DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA

INVESTIGACIÓ OPERATIVA DETERMINISTA

Problemes resolts

F. Javier Heredia Cervera

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

Col·lecció de problemes resolts d'Investigació Operativa Determinista.

F. Javier Heredia Cervera.

Dept. d'Estadística i Investigació Operativa
Secció d'Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

Es presenta en aquest llibre una col·lecció de problemes, la major part d'ells resolts, d'Investigació Operativa Determinista. El problemes s'han dividit en quatre apartats: problemes de modelització, problemes de programació lineal, problemes de programació lineal entera i problemes de programació no lineal. Aquests problemes han estat elaborats, o adaptats d'altres textes, al llarg dels set anys de docència de l'autor a les assignatures d'Optimització (Llicenciatura d'Informàtica, avui en dia inexistent), Models Deterministes de la Investigació Operativa (Enginyeria Informàtica) i Investigació Operativa Determinista (Diplomatura d'Estadística), totes elles assignatures de la Universitat Politècnica de Catalunya. Una part important d'aquests problemes han aparegut als enunciats d'examens d'aquestes tres assignatures. El símbol "*" al costat del nom del problema indica que es pot trobar resolt amb detall, mentre que el símbol "†" indica que s'ha inclos la seva solució.

Barcelona, febrer de 1998.

Índex

1 Problemes de modelització.

1. Línies Aèries Còndor*.

La companyia aèria "Línies Aèries Còndor" (LAC) es dedica a la distribució de mercaderies amb la seva flota d'avions. Aquesta flota està formada per 8 avions del tipus 1, 15 avions del tipus 2 i 11 avions del tipus 3. La capacitat, en milers de tones (Kt), dels tres tipus d'avions és de 45 per a cada avió tipus 1, 7 per a cada avió tipus 2 i 5 pel tipus 3. El programa de vols del dia d'avui indica que s'han d'enviar 20 Kt a la ciutat A i 28 Kt a la ciutat B. Tenint en compte la distància entre la base de LAC i les dues ciutats, cada avió pot fer només un vol diari.

Els costos (en milers de pessetes) de vol d'un avió a cada ciutat són:

	Tipus 1	Tipus 2	Tipus 3
Ciutat A	230	150	20
Ciutat B	580	200	38

Aquests costos no varien si l'avió assignat no transporta la seva capacitat màxima.

La torre de control de l'aeròdrom base de la companyia LAC té una capacitat de control de trànsit aeri limitada. El temps total que la torre té reservat a LAC permet controlar l'enlairament i aterratge d'un màxim de 5 avions tipus 1. El temps de control d'un avió tipus 2 és la meitat del d'un avió tipus 1, i el temps de control d'un avió tipus 3 és de 1/3 el d'un avió tipus 1.

Formuleu el (PLE) que permet obtenir el nombre d'avions de cada tipus a enviar a cada ciutat que minimitza els costos de vol.

2. Balanç racial*.

La ciutat de Middletown té tres escoles de secundària, dos d'elles amb majoria d'estudiants de raça blanca i una amb majoria d'estudiants de raça negra. La coordinadora d'escoles d'aquesta ciutat ha decidit modificar l'assignació d'estudiants a escoles per tal de reduir l'aïllament racial existent. L'ajuntament disposa de la següent informació sobre els deu districtes en que es divideix la ciutat:

- Per a cada districte, $i = 1, \ldots, 10$:
  - n_i^n: nombre d'alumnes de raça negra al barri i.
  - n_i^b: nombre d'alumnes de raça blanca al barri i.
  - d_i^j , $j = 1, 2, 3$: distància des de cada barri als tres instituts.
- Per a cada institut, $j = 1, 2, 3$:
  - c_j: capacitat escolar de cada institut.

La reassignació d'estudiants a escoles es vol fer de forma que la suma de les distàncies a recórrer per cada alumne sigui el més petita possible. L'ajuntament suposa que el nombre d'estudiants blanc i negres del barri i assignats a l'institut j guarda la proporció de races existent al barri d'origen. La nova assignació ha de satisfer un cert balanç racial que promogui la convivència entre els alumnes de les dues races a la mateixa escola. Per tal d'aconseguir-ho es decideix que la fracció d'estudiants d'una raça qualsevol a cada escola es mantingui entre certs límits. Es considera ideal una proporció de 1/2 per a cada raça a cada escola, però es permet una certa desviació θ respecte d'aquesta proporció ideal. Així doncs, s'exigeix que la nova distribució sigui tal que la fracció d'estudiants d'una raça donada a cada escola estigui entre $1/2 + \theta$ i $1/2 - \theta$. Formuleu aquest problema com un problema de programació matemàtica.

3. Industries Alden *

Les Industries Alden fabriquen dos productes. Cada producte pot ser fabricat a la màquina 1 o a la màquina 2. El temps de fabricació que necessita cada producte en función de la màquina on es fabriqui es mostra a la següent taula:

	MAQUINA 1	MAQUINA 2
PRODUCTE 1	4 h	3 h
PRODUCTE 2	7 h	4 h

Cada mes es disposa de 500h de cadascuna de les màquines. S'estima que el mercat pot absorbir qualsevol quantitat de producte 1 i 2 fins a un cert límit (demanda màxima), per sobre del qual es perd la producció. Els valors de la demanda màxima i el preu de venda de cada producte, per als pròxims dos messos, s'indica en la següent taula:

	DEMANDA MÀXIMA (unitats)		PREU (centenars ptas)	
	Mes 1	Mes 2	Mes 1	Mes 2
Producte 1	100	190	55	12
Producte 2	140	130	65	32

L'objectiu de les Industries Alden és maximitzar el benefici obtingut per la venda dels dos prpoductes durant els próxims dos mesos. Formuleu un programa lineal que permeti resoldre aquest problema.

4. Estació de bombers

L'Ajuntament de Barcelona té prevista la construcció d'una nova estació de bombers que cubreixi els districtes d'Horta-Guinardó, St. Andreu i Gràcia. L'Ajuntament disposa dels valors del temps de resposta (en minuts) a una alarma produida en un d'aquests tres districtes en funció de la ubicació final de l'estació de bombers, i del valor esperat del nombre d'alarmes diaries a cada districte. Aquestes dades es mostren a la següent taula:

	Alarma a :		
	Horta Guin.	St. Andreu	Gràcia
Estació a			
Horta Guin.	5	12	30
St. Andreu	15	4	15
Gràcia	20	20	6
Promig alarmes :	2	1	3

Els tècnics de l'Ajuntament han de decidir a quin districte construir l'estació de bombers de forma que el valor esperat del temps de resposta a totes les alarmes diàries dels tres districtes sigui mínim. Formuleu el problema de programació matemàtica que permet resoldre aquest problema.

5. Plantilla companyia Hindernis*

La companyia Hindernis dona feina a tres tipus diferents de treballadors, segons la seva qualificació: treballadors de classe A, B i C. L'activitat d'aquesta empresa consisteix en la realització de dos tasques, la tasca tipus I i la tipus II.

Cada treballador està assignat a un únic tipus de tasca. La tasca tipus I pot ser realitzada només per treballadors de classe A, treballant sols, o per equips constituïts per un treballador de classe A i dos treballadors de la classe B. La tasca II pot ser realitzada per treballador de la classe A, treballant sols, de la classe B, treballant sols, o per equips constituïts per un treballador de la classe B i tres treballadors de la classe C.

Els treballadors de les classes A, B i C cobren 1000, 500 i 200 ptas/hora respectivament.

Per tal de cubrir les seves quotes de producció la companyia necessita assegurar cada setmana 1000 hores de producció assignades a la tasca I i 2000 hores de producció assignades a la tasca II. Tots els treballadors treballen 40 hores setmanals, pero en termes de producció, un treballador de classe A equival a 40 hores de producció setmanals, un de classe B a 30 hores de producció setmanals i un de classe C a 20 hores.

Per restriccions sindicals, es pot contractar un màxim de 30 treballadors de classe A i 40 de classe B. A més, els treballadors de la classe C no poden representar més d'un 25% del total de treballadors contractats.

La companyia Hindernis vol saber quants treballadors de cada classe ha de constractar de forma que s'assegurin les hores de producció de les tasques I i II, es satisfacin les condicions sindicals i es minimitzin els costos de la nòmina de la plantilla. Formuleu un problema de programació matemàtica que permeti resoldre aquest problema.

6. Plantilla companyia de correus*

Una oficina de correus necessita un nombre diferent d'empleats a temps complet (8h) cada dia de la setmana. El nombre d'empleats a temps complet necessaris cada dia es mostra en la següent taula :

Dilluns	:	17
Dimarts	:	13
Dimecres	:	15
Dijous	:	19
Divendres	:	14
Dissabte	:	16
Diumenge	:	11

L'oficina de correus pot satisfer la seva demanda diaria de treballadors amb treballadors a temps complet (TTC) o a temps parcial (TTP). Les normatives laborals estableixen el següent :

1.- Cada treballador (ja sigui TTC o TTP) ha de treballar durant cinc dies consecutius i descansar els dos dies següents. Això vol dir que , per exemple, un empleat que treballi de dissabte a dimecres ha de descansar dijous i divendres. Un treballador fa sempre el mateix torn, és a dir, si una setmana comença a treballar el dimarts, cada setmana començarà el dimarts.

2.- Els TTC fan una jornada de vuit hores diàries mentre que els TTP fan una jornada de quatre hores diàries.

3.- Només un 25% del total d'hores treballades durant la setmana poden ser cobertes amb TTP.

4.- Els sous són de 1500 pts/hora pels TTC i 1000 pts/hora pels TTP.

Formuleu un problema de programació lineal per trobar l'estratègia de contractació que minimitzi els costos laborals setmanals de l'oficina de correus satisfent les seves necessitats laborals diàries d'acord amb les normatives laborals.

7. Composició de disolvents*

Quatre disolvents han de ser combinats per a obtenir cert compost químic. Cada litre d'aquest compost ha de contenir, com a mínim, 90ml de clor i el seu contingut en amoníac no pot excedir els 4ml. El continugut en clor i amoníac de cada disolvent, així com el cost es mostren en la següent taula:

	disolvents			
	1	2	3	4
Clor (ml/l)	180	120	90	60
Amoníac (ml/l)	3	2	6	5
Cost (ptas/l)	16	12	10	11

Formuleu un problema de programació matemàtica la solució del qual proporcioni les proporcions en que s'han de mesclar els quatre disolvents per tal d'aconsseguir el compost químic de cost mínim que cumpleixi les condicions de contingut en clor i amoníac indicades a l'enunciat.

8. Paper reciclat*

Una planta de reciclat de paper transforma paper residual en paper reciclat. El paper residual pot consistir en ***caixes de cartró***, ***paper seda***, ***paper continu*** i ***paper de llibres***. La polpa produïda s'usa en la fabricació de tres tipus de paper reciclat, dits de *classe 1*,*classe 2* i *classe 3*. Els preus per tona i el contingut en polpa dels quatre tipus de paper residual són :

	pts/Tm	Contingut en polpa
Caixes cartró	500	15%
Paper seda	600	20%
Paper continu	800	30%
Paper llibres	1000	40%

El paper residual es pot reciclar mitjançant dos processos diferents, dits *destintat* i *dispersió d'asfalt*. Les característiques dels dos processos s'indiquen an la següent taula, on la columna **Polpa perduda** indica la proporció de la polpa continguda al paper residual que *es perd* durant el procés, i el preu per tona processada és el mateix per a qualsevol tipus de paper residual :

	pts/Tm paper processat	Polpa perduda	Capacitat procés (Tm/mes)
Destintat	2000	10%	3000
Dispersió d'asfalt	1500	15%	3000

Les pulpes obtingudes a partir dels diferents tipus de paper residual només són aptes per produïr certes classes de paper reciclat. El tipus de paper residual apte per a cada classe de paper reciclat s'indica en la següent taula, junt amb la quantitat mensual de polpa apte necessària per a satisfer la demanda de cada classe de paper reciclat :

	Caixes Cartró	Paper Seda	Paper continu	Paper llibres	Demanda (Tm polpa/mes)
Classe 1			Apte	Apte	500
Classe 2	Apte	Apte		Apte	500
Classe 3			Apte		600

Formuleu un programa lineal per tal d'assolir la demanda mensual de paper reciclat minimitzant els costos de producció.

