Problemes

DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA

ANÀLISI MATEMÀTICA 1

A.Avinyó
J.A.Lubary

FACULTAT DE DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

Títol : Problemes d'Ànalisi Matemàtica 1 - Curs 96/97 1Q.
Autors : Albert Avinyó
José A. Lubary
Dipòsit Legal : B.36951 - 1996
Imprès per : REPRO BARNA, S.L.
C/. Entença 16-18. 08015 Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

ÀNALISI MATEMÀTICA 1 (PROBLEMES)

Curs 1996-97. Primer quadrimestre

Albert Avinyó
José A. Lubary
Departament de Matemàtica Aplicada II

Barcelona, setembre 1996

1. Nombres reals i complexos

1. Escriviu les expressions següents prescindint dels valors absoluts:

a) $|x-y|-|x|$; b) $|x|-|x^2|$;

c) $\big||x|-1\big|$; d) $x-\big|x+|x|\big|$.

2. Trobeu els nombres x tals que:

a) $|x-3|=2$; b) $|x-1|+|x+3|=4$;

c) $|x+1|<4$; d) $|x+1|+|x+2|<2$;

e) $|2x+7|\geq 3$; f) $|x-1|+|x+1|=0$;

g) $|x-1||x+2|=3$; h) $|x+1||x-2|=-(x+1)(x-2)$.

3. Demostreu que:

a) $\big||x-y|-|y-z|\big|\leq|x-z| \quad \forall x,\, y,\, z\in\mathbb{R}$;

b) $\text{màx}\,\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2} \quad \forall a,\, b\in\mathbb{R}$;

c) $\text{mín}\,\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2} \quad \forall a,\, b\in\mathbb{R}$.

4. Resoleu les inequacions següents:

a) $\left|\dfrac{2x-2}{x+4}\right|<1$; b) $1\leq\left|\dfrac{x^2-5x+6}{x+2}\right|<2$;

c) $|3x-5|-|2x+3|>0$; d) $|x^2-5x|>|x^2|-|5x|$.

5. Resoleu les desigualtats següents:

a) $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{x+3}$; b) $\dfrac{x-1}{x+1}\leq\dfrac{x+1}{x-1}$.

6. Feu una demostració directa, una pel contrarrecíproc i una per reducció a l'absurd de l'afirmació següent: $n^2\in\mathbb{N}$ senar $\Longrightarrow$ n senar.

7. Trobeu:

a) La representació decimal de $19/8$ i $23/29$.

b) Els nombres racionals que tenen per representació decimal $2.3\overline{292}$ i $0.\overline{917}$.

8. Si a,b són racionals i α, β són irracionals, digueu com són $a+b$, $\alpha+\beta$, ab, $\alpha\beta$, $a\alpha$ i $a+\alpha$. Expliqueu el motiu d'aquest fet i doneu exemples de nombres irracionals que sumats i multiplicats siguin racionals.

9. Un mòbil recorre un quadrat de vèrtex A,B,C i D amb velocitat constant i un altre mòbil es mou sobre la diagonal AC amb la mateixa velocitat, fent moviment d'anada i tornada. Si en un moment donat els dos mòbils coincideixen en el punt A, demostreu que no es tornen a trobar.

10. a) Si m/n i p/q són racionals diferents, aleshores proveu que $\dfrac{m}{n}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{p}{q}-\dfrac{m}{n}\right)$ és irracional.

b) Fent ús de l'apartat anterior, proveu que entre dos racionals diferents sempre hi ha un irracional.

11. Trobeu el suprem i l'ínfim, si existeixen, dels conjunts següents:

a) $E_1 = \{1,2,3\}$, b) $E_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 2\}$,

c) $E_3 = \mathbb{R}^+$, d) $E_4 = \{x \in (0,1) :$ el desenvolupament decimal de x no té nous$\}$.

12. Fent ús de la propietat arquimediana, proveu que el suprem del conjunt definit per $\{(n-1)/2n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ és $1/2$.

13. Donats dos subconjunts A i B de $\mathbb{R}$ definim:

$$A+B = \{\, x+y \,|\, x \in A, y \in B\}$$

$$AB = \{\, xy \,|\, x \in A, y \in B\}$$

Demostreu:

a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

b) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

c) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

d) $\sup(AB) \neq \sup A \cdot \sup B$

14. Expresseu els nombres complexos següents de la forma $a + bi$:

a) $(1+3i)^3$; b) $\dfrac{2+3i}{3-4i}$;

c) $i^5 + i^{16}$; d) $\dfrac{\frac{1}{2}(1+i)}{1+i^{-8}}$.

