PROBLEMES

DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA

ANÀLISI MATEMÀTICA 2

Albert Avinyó
José A. Lubary

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Diplomatura d'Estadística
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

ANÀLISI MATEMÀTICA 2
PROBLEMES

Curs 1999-2000.
Segon quadrimestre

Albert Avinyó
José A. Lubary

Departament de Matemàtica Aplicada II

Barcelona, gener 2000

Integració de funcions reals d'una variable real

1. a) Considereu el conjunt format per tots els nombres racionals de l'interval $[a, b]$. Formen una partició?

b) Donat l'interval $[a, b]$, construïu una partició que ens el divideixi en n subintervals de la mateixa longitud.

2. Demostreu que si P_ϵ és una partició que compleix que $U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) \leq \epsilon$ on ϵ és una constant positiva, llavors hi ha infinites particions complint la mateixa condició.

3. Sigui $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ on $a > 0$ una funció integrable. Demostreu que:

a) si f és una funció parella, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

b) si f és una funció imparella, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

4. Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció creixent. Si P_n denota la partició de $[a, b]$ en n subintervals de la mateixa longitud, demostreu que:

$$0 \leq U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

5. Esbrineu si és integrable a $[0, 2]$ la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ x = a + b\sqrt{3} \text{ on } a, b \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

6. Demostreu que la funció $f(x) = (e^x \sin x)/x^2$ és integrable a l'interval $[1, \pi]$ i proveu la desigualtat següent:

$$0 \leq \int_1^\pi \frac{e^x \sin x}{x^2}\,dx \leq e^\pi(\pi - 1).$$

7. Demostreu que si f és contínua, la funció g definida per $g(x) = \displaystyle\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\,dt \quad (\alpha > 0)$ és derivable en $\mathbb{R}$ i calculeu el valor de la seva derivada.

8. Demostreu que si f és contínua i $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt$ per a tot $x \in [0,1]$, aleshores $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

9. Sigui f una funció contínua a $\mathbb{R}$, derivable al punt x_0 i tal que $f(x_0) = 0$.

a) Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{(x-x_0)^2}$.

b) Si $x_0 = 0$, calculeu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} t^n f(t)\,dt}{x^{2n+4}}$ en funció de la derivada de f al punt 0.

10. Siguin f i g dues funcions contínues en $[a,b]$ tals que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Demostreu que existeix $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

11. Fent ús del Teorema Fonamental del Càlcul, calculeu les derivades de les funcions:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\sin t^2)\ln(1+t^2)\,dt; \qquad G(x) = \int_0^{\sin^2 x} \cos(\ln(2t^2))\,dt.$$

12. Sigui $f : (0,+\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

a) Proveu que f és estrictament creixent a $(0,1)$ i a $(1,+\infty)$.

b) Proveu que f és còncava a $(0,1)$ i a $(1,+\infty)$.

13. Proveu que no existeix cap $x_0 \in (0, 2\pi)$ tal que $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = x_0 \int_0^{2\pi} \sin x\,dx$. És això una contradicció amb el Teorema del Valor Mitjà per a integrals?

14. Trobeu una funció f definida en $[0,+\infty)$ tal que $\displaystyle\int_0^{x^2} (1+t)f(t)\,dt = 6x^4$.

15. Trobeu la paràbola que millor aproxima la funció

$$f(x) = e^x + \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^4+1}}\,dt$$

en un entorn del punt $x = 0$.

16. Sigui

$$F(x) = \int_{\sqrt{\pi x - x^2}}^{0} \sin t^2 \, dt$$

a) Trobeu el domini D de F.

b) Justifiqueu que F té extrems absoluts en D i trobeu-los.

17. Calculeu les integrals immediates següents:

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\, dx$; d) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\, dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$; f) $\displaystyle\int x 5^{2x^2}\, dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-16x^2}\, dx$.

18. Calculeu per parts:

a) $\displaystyle\int \ln x \, dx$; b) $\displaystyle\int e^{2x} \sin x \, dx$;

c) $\displaystyle\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$; d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$;

e) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$; f) $\displaystyle\int x \sin 2x \, dx$.

19. Calculeu les integrals racionals següents:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}\, dx$; b) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+2}{(x-1)^3}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^3}\, dx$; Ato lo Ruya's d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\, dx$; f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\, dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\, dx$.

20. Calculeu les integrals següents fent servir canvis de variable:

a) $\displaystyle\int x(5x^2-7)^{1028}\,dx;$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx;$

c) $\displaystyle\int x^{-1/2}\cot(\sqrt{x})\,dx;$ d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x^{1/3}}\,dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx;$ f) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx.$

21. Calculeu les integrals trigonomètriques següents:

a) $\displaystyle\int \tan^4 x\,dx;$ b) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos 6x\,dx;$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1-\tan x}\,dx;$ d) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos 3x}{9+\sin^2 3x}\,dx;$ f) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx.$

22. Calculeu les integrals irracionals següents:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx;$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx;$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+2}{x^3+x^2}}\,dx;$ d) $\displaystyle\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx;$ f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-\sqrt{x}}}\,dx.$

23. Trobeu l'àrea determinada per la intersecció dels cercles de centre $(0,0)$ i radi 1 i de centre $(1,0)$ i també radi 1.

24. Trobeu l'àrea determinada per la paràbola $y=x^2+7$ i la recta $y=10$.

25. Trobeu l'àrea que determina la intersecció de la circumferència $x^2+y^2=25$ i l'el·lipse $3x^2+\frac{1}{30}y^2=1$.

26. Considereu les paràboles $y=x^2$ i $y=x^2-4x+6$.

a) Proveu que la recta $y=x-1/4$ és tangent a totes dues.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per les dues paràboles i la recta $y=x-1/4$.

27. Trobeu el volum generat per la rotació de:

a) la regió del primer quadrant limitada per la paràbola $y^2 = 8x$ i la recta $x = 2$ al voltant l'eix d'abcises.

b) la regió limitada per la paràbola $y^2 = 8x$ i la recta $x = 2$ al voltant l'eix d'ordenades.

c) la regió limitada per la paràbola $y^2 = 8x$ i la recta $x = 2$ al voltant de la recta $x = 2$.

28. Trobeu el volum de l'el·lipsoide generat per la rotació de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ al voltant de l'eix d'abcises.

29. Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$; d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$;

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$; f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$; h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2}\,dx$;

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$; j) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx$;

k) $\displaystyle\int_0^{8} \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$; l) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

m) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; n) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x-\sin x}$;

o) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}\,dx$; p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x+1}\,dx$;

30. Considereu la funció definida per

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

a) Estudieu la continuitat i derivabilitat de F.

b) Digueu si la integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ és convergent.

c) Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{3x^2}$.