9. Plantilla mòbil*

CSL és una cadena de botigues de servei tècnic d'ordinadors. La previsió de demanda de serveis de reparació pels cinc primers mesos de l'any, mesurada en hores de treball de tecnic qualificats, s'indica en la següent taula :

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig
Demanda (h)	6000	7000	8000	9500	11000

(Previsió demanda reparacions)

Al començament de febrer treballen a CSL 50 tècnics qualificats. Cada tècnic qualificat pot treballar fins a 160 hores per mes. Per tal de satisfer la demanda futura s'han de formar nous tècnics qualificats. El periode de formació d'un nou tècnic qualificat és de dos mesos, i requereix que els tècnics qualificats dediquin un cert nombre d'hores a la supervisió d'aquesta formació. Durant el primer mes cada tècnic en formació ha d'estar supervisat durant 50 hores per tècnics qualificats, mentre que el segon mes el nombre d'hores de supervisió és de 10h.

Cada tècnic qualificat cobra 200000pts/mes, tant si treballa el total de 160h com si no. Durant el més de formació, els aspirants a tècnics cobren 100000pts/mes.

Al final de cada mes un 5% dels tècnics qualificats de CSL marxen de l'empresa per anar a treballar a d'altres empreses de serveis informàtics.

Formuleu un programa lineal quina solució permeti a CSL minimitzar els costos de personal satisfent la demanda de serveis dels pròxims cinc mesos.

10. Silvco*.

Silicon Valley Corporation (Silvco) fabrica transistors. Una fase molt important de la fabricació de transistors és la mescla dels elements de germani al forn. Malhauradament, els procés de mescla proporciona germani amb un grau de qualitat molt variable. Els possibles graus de qualitat del germani es classifiquen en G1 (menor qualitat) i G2 (major qualitat).

Existeixen dos mètodes que poden ser usats en la mescla del germani de cada transistor. El mètode 1 té un cost de 5000pts/transsistor mentre que el cost del mètode 2 és de 7000pts/transistor. El percentatge de transistors amb germani de cada grau de qualitat obtinguts per tots dos mètodes es mostra a la següent taula:

QUALITAT	Mètode 1	Mètode 2
Defectuós	30%	15%
G1	40%	35%
G2	30%	50%

Silvco té l'opció de refinar el germani obtingut per mescla de tots o part dels transistors per a intentar millorar la qualitat. El cost de refinar el gemani mesclat d'un transistor és de 2500pts/transistor. El resultat del procés de refinat es mostra en la següent taula, on s'indica el percentatge de transistors de cada grau de qualitat obtingut refinant els diferents tipus de germani producte de la mescla:

	TIPUS DE GERMANI REFINAT	
RESULTAT REFINAT	Defectuós	G1
Defectuós	65%	-
G1	30%	60%
G2	5%	40%

El forn de Silvco té capacitat suficient per a mesclar o refinar el germani necessari per a 20000 transistors al mes. La demanda mensual que ha de satisfer Silvco és de 3000 transistors de qualitat G1 i de 2000 transistors de qualitat G2. Formuleu el problema d'optimització que ha de resoldre Silvco per a minimitzar el cost de producció dels transistors.

11. Nau industrial*.

En una nau industrial es vol instal·lar un taller per a fabricar tres tipus diferents de peces de planxa metal·lica, A, B i C. Les dades de que es disposen són:

Peça	Cost planxa (pts)	Producció (peces/h) Premsa	Producció (peces/h) Soldadura	Màxim diari	Preu venda (pts/peça)
A	150	500	15	10000	250
B	300	1800	80	5000	350
C	200	150	30	12000	300

La primera columna conté el cost de la planxa a usar per peça acabada. Les produccions de les columnes 2 i 3 són per cada màquina, i cada peça ha de passar per una premsa i una soldadura. El màxim diari és un límit que no es desitja passar per raons comercials. Finalment, la darrera columna indica el preu de venda de cada peça, tenint en compte que el mercat absorbeix qualsevol quantitat per sota del màxim diari.

Cada premsa, un cop instal·lada, ocupa una superfície de 10m^2 i necessita per a funcionar un premsista i 1/4 d'aprenent (és a dir, un aprenent dona servei a quatre premses). Cada instal·lació de soldadura ocupa 12m^2 i necessita un soldador i un aprenent. Els aprenents són intercanviables entre premses i soldadures.

El taller, un cop instal·lat, farà cada dia el mateix nombre d'unitats de cada peça, i treballarà amb un únic torn de 8h diaries.

El cost d'una hora de premsista és de 550pts, el d'una hora de soldador 650pts i una hora d'aprenent costa 360pts. Per raons laborals no poden treballar al taller més de 400 obrers en total.

La superfície de la nau és de 10.000m^2, però l'espai necessari per passadissos i per magatzem és tal que la superfície destinada a màquines no pot ser superior a la quarta part de l'espai total.

Formuleu un problema de programació matemàtica que permeti determinar la configuració del taller que maximitza els beneficis obtinguts per l'empresa. S'entén per configuració del taller el conjunt de dades següents: nombre de màquines de cada tipus a instal·lar, nombre d'obrers de cada categoria i producció diària per a cada tipus de peça.

12. Problema de fluxos en xarxa de cost mínim

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{23} + x_{24} + 2x_{34} + 6x_{43} \\
\text{s.a.}: & x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 10 \\
& x_{23} + x_{24} - x_{12} = 0 \\
& x_{34} - x_{13} - x_{23} \leq -5 \\
& -x_{43} + x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 3 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j)
\end{array}
$$

a) Reformuleu-lo com a problema de fluxos en xarxes de cost mínim.

b) Representeu la xarxa associada al problema.

13. Problema de fluxos en xarxa de cost mínim*

Formuleu el següent problema de programació lineal com a problema de fluxos en xarxes de cost mínim :

$$
\begin{array}{llccccccc}
(P) \text{ min} & z= & \multicolumn{7}{l}{3x_{12}+4x_{13}+3x_{23}+5x_{24}+x_{41}+7x_{43}} \\
\text{s.a.:} & & x_{12} & + & x_{13} & - & x_{41} & = & 1 \\
 & & -x_{12} & + & x_{23} & + & x_{24} & \geq & -3 \\
 & & -x_{24} & + & x_{41} & + & x_{43} & = & 0 \\
 & & -x_{13} & - & x_{23} & - & x_{43} & \geq & -4
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall (i,j)$$

14. Problema de fluxos en xarxa*

El màxim nombre de vehicles que poden viatjar entre qualsevol de les quatre ciutats 1,2,3 i 4 és de 300 vehicles/hora. Es vol calcular el nombre màxim de vehicles que poden viatjar durant un periode de dues hores des de la ciutat 1 fins a la ciutat 4.

a) A quín tipus de problema de fluxos en xarxes correspon aquest enunciat?

b) Representeu la xarxa associada a aquest problema.

c) Formuleu el problema de fluxos en xarxes de cost mínim que resol el problema plantejat.

15. Equacions de xarxa*

Expresseu les següents constriccions en forma d'equacions de xarxa i representeu la xarxa associada:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \leq \\ = \\ \leq \\ \leq \end{matrix}
\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}
$$

$$0 \leq x_i \leq 3 \quad i = 1, \ldots, 6$$

16. Models de fluxos en xarxes.

L'empresa Machineco disposa de quatre màquines per a realitzar quatre treballs. Cada màquina ha de ser assignada a un treball. El temps que necessita cada màquina per a completar cada treball s'indica a la següent taula:

	Trab.1	Trab.2	Trab.3	Trab.4
Maq.1	$14h$	$5h$	$8h$	$7h$
Maq.2	$2h$	$12h$	$6h$	$5h$
Maq.3	$7h$	$8h$	$3h$	$9h$
Maq.4	$2h$	$4h$	$6h$	$10h$

Machineco vol minimitzar el temps total necessari per a completar els quatre treballs. Formuleu el programa lineal que permet resoldre el problema plantejat. Representeu la xarxa associada a aquest problema. De quina mena de problema es tracta?

17. Models de fluxos en xarxes.

L'empresa Tasco fabrica telescopis a dues factories, una situada a Memphis i l'altre a Denver. La factoria de Memphis pot produir fins a 150 telescopis cada mes i la factoria de Denver fins a 200 telescopis mensuals. Els telescopis es traslladen per via aèria als consumidors de Los Angeles i Boston. El consum a cada ciutat és de 130 telescopis cada mes. Degut a les ofertes existents de tarifes reduides, Tasco pensa que pot ser més barat transportar primer alguns telescopis fent que passin per Nova York o Chicago (o ambdós) i enviar-los deprés al seu destí final. El cost d'enviar un telescopi es mostra a la següent taula:

	Memphis	Denver	N.Y.	Chicago	L.A.	Boston
Memphis	0	–	8	13	25	28
Denver	–	0	15	12	26	25
N.Y	–	–	0	6	16	17
Chicago	–	–	6	0	14	16
L.A.	–	–	–	–	0	–
Boston	–	–	–	–	–	0

Tasco vol minimitzar el cost de transport dels telescopis. Formuleu un problema de fluxos en xarxa que permeti resoldre el problema. Dibuixeu la xarxa associada a aquest problema. A quín tipus de problema de fluxos en xarxa correspon?

18. Models de fluxos en xarxes.

La companyia de aerolínies "Fly-By-Night" (FBN) ha de decidir quants vols diaris ha d'establir entre Juneau (Alaska) i Dallas (Texas). Els vols que surten de Juneau han de fer escala primer a Seattle i després a Los Angeles o Denver. Degut a la capacitat limitada de les pistes d'aterratge dels diferents aeroports FBN té limitat en nombre de vols diaris, segons s'indica a la següent taula:

	Vols
Juneau – Seattle	3
Seattle – L.A.	2
Seattle – Denver	3
L.A. – Dallas	1
Denver – Dallas	2

Formuleu un problema de fluxos en xarxes que maximitzi el nombre de vols de connexió diaris entre Juneau i Dallas. A quín tipus de problema de fluxos en xarxes correspon? Representeu la xarxa associada i trobeu una solució "by inspection" (a ull).

19. Models de fluxos en xarxes.

Una productora de Hollywood ha de seleccionar els protagonistes masculí i femení de cinc pel·lícules. Disposa de cinc actors i cinc actrius però no saben com aparellar-los. Per tal de decidir-ho pregunta a cadascú d'ells amb quin actor del sexe contrari estaria disposat a actuar.

La següent taula mostra el resultat de l'enquesta (S indica que ambdós actors estarien disposats a actuar junts) :

	Loni Anderson	Meryl Streep	Katharine Hepburn	Linda Evans	Victoria Principal
Kevin Costner	–	S	–	–	–
Burt Reynolds	S	–	–	–	–
Tom Selleck	S	S	–	–	–
Michael Douglas	S	S	–	–	S
Tom Cruise	–	–	S	S	S

Formuleu un problema de fluxos en xarxes que permeti maximitzar el nombre de parelles compatibles formades. Dibuixeu la xarxa associada. De quín tipus de problema de fluxos en xarxes es tracta?