15. Siguin z, z_1 i z_2 tres nombres complexos. Comproveu que es satisfan les propietats següents:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$; b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$;

c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$; d) $z + \overline{z} = 2a \quad (a = Re(z))$;

e) $\dfrac{z - \overline{z}}{i} = 2b \quad (b = Im(z))$.

16. Calculeu el conjugat d'un nombre complex expressat en forma polar.

17. Efectueu les operacions indicades:

a) $\dfrac{2-3i}{(2+3i)(1+i)} - \dfrac{3+i}{4(2-i)}$; b) $(1+i)^{53}$;

c) $(1 - i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}$; d) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$;

e) $(1-i)^{\frac{5}{4}}$; f) $(-1)^{\frac{1}{6}}$.

18. Descriviu geomètricament el conjunt dels nombres complexos z que satisfan cadascuna de les condicions següents:

a) $|z| = 2$; b) $|z| < \frac{1}{2}$; c) $|z| \leq 1$;

d) $z + \overline{z} = 1$; e) $z - \overline{z} = i$; f) $\overline{z} + z = |z|^2$.

19. Donat un nombre complex w diferent de zero, determineu per a quins complexos z diferents de w el quocient $\dfrac{z+w}{z-w}$ és un nombre real. Determineu també per a quins és imaginari pur.

20. Determineu a i b de forma que

$$\frac{3b - 2ai}{4 - 3i}$$

sigui real i de mòdul 1.

21. Esbrineu l'error del raonament següent:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1.$$

22. Determineu la relació entre a i b per tal que el complex $z = a+bi$ satisfaci la desigualtat

$$Re\left(\frac{2}{z}\right) + Im\left(\frac{4}{\bar{z}}\right) < 1.$$

23. Si z_1 i z_2 són nombres complexos, proveu:

a) $|z_1 - z_2| \leq (1 + |z_1|^2) + (1 + |z_2|^2)$;

b) si z_1 és no nul, llavors

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \frac{z_2}{z_1} \text{ és real i no negatiu.}$$

24. Demostreu la fórmula de De Moivre, que diu que si n és un nombre enter, llavors

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

25. Resoleu l'equació

$$\prod_{k=1}^{n}(\cos k\alpha + i\sin k\alpha) = 1.$$

26. Calculeu les arrels setenes de la unitat.

27. a) Una de les arrels cúbiques d'un nombre complex és $3i$. Calculeu aquest nombre i les seves altres arrels cúbiques.

b) Sabent que $3i$ és una arrel n-èsima d'un nombre complex, calculeu aquest nombre i les seves altres arrels n-èsimes.

28. Demostreu que la suma de les arrels cúbiques de qualsevol nombre complex és zero.

29. Trobeu totes les arrels de l'equació $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.

30. Resoleu a $\mathbb{C}$ les equacions següents:

a) $z^2 + iz + 1 = 0$; b) $\bar{z} = z^{-1}$;

c) $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$; d) $z^3 + (1+i)z^2 + (i-2)z - 2i = 0$.

2. Successions de nombres reals

1. Siguin $a_n = -5n + 10$ i $b_n = n^2$ dues successions de nombres reals. Calculeu el terme general i els cinc primers termes de les successions $(a_n) + (b_n), -2(a_n) - 5(a_n), (a_n)(b_n)$ i $3(a_n)/(b_n)$. Justifiqueu perquè és possible dividir per la successió b_n.

2. Demostreu que dir que la successió (a_n) té per límit el valor a és equivalent a dir que per a tot $m \in \mathbb{N}$ existeix un n_0 tal que si $n \geq n_0$ llavors $|a_n - a| \leq \frac{1}{m}$.

3. Demostreu que si $x, y \in \mathbb{R}$ i $|x - y| \leq \frac{1}{n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, llavors $x = y$. Demostreu a partir de l'afirmació anterior que si una successió té límit aquest és únic.

4. Proveu que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ si, i només si, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Doneu un exemple per demostrar que la convergència de $(|a_n|)$ no implica necessàriament la de (a_n).

5. Sigui (a_n) una successió de reals tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 0$. Convergirà també a zero la successió (a_n)?

6. Demostreu que les successions de terme general $a_n = 1/(3n + 1)$ i $b_n = 1/n - 1/(n + 1)$ convergeixen cap a zero. Trobeu a partir de quin terme la distància al límit és més petita que ϵ amb $\epsilon = 5, 1, 0.03$.