31. Si $y = f(x)$ és una funció monòtona i la integral impròpia $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ existeix, demostreu que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

32. Demostreu, per inducció, que per a tot $n \geq 0$ es té $n! = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^n\, dt$.

33. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^{-x}\sin x$.

a) Busqueu-ne els zeros i estudieu-ne el signe.

b) Trobeu l'àrea delimitada per la gràfica de la funció i l'eix OX entre dos zeros consecutius qualssevol de f.

c) Calculeu la suma de les n primeres àrees i, si S_n és aquesta suma, calculeu el límit de la successió (S_n).

d) Calculeu $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ i compareu el resultat amb el límit de l'apartat c. Coincideixen? Per què?

34. Es considera la funció $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t^4 - 1}{t^4 + 1}\,dt$.

a) Demostreu la divergència de la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^4 - 1}{t^4 + 1}\,dt$.

b) Observant el signe de l'integrand, demostreu que hi ha un nombre real positiu α tal que $f(\alpha) = 0$.

c) Proveu que f és una funció senar.

d) Estudieu la funció f i representeu-la gràficament. Podeu utilitzar les dades següents: $f(1) \simeq -0.734$, $f(2.157) = 0$ i el terme independent de l'asímptota de la funció per la dreta és -2.221.

35. Calculeu l'esperança i la variança de la distribució uniforme en l'interval $[a, b]$.

36. Calculeu l'esperança i la variança d'una variable amb distribució Normal(0,1).

37. Feu ús les fórmules dels trapezis i de Simpson per avaluar les integrals següents amb un error més petit que 10^{-3} (compareu les dels quatre primers apartats amb el resultat *exacte*):

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$;

b) $\displaystyle\int_1^2 \ln x \, dx$;

c) $\displaystyle\int_0^2 e^{-x} \, dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{1.6} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, dx$;

e) $\displaystyle\int_0^2 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} \, dx$;

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$;

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} \, dx$;

h) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 \, dx$;

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} \, dx$;

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x} \, dx$.

Successions de nombres reals

1. Siguin $a_n = -5n+10$ i $b_n = n^2$ dues successions de nombres reals. Calculeu el terme general i els cinc primers termes de les successions $(a_n)+(b_n)$, $-2(a_n)-5(a_n)$, $(a_n)(b_n)$ i $3(a_n)/(b_n)$. Justifiqueu perquè és possible dividir per la successió b_n.

2. Demostreu que dir que la successió (a_n) té per límit el valor a és equivalent a dir que per a tot $m \in \mathbb{N}$ existeix un n_0 tal que si $n \geq n_0$ llavors $|a_n - a| \leq \frac{1}{m}$.

3. Demostreu que si $x, y \in \mathbb{R}$ i $|x-y| \leq \frac{1}{n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, llavors $x = y$. Demostreu a partir de l'afirmació anterior que si una successió té límit aquest és únic.

4. Proveu que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ si, i només si, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Doneu un exemple per demostrar que la convergència de $(|a_n|)$ no implica necessàriament la de (a_n).

5. Sigui (a_n) una successió de reals tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 0$. Convergirà també a zero la successió (a_n)?

6. Demostreu que les successions de terme general $a_n = 1/(3n+1)$ i $b_n = 1/n - 1/(n+1)$ convergeixen cap a zero. Trobeu a partir de quin terme la distància al límit és més petita que ϵ amb $\epsilon = 5, 1, 0.03$.

7. Fent ús de la definició de límit, demostreu que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^p} = 0$, on $c \neq 0$ i $p > 0$ són dues constants;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$ si c és una constant que compleix $|c| < 1$.

8. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions de nombres reals.

a) Suposant que $(a_n + b_n)$ és convergent, demostreu que no necessàriament ho han d'ésser les successions (a_n) i (b_n).

b) El mateix que a l'apartat anterior en el cas que $(a_n \cdot b_n)$ sigui convergent.

9. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions convergents cap a $l \in \mathbb{R}$ i (t_n) una successió tal que $0 \leq t_n \leq 1$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} (t_n a_n + (1-t_n) b_n) = l\,.$$

10. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions creixents de nombres reals estrictament positius i $(a_n - b_n)$ una successió fitada. Demostreu que la successió $((a_n - b_n)/(a_n + b_n))$ és convergent.

11. Sigui (a_n) una successió de nombres reals tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$. Proveu que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

12. Sigui (a_n) una successió de nombres reals amb les parcials (a_{2n}), (a_{2n+1}) i (a_{3n}) convergents. Proveu que (a_n) és una successió convergent.

13. Sigui (a_n) una successió de termes positius. Definim una nova successió (b_n) de la manera següent: $b_{2n-1} = a_n$, $b_{2n} = a_n^2 - 6$, per a tot $n \geq 1$. Demostreu que la convergència de (b_n) implica la de (a_n) i calculeu-ne els límits respectius.

14. Doneu un exemple de successió divergent que compleixi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$. El mateix per a una successió convergent.

15. El mateix que en l'exercici anterior, però ara amb $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

16. Donada la successió (a_n), es defineix (σ_n) com la successió formada per les seves mitjes aritmètiques, és a dir, $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$. Estudieu la monotonia de (σ_n) quan la successió inicial és de termes positius i monòtona.

17. Calculeu els límits de les successions següents:

a) $\dfrac{6n^3 + 4n + 1}{2n}$; b) $\dfrac{n^2 - 6n - 2}{3n^2 - 9n}$;

c) $\sqrt{n\sqrt{n} - \sqrt{n}}$; d) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$;

e) $\dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$; f) $\dfrac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} - \dfrac{1}{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n}}$;

g) $\dfrac{\ln(e^n + e^{-n})}{n}$; h) $\dfrac{n^n}{n!}$;

i) $\dfrac{a^n}{\ln n!}$; j) $\left(\dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}\right)^{\frac{n^2+2}{n+1}}$;

k) $\dfrac{\sin n}{n}$; l) $\left(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

18. Sigui (a_n) una successió creixent de nombres reals positius. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_n^n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

19. Demostreu que la successió que té per terme general $a_n = (2n-7)/(3n+2)$ és monótona creixent, està fitada superiorment i inferior. Proveu també que (a_n) té límit finit.

20. Sigui (a_n) la successió definida per $a_{2n} = n$, $a_{2n+1} = n$. Estudieu si són certes les afirmacions següents:

a) (a_n) és estrictament creixent;

b) (a_n) és creixent;

c) (a_n) és decreixent;

d) (a_n) no creix ni decreix.