20. Models de fluxos en xarxes.

Hem comprat un cotxe nou per 1.2 milions de pessetes. El cost de manteniment durant un cert any depén de l'edat del cotxe al principi de l'any, tal com indica la següent taula:

Edad (Anys)	Cost Manteniment	Preu Venda
0	200.000	–
1	400.000	700.000
2	500.000	600.000
3	900.000	200.000
4	1,200.000	100.000
5	–	0

Per a evitar els elevats costos de manteniment associats a un cotxe vell podem vendre el cotxe vell i comprar un de nou. El preu que ens pagarien pel cotxe vell depén de l'edat del cotxe en el moment de la venda, i està indicat a la taula anterior. Suposem que el preu que haurem de pagar pel cotxe nou, si decidim canviar de cotxe, és de 1.2 milions de pessetes, independentment de l'any en que es compri. Formuleu un problema de fluxos en xarxes que permeti minimitzar el cost net (preu de compra dels cotxes nous + el preu de manteniment - preu de venda dels cotxes vells) dels pròxims cinc anys. Representeu la xarxa associada. A quín tipus de problema de fluxos en xarxes correspon?

21. Models de fluxos en xarxes.

Actualment, el laboratori de càlcul de la Universitat de Namur pot emmagatzemar 200 fitxers en disc dur, 100 fitxers en memoria i 300 fitxers en cinta. Els usuaris d'aquesta universitat han d'emmagatzemar 300 fitxers de text, 100 fitxers executables i 100 fitxers de dades. Cada fitxer de text és llegit pel conjunt total d'usuaris 8 vegades al mes en promig, un fitxer executable 4 vegades i un fitxer de dades 2 vegades. Considerem que el temps de lectura d'un fitxer depèn només del tipus de fitxer i del mitjà d'emmagatzemament, tal com indica a la següent taula:

Temps de lectura (minuts)

	Text	Exec.	Dades
Disc	5	4	4
Memòria	2	1	1
Cinta	10	8	6

L'objectiu del laboratori de càlcul és averiguar quina és la distribució de fitxers que minimitza els temps gastat al mes, en promig, pel conjunt total d'usuaris de la universitat en la lectura dels seus fitxers. Formuleu un problema de fluxos en xarxes que es pugui usar per determinar on guardar cada fitxer. Representeu la xarxa associada a aquest problema. Quín tipus de problema de fluxos en xarxes és?

22. Models de programació lineal entera.

Un fabricant pot vendre un cert producte A amb un benefici unitari de 200pts, i un producte B amb un benefici unitari de 500pts. La fabricació d'una unitat de producte A requereix de tres unitats de matèria primera, i la fabricació d'una unitat de producte B necessita sis unitats de matèria primera. La quantitat total de matèria primera disponible és de 12 unitats. El cost fix per fabricació de producte A és de 1000pts, i el cost fix per fabricació del producte B és de 2000pts. Formuleu un programa lineal enter que permeti maximitzar els beneficis.

23. Models de programació lineal entera.

Degut a l'excessiva contaminació del riu Miskatonic, l'estat de Arkham planeja construir algunes estacions de control de polució. Es pren en consideració tres possibles ubicacions (1, 2 i 3). El municipi d'Arkham està interessat en el control del nivell de dos agents contaminants (A i B). La legislació estatal imposa que, com a mínim, siguin eliminades del riu 80000 tones d'agent contaminant A, i un mínim de 50000 tones de l'agent B. Les dades que disposa l'ajuntament es troben recollides a la següent taula:

	Cost de construcció	Coste de trat. 1Tm aigua	Quantitat eliminada per Tm d'aigua tractada. Agent A	Agent B
Situació 1	10 mill.	2000 pts.	0.40Tm	0.30Tm
Situació 2	6 mill.	3000 pts.	0.25Tm	0.20Tm
Situació 3	4 mill.	4000 pts.	0.20Tm	0.25Tm

Formuleu un problema de programació lineal entera que permeti satisfer la legislació vigent amb un cost mínim.

24. Models de programació lineal entera.

A l'especialitat d'Investigació Operativa de la futura Llicenciatura ~~d'Est~~adística de la UPC, els estudiants hauran de completar, com a mínim, dos cursos de matemàtiques, dos cursos de programació i dos cursos d'Investigació Operativa. Algunes assignatures poden ser usades per a completar més d'una matèria, tal com s'indica a continuació:

- Càlcul : matemàtiques.

- I.O. : matemàtiques y I.O.
- Estructures de Dades : programació i matemàtiques.
- Estadística : matemàtiques i I.O.
- Simulació : I.O. i programació.
- Programació : programació.
- Optimizació : I.O. i matemàtiques.

Formuleu un problema de programació lineal entera que minimitzi el nombre d'assignatures necessàries per a obtenir l'especialitat.

25. Models de programació lineal entera.

Una empresa està considerant la possibilitat d'obrir magatzems a quatre ciutats : Nova York, Los Angeles, Chicago i Atlanta. Cada magatzem té una capacitat de 100 unitats. El cost fix setmanal de mantenir cada magatzem obert és de 40000pts per a N.Y., 50000pts per a L.A., 30000pts per a Chicago i 15000pts per a Atlanta. La regió 1 del país necessita 80 unitats setmanals de producte, la regió 2 70 unitats i la regió 3 40 unitats. El cost unitari c_{ij} (que inclou la producció i el transport) de distribució desde el magatzem de la ciutat i fins a la regió j és:

	Reg. 1	Reg. 2	Reg. 3
N.Y.	2000	4000	5000
L.A.	4800	1500	2600
Chicago	2600	3500	1800
Atlanta	2400	5000	3500

Formuleu un problema de programació entera que pugui ser usat per a satisfer la demanda tot minimitzant els costos setmanals.

26. Models de programació lineal entera.

El tècnic de sistemes del Laboratori de Càlcul de la FME vol accedir a cinc fitxers diferents. Hi ha còpia d'aquests fitxers a diverses cintes de backup tal com mostra la següent taula:

	CINTES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fitxer 1	x	x		x	x			x	x	x
Fitxer 2	x		x							
Fitxer 3		x			x		x			x
Fitxer 4			x			x		x		
Fitxer 5	x	x		x		x	x		x	x
Tamany (Mb)	30	50	10	20	10	40	30	10	20	20

Per tal de recuperar els fitxers primer s'ha de fer un volcat de les cintes a disc dur. Aquest volcat ha de ser de la cinta completa, no podent-se copiar només una part de la cinta. Formuleu un problema de programació lineal entera que determini el conjunt de cintes a volcar de forma que s'ocupi el mínim espai en disc i es poguin recuperar tots els fitxers.

2 Problemes de programació lineal.

27. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal (**PL**):

$$
(\mathbf{PL})\begin{cases}
\min & z = c'x \\
\text{s.a.:} & \\
& -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 10 \\
& x \geq 0
\end{cases}
$$

a) Trobeu gràficament la solució de (**PL**) per $c' = [-3 \quad 1]$. Classifiqueu el problema.
b) Trobeu gràficament la solució de (**PL**) per $c' = [-2 \quad 1]$. Classifiqueu el problema.
c) Trobeu el valor del terme independent de la segona constricció a partir del qual (**PL**) seria infactible.

28. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal (**PL**):

$$
(\mathbf{PL})\begin{cases}
\min & z = c_1x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 10 \\
& x \geq 0
\end{cases}
$$

Trobeu gràficament la solució del problema (**PL**) per als diferentes valors possibles de c_1.

29. Transformació a la forma estàndar*.

Transformeu el següent problema lineal a la forma estàndar:

$$(\mathbf{PL})\begin{cases} \max & z = 6x_1 - 5x_2 + 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 - 3x_2 = -5 \\ & 6 \leq x_1 + x_2 - 5x_4 \leq 7 \\ & \dfrac{3x_1 + 7x_2}{3x_3} \geq 4 \\ & x_1 \text{ lliure},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

30. Solucions bàsiques*

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(\mathbf{PL})\begin{cases} \min & z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & \text{s.a.:} \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu totes les soluciones bàsiques factibles de **(PL)**.
b) Trobeu totes les solucions bàsiques no factibles de **(PL)**.

31. Solucions bàsiques*

Trobeu totes les solucions bàsiques factibles dels següents problemes:

a)

$$(\mathbf{PL})\begin{cases} \min & z = 5x_1 - x_2 \\ & \text{s.a.:} \\ & 2x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$(\mathbf{PL})\begin{cases} \min & z = -4x_1 + x_2 \\ & \text{s.a.:} \\ & 3x_1 + x_2 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

32. Fase I*

Considereu un cert problema d'optimització amb una regió factible definida per les constriccions :

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 3/2x_2 & \leq & 12 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Calculeu, si existeix, una solució factible d'aquest problema.

33. Simplex primal en forma matricial i fase I*

Sigui el problema **(PL)** següent:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^2} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Resoleu **(PL)** aplicant l'algorisme del símplex primal en forma matricial a partir de la base incial factible $\mathcal{B}^0 = \{1, 2\}$.

b) Considereu el problema $(\widetilde{\mathbf{PL}})$ que s'obté a partir de **(PL)** substituint la desigualtat "$\leq$" de la primera constricció per "$\geq$". Calculeu una base inicial factible de $(\widetilde{\mathbf{PL}})$ aplicant la fase I del símplex primal en forma tabular.

34. Simplex primal en forma matricial*

Resoleu el següent problema amb l'algorisme del simplex primal en forma matricial:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \max & z = & 14x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & & \\ \\ \text{subj.a :} & & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & \leq & 1125 \\ & & x_1 & & & & & \leq & 1000 \\ & & & & x_2 & & & \leq & 500 \\ & & & & & & x_3 & \leq & 1500 \\ \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

35. Anàlisi de solucions *

Certa indústria fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es consumeixen dos tipus de recursos, R1 i R2. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una demanda D no inferior a 15 unitats. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 milions de pessetes. El problema lineal **(PL)** que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

$$(\mathbf{PL})\left\{\begin{array}{llrcrcrcrl} \min & z = & 10x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\ & & & & & & & & & \\ \text{subj.a}: & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \le & 20 & \text{R1} \\ & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \le & 40 & \text{R2} \\ & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \ge & 15 & \text{D} \\ & & & & & & & & & \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \ge & 0 & \end{array}\right.$$

a) Sense realitzar cap iteració del mètode del simplex, comproveu que la producció óptima correspón a la base $\mathcal{B} = \{2,3,5\}$, sent x_5 la folga de la restricció R2. La inversa de la base és:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Formuleu el dual de (**PL**). Calculeu el valor de les variables duals i comproveu que el seu signe coincideix amb el que apareix en la formulació del problema dual.

c) Suposseu que, per problemas econòmics, hem de reduir les despesses de fabricació en 10 milions de pessetes. Si la disponibilitat dels recursos no pot ser modificada, Quína repercussió té aquesta mesura en la demanda que podem satisfer?

d) Quant hauria de disminuir el cost de fabricació del producte A per tal que fos convenient la seva producció?.

e) Formuleu el tableau òptim de (**PL**) sense realitzar cap iteració del simplex.

f) Suposeu que hem aconseguit reduir els costos de producció de A fins a un valor $c_1 = 1/2$. A partir de la solució òptima de (**PL**), reoptimitzeu per al nou valor de c_1.