7. Fent ús de la definició de límit, demostreu que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^p} = 0$, on $c \neq 0$ i $p > 0$ són dues constants;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$ si c és una constant que compleix $|c| < 1$.

8. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions de nombres reals.

a) Suposant que $(a_n + b_n)$ és convergent, demostreu que no necessàriament ho han d'ésser les successions (a_n) i (b_n).

b) El mateix que a l'apartat anterior en el cas que $(a_n \cdot b_n)$ sigui convergent.

9. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions convergents cap a $l \in \mathbb{R}$ i (t_n) una successió tal que $0 \leq t_n \leq 1$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que

$$\lim_{n \to \infty} \big(t_n a_n + (1 - t_n) b_n\big) = l\,.$$

10. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions creixents de nombres reals estrictament positius i $(a_n - b_n)$ una successió fitada. Demostreu que la successió $((a_n - b_n)/(a_n + b_n))$ és convergent.

11. Sigui (a_n) una successió de nombres reals tal que $\lim\limits_{n \to \infty} a_{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} a_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$. Proveu que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$.

12. Sigui (a_n) una successió de nombres reals amb les parcials (a_{2n}), (a_{2n+1}) i (a_{3n}) convergents. Proveu que (a_n) és una successió convergent.

13. Sigui (a_n) una successió de termes positius. Definim una nova successió (b_n) de la manera següent: $b_{2n-1} = a_n$, $b_{2n} = a_n^2 - 6$, per a tot $n \geq 1$. Demostreu que la convergència de (b_n) implica la de (a_n) i calculeu-ne els límits respectius.

14. Doneu un exemple de successió divergent que compleixi $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{a_{n+1}}{a_n}) = 1$. El mateix per a una successió convergent.

15. El mateix que en l'exercici anterior, però ara amb $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

16. Donada la successió (a_n), es defineix (σ_n) com la successió formada per les seves mitjes aritmètiques, és a dir, $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$. Estudieu la monotonia de (σ_n) quan la successió inicial és de termes positius i monòtona.

17. Sigui (a_n) una successió creixent de nombres reals positius. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_n^n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

18. Calculeu els límits de les successions següents:

a) $\dfrac{6n^3+4n+1}{2n}$;

b) $\dfrac{n^2-6n-2}{3n^-9n}$;

c) $\sqrt{n\sqrt{n}-\sqrt{n}}$;

d) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$;

e) $\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$;

f) $\dfrac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}} - \dfrac{1}{\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n}}$;

g) $\dfrac{\ln(e^n+e^{-n})}{n}$;

h) $\dfrac{n^n}{n!}$;

i) $\dfrac{a^n}{\ln n!}$;

j) $\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+2}{n+1}}$;

k) $\dfrac{\sin n}{n}$;

l) $\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

19. Demostreu que la successió que té per terme general $a_n = (2n-7)/(3n+2)$ és monótona creixent, està fitada superiorment i inferior. Proveu també que (a_n) té límit finit.

20. Sigui (a_n) la successió definida per $a_{2n} = n$, $a_{2n+1} = n$. Estudieu si són certes les afirmacions següents:

a) (a_n) és estrictament creixent;

b) (a_n) és creixent;

c) (a_n) és decreixent;

d) (a_n) no creix ni decreix.

21. Sigui $a_1 > 1$ un nombre real donat. Definim $a_{n+1} = 2 - 1/a_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que (a_n) és monòtona i fitada. Calculeu el seu límit.

22. Demostreu que la successió de terme general

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad \text{per a tot } n \geq 1,$$

és convergent i doneu un interval de longitud menor o igual que 1/2 dins el qual es trobi el valor del límit.

23. Considereu la successió definida per

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = -1 + \sqrt[3]{1 + 3a_n} \quad \text{per a tot } n \geq 1.$$

a) Demostreu que els seus termes són estrictament positius.

b) Comproveu que $a_n = a_{n+1} + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^3/3$ per tot $n \geq 1$.

c) Demostreu que (a_n) és convergent i calculeu el seu límit.