21. Sigui $a_1 > 1$ un nombre real donat. Definim $a_{n+1} = 2 - 1/a_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que (a_n) és monòtona i fitada. Calculeu el seu límit.

22. Demostreu que la successió de terme general

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad \text{per a tot } n \geq 1,$$

és convergent i doneu un interval de longitud menor o igual que $1/2$ dins el qual es trobi el valor del límit.

23. Considereu la successió definida per

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = -1 + \sqrt[3]{1 + 3a_n} \quad \text{per a tot} \quad n \geq 1.$$

a) Demostreu que els seus termes són estrictament positius.

b) Comproveu que $a_n = a_{n+1} + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^3/3$ per tot $n \geq 1$.

c) Demostreu que (a_n) és convergent i calculeu el seu límit.

Joder que palo!!

24. Calculeu els límits de les successions següents:

a) $\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{2n+1}}\right)^{\left(\frac{2n-1}{3n-1}\right)}$;

b) $\dfrac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}}$;

c) $\left(\dfrac{\ln na}{\ln nb}\right)^{\ln n}$;

d) $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}$;

e) $\left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}$;

f) $\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

h) $\left(\sqrt[5]{\dfrac{2n+3}{3n+4}}\right)^{\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}$;

i) $\dfrac{\sqrt{3n^3+2n+2}-\sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n}-\sqrt{n^3+n^2-3n}}$;

j) $\dfrac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\cdots+n\sqrt[n]{n}}{n^2\sqrt{n}}$;

k) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}+1}$;

l) $\sqrt[n]{a^n+b^n}\quad(0<a<b)$;

m) $\dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$.

25. Demostreu que la successió definida per la recurrència $a_1=\sqrt{k}$, $\quad a_n=\sqrt{k+a_{n-1}}$, amb $k>0$ és convergent.

26. Siguin $0<a_1<b_1$ dos nombres reals fixats. Per a tot $n\geq 1$, definim $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ i $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$. Demostreu que per a tot n es compleix $0<a_n<b_n$ i que les dues successions convergeixen cap al mateix límit.

27. Determineu per a quins naturals p la successió

$$a_n = \frac{(2n+1)^p - (1-2n)^p}{n^{p-1}+1}$$

és convergent i calculeu-ne el límit en cada cas.

28. a) Demostreu que per a $t \neq 0$ i $n > 0$ es compleix que

$$\sin t = 2^n \left(\cos\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2^2}\right)\cdots\left(\cos\frac{t}{2^n}\right)\left(\sin\frac{t}{2^n}\right).$$

b) Deduïu-ne que si $t \neq 0$ i $n > 0$, aleshores

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2^2}\right)\cdots\left(\cos\frac{t}{2^n}\right) = \frac{\sin t}{t}.$$

29. Trobeu la relació entre a i b per tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+2}\right)^{an+b} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+b}{n+1}\right)^{2n+a}.$$

30. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}.$$

31. Es diu que $a_n = o(b_n)$ si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$, i que $a_n \sim b_n$ si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$. Demostreu:

a) $n! = o(n^n)$;

b) $a^n = o(n!)$, amb $a > 1$;

c) $n^k = o(a^n)$, amb $k > 0$, $a > 1$;

d) $\ln n = o(n^k)$, amb $k > 0$;

e) $a_n \sim b_n$ no implica que $e^{a_n} \sim e^{b_n}$, ni que $\ln a_n \sim \ln b_n$, ni que $(a_n)^n \sim (b_n)^n$.

32. Calculeu $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}}$, sabent que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = k \in \mathbb{R}^+$.

33. La successió de Fibonacci (u_n) es defineix com $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ si $n \geq 1$ i $u_1 = u_2 = 1$.

a) Busqueu els sis primers termes d'aquesta successió.

b) Demostreu que l'enèsim terme ve donat per $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, on $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ i $b = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

c) Si definim $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, demostreu que $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

34. Sigui a un nombre positiu fixat. Triem $a_1 > 0$ tal que $a_1^2 > a$ i definim

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \qquad \forall n \geq 1.$$

a) Proveu que (a_n) és monòtona decreixent i que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

b) Si definim $\epsilon_n = a_n - \sqrt{a}$, demostreu que $0 < \epsilon_n < \dfrac{a_n^2 - a}{a_n}$ i que $\epsilon_{n+1} = \dfrac{\epsilon_n^2}{2a_n} < \dfrac{\epsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

c) Demostreu que, si $a > 1$, $\epsilon_{n+1} < 2\left(\dfrac{\epsilon_1}{2}\right)^{2^n}$ i que si $0 < a < 1$, aleshores es compleix $\epsilon_{n+1} < 2a\left(\dfrac{\epsilon_1}{2a}\right)^{2^n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Sèries de nombres reals

1. Una sèrie de nombres reals $\sum a_n$ es diu telescòpica si existeix una successió (b_n) tal que $a_n = b_n - b_{n+1}$. Suposant que $\sum a_n$ és telescòpica, demostreu que:

a) $\sum a_n$ és convergent $\Leftrightarrow$ (b_n) és convergent.

b) $\sum b_n$ és convergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ és convergent.

c) $\sum a_n$ és convergent $\not\Rightarrow$ $\sum b_n$ és convergent.

2. Sigui $\sum_{n\geq 1} a_n$ una sèrie convergent en la qual cada terme és igual a la suma de tots els termes que el segueixen. Demostreu que $\sum_{n\geq 1} a_n$ és una sèrie geomètrica i calculeu-ne la suma.

3. Sigui (a_n) una successió monòtona decreixent de nombres reals positius. Demostreu que $\sum a_n$ és convergent si, i només si, $\sum 2^n a_{2^n}$ és convergent (criteri de condensació) . Fent ús d'aquest criteri, estudieu el caràcter de les sèries que tenen per terme general:

a) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, on α és un nombre real arbitrari;

b) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^\alpha}$, on α és un nombre real arbitrari.

4. Estudieu la convergència de les sèries següents:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+3)}$; b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{4^n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$; f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\ln\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (n^{\frac{1}{n}}-1)^n$; j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\ln n}}$;

k) $\sum_{n\geq 1} n^3 e^{-n}$;

l) $\sum_{n\geq 1} p^n n^p \quad (p>0)$;

m) $\sum_{n\geq 1} \frac{4\cdot 7 \ldots (3n+1)}{n!}$;

n) $\sum_{n\geq 1} n^{\alpha} a^n \quad (a, \alpha \in \mathbb{R})$;

o) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n\alpha+1}{n\alpha}\right)^{n^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;

p) $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n}{n^4+2}}$.