36. Anàlisi de solucions *

Una certa industria fabrica els productes A, B, C i D. En la fabricació d'aquests tres productes es consumeixen tres tipus de recursos, R1, R2 i R3. El benefici unitari dels productes A, B, C i D és, respectivament, de 200, 400, 100 i 100 pessetes. El problema lineal (**PL**) que permet calcular les quantitats òptimes dels productes A (x_1) B (x_2), C (x_3) i D (x_4) que maximitzen els beneficis és:

$$(\mathbf{PL})\left\{\begin{array}{llrrcrcrcrcrl} \min & z = & - & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ \text{subj.a}: & & & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & \le & 8 & \text{R1} \\ & & & 2x_1 & + & x_2 & & & & & \le & 6 & \text{R2} \\ & & & & & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \le & 6 & \text{R3} \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & & x_4 & \ge & 0 & \end{array}\right.$$

La base òptima d'aquest problema és $\mathcal{B}^* = \{1, 3, 2\}$, i la inversa de la matriu bàsica és:

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Enuncieu el teorema de la folga complementària. Useu aquest teorema per a demostrar la optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$.

b) Considereu un nou problema lineal $(\widehat{\mathbf{PL}})$ exactament igual al problema $(\mathbf{PL})$ pero amb totes les constriccions formulades com a constriccions d'igualtat. Formuleu (sense resoldre) el problema artificial $(\widehat{\mathbf{PL}}_a)$ que permet obtenir una solució bàsica factible inicial de $(\widehat{\mathbf{PL}})$. Construïu-ne el tableau del simplex inicial de $(\widehat{\mathbf{PL}}_a)$

c) Dins de quin marge de valors de b_2 (disponibilitat del recurs R2) continua sent òptima la base $\mathcal{B}^*$ de $(\mathbf{PL})$? Quina és la solució òptima si $b_2 = 20$.

d) L'empresa es planteja la possibilitat de produir un nou producte E, que associarem a la variable x_8. El benefici unitari per venda d'aquest producte és de 800ptas. El consum de recursos per unitat de producte produït depén d'un cert paràmetre θ i ve donat pel vector $a_8 = [\,10 - 2\theta \quad 20 - \theta \quad 1 - 5\theta\,]'$. A partir de quin valor del paràmetre θ interessa produir E?

37. Anàlisi de solucions *

En el problema de programació lineal:

$$(\mathbf{PL}) \begin{cases} \min \quad z = 2x_1 + c_2x_2 + 4x_3 + c_4x_4 \\ \text{subj.a}: \\ \quad x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 \leq 2 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ \quad x_1 \,,\; x_2 \,,\; x_3 \;\; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

el valor a l'òptim de les variables és $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 4$, $x_4^* = 0$.

a) Quines variables formen part de la solució bàsica òptima de $(\mathbf{PL})$, i quin és el seu valor?

b) Quins valors poden tenir c_2 i c_4 per tal que la solució indicada sigui òptima?

c) Si a les constriccions i funció objectiu hi hagués una nova variable x_5 de cost $c_5 = 3$ i amb una columna de coeficients $a_5 = [\,8 \quad 0 \quad 1\,]'$, determineu si aquesta variable seria bàsica a l'òptim del nou problema plantejat.

38. Carbons d'Espanya S.A.*

Certes centrals tèrmiques de producció d'energia elèctrica usen com a combustible una mescla pulveritzada de diferents classes de carbons. L'empresa Carbons d'Espanya S.A. (CESA) es dedica a la producció de carbons mesclats a partir de quatre tipus de carbons bàsics, ***Lignit***, ***Hulla***, ***Antracita*** i ***Torba***. Les característiques principals d'aquests carbons són el ***contingut en sofre***, mesurat en tant per cent de la massa, i la ***capacitat energètica***, mesurada en quilotèrmies per tona de carbó. Les característiques dels quatre carbons bàsics, i el seu preu s'indiquen a la següent taula :

Tipus de Carbó	Contingut Sofre (%)	Capacitat energètica (Kth/Tm)	Preu compra (10^4pts/Tm)
Lignit	2.0	4.0	25
Hulla	3.0	2.0	30
Antracita	0.5	0.8	20
Torba	7.5	0.5	10

(Característiques dels carbons bàsics)

Les característiques exigides al carbó de mescla depèn de les normatives de cada estat. Per a la Comunitat Econòmica Europea (CEE), Estats Units (EUA), i Japó són les següents :

Estat	Contingut Sofre (%)	Capacitat energètica (Kth/Tm)
CEE	≤ 1.5	≥ 2.0
EUA	≤ 1.1	≥ 1.5
Japó	≤ 2.0	≥ 2.5

(Normatives estatals del carbó de mescla)

El mercat de CESA es restringeix de moment a la CEE. EL programa lineal plantejat pel departament d'Investigació Operativa d'aquesta empresa per trobar la proporció de mescla òptima és :

$$
(\mathbf{PL}) \left\{ \begin{array}{lllllllllll}
\min & z = & 25x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & + & 10x_4 & & \\
\text{subj.a :} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 0.5x_3 & + & 7.5x_4 & \leq & 1.5 \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 0.8x_3 & + & 0.5x_4 & \geq & 2 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & & x_4 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

a) Actualment, les proporcions de mescla que CESA fa servir són : $x_1 = 0.290323$, $x_2 = 0.225806$, $x_3 = 0.483871$, $x_4 = 0$. Demostreu als responsables de producció que aquesta no és la millor proporció possible. La inversa de la base $\mathcal{B} = \{3, 1, 2\}$ és:

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} -032258 & -0.16129 & 1.29032 \\ -0.1935 & 0.40322 & -0.22580 \\ 0.5161 & -0.24193 & -0.06451 \end{bmatrix}
$$

b) Usant un paquet de programació lineal heu resolt el problema (**PL**). obtenint el següent tableau òptim :

$$T^* = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & 0.328 & 1 & 0 & -0.153 & 0.241 & 0.558 \\ 1 & 0.400 & 0 & 0 & 0.013 & -0.306 & 0.381 \\ 0 & 0.271 & 0 & 1 & 0.140 & 0.066 & 0.061 \\ \hline 0 & 10.711 & 0 & 0 & 1.335 & 2.188 & -21.291 \end{array}$$

sent la inversa de la base òptima $B^{*^{-1}} = \begin{bmatrix} -0.15317 & -0.24070 & 1.26914 \\ 0.01312 & 0.30634 & -0.25164 \\ 0.14004 & -0.06564 & -0.01750 \end{bmatrix}$

A partir de la solució de l'apartat a) arribeu a aquesta solució iterant amb l'algorisme del símplex.

c) Cenyint-nos a la producció per a la CEE, si CESA tingués l'opció de comprar a 150000 pts/Tm un nou tipus de carbó bàsic amb un 1% de contingut en sofre i 1Kth/Tm, interessaria canviar la proporció de mescla òptima corresponent a T^* per incloure aquest nou carbó? Justifiqueu la resposta.

d) CESA vol ampliar el seu mercat i es planteja exportar als EUA i al Japó, acomodant les característiques del carbó de mescla a la legislació d'aquest estats. Tots dos països pagarien a CESA el mateix preu per tona de carbó de mescla. Si, per raons d'estratègia internacional, només es vol exportar a un d'aquests dos països, a quín dels dos països hauria d'exportar CESA? Justifiqueu la resposta.

39. Industrial de Formatges S.A.*

Industrial de Formatges S.A. (IFSA) és una empresa que es dedica a elaborar tres tipus de formatge utillitzant llet de cabra i d'ovella. Per al pròxim mes es disposa de 850 litres de llet de cabra i de 900 de llet d'ovella. Els coeficients tecnològics i els costos s'indiquen a la següent taula:

		Formatge 1 (x_1)		Formatge 2 (x_2)		Formatge 3 (x_3)	
		Quant.	Cost	Quant.	Cost	Quant.	Cost
	Pts./litre	(l./formatge)	(Pts)	(l./formatge)	(Pts)	(l./formatge)	(Pts)
Llet cabra	20	5	100	2	40	1	20
Llet ovella	10	1	10	2	20	4	40
Altres costos			50		50		100
Total costos unit.			160		110		160
Preu venda unit.			190		170		180
Benefici unitari			30		60		20

A més, per a garantir els llocs de treball que té l'empresa, la direcció ha decidit que, com a mínim, s'han d'elaborar un total de 400 formatges. El programa lineal que permet calcular la producció òptima és:

$$
(\mathbf{PL}) \left\{ \begin{array}{lrrrrrrrl}
\min & z = & -30x_1 & - & 60x_2 & - & 20x_3 & & \\
\text{subj.a :} & & 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 850 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 900 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 400 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

La resolució de (**PL**) proporciona la planificació de producció òptima que es dedueix de la següent taula:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3/2	0	-1/2	1/2	0	1	25
-4	0	3	-1	1	0	50
5/2	1	1/2	1/2	0	0	425
120	0	10	30	0	0	25500

a) Ens ofereixen la possibilitat de comprar llet de cabra per sobre dels 850l inicials a 60 pts/litre. Estariem disposats a comprar? Quin és el preu màxim que estariem disposats a pagar per un litre addicional de llet de cabra?

b) Es modificaria d'alguna forma la planificació de la producció si no es tingués en compte la tercera constricció? Raoneu la vostra resposta.

c) Si el preu de venda del formatge 1 passes a ser de 320pts, quina seria la nova planificació de producció òptima?

d) Sota quina circumstància es podria obtenir una planificació òptima on es produissin conjuntament el formatge de tipus 2 i el de tipus 3 sense que es modifiquès el benefici total de la solució actual?

40. Companyia petrolífera ASPEC.*

Una companyia petrolífera ASPEC ha de determinar la producció òptima diaria, en dm^3/dia, de petroli cru (x_1), fuel de qüalitat baixa (x_2) i fuel de qüalitat alta (x_3). Per a obtenir els valors òptims de x_1, x_2 i x_3, el departament d'Investigació Operativa d'ASPEC ha formulat i definit dins del programa LINDO el següent programa lineal:

```
MIN   - 0.5 X1 - 2.5 X2 - 3 X3
SUBJECT TO
    REF.)          0.75 X2 +      X3 <=   9
    EMB.)               X2 + 1.5 X3 <=   20
    DEM.)   X1 +        X2 +      X3 =   10
END
```

on **REF.** té en compte la capacitat màxima diària de la planta de refinat de la companyia, en hores/dia, **EMB.** indica la capacitat, també en hores/dia, de la planta d'embassat dels productes. Finalment, **DEM.** indica la demanda diaria conjunta dels tres productes. El valor de la funció objectiu representa els beneficis diaris de ASPEC, canviats de signe, en milions de pts.