24. Calculeu els límits de les successions següents:

a) $\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{2n+1}}\right)^{\left(\dfrac{2n-1}{3n-1}\right)}$;

b) $\dfrac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}}$;

c) $\left(\dfrac{\ln na}{\ln nb}\right)^{\ln n}$;

d) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$;

e) $\left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^{\sin \frac{1}{n}}$;

f) $\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

h) $\left(\sqrt[5]{\dfrac{2n+3}{3n+4}}\right)^{\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}$;

i) $\dfrac{\sqrt{3n^3+2n+2} - \sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n} - \sqrt{n^3+n^2-3n}}$;

j) $\dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \cdots + n\sqrt[n]{n}}{n^2\sqrt{n}}$;

k) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}+1}$;

l) $\sqrt{a^n + b^n} \quad (0 < a < b)$;

m) $$\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}.$$

25. Demostreu que la successió definida per la recurrència $a_1 = \sqrt{k}, \quad a_n = \sqrt{k + a_{n-1}}$, amb $k > 0$ és convergent.

26. Siguin $0 < a_1 < b_1$ dos nombres reals fixats. Per a tot $n \geq 1$, definim $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ i $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Demostreu que per a tot n es compleix $0 < a_n < b_n$ i que les dues successions convergeixen cap al mateix límit.

27. Determineu per a quins naturals p la successió

$$a_n = \frac{(2n+1)^p - (1-2n)^p}{n^{p-1} + 1}$$

és convergent i calculeu-ne el límit en cada cas.

28. a) Demostreu que per a $t \neq 0$ i $n > 0$ es compleix que

$$\sin t = 2^n \left(\cos \frac{t}{2}\right)\left(\cos \frac{t}{2^2}\right)\cdots\left(\cos \frac{t}{2^n}\right)\left(\sin \frac{t}{2^n}\right).$$

b) Deduïu-ne que si $t \neq 0$ i $n > 0$, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{t}{2}\right)\left(\cos \frac{t}{2^2}\right)\cdots\left(\cos \frac{t}{2^n}\right) = \frac{\sin t}{t}.$$

29. Troben la relació entre a i b per tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+2}\right)^{an+b} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+b}{n+1}\right)^{2n+a}.$$

30. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}.$$

31. Es diu que $a_n = o(b_n)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, i que $a_n \sim b_n$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$. Demostreu:

a) $n! = o(n^n)$;

b) $a^n = o(n!)$, amb $a > 1$;

c) $n^k = o(a^n)$, amb $k > 0$, $a > 1$;

d) $\ln n = o(n^k)$, amb $k > 0$;

e) $a_n \sim b_n$ no implica que $e^{a_n} \sim e^{b_n}$, ni que $\ln a_n \sim \ln b_n$, ni que $(a_n)^n \sim (b_n)^n$.

32. Calculeu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}}$, sabent que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = k \in \mathbb{R}^+$.

33. La successió de Fibonacci (u_n) es defineix com $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ si $n \geq 1$ i $u_1 = u_2 = 1$.

a) Busqueu els sis primers termes d'aquesta successió.

b) Demostreu que l'enèsim terme ve donat per $u_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, on $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ i $b = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

c) Si definim $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, demostreu que $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

34. Sigui a un nombre positiu fixat. Triem $a_1 > 0$ tal que $a_1^2 > a$ i definim

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

a) Proveu que (a_n) és monòtona decreixent i que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

b) Si definim $\epsilon_n = a_n - \sqrt{a}$, demostreu que $0 < \epsilon_n < \frac{a_n^2 - a}{a_n}$ i que $\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n^2}{2a_n} < \frac{\epsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

c) Demostreu que, si $a > 1$, $\epsilon_{n+1} < 2\left(\frac{\epsilon_1}{2}\right)^{2^n}$ i que si $0 < a < 1$, aleshores es compleix $\epsilon_{n+1} < 2a\left(\frac{\epsilon_1}{2a}\right)^{2^n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

3. Funcions reals de variable real. Límits i continuïtat

1. Trobeu el domini de les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; b) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x-2|}}$;

c) $h(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 5x + 4)}{x - 6}$; d) $k(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{\text{cosec } x}$;

e) $m(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}}$; f) $n(x) = \arcsin(x^3 + 1)$.

2. Doneu un exemple de funció definida a l'interval $[0, 1]$ que no estigui fitada.

3. Trobeu les inverses de les funcions següents als intervals on sigui possible:

a) $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; b) $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$;

c) $h(x) = \ln(3 + e^x)$; d) $k(x) = \text{argsinh } \dfrac{x^2}{1 + x^4}$.

4. Demostreu les identitats següents:

a) $\tan \frac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

b) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

c) $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$.

d) $\tanh x + \tanh y = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh x \cosh y}$.

5. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ definida en $[1, +\infty)$. Demostreu que és una contracció, és a dir, existeix $K \in (0, 1)$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\,|x_1 - x_2|$ per a tot $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$.

6. Fent servir la definició de límit, demostreu que $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$.

7. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3+x}{x^2-2x}$;   b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+5}}$;   d) $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$;   f) $\lim_{x\to 0}(\cot x - \cot 2x)$;

g) $\lim_{x\to(-2)} \left(\frac{x^2+2x-1}{x+3}\right)^{x+1}$;   h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)}-1}{x}$;

i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+\sin x-2}{\sin^2 x-4\sin x+3}$;   j) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

k) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$;   l) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{(x-1)^2}$;

m) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1}$;   n) $\lim_{x\to y} \frac{x^n-y^n}{x-y}$;

o) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}-1}{2}\right)^x$;   p) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

8. Sigui m un enter positiu i $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$ un polinomi. Demostreu que existeix un $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{2}x^m < P(x) < \frac{3}{2}x^m, \qquad \text{per a tot } x > M.$$

9. Demostreu la continuïtat de les funcions següents a partir de la definició:

a) $f(x) = 3x^2 + 5x$;   b) $f(x) = |x| + 10$.

10. Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \dfrac{\sin^2(2x)\ln|x+2|}{x^3+x^2}$.

11. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $f(x) = 0$ per a tot $x \in \mathbb{Q}$. Demostreu que f ha de ser la funció constant igual a zero.

12. Demostreu que la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

és discontínua en tot nombre real.

13. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1 - x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demostreu que únicament és contínua en el punt $x = \frac{1}{2}$.

14. Demostreu que si una funció és contínua també ho ha de ser el seu valor absolut, i doneu un exemple que il·lustri que el recíproc no és cert.

15. Doneu un exemple de dues funcions discontínues en el punt $x = -3$ tals que la seva suma sigui contínua a tot arreu.

16. Considereu les funcions següents:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0; \\ -x + 1, & \text{si } x \leq 0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 1; \\ -10, & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat de $g \circ f$ en el punt 0. Contradiu això el teorema sobre la composició de funcions contínues?

17. Sigui $f(x)$ una funció tal que $|f(x)| \leq |x|$ per a tot x real. Demostreu que $f(x)$ és contínua en zero.

18. Fent servir que $|\sin x| \leq |x|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, demostreu que la funció $y = \sin x$ és contínua en zero. Tenint en compte ara que $\sin x - \sin u = \sin \frac{1}{2}(x - u) \cos \frac{1}{2}(x - u)$, demostreu que és contínua en tot $\mathbb{R}$.

19. Estudieu la continuïtat de les funcions següents:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament;} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament;} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament;} \end{cases} \qquad m(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x(x-1)}}, & \text{si } x > 1; \\ e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

20. Direm que una funció és additiva si compleix $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per a qualssevol $x, y \in \mathbb{R}$. Demostreu que una funció additiva que és contínua en zero ho és en tots els reals.

21. Sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció que compleix $g(x+y) = g(x)g(y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$. Demostreu que si g és contínua en el zero ho és també en tots els altres punts de la recta real. Demostreu també que si existeix un nombre real a tal que $g(a) = 0$ llavors $g(x) = 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

22. Traceu les gràfiques i trobeu els punts de discontinuïtat de les funcions:

$f(x) = [x]$; $\qquad f(x) = [2\sin x]$;

$f(x) = x - [x]$; $\qquad f(x) = \sin\frac{1}{2}[x]$;

$f(x) = [x] - [-x]$;

on $[r]$ indica la part entera del nombre r, és a dir, el nombre enter immediatament més petit o igual que r.

23. Trobeu quant ha de valer la funció següent en el punt 2 per tal que sigui contínua en tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 7x - 2}{3x - 6} \qquad \text{si } x \neq 2.$$

24. Digueu per a quins valors de a és contínua la funció

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \leq 1; \\ 3 - a^2x^2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

25. Busqueu i classifiqueu els punts de discontinuïtat de les funcions següents:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}; \qquad g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3+3x^2+2x};$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1; \\ 2, & \text{si } x = 1; \\ 2x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

26. Trobeu els valors A, B i C a fi que les funcions següents siguin contínues:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2; \\ A & \text{si } x = 2; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x)^n - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ B & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 3x^2 + x}{x^2+1}, & \text{si } x \neq 0; \\ C & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

27. Demostreu que l'equació $\ln x = x^2 - 4x$ té una solució real a l'interval $[1, +\infty)$

28. Demostreu que per algun $x \in \mathbb{R}$ es compleix la igualtat

$$x^{183} + \frac{567}{2 + x^4 + \cos^2 x} = 1.$$

29. Demostreu que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és una funció contínua, llavors existeix un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

30. Sigui $f : [a,b] \to [0, +\infty)$ una funció contínua. Demostreu que, donats n punts $x_1, \ldots, x_n$ de l'interval $[a,b]$, existeix un punt $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = (f(x_1) \cdots f(x_n))^{1/n}$.