5. Estudieu el caràcter de la sèrie següent segons els valors del paràmetre $a \geq -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{(n+3)!}.$$

6. Comproveu que la sèrie següent és convergent i trobeu-ne la suma:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots .$$

7. Es aplicable el teorema de Leibniz a la sèrie següent?

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

8. Estudieu el caràcter de les sèries alternades següents:

a) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$;

b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2n-3}{2n}$;

c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$;

d) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3}}$.

9. Determineu quines de les sèries següents convergeixen absolutament, i quines ho fan condicionalment.

a) $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n} + \ldots$;

c) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \ldots$;

d) $-1+\frac{1}{2^{\frac{1}{5}}}-\frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}+\ldots$.

10. Demostreu que si $\sum a_n$ convergeix absolutament, també convergeixen les sèries $\sum a_n^2$ i $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

11. Considereu la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ amb $a_n = -\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

a) Comproveu que si $a+b>1$, la sèrie és divergent.

b) Comproveu que si $a=2$ i $b=-1$, la sèrie és convergent. (Indicació: compareu-la amb la sèrie harmònica generalitzada).

c) En les condicions de l'apartat anterior, calculeu la suma de la sèrie.

12. Demostreu que la sèrie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$$

és convergent i calculeu la seva suma, tot observant que és telescòpica.

13. Demostreu la convergència de les sèries següents i calculeu-ne la suma.

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n-3^n}{5^n}$;

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3^{2n}}$;

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$;

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n+1}{3^n}$;

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$;

f) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

g) $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^4+n^2+1}$;

h) $\sum_{n\geq 0} \arctan \frac{1}{1+n(n+1)}$;

i) $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

j) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!a^n}{(1+a)\cdots(1+na)}$ $(0<a<1)$;

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n(3n^2-4n+5)}{n!}$, $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} = e^a\right)$.

14. Sigui (a_n) la successió definida per $a_n = \sqrt{1+2a_{n-1}} - 1$ si $n \geq 1$ i $a_0 = a > 0$.

a) Proveu que la successió té límit i trobeu-lo.

b) Trobeu la suma de la sèrie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^2$.

c) Trobeu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n$.

d) Estudieu el caràcter de la sèrie $\sum a_n$.

15. Calculeu el producte de convolució de una Poiss(λ) i una Poiss(μ) independents. Feu el mateix amb una Bin(n,p) i una Bin(m,p) independents.

16. Calculeu l'esperança i la variança de les distribucions Poiss(λ), geomètrica i hipergeomètrica.

17. Quants termes de les sèries següents hem de sumar a fi de poder assegurar un error menor que 10^{-6}?

a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n} + ...;$

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + ... + (-1)^n\dfrac{1}{n} + ...;$

c) $\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + ... + (-1)^n\dfrac{1}{n^2} + ...;$

d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + (-1)^n\dfrac{1}{n!} + ...$

18. Calculeu les sumes de las sèries següents amb error més petit que el nombre ϵ que es dóna en cada cas:

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n5^n}$, $\epsilon = 10^{-3}$; b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3}$, $\epsilon = 10^{-2}$;

c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n}{2^n\sqrt{n^2+1}}$, $\epsilon = 10^{-2}$; d) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{3^n-1}$, $\epsilon = 10^{-3}$;

e) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n!}{n^n}$, $\epsilon = 10^{-2}$; f) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n!}$, $\epsilon = 10^{-4}$.

Sèries de potències

1. Trobeu els radis de convergència de les sèries de potències $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ essent:

$$\text{a) } a_n = \frac{n!}{n^{n+2}}; \qquad \text{b) } a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n\,2^n}.$$

2. Trobeu els dominis de convergència de les sèries de potències següents:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2} - 1\right)^n ; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} (x-10)^n.$$

3. Trobeu els intervals de convergència de les sèries de potències següents:

a) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots;$

b) $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2} + \ldots;$

c) $3x + 3^4x^4 + 3^9x^9 + \ldots + 3^{n^2}x^{n^2} + \ldots;$

d) $x + \frac{2^k}{2!}x^2 + \frac{3^k}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n^k}{n!}x^n + \ldots.$

4. La funció de Bessel d'ordre zero es defineix com la suma de la sèrie de potències següent:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

a) Trobeu-ne l'interval de convergència.

b) Proveu la igualtat $xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0$, especificant en quins punts és vàlida.

5. a) Calculeu el radi de convergència de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$$

i estudieu el caràcter de la sèrie als extrems de l'interval de convergència.

b) Demostreu que per a tot $x \in [0,1)$ es compleix

$$\int_0^x \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Proveu, mitjançant el càlcul directe, que aquesta igualtat també és certa per a $x = 1$.

c) Determineu el domini de convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$$

6. Donada la funció $f(x) = \sqrt[3]{1+x^4}$, calculeu $f^{20}(0)$.

7. a) Desenvolupeu $\dfrac{1}{10+x}$ en sèrie de potències de x.

b) Desenvolupeu e^x en sèrie de potències de $x-2$.

c) Desenvolupeu e^{-x} en sèrie de potències de x.

d) Desenvolupeu $\cos x$ en sèrie de potències de $x - \dfrac{\pi}{4}$.

En els quatre casos anteriors calculeu el radi de convergència.

8. Si el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum a_n(x-c)^n$ és r, trobeu el radi de convergència de les sèries $\sum a_n^2(x-c)^n$, $\sum a_n(x-c)^{2n}$ i $\sum a_n^2(x-c)^{2n}$.

9. a) Determineu per quins valors reals de x convergeix la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$.

b) Calculeu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}$, fent ús de la funció suma de la sèrie de l'apartat a).

10. A partir del desenvolupament a l'entorn del zero de la funció $\ln(1+x)$ trobeu la suma de les sèries següents:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n}.$$

11. A partir del desenvolupament a l'entorn del zero de les funcions $\dfrac{1}{(1-x)}$, e^x i $\arctan x$, trobeu la suma de les sèries:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+2n-2)x^n; \quad \text{b)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+1}{n!} x^n; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} x^{2n}.$$

12. Calculeu les sumes de les sèries

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2x^n; \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}x^n; \qquad \text{c)} \sum_{n=3}^{+\infty}x^{5n+1}.$$

13. Per derivació, trobeu el desenvolupament en sèrie de potències de x de les funcions:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}), \qquad \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Quin és el seu radi de convergència?.