La solució que proporciona LINDO a aquest problema és:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)     -28.000000
 VARIABLE         VALUE           REDUCED COST
       X1          .000000           .500000
       X2         4.000000           .000000
       X3         6.000000           .000000
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     REF.)          .000000          2.000000
     EMB.)         7.000000           .000000
     DEM.)          .000000          1.000000
NO. ITERATIONS=        3
```

i el tableau associat a aquesta solució és:

```
THE TABLEAU
 ROW  (BASIS)      X1     X2    X3     SLK 2 SLK 3
   1 ART          .500  .000  .000     2.000  .000      28.000
REF.        X3 -3.000  .000 1.000     4.000  .000       6.000
EMB.     SLK 3    .500  .000  .000    -2.000 1.000       7.000
DEM.        X2  4.000 1.000  .000    -4.000  .000       4.000
```

a) ASPEC es planteja la possibilitat d'invertir en millores en una de les dues plantes, la de refinat (REF.) o la d'embassat (EMB.). L'ampliació de la planta de refinat augmentaria la seva capacitat del valor actual 9 h/dia a 9.5 h/dia i necessitaria una inversió de 1.5 milions de pessetes. L'ampliació de la planta d'embassat també requereix 1.5 milions de pessetes i augmentaria la seva capacitat del valor actual 20 h/dia a 22 h/dia. Indiqueu a quina planta interessa realitzar la millora i per quina raó.

b) ASPEC es planteja la producció d'un nou fuel de molt alta qüalitat. La venda d'aquest fuel proporcionaria uns beneficis de 6 milions de pessetes per dm^3 venut, necessitant 2h de refinat i 1.5 d'embassat. La demanda conjunta dels quatre productes continuaria sent de 10 dm^3/dia. Interessa la producció d'aquest nou fuel?

41. Formulació de problemes duals*.

Formuleu el problema dual dels primals següents:

a)

$$(PL)\begin{cases} \min & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 + x_2 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$(PL)\begin{cases} \min & z = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 - x_3 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

42. Fase I i simplex primal i dual*

Considereu el següent problema de programació lineal :

$$
(\mathbf{PL})\left\{\begin{array}{llcccccccccl}
\min & z= & 28x_1 & + & 67x_2 & + & 12x_3 & + & 35x_4 & & \\
\text{s.a.:} & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & \geq & 17 \\
 & & 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \geq & 36 \\
 & & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & \geq & 8 \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & x_i \geq 0 & , & \forall i & & & & & &
\end{array}\right.
$$

a) Comproveu si la base $\mathcal{B}^0 = \{1,3,7\}$ és òptima. Si no ho és, calculeu l'òptim de (PL) iterant a partir de la base $\mathcal{B}^0$ amb l'algorisme del símplex. x_7 correspón a l'escreix de la tercera constricció, sent $(B^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Formuleu el problema artificial associat a la fase I de l'algorisme del símplex. Construïu el tableau inicial de la fase I.

Sabent que la base òptima de (PL) correspón al conjunt $\mathcal{B}^* = \{1,2,7\}$, amb inversa de la matriu bàsica $B^{*-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, feu el següent apartat :

c) Considereu la modificació de (PL) consistent en un canvi del terme independent de la tercera constricció, que passa del valor actual $b_3 = 8$ al nou valor $\hat{b}_3 = 16$. Continua sent òptima la base $\mathcal{B}^* = \{1,2,7\}$?. Justifiqueu la vostra resposta. En cas de resposta negativa, reoptimitzeu a partir de $\mathcal{B}^*$.

43. Teorema de la dualitat i anàlisi post-òptima*

Considereu el següent problema lineal :

$$
(\mathbf{PL})\left\{\begin{array}{lcccccccl}
\min & z= & -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & \\
 & & & & & & & & \\
\text{subj.a :} & & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 9 \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 & & & & & & & & \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

Sabem que el valor de les variables a l'òptim és $x_1 = 14/3$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 13/3$. Anomenaren x^* a aquesta solució.

a) Enuncieu del teorema de la folga complementària. Calculeu el valor de les variables duals a l'òptim usant el teorema de la folga complementària.

b) Enuncieu del teorema de la dualitat forta. Comproveu que la solució primal x^* i la dual trobada a l'apartat a) satisfan aquest teorema.

c) Suposeu que, una vegada trobat x^* s'introdueix una nova variable x_7 al problema original (PL) amb cost $c_7 = -1$ i amb una columna donada per l'expressió :

$$a_7 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c.1) Si reoptimitzessim a partir de x^*, per quins valors del paràmetre α la variable x_7 entraria a la base.

c.2) Sense fer cap iteració del simplex, formeu la taula òptima corresponent a x^*. A partir d'aquesta taula, reoptimitzeu pel cas $\alpha = 1/3$.

44. Fase I i dualitat*

Considereu el següent problema lineal :

$$(\mathbf{PL}) \begin{cases} \max \quad z = -4x_1 - x_2 \\ \text{subj.a :} \quad 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ \qquad x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \qquad 3x_1 + x_2 = 3 \\ \qquad x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculeu una solució bàsica factible inicial aplicant la fase I del simplex.

b) Formuleu el problema dual associat a $(\mathbf{PL})$.

Si formulessim $(\mathbf{PL})$ com un problema de minimització, el tableau òptim que obtindriem seria el següent :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	0	3/5	0	-1/5	6/5
1	0	0	-1/5	0	2/5	3/5
0	0	1	1	-1	1	0
0	0	0	1/5	0	-7/5	-18/5

amb : x_3 escreix de la primera constricció ; x_4 folga de la segona constricció ; x_5 variable artificial de la primera constricció ; x_6 variable artificial de la tercera constricció .

c) Calculeu el valor de les variables duals de $(\mathbf{PL})$ a partir de la informació continguda a l'anterior tableau òptim. No es permet calcular inverses de matrius.

Sustituïm ara $(\mathbf{PL})$ pel següent problema lineal :

$$(\widehat{\mathbf{PL}}) \begin{cases} \max \quad z = -4x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{subj.a :} \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \\ \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ \qquad 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

d) La solució òptima de $(\mathbf{PL})$ continua sent òptima per $(\widehat{\mathbf{PL}})$?

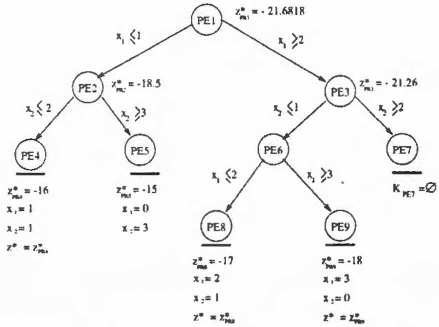
3 Problemes de programació lineal entera.

45. Arbre d'exploració del Branch & Bound.

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$
(\mathbf{PLE}) \begin{cases} \min \quad z = -6x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.}: \quad x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 18x_1 + 14x_2 \leq 63 \\ x_1 , \; x_2 \geq 0 \text{ , enteras} \end{cases}
$$

L'arbre d'exploració complet de la resolució de **(PLE)** amb l'algorisme del Branch & Bound és:



Les regles de generació de l'arbre han estat: explorar primer la branca de l'esquerra i seleccionar subproblemes segons el criteri LIFO. Expliqueu els criteris d'eliminació a cada node i dieu quina és la solució òptima.

46. Resolució gràfica del les relaxacions lineals.

Resoleu els següents problemes de programació lineal entera amb el mètode del B&B,

resolent els subproblemes relaxats gràficament:

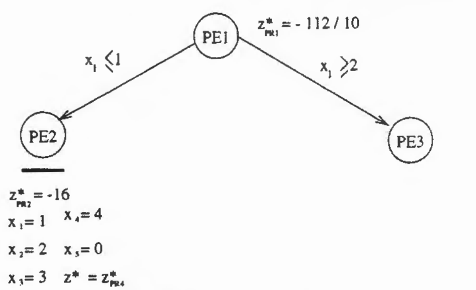
$$(\mathbf{PLE1})\left\{\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 5x_1 & + & 2x_2 & & & \\
\text{s.a.}: & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 12 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & .\text{enteras}
\end{array}\right.$$

$$(\mathbf{PLE2})\left\{\begin{array}{llrcrcrl}
\min & z = & 4x_1 & + & 5x_2 & & & \\
\text{s.a.}: & & x_1 & + & 4x_2 & \geq & 5 & \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 7 & \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & .\text{enteras}
\end{array}\right.$$

47. Resolució amb arbre d'exploració incomplet.

La següent figura mostra un problema de programació lineal entera i el seu l'arbre d'exploració incomplet:

$$(\mathbf{PLE})\left\{\begin{array}{llrcrcrl}
\min & z = & 4x_1 & + & 5x_2 & & & \\
\text{s.a.}: & & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & \\
 & & x_1 & + & 4x_2 & \geq & 5 & \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 7 & \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & ,\ \text{enteras}
\end{array}\right.$$



El tableau òptim de la relaxació lineal del subproblema (PE3) obtingut amb LINDO és:

```
THE TABLEAU
    ROW  (BASIS)        X1         X2         E1         E2         E3
      1 ART            .000       .000       .000      1.250       .000
     R1        E1      .000       .000      1.000      -.250       .000
     R2        X2      .000      1.000       .000      -.250       .000
     R3        E3      .000       .000       .000      -.500      1.000
     R4        X1     1.000       .000       .000       .000       .000
    ROW          E4
      1       2.750   -11.750
     R1      -2.750     4.750
     R2        .250      .750
     R3      -2.500      .500
     R4      -1.000     2.000
```

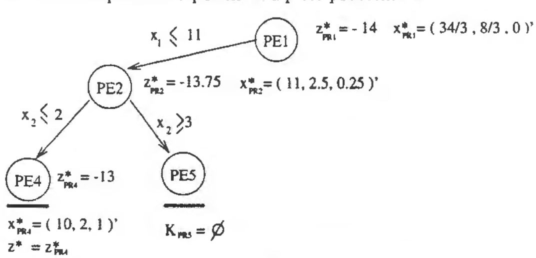
on E4 és la variable d'excés de la constricció R4 associada a la branca $x_1 \geq 2$. Resoleu el problema completant l'arbre d'exploració, resolent els subproblemes relaxats aplicant l'algorisme del simplex. Quan seleccioneu la variable de ramificació, doneu prioritat a les variables reals.

48. Arbre d'exploració incomplet *

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$
(\mathbf{PLE}) \left\{ \begin{array}{llrcrcrcl} \min & z = & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \\ \text{subj.a}: & & & \frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & & & \leq \quad 3 \\ & & & & & \frac{3}{2}x_2 & + & x_3 & \leq \quad 4 \\ & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq \quad 0\text{, enteres} \end{array} \right.
$$

L'arbre d'exploració incomplet corresponent a aquest problema és:



a) Descriviu detalladament les iteracions de l'algorisme del Branch & Bound mitjançant les que s'ha realitzat l'exploració de la branca $x_1 \leq 11$.
b) Durant l'exploració de la branca $x_1 \leq 11$ s'ha trobat una incumbent en el node (PE4). Podriem assegurar, sense necessitat de completar l'arbre d'exploració, que aquesta incumbent és ja la solució òptima? Per què?
c) Resoleu el problema **(PLE)** completant l'arbre d'exploració. El tableau òptim de la rela-

xació lineal (PE1) és:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	4/3	2	4/3	34/ 3
0	1	2/3	0	2/3	8/ 3
0	0	1	2	2	14

49. Resolució gràfica*

Considereu el seguent problema de programació lineal entera:

$$(\mathbf{PLE})\begin{cases} \min\limits_{x\in\Re^2} z = -x_1 - x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ enter} \end{cases}$$

Trobeu la solució de **(PLE)**, resolent els subproblemes relaxats gràficament, i explorant primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$. Feu dues resolucions alternatives, amb dos criteris diferents de ramificació:

a) Ramificant primer en x_1.
b) Ramificant primer en x_2.

50. Resolució amb el simplex dual *

Resoleu el següent problema de programació entera :

$$(\mathbf{PLE})\begin{cases} \min & - x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 15 \\ & - x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 \;,\; \text{enteres} \end{cases}$$

El tableau òptim de la relaxació lineal de **(PLE)** és :

$T^*_{PR1} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1/2	1/2	0	0	5/2
0	1/2	−1/2	1	0	25/2
0	7/2	1/2	0	1	11/2
0	3/2	1/2	0	0	5/2

Escolliu com a variable de ramificació les variables reals abans que les folgues. Resoleu les relaxacions lineals amb l'algorisme del símplex dual.

51. Resolució amb el simplex dual *

Considereu el següent problema de programació entera:

$$(\mathbf{PLE})\begin{cases} \min & z = -x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{subj.a}: & \frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3 \\ & \frac{3}{2}x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ . enteras} \end{cases}$$

Resoleu el problema **(PE)**. El tableau òptim de la relaxació lineal de **(PE)** és:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	4/3	2	4/3	34/ 3
0	1	2/3	0	2/3	8/ 3
0	0	1	2	2	14

52. Resolució amb el simplex dual *

Resoleu el següent problema de programació entera :

$$(\mathbf{PLE})\begin{cases} \min & -x_1 - x_2 \\ \text{s.a.}: & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + x_2 \leq 15 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \text{enteres} \end{cases}$$

El tableau òptim de la relaxació lineal de **(PLE)** és :

$T^*_{PR1} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	5/4	−1/4	0	5/2
1	0	−1/4	1/4	0	5/2
0	0	−3/2	1/2	1	3
0	0	1	0	0	5

Escolliu com a variable de ramificació la variable real amb valor no enter d'índex menor. Resoleu les relaxacions lineals amb l'algorisme del símplex dual.

4 Problemes de programació no lineal.

53. Mínim analític*

Trobeu analíticament la solució dels següents problemes d'optimització sense constriccions. Indiqueu si existeix solució, si aquesta és única, i el seu caràcter (minim local, global, estricte,...):

a) $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3$

b) $\min f(x) = e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} + e^{x_1^2} + x_3^2$

c) $\min f(x) = e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1}$

d) $\min f(x) = e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2}$

54. Direccions de descens

Considereu el problema d'optimització no lineal amb constriccions següent :

$$\begin{array}{lll} \textbf{(PNL)} & \min & f(x_1,x_2) = x_1x_2 + (x_1 - x_2)^3 \\ & \text{s.a}: & x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dieu si les direccions $d^1 = [-1 \quad 1]'$, $d^2 = [1 \quad 2]'$, $d^3 = [3/2 \quad 2]'$ són factibles i de descens a partir del punt $x^0 = [0 \quad 1]'$ pel problema **(PNL)**. Justifiqueu la vostra resposta.

55. Direccions de descens*

Considereu el problema d'optimització no lineal amb constriccions següent :

$$\begin{array}{lll} \textbf{(PNL)} & \min & f(x_1,x_2) = (x_1 - 1)^2x_2 + (x_2 - x_1)^2 \\ & \text{s.a}: & x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dieu si les direccions $d^1 = [2 \quad 0]'$, $d^2 = [-2 \quad 1]'$, $d^3 = [2 \quad 2]'$. són factibles i de descens a partir del punt $x^0 = [1 \quad 0]'$ pel problema (PN2). Justifiqueu la vostra resposta.

56. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci

Realitzeu la primera iteració del mètode del gradient aplicat a la resolució del problema:

$$\textbf{(PNL)} \quad \min f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2x_3$$

Preneu com a punt inicial $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.1$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 4$ i interval d'incertessa inicial [0,1].

57. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci*

Realitzeu la primera iteració del mètode del gradient aplicat a la resolució del problema:

$$\textbf{(PNL)} \quad \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 - (x_2 - x_3)^3 + x_1 x_2 x_3$$

Preneu com a punt inicial $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.1$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 4$ a l'interval inicial d'incertessa [0,0.5].

58. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci

Considereu el següent problema d'optimització no lineal sense constriccions :

$$\textbf{(PNL)} \quad \min f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + (x_1 - x_2)^3$$

Feu la primera iteració de l'algorisme del gradient aplicat sobre el problema **(PNL)**, prenent com a punt inicial $x^0 = [1 \quad 1]'$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.5$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 3$ i interval inicial d'incertesa [0,3].

59. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci†

Considereu el següent problema d'optimització no lineal sense constriccions :

$$\textbf{(PNL)} \quad \min f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 x_2 + (x_2 - x_1)^2$$

Feu la primera iteració de l'algorisme del gradient aplicat sobre el problema **(PNL)**, prenent com a punt inicial $x^0 = [1 \quad 2]'$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.5$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 3$ i interval inicial d'incertesa [0,1/2].

60. Mètode del gradient i exploració lineal exacta i per Fibonacci*

Donat el següent problema d'optimització no lineal sense constriccins:

$$\textbf{(PNL)} \quad \min f(x) = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2$$

a) Efectueu una passa completa del mètode del gradient, partint de $x^0 = [-1 \quad 0]'$, amb tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.5$ i fent exploració lineal exacta.
b) Feu exploració lineal de fibonacci a partir del punt $x = [-1 \quad 0]'$ en la direcció $d = [4 \quad 4]'$ amb N=4.

61. Mètode del gradient i taxa de convergència†

Considereu el problema **(PNL)** consistent en la minimització de la funció $f(x) = 2x_1^2 -$

$x_2^2 + x_1x_3 - 3x_2 + x_3$.

a) Efectueu una passa del mètode del gradient a partir de $x^0 = [1 \quad 1 \quad 1]'$ amb exploració lineal exacta.

b) Considereu que l'aplicació del mètode del gradient en la resolució de **(PNL)** a partir de x^0 convergeix a un punt extrem x^*. És x^* la solució del problema **(PNL)**? Per què? Quina és la solució del problema **(PNL)**?

c) Calculeu la fita superior a la taxa de convergència β del mètode del gradient aplicat sobre **(PNL)**.

62. Corbes diferenciables*.

Considereu la constricció no lineal d'igualtat $h(x) = 0$ amb $h(x) = x_1^2 - x_2$ i la funció objectiu $f(x) = e^{x_1(x_2+1)}$. Sigui $\mathcal{S}$ la superfície de $\mathbb{R}^2$ definida per $h(x) = 0$ i $x(t)$ la corba diferenciable de $\mathcal{S}$ que té $x_1(t) = t$.

a) A quin punt de $\mathbb{R}^2$ correspon $x(0)$?

b) Calculeu el valor de $\dfrac{d}{dt}f(x(t))$ per a $t = 0$.

c) A la vista del resultat anterior, pot ser $x(0)$ un punt estacionari del problema $\left\{\begin{array}{l}\min f(x)\\ \text{s. a: } h(x) = 0\end{array}\right.$?

63. Formulació de les condicions de Kuhn i Tucker*

Formuleu les condicions necessàries de primer ordre de mínim local del següent problema d'optimització no lineal :

$$\begin{array}{l}\min f(x_1, x_2)\\ \text{s.a. :} g_1(x_1, x_2) \le b_1\\ \quad g_2(x_1, x_2) \ge b_2\\ \quad x_1, x_2 \ge 0\end{array}$$

amb $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

64. Condicions de Kuhn i Tucker*

Considereu el següent problema de programació no lineal:

$$(\mathbf{PNL})\left\{\begin{array}{lcccccc}\min \quad f(x) = & (x_1 - 1)^2 & + & (x_2 - 2)^2 & & \\ \text{subj.a :} & -x_1 & + & x_2 & \ge & -1\\ & x_1 & + & x_2 & \le & 2\\ & x_1 & , & x_2 & \ge & 0\end{array}\right.$$

a) Suposem que s'ha trobat una solució factible **(PNL)** que satisfà les condicions necessàries de primer ordre (condicions de Kuhn i Tucker). Què podem dir sobre el caràcter de mínim local o global d'aquesta solució? Justifiqueu la vostra resposta.

b) Formuleu les condicions de Khun i Tucker del problema **(PNL)**.

c) Resoleu el problema **(PNL)** usant les condicions de Kuhn i Tucker, sabent que a l'òptim es satisfà que $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$.

65. Condicions de Kuhn i Tucker*

Considereu el següent problema de programació no lineal:

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min & f(x) = (x_1x_2-3)^2 - 4x_1x_2 + 2(x_1x_3-1)^3 - \frac{15}{2}x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a}: & 6x_1^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 - 5 \le 0 \\ & x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 + x_3^2 - 4 \le 0 \end{cases}$$

a) Formuleu ls condicions de Khun i Tucker pel problema (**PNL**).
b) Comproveu si el vector $x' = [0 \quad -2 \quad 1]$ pot ser un mínim local del problema (**PNL**).

66. Condicions de Kuhn i Tucker

Considereu el següent problema de programació no lineal amb constriccions :

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{PNL}) & \min & f(x_1,x_2) = x_1x_2 + (x_1-x_2)^3 \\ & \text{s.a}: & (x_1+1)(x_2+1) \le 3 \\ & & x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

a) Comproveu, a partir de les condicions de Kuhn-Tucker si el punt $x^0 = [1 \quad 1/2]'$ és un mínim local del problema (**PNL**).
b) Tenint en compte la regió factible de (**PNL**), podem dir que es tracta d'un problema de programació convexa? Justifiqueu la vostra resposta.

67. Condicions de Kuhn i Tucker i programació convexa*

Considereu el següent problema de programació no lineal amb constriccions :

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min & f(x_1,x_2) = (x_1-1)^2x_2 + (x_2-x_1)^2 \\ \text{s.a}: & (x_1+1)(x_2+1) + 2x_1^2 + 2x_2^2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Formuleu les condicions de Kuhn-Tucker pel problema (**PNL**).
b) Comproveu, a partir de les condicions de Kuhn-Tucker si el punt $x^0 = [0 \quad 1]'$ és un mínim local del problema (**PNL**).
c) És (**PNL**) un problema de programació convexa? Justifiqueu la vostra resposta.

68. Condicions de Kuhn i Tucker i pla tangent*

Considereu el problema d'optimització no lineal següent :

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min & f(x) = e^{x_1(x_2+1)} \\ \text{s.a.} & x_1^2 - x_2 \le 0 \\ & 2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1 \le 0 \end{cases}$$

a) Formuleu les condidicions necessàries de primer ordre de **(PNL)**. Indiqueu el procediment que s'hauria de seguir si es volgués resoldre **(PNL)** a partir d'aquestes condicions. Quina seria la dificultat més rellevant d'aquest procés?.
Considereu que GINO mostra la següent informació associada al punt $\tilde{x}$:

```
                OBJECTIVE FUNCTION VALUE

          1)          .529462

   VARIABLE          VALUE           REDUCED COST
         X1        -.455418             .000000
         X2         .396285            -.000007