31. Siguin f i g dues funcions contínues en $[a,b]$ tals que $f([a,b]) \subset g([a,b]) = [0,1]$. Demostreu que existeix $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

32. Sigui $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $f(0) = f(1)$. Demostreu que existeix un $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

33. Estudieu la continuïtat de les funcions següents en el punt 0:

a) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{5 + e^{\frac{1}{x}}}$; b) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}) + x$.

34. Demostreu que l'equació $\sin x = x - 1$ té una solució real.

35. És possible aplicar el teorema de Bolzano a la funció $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ en l'interval $[-1, 1]$? Demostreu que l'equació $f(x) + \frac{1}{2} = 0$ té solució, i trobeu un interval de longitud menor o igual a $1/3$ que la contingui.

36. Trobeu les solucions de les equacions següents amb error més petit que 0.01:

a) $x^3 = 3x - 3$; b) $x = e^x - 2$;

c) $2x - \ln x = 4$; d) $2x^4 = 14x^2 - 14x + 1$.

37. Demostreu que les funcions següents són uniformement contínues a tot $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sin x$; b) $g(x) = mx + n$;

c) $h(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$; d) $k(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

38. Demostreu que la funció $f(x) = 1/x$ és contínua a $(0, +\infty)$, però no és uniformement contínua.

4. Funcions reals de variable real. Derivabilitat

1. Calculeu, utilitzant la definició, la derivada de la funció $f(x) = \sin x$ en el punt $x = a$.

2. Sigui f una funció derivable a $\mathbb{R}$. Se suposa que existeix una successió (a_n) de punts fixos de la funció f amb límit $a \in \mathbb{R}$. Calculeu $f(a)$ i $f'(a)$.

3. Demostreu que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

és derivable en l'origen.

4. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demostreu que si $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ amb $\alpha > 1$, llavors f és derivable en zero, mentre que si f satisfà la condició $|f(x)| \geq |x|^\beta$ amb $0 < \beta < 1$ i $f(0) = 0$, llavors f no és derivable en zero.

5. Sigui f la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 2; \\ ax + b, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Determineu els valors de les constants a i b per tal que f sigui derivable en el punt $x = 2$.

6. Demostreu que si f és derivable en el punt $x = a$ llavors també ho és la funció $|f|$, sempre que $f(a) \neq 0$. Doneu un contraexemple pel cas que $f(a) = 0$.

7. Demostreu que si f és una funció contínua en $x = a$, aleshores la funció $F(x) = (x - a)f(x)$ és derivable en $x = a$. Quant val $F'(a)$?

8. Siguin f_1, f_2, g_1 i g_2 quatre funcions derivables en l'interval (a,b). Mitjançant el determinant següent, definim en (a,b) una nova funció F:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}.$$

Proveu que $F'(x)$ existeix per a tot $x \in (a,b)$ i que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}.$$

9. Sigui g una funció contínua en l'origen. Proveu que la funció f definida per $f(x) = xg(x)$ és derivable en l'origen i trobeu $f'(0)$ en termes de g.

10. Trobeu f' en termes de g' en els casos següents:

a) $f(x) = g(x + g(a))$; b) $f(x) = g(x \cdot g(a))$;

c) $f(x) = g(x + g(x))$; d) $f(x) = g(x) \cdot (x - a)$;

e) $f(x) = g(a) \cdot (x - a)$.

11. Calculeu i simplifiqueu les derivades de les funcions següents:

a) $y = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; b) $y = \sin(\ln x)$;

c) $y = \arctan \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$; d) $y = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

e) $y = x^{x^{\ln x}}$; f) $y = e^{\sin((2x)^{\frac{1}{3}})}$;

g) $y = \dfrac{2}{\sin a} \ln \dfrac{\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{a}{2}}{\tan \frac{x}{2} - \tan \frac{a}{2}}$; h) $y = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}}$.