14. Integrant terme a terme el desenvolupament de la sèrie de $(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$, obteniu el desenvolupament en sèrie de la funció $y = \arcsin x$. Preciseu-ne el domini de convergència.

15. Amb l'ajut de sèries de potències, calculeu les sumes de les sèries numèriques següents:

a) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \cdots$

b) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \cdots$

c) $\dfrac{1}{2\cdot 1\cdot 3} + \dfrac{1}{2^2\cdot 2\cdot 4} + \dfrac{1}{2^3\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{1}{2^4\cdot 4\cdot 6} + \dfrac{1}{2^5\cdot 5\cdot 7} + \cdots$

d) $-\dfrac{2^3}{3^4} + \dfrac{2^4}{3^5\cdot 2} - \dfrac{2^5}{3^6\cdot 3} + \dfrac{2^6}{3^7\cdot 4} - \dfrac{2^7}{3^8\cdot 5} + \cdots$

e) $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{13} - \cdots$

16. Calculeu $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ amb error més petit que 10^{-5}.

17. Calculeu $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ amb error més petit que 10^{-3} fent ús del desenvolupament en sèrie de potències de e^{-x}.

18. Es considera la integral $I = \int_0^1 \sin x^2\,dx$.

a) Calculeu el valor de I amb un error més petit que 10^{-5} mitjançant la sèrie de Taylor.

b) Amb un pas $h = 0.25$ avalueu I amb la fórmula dels trapezis i la de Simpson.

Problemes de repàs

1. Trobeu les sumes inferior i superior de la funció $f(x) = x^2$ a l'interval $[-1, 0]$ associades a la partició $P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0\right\}$.

2. Sigui $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ excepte en un nombre finit de punts, on pren el valor $a > 0$, Demostreu que f és integrable Riemann.

3. Proveu que $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$.

4. Calculeu la integral definida, $\displaystyle\int_0^1 (|x| + |3x+1|)\,dx$.

5. Sigui $f(x) = x^3 + 1$. Calculeu $\displaystyle\int_2^9 (f^{-1})''(x)\,dx$.

6. Si f és contínua i $\displaystyle\int_0^1 f(xt)\,dt = 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, proveu que $f \equiv 0$.

7. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua en tot punt de $\mathbb{R}$. Definim:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0; \end{cases}$$

a) Proveu que F és contínua a tot $\mathbb{R}$.

b) Demostreu que F té derivada contínua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i doneu l'expressió de F'.

c) Proveu que l'existència de $f'(0)$ implica l'existència de $F'(0)$.

8. Sigui $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} e^{-t^2}\,dt$. Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$. Indicació: Apliqueu el teorema del valor mitjà per a integrals.

9. Feu un estudi, amb la seva representació gràfica, de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \int_x^{2x} \ln^2 t\, dt; \qquad \text{b) } g(x) = \int_0^{2x} \sin^2 t\, dt;$$

$$\text{c) } h(x) = \int_1^{e^x} t \ln t\, dt.$$

10. Siguin $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dues funcions contínues. Proveu que existeix $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) \int_c^b g(x)\, dx = g(c) \int_a^c f(x)\, dx.$$

Indicació: Apliqueu el teorema de Rolle a la funció $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \cdot \int_x^b g(t)\, dt$.

11. Trobeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}},$$

l'eix d'abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.

12. Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^2/2$, $y = x^2 - 2x + 5$ i l'eix d'ordenades.

13. Calculeu l'àrea limitada per la corba $y = |x^2 - 4x + 3|$ i les rectes $x = 0, x = 4$ i $y = 0$.

14. Considereu l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, amb $a > b > 0$. Quan s'obté un volum més gran: en fer-la girar al voltant de l'eix OX o en fer-la girar al voltant de l'eix OY?

15. Calculeu el volum del cos generat en girar respecte l'eix d'abcisses la corba $y = \frac{18x}{9+x^2}$.

16. Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents:

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx; \qquad \text{b) } \int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}\, dx;$$

$$\text{c) } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\, dx; \qquad \text{d) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x - x^3}}\, dx;$$

$$\text{e) } \int_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx; \qquad \text{f) } \int_{-1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{(2+x)^3}\, dx;$$

17. Sigui $f_n(x) = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots, \frac{1}{x^n}\right\}$, per a tot $x > 0$, i

$$M_n = \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

a) Proveu que M_1 és una integral impròpia divergent.

b) Proveu que M_n amb $n \geq 2$ és una integral impròpia convergent i $M_n = 2 - \frac{1}{n-1}$.

18. Trobeu el terme general de la successió

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{15}{16}, \frac{1}{16}, \ldots$$

i proveu que no té límit.

19. Sigui $a \in \mathbb{R}$ amb $0 < |a| < 1$ i $\{a_n\}$ una successió de nombres reals definida per $a_0 = 1$, $a_n = (1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^{2^n})$, per a tot $n \geq 1$.

a) Demostreu que per a tot $n \geq 1$ es compleix que $(1-a)a_n = 1 - a^{2^{n+1}}$.

b) Calculeu el límit d'aquesta successió.

20. Siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dues successions creixents de nombres reals estrictament positius i $\{a_n - b_n\}$ és una successió fitada. Demostreu que la successió $\{(a_n - b_n)/(a_n + b_n)\}$ és convergent.

21. Sigui $\{a_n\}$ una successió de termes positius que satisfà la condició $a_{n+1} \geq k\, a_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Si $k > 1$, proveu que la successió $\{a_n\}$ tendeix cap a $+\infty$.

22. Sigui $\{b_n\}$ una successió acotada que compleix la desigualtat

$$2\, b_n \leq b_{n+1} + b_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostreu que la successió $\{b_{n+1} - b_n\}$ és convergent.

23. Sigui $\{a_n\}$ la successió definida per $a_1 = k$, $a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$, $\forall\, n \geq 1$, on $k \in \mathbb{N}$.

a) Per a $k > 2$, demostreu que $\{a_n\}$ és decreixent i està acotada inferiorment. Calculeu el seu límit.

b) Per a $k = 1$, demostreu que $\{a_n\}$ és creixent i està acotada superiorment. Calculeu el seu límit.

24. Una successió no constant, pot tenir una subsuccessió constant?

25. Sigui $\{a_n\}$ la successió definida per $a_0 = 0, a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} \quad \forall n > 1$.

a) Proveu que $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Proveu que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

26. Sigui $\{a_n\}$ una successió acotada. Proveu que la successió $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ és convergent.