        ROW   SLACK OR SURPLUS            PRICE
         2)         .188880             .000000
         3)        -.000009            -.241119
```

b) Usant la informació proporcionada per GINO, indiqueu si el punt $\tilde{x} = [-.455418 \quad .396285]'$ és un mínim local de **(PNL)**.
c) Trobeu una base del subespai tangent de les constriccions actives sobre $\tilde{x}$.

69. Condicions de segon ordre*

Considereu el problema d'optimització no lineal següent :

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min & f(x) = e^{x_1(x_2+1)} \\ \text{s.a.} & x_1^2 - x_2 \geq 0 \\ & 2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Comproveu si el punt $x^* = [-1/2 \quad 1/4]$ és solució del problema **(PNL)**.

70. Condicions de segon ordre*

Considereu el segënt problema d'optimització amb constriccions:

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} & f(x) = \dfrac{x_1x_2}{x_3+1} \\ \text{subj. a}: & h(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

La solució $x^* = [1 \quad 1 \quad 1]'$ és un punt estacionari de **(PNL)** amb multiplicador de Lagrange associat $\lambda^* = [-1/4]$. Comproveu si x^* és màxim, mínim o punt de sella de **(PNL)**.

71. Assumpció de complementarietat estricte

Considereu el següent problema d'optimització no lineal de dos variables:

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} & f(x) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \\ \text{subj. a}: & x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Comproveu que $x^* = [0 \quad 0]'$ i $\mu^* = 0$ satisfan les condicions suficients de segon ordre de mínim local, excepte l'assumpció de complementarietat estricte. És x^* un mínim local de **(PNL)**?

72. Gradient reduït generalitzat*

Considereu el següent problema d'optimització amb constriccions:

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min & \dfrac{x_1x_3^2}{2} - x_1x_5 + 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \\ \text{subj. a:} & \dfrac{x_1^2}{2} + x_2 - x_3 + 2x_4x_5 - x_5 = -2 \\ & \dfrac{3x_1^2}{2} + x_2x_3 - 2x_2 + \dfrac{3x_4^2}{2} + x_5 = \dfrac{7}{2} \\ & \\ & 0 \leq X \leq [4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4]' \end{cases}$$

Efectueu un pas complet del mètode del gradient reduït generalitzat a partir del punt $X_0 = [1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1/2]'$, trobant: el gradient reduït, la direcció d'exploració, la passa màxima i, prenent com a passa òptima la meitat de la passa màxima, un nou punt. A continuació efectueu una passa de projecció del nou punt sobre al hipersuperfície de les constriccions, segons el procediment del mètode. Comproveu que la direcció d'exploració obtinguda és de descens.

73. Gradient reduït generalitzat.

Considereu el següent problema d'optimització no lineal:

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} & f(x) = \dfrac{x_1x_2}{x_3 - 1} \\ \text{subj. a :} & x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 + \dfrac{3}{2x_3} \leq 5 \end{cases}$$

i la solució factible $x^0 = [1 \quad 1 \quad 1]'$.

a) Comproveu si el punt X_0 pot ser un òptim local de **(PNL)**.

b) Calculeu la direcció de descens a partir de X_0 segons el mètode del Gradient Reduït Generalitzat (GRG).

c) Si s'itera a partir de x^0 segons el mètode del GRG prenent $\alpha^* = \bar{\alpha}/2$ s'obté el punt $x^1 = [15/4 \quad 15/8 \quad 1/2]'$. Realitzeu una passa del procés de projecció de x^1 sobre la hipersuperfície de les constriccions que aplica el mètode GRG.

74. Gradient reduït generalitzat.

Considereu el següent problema d'optimització no lineal:

$$(\mathbf{PNL})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} & f(x) = \dfrac{x_1x_2}{x_3 + 1} \\ \text{subj. a :} & x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 + \dfrac{3}{2x_3} \leq 5 \end{cases}$$

a) Enuncieu la condició d'aturada de l'algorisme del Gradient Reduït Generalitzat. Comproveu aquesta condició pel problema **(PNL)** sobre la solució factible $x^k = [1 \quad 1 \quad 1]'$

b) Si s'aplica una passa del mètode del GRG a partir del punt factible $x^k = [0 \quad 2 \quad 3]'$ amb longitud de pas $\alpha^k = 2$ s'obté el punt iterat:

$$x^{k+1} \approx [-0.11419 \quad 1.98611 \quad 2.94444]'$$

Efectueu una iteració del procés de retorn a la regió factible a partir de $3x$. El vector de variables dependents a x^k és $y^k = [x_1{}^k \quad x_2{}^k]$

5 Solucions dels problemes de modelització.

Solució del problema 1.

- **Variables:**
  - x_{1A}: quantitat d'avions tipus 1 que vols a la ciutat A.
  - x_{1B}: quantitat d'avions tipus 1 que vols a la ciutat B.
  - x_{2A}: quantitat d'avions tipus 2 que vols a la ciutat A.
  - x_{2B}: quantitat d'avions tipus 2 que vols a la ciutat B.
  - x_{3A}: quantitat d'avions tipus 3 que vols a la ciutat A.
  - x_{3B}: quantitat d'avions tipus 3 que vols a la ciutat B.
- **Funció objectiu:** $z = 23x_{1A} + 58x_{1b} + \ldots + 38x_{3B}$
- **Constriccions:**
  - *Nombre màxim d'avions:*

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 8$$
$$x_{2A} + x_{2B} \leq 15$$
$$x_{3A} + x_{3B} \leq 11$$

  - *Demanda:*

$$45x_{1A} + 7x_{2A} + 5x_{3A} \geq 20$$
$$45x_{1B} + 7x_{2B} + 5x_{3B} \geq 28$$

  - *Capacitat torre de control:* $x_{1A} + x_{1B} + \frac{1}{3}x_{2A} + \frac{1}{3}x_{2B} + \frac{1}{3}x_{3A} + \frac{1}{3}x_{3B} \leq 5$
- **Formulació final:**

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = 23x_{1A} + 58x_{1b} + \ldots + 38x_{3B} \\ \text{s.a.:} & \\ & x_{1A} + x_{1B} \leq 8 \\ & x_{2A} + x_{2B} \leq 15 \\ & x_{3A} + x_{3B} \leq 11 \\ & 45x_{1A} + 7x_{2A} + 5x_{3A} \geq 20 \\ & 45x_{1B} + 7x_{2B} + 5x_{3B} \geq 28 \\ & x_{1A} + x_{1B} + \frac{1}{3}x_{2A} + \frac{1}{3}x_{2B} + \frac{1}{3}x_{3A} + \frac{1}{3}x_{3B} \leq 5 \\ & x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3A}, x_{3B} \geq 0 \quad , \quad \text{enteres} \end{array} \right.$$

Solució del problema 2.

- **Variables:** x_{ij}: nre. d'alumnes del districte i assignats al centre j ($x_{ij} \geq 0$, enteres). No cal distingir entre estudiants blancs i negres ja que, segons l'enunciat, es mantenen les mateixes proporcions que existeixen als districtes. Si es defineixen dues variables diferents per a distingir entre races (x^b_{ij} i x^n_{ij}) aleshores cal imposar la constricció:

$$\frac{x^b_{ij}}{x^b_{ij} + x^n_{ij}} = \frac{n^b_i}{n^n_i + n^b_i} \longrightarrow \left[1 - \left(\frac{n^b_i}{n^n_i + n^b_i}\right)\right] x^b_{ij} - \left(\frac{n^b_i}{n^n_i + n^b_i}\right) x^n_{ij} = 0$$

- **Funció objectiu:** $\min z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$

- **Constriccions**

  * *Escolarització de tots els alumnes:* $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = n^b_i + n^n_i \quad , \quad i = 1, 2 \ldots, 10$

  * *Capacitat de les escoles:* $\sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq c_j \quad , \quad j = 1, 2, 3$

  * *Balanç racial:* la proporció d'alumnes blancs i negres al centre j és:

$$f^b_j = \frac{\sum_{1=1}^{10} \left(\frac{n^b_i}{n^n_i + n^b_i}\right) x_{ij}}{\sum_{i=1}^{10} x_{ij}} \quad ; \quad f^n_j = \frac{\sum_{1=1}^{10} \left(\frac{n^n_i}{n^n_i + n^b_i}\right) x_{ij}}{\sum_{i=1}^{10} x_{ij}}$$

  Les constriccions de balanç racial imposen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \theta \leq f^b_j \leq \frac{1}{2} + \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \leq f^n_j \leq \frac{1}{2} + \theta \end{array}\right\} \quad , \quad j = 1, 2, 3 \tag{1}$$

Donat que s'ha de satisfer que $f^b_j + f^n_j = 1$, el conjunt de constriccions (1) és redundant, ja que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \theta \leq f^b_j \Rightarrow f^b_j \leq \frac{1}{2} + \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \leq f^n_j \Rightarrow f^b_j \leq \frac{1}{2} + \theta \end{array}\right\} \quad j = 1, 2, 3$$

Així doncs, només cal imposar les primeres desigualtats de les constriccions (1). Tal com s'han expressat aquestes constriccions són no lineals. Cal expressar-les com a constriccions lineals:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}-\theta \le f_j^b \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{2}-\theta-\frac{n_i^b}{n_i^n+n_i^b}\right)x_{ij} \le 0 \\ \dfrac{1}{2}-\theta \le f_j^n \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{2}-\theta-\frac{n_i^n}{n_i^n+n_i^b}\right)x_{ij} \le 0 \end{array}\right\} \forall j$$

- **Formulació final:**

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{ll} \min & z=\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{3} d_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a.:} & \displaystyle\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = n_i^b+n_i^n \quad , \quad i=1,2\ldots,10 \\ & \left.\begin{array}{r} \sum_{j=1}^{10} x_{ij} \le c_j \\ \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{2}-\theta-\frac{n_i^b}{n_i^n+n_i^b}\right)x_{ij} \le 0 \\ \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{2}-\theta-\frac{n_i^n}{n_i^n+n_i^b}\right)x_{ij} \le 0 \end{array}\right\} j=1,2,3 \end{array}\right.$$

Solució del problema 3.

- **Variables de decisió:**
  - x_{11} : Quantitat de producte 1 produït el mes 1 a la màquina 1.
  - x_{12} : Quantitat de producte 1 produït el mes 1 a la máquina 2.
  - x_{21} : Quantitat de producte 1 produït el mes 2 a la máquina 1.
  - x_{22} : Quantitat de producte 1 produït el mes 2 a la máquina 2.
  - y_{11} : Quantitat de producte 2 produït el mes 1 a la máquina 1.
  - y_{12} : Quantitat de producte 2 produït el mes 1 a la máquina 2
  - y_{21} : Quantitat de producte 2 produït el mes 2 a la máquina 1.
  - y_{22} : Quantitat de producte 2 produït el mes 2 a la máquina 2.

  Totes són no negatives.
- **Constriccions de disponibilitat de màquines:**
  - Màquina 1, mes 1 : $4\ x_{11}\ +\ 7\ y_{11}\ \le\ 500$ (1)
  - Màquina 1, mes 2 : $4\ x_{21}\ +\ 7\ y_{21}\ \le\ 500$ (2)
  - Màquina 2, mes 1 : $3\ x_{12}\ +\ 4\ y_{12}\ \le\ 500$ (3)
  - Màquina 2, mes 2 : $3\ x_{22}\ +\ 4\ y_{22}\ \le\ 500$ (4)
- **Constriccions de demanda màxima**
  - Producte 1, mes 1 : $x_{11}\ +\ x_{12}\ \le\ 100$ (5)
  - Producte 1, mes 2 : $x_{21}\ +\ x_{22}\ \le\ 190$ (6)
  - Producte 2, mes 1 : $y_{11}\ +\ y_{12}\ \le\ 140$ (7)
  - Producte 2, mes 2 : $y_{11}\ +\ y_{12}\ \le\ 130$ (8)
- **Funció objetiu:**

$$z = 55(x_{11} + x_{12}) + 12(x_{21} + x_{22}) + 65(y_{11} + y_{12}) + 32(y_{21} + y_{22})$$

- **Formulació:**

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \max & z \\ \text{s.a.}: & \\ & (1),\dots,(8) \\ & x_{ij}, y_{ij} \geq 0\,,\ i = 1,2\,,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Solució del problema 5.