12. Sigui $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$. Trobeu $f'(0)$.

13. Trobeu els valors de a, b, c per als quals les gràfiques de $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = x^3 - c$ es tallen al punt $(1,2)$ i tenen la mateixa tangent en aquest punt.

14. Demostreu que per a tot $m \in \mathbb{R}$, la funció polinòmica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no té d arrels en $[0, 1]$.

15. Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$ una funció contínua i derivable tal que $f'(x) \neq 1$ per a $x \in [0,1]$. Demostreu que existeix un únic $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

16. Es considera la funció polinòmica $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ per a tot $n >$ Demostreu que $f_n(x)$ té una única arrel positiva. Si es representa aquesta arrel per a proveu que la successió (a_n) és convergent.

17. Si f és una funció que posseeix tercera derivada finita en $[a, b]$ i si

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0,$$

demostreu que la tercera derivada també s'anul·la en un punt de l'interval (a, b).

18. Demostreu que si f i g són contínues en $[a, b]$ i derivables en (a, b) i $g'(x) \neq 0$ per tot x de (a, b), llavors existeix algun x de (a, b) amb

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(b) - g(x)}.$$

19. Suposeu que f és derivable en $[a, b]$. Demostreu que si el mínim de f sobre $[a, b]$ est en a llavors $f'(a) \geq 0$ i que si està en b llavors $f'(b) \leq 0$.

20. Sigui M_n el valor màxim de la funció $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ a l'interval tancat $[0, 1]$.

a) Demostreu que $M_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.

b) Calculeu $\lim\limits_{n \to \infty} M_n$.

21. Sigui f derivable tal que $\lim\limits_{x \to \infty} x f'(x) = 0$. Proveu que $\lim\limits_{x \to \infty} (f(3x + 2) - f(x)) = 0$.

22. Demostreu que tota funció f definida en un cert interval $[a, b]$ i derivable en (a, b) que compleixi

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|^m$$

per a qualssevol x_1, x_2 i per a una certa constant $m > 1$ és una funció constant.

23. Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua a l'interval $[a,b]$ i derivable a l'obert (a,b). Demostreu que existeix $t \in (a,b)$ tal que

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(b) & f(a) \end{vmatrix} = f(t) + tf'(t).$$

24. Demostreu les desigualtats següents:

a) $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$, si $x > 0$;

b) $\ln(1+x^2) \le x^2$, per a tot x;

c) $1 - \dfrac{a}{x} < \ln\dfrac{x}{a} < \dfrac{x}{a} - 1$, si $0 < a < x$.

25. a) Demostreu les desigualtats següents:

$$\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}, \quad \text{per a tot } x > 0.$$

b) Es considera la successió

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \ge 1.$$

Proveu que és convergent demostrant que és decreixent i de termes positius.

26. Demostreu que si α i β són dos nombres diferents de l'interval $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ aleshores

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \le \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} \le 1.$$

27. Calculeu, utilitzant la regla de l'Hôpital, els límits de les funcions següents:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\tan\frac{1}{x}}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

28. Raoneu perquè els límits següents no es poden calcular per la regla de l'Hôpital i calculeu-los per algun altre mètode:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$.

29. Resoleu pel mètode de Newton les equacions següents obtenint el resultat amb més petit que 10^{-6}:

a) $x - \cos x = 0$; b) $10^x = 6x + 30$;

c) $x^2 - 1 = \sin x$; d) $x^x = 10$;

e) $5 \sin x = x + \dfrac{1}{x}$; f) $xe^x = 1$;

g) $e^x = 5x + 10$, h) $\ln x = 1 + \dfrac{1}{x}$;

i) $2x^2 - 10x + 10 + \cos \dfrac{x}{9} = 0$; j) $x^4 - x - 3 = 0$.

amb

5. El polinomi de Taylor i aplicacions

1. Trobeu l'equació de la paràbola que aproxima millor en el punt $(0,0)$ a la corba $f(x) = e^x \ln(x+1)$.

2. Quants termes s'han de prendre en el desenvolupament de Taylor de la funció $f(x) = \ln(1-x)$ per obtenir el valor de $\ln 0.75$ amb error més petit que 10^{-3}?

3. Per a quins valors de x podem calcular $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$ en lloc de e^x cometent un error menor que 10^{-4}?

4. Trobeu el desenvolupament de Taylor d'ordre 3 de la funció $f(x) = e^{\sin x}$ en $x = 0$.

5. Fent ús de la fórmula de Taylor, desenvolupeu el polinomi $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ en potències de $(x-1)$. Feu el mateix per un altre mètode.