27. Proveu que la successió $\{a_n\}$ definida per $a_1 > 0$ i $a_n = 1/(ne^{a_{n-1}})$ si $n \geq 2$ és convergent. Calculeu el seu límit.

28. Calculeu:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} + a^{2/n} + \dots + a^{n/n}}{n}, \quad a > 0$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\tan\frac{1}{n^2+1} + \tan\frac{1}{n^2+2} + \dots + \tan\frac{1}{n^2+n}\right)$;

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\frac{e^{1/n} - e^{\sin 1/n}}{1 - n\sin 1/n}$;

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n}$;

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$.

29. Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals estrictament positius i k un nombre real. Proveu que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1^{1/k} + 2a_2^{1/k} + \dots + na_n^{1/k}}{\frac{n(n+1)}{k}}\right)^k = \left(\frac{k}{2}\right)^k \lim_{n\to\infty} a_n.$$

30. Es divideix el catet d'un triangle rectangle en n parts iguals. Cadascuna d'aquestes parts és la base d'un rectangle inscrit al triangle. Si S_n és la suma de les àrees d'aquests rectangles, calculeu $\lim_{n\to\infty} S_n$. Interpreteu el resultat.

31. Donades les sèries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} a^n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n},$$

a) determineu el seu caràcter;

b) trobeu-ne la suma, si és possible.

32. Demostreu que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$$

és convergent i trobeu-ne la suma.

33. Demostreu que la sèrie següent és convergent i trobeu-ne la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}.$$

34. Estudieu el caràcter de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{a^n + a^{-n}},$$

segons quins siguin els valors de $a \in \mathbb{R}$.

35. Estudieu el caràcter de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n \left(a + \frac{b}{n}\right), \quad 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

segons quins siguin els valors de $a, b \in \mathbb{R}$.

36. Acoteu l'error que es comet en substituir la suma de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$$

per la suma dels seus N primers termes.

37. Sigui la funció

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} (x+1)^n.$$

a) Trobeu el domini de f, és a dir, l'interval de convergència de la sèrie (estudieu també la convergència als extrems de l'interval).

b) Calculeu $f^{(4)}(-1)$ i $\int_{-1}^{0} f(t)\, dt$.

38. Calculeu el radi i l'interval de convergència de la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$.

39. Donada la funció $f(x) = \cosh x$. Trobeu el seu desenvolupament en sèrie de potències en un entorn de l'origen i calculeu el radi de convergència d'aquesta sèrie.

40. Donada la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n(n^2-n)}$.

a) Determineu tots els valors de $x \in \mathbb{R}$ pels quals la sèrie és convergent.

b) Comproveu que el desenvolupament en sèrie de potències centrada en $x = -2$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} \ln\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{x+2}{2}, & -4 \leq x < 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

c) Calculeu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Càlcul de primitives

1. CONCEPTES BÀSICS

Donada una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, direm que la funció $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una **primitiva** de f si i només si $g'(x) = f(x)$ per a tot x del domini de la funció f, i ho escriurem:

$$g(x) = \int f(x)\,dx.$$

També direm que g és una **integral** de f. A més, es compleixen les propietats següents:

a) Si g_1 i g_2 són dues primitives de f aleshores existeix un valor $K \in \mathbb{R}$ tal que $g_1 = g_2 + K$.

b) La integral d'una funció que està multiplicada per una constant és igual al producte d'aquesta constant per la integral de la funció.

c) La integral de la suma de dues funcions és igual a la suma de les integrals de cada una de les funcions.

2. INTEGRALS IMMEDIATES

Sigui u una funció derivable qualsevol i K un nombre real arbitrari, aleshores es compleix:

1. $\displaystyle\int u^r u'\,dx = \frac{u^{r+1}}{r+1} + K \quad (r \neq -1)$

2. $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + K$

3. $\displaystyle\int u'a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + K$

4. $\displaystyle\int u'e^u\,dx = e^u + K$

5. $\displaystyle\int u'\cos u\,dx = \sin u + K$

6. $\displaystyle\int u'\sin u\,dx = -\cos u + K$

7. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sin u}\,dx = \ln|\tan\frac{u}{2}| + K$

8. $\displaystyle\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \tan u + K$

9. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\cot u + K$

10. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx = \arcsin\frac{u}{a} + K$

11. $\displaystyle\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + K$

12. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-a^2}}\,dx = \operatorname{arg\,cosh}\frac{u}{a} + K$

13. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}}\,dx = \operatorname{arg\,sinh}\frac{u}{a} + K$

14. $\displaystyle\int \frac{u'}{a^2-u^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arg\,tanh}\frac{u}{a} + K$

3. **INTEGRALS PER CANVI DE VARIABLES**

Donada una funció u, sempre podem establir la igualtat següent:

$$\int u(x)\,dx = \int u(v(t))\,d(v(t)) = \int u(v(t))v'(t)\,dt,$$

on $x = v(t)$ i v és una funció contínua i derivable.

4. **INTEGRALS PER PARTS**

Si u i v són dues funcions derivables, aleshores es compleix:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

5. **INTEGRALS RACIONALS**

En aquesta secció estudiarem integrals de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis a coeficients reals Obsevem que si $\operatorname{grau} P(x) \geq \operatorname{grau} Q(x)$, efectuant la divisió $P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x)$ amb $\operatorname{grau} R(x) < \operatorname{grau} Q(x)$, la integral racional queda

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Per tant només cal considerar el cas que $\operatorname{grau} P(x) < \operatorname{grau} Q(x)$. En aquesta situació podem distingir quatre casos:

5.1 Arrels reals simples: $Q(x) = (x-a)(x-b)\ldots$. Aleshores

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\ldots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots$$

5.2 Arrels reals múltiples: $Q(x) = (x-a)^n(x-b)^m\ldots$, aleshores

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)^m\ldots} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \\ + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \ldots$$

5.3 Arrels complexes simples: $Q(x) = ((x-a_1)^2 + b_1^2)((x-a_2)^2 + b_2^2)\ldots$, aleshores

$$\frac{P(x)}{((x-a_1)^2 + b_1^2)((x-a_2)^2 + b_2^2)\ldots} = \frac{A_1x + B_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \frac{A_2x + B_2}{(x-a_2)^2 + b_2^2} + \ldots$$

5.4 **Arrels complexes múltiples:** $Q(x) = ((x-a_1)^2+b_1^2)^{m_1}((x-a_2)^2+b_2^2)^{m_2}\ldots$, aleshores

$$\frac{P(x)}{((x-a_1)^2+b_1^2)^{m_1}((x-a_2)^2+b_2^2)^{m_2}\ldots} =$$

$$\frac{A_1x+B_1}{((x-a_1)^2+b_1^2)}+\cdots+\frac{A_{m_1}x+B_{m_1}}{((x-a_1)^2+b_1^2)^{m_1}}+\frac{C_1x+D_1}{((x-a_2)^2+b_2^2)}+\cdots+\frac{C_{m_2}x+D_{m_2}}{((x-a_2)^2+b_2^2)^{m_2}}+\ldots$$

En tots aquests casos, les constants es troben mitjançant el **mètode dels coeficients indeterminats**, és a dir, primer es fa comú denominador al segon membre (llavors tenim el mateix denominador que en el primer membre) i després s'igualen els numeradors de forma que els coeficients dels termes de mateix grau siguin iguals.

