i argument $\dfrac{\pi}{3}$.

3. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| - x^2}{x - x^2}\, e^{-x^2}, & \text{si } x \neq 0, 1; \\ A, & x = 0; \\ B, & x = 1. \end{cases}$$

a) Classifiqueu els punts de discontinuïtat d'aquesta funció.

b) Per a quins valors dels paràmetres la funció és cont¡nua en $x = 0$? I en $x = 1$?

c) Calculeu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

d) Què podeu concloure de la continuïtat d'aquesta funció?

Examen final 19.1.99

1. Quins nombres naturals n satisfan $(1+i)^n + (1-i)^n = 0$?

2. Avalueu $\ln(1.1)$ amb tres decimals exactes. (i.e.: $error \leq \frac{1}{2}10^{-3}$).

3. Sigui $f : [-1,1] \to [-1,1]$ definida per $f(x) = x^{2/3}$.

   a) Enuncieu el Teorema de Rolle.

   b) Feu un esquema de la gràfica de la funció. Proveu que $f(-1) = f(1)$.

   c) Existeix $c \in (-1,1)$ tal que $f'(c) = 0$? Per què no contradiu el teorema de Rolle?

4. La funció $H(p)$ definida per

$$H(p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p), \qquad 0 < p < 1,$$

   mesura el contingut en informació o entropia d'una font binària en què els valors de la font passen amb probabilitats p i $1-p$. (p.e.: el telègraf que transmet punts i ratlles).

   Proveu que el màxim fluxe d'informació per unitat de temps s'obté quan els valors p i $1-p$ tenen la mateixa proporció. (i.e.: $H(p)$ té un màxim en $p = 1/2$).

5. Estudieu la continuïtat i la derivabilitat en $x = 0$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Examen de recuperació 6.7.99

1. Quins nombres complexos z satisfan $z^5 + 243 = 0$?

2. Calculeu $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x/\sqrt{1-x^2})}{\ln(1+x)}$.

3. Avalueu $\sin(0.0435)$ amb vuit decimals exactes. (i.e.: $error \leq \frac{1}{2}10^{-8}$).

4. Demostreu que l'equació $3^{-x} = x$ té una única solució. Quina és la part entera d'aquesta solució?

5. Determineu a, b, c i d per tal que la funció $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tingui extrems relatius en els punts $(0,0)$ i $(1,-1)$.

6. Trobeu els intervals de creixement, concavitat i convexitat de la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{12 + x^2}.$$

Examen parcial 3.11.99

1. Determineu els reals dels conjunts següents:

$$S_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 + x < 6\ \} \quad \text{i} \quad S_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^3 \leq 1\ \}.$$

Són fitats els conjunts S_1 i S_2? Existeixen el suprem, l'ínfim, el màxim i el mínim d'aquests conjunts? En cas afirmatiu, calculeu-los.

2. Calculeu

$$\left(\frac{2+i}{3+4i} + \frac{2i}{3-4i}\right)^2, \quad \left|\frac{(3+4i)^5}{1+i\sqrt{3}}\right|, \quad \left(1+i\sqrt{3}\right)^{1/5}.$$

3. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2x^2}{x^2-1}, & \text{si } |x| > 1; \\ 1, & |x| = 1; \\ 1+\sqrt{1-x^2}, & |x| < 1. \end{cases}$$

a) Calculeu $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

b) Calculeu $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

c) Què podeu concloure de la continuïtat d'aquesta funció? Classifiqueu els punts de discontinuïtat.

Examen de recuperació 5.7.2000

1. Resoleu a $\mathbb{C}$ l'equació $z^5 - \sqrt{2}(8-8i)z = 0$.

2. Calculeu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}.$$
En aquest cas no podeu fer ús de la regla d'Hôpital, expliqueu perquè.

3. Sigui $f : [-1,5] \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Si $f(-1) < 0$ i
   a) $f(5) > 0$, demostreu que la funció $g(x) = f(x) + 5x$ té almenys un zero a $(-1,5)$.
   b) $f(5) = 7$, demostreu que la funció $g(x) = f(x) - 5$ té almenys un zero a $(-1,5)$.
   c) $f(5) > 0$, podeu afirmar amb seguretat que la funció $g(x) = f(x) - 5$ s'anul·la $(-1,5)$?

4. Determineu i classifiqueu el punts crítics de la funció
$$f(x) = e^{\,8x-a(x^2+16)}$$
segons els valors del paràmetre a ($a \in \mathbb{R}$). Té asímptotes? Calculeu-les en funció de a.

5. Valoreu l'error en la fórmula
$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$
mitjançant la fórmula de Taylor de e^x en el punt $x_0 = 0$.