6. Trobeu el polinomi de Taylor de grau dos en 0 de la funció $f(x) = (c^3 + x)^{\frac{1}{3}}$, per a $c \neq 0$, i fiteu l'error comès en l'aproximació en el cas $c > 0$ i $x > 0$.

7. Fent ús dels polinomis de Taylor corresponents, calculeu $\sin 1$, $\sin \frac{1}{2}$ i e^2 amb un error més petit que 10^{-5}.

8. Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{bx}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{x \sin^2 x}$;

c) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$;

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$;

e) $\lim_{x\to 0} \frac{(\cosh x - 1)\ln(1+x) - \frac{x^3}{2}}{x(\sin x - \arcsin x)}$;

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos\frac{x}{2}}$.

9. Determineu els intervals de creixement i decreixement de cada una de les funci següents i trobeu els seus extrems (en el cas que existeixin) en els dominis de definició

a) $f(x) = \log(x^2 - 9), \quad |x| > 3$;

b) $f(x) = x^3 + ax + b, \quad x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^4, \quad 0 \le x \le 1$.

10. Sigui f una funció contínua sobre l'interval $[0,1]$ tal que $f(0) = 0$ i $f'(x)$ és finit creixent en l'interval $x \in (0,1)$. Proveu que si f és creixent en $(0,1)$ llavors també ho és funció g definida per $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

11. Trobeu el màxim i el mínim de les funcions següents en els intervals corresponents

a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$ en $[0,3]$;

b) $f(x) = -\frac{1}{x} - 7$ en $[-5,5]$;

c) $f(x) = \frac{5x^2}{4x-1}$ en $[-\frac{1}{3}, 2]$;

d) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$ en $[-10, \frac{2}{5}]$.

12. Sigui $f(x) = \alpha x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, on $\alpha > 1$.

a) És f derivable en 0?

b) Demostreu que f té un mínim en $x = 0$.

c) Demostreu que f no és creixent en cap interval del tipus $[0,b]$.

13. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció dues vegades derivable en $\mathbb{R}$ que satisfà: $f(1) = 3$, $f(0) =$ i $|f''(x)| < 2$ per a tot $x \in (0,1)$. Demostreu que f és estrictament creixent en un entorn de l'origen.

Indicació: Utilitzeu la fórmula de Taylor de grau 1 de la funció f al voltant de l'origen.

14. Estudieu i representeu gràficament les funcions següents:

a) $y = (x-1)^2 \left(\dfrac{x+2}{2}\right)^3$; b) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$;

c) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$; d) $y = \dfrac{x}{x^{\frac{2}{3}} - 1}$;

e) $y = \dfrac{x(x-1)}{x^2-1}$; f) $y = \dfrac{x}{(x-1)(x-3)}$;

g) $y = e^{4x} - e^{2x}$; h) $y = x^3 e^{-x}$;

i) $y = (x^2)^x$; j) $y = \ln(x^3 - 3x + 2)$;

k) $y = \sin x - \dfrac{\sin 2x}{2}$; l) $y = \dfrac{\sin(x+1) - 1}{x}$.

15. Trobeu un punt de la corba $y = 4 - x^2$ tal que la tangent a la corba per aquest punt determini amb els eixos un triangle d'àrea mínima al primer quadrant.

16. Calculeu l'àrea màxima d'un triangle isòsceles de perímetre 12.

17. Descomponeu el nombre 100 en dos sumands de manera que la suma dels seus cubs sigui mínima.

18. En un triangle isòsceles de base 8 i alçada 10 s'inscriu un altre triangle isòsceles de manera que les bases d'ambdós siguin paral·leles i el vèrtex del segon estigui en el punt mig de la base del primer. Calculeu les dimensions del que tindrà àrea màxima.

19. Donat un quadrat de costat l, separeu quatre petits quadrats en els seus vèrtexs, per tal de fabricar una capsa de base quadrada. Determineu quina és la capsa de volum màxim que es pot construir així.

20. Calculeu les dimensions del cilindre de volum més gran i àrea total igual a 300.

21. Una finestra té forma de rectangle amb un semicercle a sobre, el diàmetre del qual és igual a la base del rectangle. Si el perímetre total de la finestra és 2, trobeu les dimensions tals que la seva àrea sigui màxima.

22. D'entre tots els triangles rectangles d'àrea constant demostreu que el que té mínima la hipotenusa és l'isòscels.

23. Trobeu el punt de la corba $y = x^3$ més pròxim al punt $(0, 1)$.