Un mètode alternatiu, una vegada s'han igualat els numeradors, és donar valors a la incògnita de forma que alguns termes s'anul·lin.

Si les arrels del denominador són complexes múltiples, és més convenient fer servir el **mètode d'Hermite:**

5.5 **Mètode d'Hermite**

Considerem la descomposició següent:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx \qquad (*)$$

on $Q_1(x) = m.c.d.(Q(x), Q'(x))$ i $Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x)$. $P_1(x)$ i $P_2(x)$ són polinomis amb coeficients indeterminats i d'un grau menor que el del seu denominador. Per determinar els coeficients dels polinomis $P_1(x)$ i $P_2(x)$, derivarem la igualtat (*).

Exemple: Calculem $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

Si descomponem el denominador $Q(x)$, obtenim.

$$(x^3-1)^2 = (x-1)^2(x^2+x+1)^2.$$

Així el denominador $Q(x)$ admet una arrel complexa amb multiplicitat dos. La derivada del denominador és $Q'(x) = 6x^2(x^3-1)$ i, per tant

$$m.c.d.(Q(x), Q'(x)) = Q_1(x) = x^3-1, \quad Q_2(x) = x^3-1.$$

D'aquesta manera tindrem que

$$I = \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}\,dx.$$

Derivant obtindrem,

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}.$$

Per tant,

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^3-1),$$

o bé,

$$1 = -Dx^5 + (-A+E)x^4 + (-2B+F)x^3 + (-3C-D)x^2 + (-2A-E)x + (-B-F).$$

Així,

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ -A+E &= 0 \\ -2B+F &= 0 \\ -3C+D &= 0 \\ -2A-E &= 0 \\ -B-F &= 1 \end{aligned}$$

Sumant la $2a$. amb la $5a$., obtindrem $-3A = 0$,
És a dir: $A = 0$ i, aplicant la $2a$., $E = A = 0$.
Sumant la $3a$. amb la $6a$., obtindrem $-3B = 1$,
I, per tant, de la $3a$.: $F = 2B = -2/3$.
De la $1a$. i la $4a$., en deduïm $D = C = 0$.

En conseqüència,

$$I = \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}.$$

Fixem-nos que el mètode d'Hermite ens ha permès passar d'una integral, on el denominador tenia arrels complexes amb multiplicitat superior a 1, a una altra integral, on les arrels complexes són de multiplicitat 1, com les estudiades en els casos anteriors.

6. INTEGRALS TRIGONOMÈTRIQUES

En aquesta secció estudiarem integrals del tipus

$$\int F(\sin x, \cos x)\, dx,$$

on F és una funció racional. Distingim els casos seguents:

6.1 Si $F(-\sin x, \cos x) = -F(\sin x, \cos x)$, fem el canvi $t = \cos x$ i aleshores tindrem

$$dt = -\sin x\, dx, \quad \cos x = t, \quad \sin x = \sqrt{1-t^2}.$$

6.2 Si $F(\sin x, -\cos x) = -F(\sin x, \cos x)$, fem el canvi $t = \sin x$ i aleshores tindrem

$$dt = \cos x\, dx, \quad \sin x = t, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}.$$

6.3 Si $F(-\sin x, -\cos x) = F(\sin x, \cos x)$, fem el canvi $t = \tan x$ i aleshores tindrem

$$dt = (1+t^2)\, dx, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

6.4 Si F no es troba en cap dels tres casos anteriors, fem el canvi $t = \tan(x/2)$ i aleshores tindrem:

$$dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

6.5 En algun d'aquests casos es pot reduir el grau de F fent ús de les fórmules:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

6.6 Integrals de funcions trigonomètriques d'altres tipus com

$$\int \sin ax \cos bx\, dx, \qquad \int \sin ax \sin bx\, dx, \qquad \int \cos ax \cos bx\, dx$$

es transformen en integrals immediates mitjançant les fórmules:

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$2\cos A \cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$

$$2\sin A \cos B = \sin(A-B) + \sin(A+B)$$

7. INTEGRALS IRRACIONALS

El cas general no està resolt. Aquí només veurem els casos més senzills.

7.1 Les integrals del tipus

$$\int F\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx,$$

on F és una funció racional i $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ són fraccions irreductibles, es transformen en integrals racionals mitjançant el canvi $y^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ amb $n = m.c.m.(q_1, \ldots, q_k)$.

7.2 Les integrals del tipus

$$\int F(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx,$$

on F és una funció racional, es transformen amb el canvi $x = a \sin t$ o bé fent servir el canvi hiperbòlic $x = a\text{tagh}\, t$.

7.3 Les integrals del tipus:

$$\int F(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx,$$

on F és una funció racional es transformen fent ús dels canvis $x = a \cosh t$ o $x = a \sec t$.

7.4 Les integrals del tipus

$$\int F(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx,$$

on F és una funció racional es modifiquen mitjançant els canvis $x = a \sinh t$ o $x = a \tan t$.

1. Siguin $\alpha > 0$ i $f(x) = |x+\alpha| - |x|$. Calculeu $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$.

2. Donada la funció $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$.

   a) Proveu que F és creixent a l'interval $[1, +\infty)$.

   b) Proveu que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$ és divergent.

   c) Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{e^{x^3}}$.

3. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la corba $y = (x^2 - x)e^{-x}$ i el semieix positiu d'abcises.

Examen final 21.05.97

1. Calculeu
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt}.$$

2. Sigui $a > 0$. Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = a^2 x e^{-ax}$ i el semieix positiu d'abcises.

3. Sigui (a_n) una successió de termes positius convergent cap a un nombre real $a \neq 0$.

   a) Proveu que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ és convergent.

   b) Per a quins valors de $a \neq 10$ la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n 10^{-n}$ és convergent?

4. Donada la funció
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \in (0,1], \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   a) Proveu que f és Riemann-integrable en $[0,1]$.

   b) Fent ús del desenvolupament de Taylor per a la funció $\sin x$, calculeu $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ amb un error menor que 10^{-3}.

5. Donada la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)e^n}$:

   a) Calculeu el seu domini de convergència.

   b) Calculeu la seva suma.

Examen de recuperació 10.07.97

1. Calculeu el volum del cos generat en girar la corba $y = 18/(9 + x^2)$ respecte el semieix d'abcises positives.

2. a) Sigui $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funció contínua que compleix

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

Proveu que $f(x) = 0$ per a tot $x \in [0,1]$.

b) Sigui f una funció derivable i monòtona i G una primitiva de f^{-1}. Comproveu que la funció $F(x) = xf(x) - (G \circ f)(x)$ és una primitiva de f.

3. Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

a) Si $\sum a_n$ és una sèrie divergent de termes positius aleshores la sèrie $\sum a_n/n^2$ és també divergent.

b) Si (a_n) és una successió acotada aleshores la sèrie $\sum a_n/n^2$ és convergent.

4. Proveu la igualtat

$$\frac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n,$$

per a tot $x \in (-1,1)$.

5. a) Calculeu el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n.$$

b) Calculeu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}.$$

Examen parcial 31.03.98

1 Sigui f una funció contínua a $\mathbb{R}$ i periòdica amb període T.

a) Demostreu que $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ és una funció constant.

b) Sigui $g(x) = f(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Proveu que

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

és periòdica de període T.

2 Calculeu el volum del cos generat quan la regió limitada per $x = 0$, $x = 2$ i la corba $y = 1/(x-1)^2$ gira al voltant de l'eix d'abcises.

3 a) Demostreu que la successió definida per $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ no és convergent. Té alguna subsuccessió convergent?

b) Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n}}{n}.$$

1. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i tal que $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Proveu que $f(0) = f(1) = 0$.

2. Calculeu, si existeix, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{3e^x + e^{-x}}\,dx$.

3. Sigui $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ una funció decreixent i positiva. Definim

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \int_1^n f(x)\,dx.$$

a) Proveu que la successió (a_n) és decreixent.

b) Proveu que la successió (a_n) és convergent i que el seu límit està a l'interval $[0, f(1)]$.

c) Si $f(x) = 1/2^x$, calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. Estudieu, segons el valor del paràmetre $a \in \mathbb{R}$, la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2 + n^a}{1 + n^a}\right).$$

Indicació: Compareu-la amb l'harmònica generalitzada.

5. Donada la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

a) Calculeu el seu domini de convergència.

b) Proveu que la seva suma és $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2}\arctan x$.
Indicació: Feu ús dels desenvolupaments següents:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Examen de recuperació 07.07.98

1. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i definim

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt, & \text{si } x \neq 0, \\ f(0), & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

Proveu que F és contínua a tot $\mathbb{R}$.

2. Calculeu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\sin(1/n)}{n}\right)^{n^2}$.

3. Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = -2/3$ i $3a_{n+1} = 2 + a_n^3$ si $n \geq 1$.

a) Proveu que $-2 \leq a_n \leq 1$, per a tot $n \geq 1$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

4. Sigui $\{a_n\}$ una successió de termes positius tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{an+b}{an+c}, \qquad \text{per a tot } n \geq 1,$$

on a, b, c són nombres reals estrictament positius i $a + b - c \neq 0$. Estudieu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ segons els valors de a, b, c.

5. a) Proveu que per a tot $n \geq 0$ es compleix que

$$\int_0^1 (-x)^n \ln x\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

b) Fent ús de la sèrie de potències de la funció $g(x) = 1/(1+x)$, proveu que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-x)^n \ln x\, dx.$$

c) Useu els dos apartats anteriors per provar que la integral impròpia

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx$$

és convergent i calculeu el seu valor amb un error menor que 10^{-2}.

1. a) Enuncieu el teorema fonamental del càlcul.

   b) Siguin $F(x) = \int_0^{x+a} \arctan t^2\, dt$ i $G(x) = \int_{a-x}^{0} \arctan t^2\, dt$. Calculeu el valor del paràmetre real a per tal que $F'(x) = G'(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

2. Sigui $I_n(x) = \int x^{2n} \sin x\, dx$, proveu que
$$I_n(x) = -x^{2n} \cos x + 2nx^{2n-1} \sin x - 2n(2n-1)I_{n-1}(x).$$

3. Es defineixen les funcions sinus i cosinus hiperbòlic de la manera següent:
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
Calculeu l'àrea de la regió del primer quadrant limitada per l'eix 0Y i les corbes $y = \sinh x$, $y = \cosh x$.

Examen final 03.06.99

1. Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty]$ i $\lim_{x\to\infty} xf(x) \neq 0$, deduïu que la integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ és divergent.

2. Calculeu el volum del cos de revolució obtingut en girar al voltant de l'eix $0X$ la corba $y = e^x \sin x$ entre $x = 0$ i $x = 2\pi$.

3. Siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dues successions tals que $\{b_n\}$ és acotada i
$$|1 + 4a_n - \frac{b_n}{n}| \leq \frac{1}{n}\sin n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Calculeu $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4. Siguin a i b dos nombres reals. Demostreu que la sèrie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n}\right)$$
convergeix si i només si $a = b$.

5. Sigui $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^9}$.

   a) Proveu que la sèrie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ és convergent i calculeu fins a quin terme cal sumar per tal que la diferència amb la suma exacta sigui inferior a 10^{-3}.

   b) El mateix per a la sèrie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$

6. Considereu la sèrie de potències $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)}{3^n} x^n$.

   a) Trobeu tots els valors $x \in \mathbb{R}$ tals que la sèrie és convergent.

   b) Trobeu la seva funció suma i calculeu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(n+2)}{3^n}$.

Examen de recuperació 08.07.99

1. Calculeu l'àrea de la regió del primer quadrant limitada per la paràbola $y = x^2 + 2x - 2$, la corba $y = 1/x^2$ i l'eix d'abcises.

2. Calculeu el valor de $a \in \mathbb{R}$ sabent que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+a)}{\ln n} \right)^{n \ln n} = 2.$$

3. Estudieu la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)},$$

segons quin siguin els valors de $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

4. Donada la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n(n^2-n)}$:

a) Trobeu el radi de convergència.

b) Determineu l'interval de convergència.

c) Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n(n^2-n)}$, calculeu $f(-4)$ amb un error menor que 10^{-2}.