- **Variables de decisió:**
  - * x_A : treballadors classe A dedicats a la tasca I.
  - * x_{AB} : grups (1A+2B) dedicats a ls tasca I.
  - * y_A : treballadors classe A dedicats a la tasca II.
  - * y_B : treballadors classe B dedicats a la tasca II.
  - * y_{BC} : grups (1B+3C)II dedicats a la tasca II.

  Totes les variables són no negatives i enteres.
- **Funció objectiu:** $\min z = 1000x_A + 2000x_{AB} + 1000y_A + 500y_B + 1100y_{BC}$
- **Constriccions:**
  - * *Sindicals:*
    - ▷ Treballadors classe A: $x_A + x_{AB} + y_A \leq 30$
    - ▷ Treballadors classe B: $2x_{AB} + y_B + y_{BC} \leq 40$
    - ▷ Treballadors classe C: $3y_{BC} \leq \dfrac{x_A + 3x_{AB} + y_A + y_B + 4y_{BC}}{4}$
  - * *Hores de producció:*
    - ▷ Tasca I: $40x_A + 100x_{AB} \geq 1000$
    - ▷ Tasca II: $40y_A + 30y_B + 90y_{BC} \geq 2000$
- **Formulació final:**

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \min z = 1000x_A + 2000x_{AB} + 1000y_A + 500y_B + 1100y_{BC} \\ \text{suj. a:} \\ \qquad x_A + x_{AB} + y_A \leq 30 \\ \qquad 2x_{AB} + y_B + y_{BC} \leq 40 \\ \qquad x_A + 3x_{AB} + y_A + y_B - 8y_{BC} \geq 0 \\ \qquad 40x_A + 100x_{AB} \geq 1000 \\ \qquad 40y_A + 30y_B + 90y_{BC} \geq 2000 \\ \\ \qquad x_A, x_{AB}, y_A, y_B, y_{BC} \geq 0 \quad , \quad \text{enteres} \end{cases}$$

Solució del problema 6.

- **Variables de decisió:**

* x_i : nombre de TTC que comencen el seu torn el dia i, sent l'índex 1 l'associat al dilluns, el 2 al dimarts, etc.
* y_j : nombre de TTP que comencen el seu torn el dia j.

Totes les variables són enteres i no negatives.

- **Funció objectiu**
  * *Cost setmanal dels TTC :* $1500\left(\frac{\text{pts}}{\text{h}}\right)8\left(\frac{\text{h}}{\text{dia}}\right)5\left(\frac{\text{dies}}{\text{TTC}}\right)\sum_{i=1}^{7}x_i\ (\text{TTC})$
  * *Cost setmanal dels TTP :* $1000\left(\frac{\text{pts}}{\text{h}}\right)4\left(\frac{\text{h}}{\text{dia}}\right)5\left(\frac{\text{dies}}{\text{TTP}}\right)\sum_{j=1}^{7}y_j\ (\text{TTP})$
  * *Funció objectiu :* $z = 60000\sum_{i=1}^{7}x_i + 20000\sum_{j=1}^{7}y_j$
- **Constriccions:**
  * *Necessitats laborals diàries:* Sigui b_i , $i = 1,\ldots,7$ el nombre de TTC necessaris cada dia de la setmana. Això equival a dir que el dia i–èssim a l'oficina de correus necessita cobrir $8b_i$ hores de treball. Aquestes hores han de ser cobertes amb els TTC i TTP que treballin aquest dia. Fixem-nos en el dilluns, per exemple. Els treballadors actius el dilluns seran tots els que no hagin començat a treballar en el torn del dimarts (descansen diumenge i <u>dilluns</u>) o dimecres (descansen <u>dilluns</u> i dimarts). Així doncs, la constricció de associada al dilluns és :

$$8\times\left(\frac{\text{h}}{\text{TTC}}\right)\times(\text{TTC dilluns})+4\times\left(\frac{\text{h}}{\text{TTP}}\right)\times(\text{TTP dilluns})=$$
$$=[8(x_1+x_4+x_5+x_6+x_7)]\,\text{h}+[4(\text{y}_1+\text{y}_4+\text{y}_5+\text{y}_6+\text{y}_7)]\,\text{h}\geq 8\left(\frac{\text{h}}{\text{TTC}}\right)17(\text{TTC})$$

treient les unitats i formulant les equacions de la resta de dies tenim :

$$\begin{array}{l}
8(x_1 \qquad\qquad +x_4+x_5+x_6+x_7)+4(y_1 \qquad\qquad +y_4+y_5+y_6+y_7)\geq 136\\
8(x_1+x_2 \qquad\qquad +x_5+x_6+x_7)+4(y_1+y_2 \qquad\qquad +y_5+y_6+y_7)\geq 104\\
8(x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad +x_6+x_7)+4(y_1+y_2+y_3 \qquad\qquad +y_6+y_7)\geq 120\\
8(x_1+x_2+x_3+x_4 \qquad\qquad +x_7)+4(y_1+y_2+y_3+y_4 \qquad\qquad +y_7)\geq 152\\
8(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \qquad\qquad)+4(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 \qquad\qquad)\geq 112\\
8(\qquad +x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \qquad)+4(\qquad +y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 \qquad)\geq 128\\
8(\qquad\qquad +x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)+4(\qquad\qquad +y_3+y_4+y_5+y_6+y_7)\geq 88
\end{array}$$

  * *Límit de TTP:* El total d'hores treballades per TTP al llarg de la setmana és :

$$\text{HTTP} = 4\left(\frac{\text{h}}{\text{dia}}\right)\times 5\left(\frac{\text{dies}}{\text{TTP}}\right)\times \text{n}^\circ\ \text{TTP}$$

El total d'hores treballades per TTC al llarg de la setmana és :

$$\text{HTTC} = 8\left(\frac{\text{h}}{\text{dia}}\right)\times 5\left(\frac{\text{dies}}{\text{TTC}}\right)\times \text{n}^\circ\ \text{TTC}$$

El valor de HTTP no pot excedir el 25% del total d'hores treballades a la setmana :

$$\text{HTTP}\leq 0.25(\text{HTTP}+\text{HTTC}) \quad ; \quad \frac{3}{4}\text{HTTP}-\frac{1}{4}\text{HTTC}\leq 0$$

Substituïnt per les variables de decisió i simplificant :

$$-2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)+3(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7)\leq 0$$

- **Formulació final**

$$\begin{array}{ll}
\min & z=60000(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)+20000(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7)\\
\text{subj. a}: & -2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)+3(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7)\leq 0\\
& 8(x_1+x_4+x_5+x_6+x_7)+4(y_1+y_4+y_5+y_6+y_7)\geq 136\\
& 8(x_1+x_2+x_5+x_6+x_7)+4(y_1+y_2+y_5+y_6+y_7)\geq 104\\
& 8(x_1+x_2+x_3+x_6+x_7)+4(y_1+y_2+y_3+y_6+y_7)\geq 120\\
& 8(x_1+x_2+x_3+x_4+x_7)+4(y_1+y_2+y_3+y_4+y_7)\geq 152\\
& 8(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+4(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)\geq 112\\
& 8(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+4(y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)\geq 128\\
& 8(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)+4(y_3+y_4+y_5+y_6+y_7)\geq 88\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,\quad y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7\geq 0\text{, enteres}
\end{array}$$

Solució del problema 7.

- **Variables:**
  $x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4$: proporció en què intervenen els quatre disolvents
- **Funció Objectiu:** modelitza el cost per litre del compost químic:

$$z=16x_1+12x_2+10x_3+11x_4$$

- **Constriccions:**
  * Contingut mínim de clor: $180x_1+120x_2+90x_3+60x_4\geq 90$
  * Contingut màxim de amoníac: $3x_1+2x_2+6x_3+5x_4\leq 4$
  * Constricció de mescla: $x_1+x_2+x_3+x_4=1$
- **Formulació final:**

$$\textbf{(P)}\left\{\begin{array}{ll}
\min & z=16x_1+12x_2+10x_3+11x_4\\
\text{s.a.:} & 180x_1+120x_2+90x_3+60x_4\geq 90\\
& 3x_1+2x_2+6x_3+5x_4\leq 4\\
& x_1+x_2+x_3+x_4=1\\
& x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0
\end{array}\right.$$

Solució del problema 8.

- **Variables de decisió**
  * $x_{1,2}$: Tm/mes de caixes de cartró destinades a PR classe 2 que es reciclen per destintat
  * $y_{1,2}$: idem, per dispersió d'asfalt.
  * $x_{2,2}$: Tm/mes de paper seda destinades a PR classe 2 que es reciclen per destintat
  * $y_{2,2}$: idem, per dispersió d'asfalt.
  * $x_{3,1}$: Tm/mes de paper continu destinades a PR classe 1 que es reciclen per destintat
  * $y_{3,1}$: idem, per dispersió d'asfalt.

* $x_{3,3}$: Tm/mes de paper continu destinades a PR classe 3 que es reciclen per destintat
* $y_{3,3}$: idem, per dispersió d'asfalt.
* $x_{4,1}$: Tm/mes de paper de llibres destinades a PR classe 1 que es reciclen per destintat
* $y_{4,1}$: idem, per dispersió d'asfalt.
* $x_{4,2}$: Tm/mes de paper de llibres destinades a PR classe 2 que es reciclen per destintat
* $y_{4,2}$: idem, per dispersió d'asfalt.

Definim el conjunt de parells d'indexos corresponents a combinacions àptes de paper residual-paper reciclat : $\mathcal{A} = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$
Totes les variables són no negatives i continues : $x_{i,j}, y_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$

- **Funció objectiu:** Definim el vector p de preus de paper residual $p = [500 \quad 600 \quad 800 \quad 1000]'$. L'objectiu del programa lineal serà la minimització de la següent funció de costos de compra i processat : $z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} ((2000 + p_i)x_{i,j} + (1500 + p_i)y_{i,j})$
- **Constriccions:**
  * *Constriccions de capacitat del procés:* $\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{i,j} \leq 3000 \quad ; \quad \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} y_{i,j} \leq 3000$
  * *Constriccions de demanda:* les constriccions de demanda es poden expressar com de $\geq$ o de $=$, puig la funció objectiu pretén minimitzar una funció de costos.

$$\begin{array}{rl}
0.9(0.3x_{3,1} + 0.4x_{4,1}) + 0.85(0.3y_{3,1} + 0.4y_{4,1}) \geq 500 & \text{Classe 1} \\
0.9(0.15x_{1,2} + 0.2x_{2,2} + 0.4x_{4,2}) + 0.85(0.15y_{1,2} + 0.2y_{2,2} + 0.4y_{4,2}) \geq 500 & \text{Classe 2} \\
0.9(0.3x_{3,3}) + 0.85(0.3y_{3,3}) \geq 600 & \text{Classe 3}
\end{array}$$

- **Formulació final:**

$$\begin{array}{ll}
\min & z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} ((2000 + p_i)x_{i,j} + (1500 + p_i)y_{i,j}) \\
\text{s.a.:} & \\
& \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{i,j} \leq 3000 \\
& \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} y_{i,j} \leq 3000 \\
& 0.27x_{3,1} + 0.36x_{4,1} + 0.255y_{3,1} + 0.34y_{4,1} \geq 500 \\
& 0.135x_{1,2} + 0.18x_{2,2} + 0.36x_{4,2} + 0.1275y_{1,2} + 0.17y_{2,2} + 0.34y_{4,2} \geq 500 \\
& 0.27x_{3,3} + 0.255y_{3,3} \geq 600
\end{array}$$

Solució del problema 9.

- **Variables de decisió:**

$$i = 1,\ldots,5 \begin{cases} x_i \geq 0 & \text{nre. de tècnics qualificats al començament del mes } i. \\ y_i \geq 0 & \text{nre. de tècnics 1er mes de formació al començament del mes } i. \\ z_i \geq 0 & \text{nre. de tècnics 2on mes de formació al començament del mes } i. \end{cases}$$
$$x_i, y_i, z_i \quad \text{enteres}$$

- **Funció Objectiu:** Costos laborals: $z = \sum_{1=1}^{5} 200000x_i + 10000(y_i + z_i)$
- **Constriccions:**
  * Cada mes els tècnis qualificats han de fer front a les hores de demanda d_i i a la formació

de nous tècnics:

$$\begin{aligned} 160x_i &\geq d_i + 50y_i + 10z_i \quad , \quad i = 1,\ldots,5 \\ 160x_i - 50y_i - 10z_i &\geq d_i \quad , \quad i = 1,\ldots,5 \end{aligned} \tag{1}$$

* Les variables x_i, y_i i z_i han de coordinar-se:

$$x_i = 0.95(x_{i-1} + z_{i-1}) \quad ; \quad x_1 = 50 \tag{2}$$

$$z_i = y_{i-1} \tag{3}$$

- **Formulació final:**

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \min \quad z = \sum_{1=1}^{5} 200000x_i + 10000(y_i + z_i) \\ s.a \\ \left.\begin{aligned} 160x_i - 50y_i - 10z_i &\geq d_i \\ x_i - 0.95x_{i-1} + 0.95z_{i-1} &= 0 \\ z_i - y_{i-1} &= 0 \\ x_i, y_i, z_i \geq 0 &, \text{ enteres} \end{aligned}\right\} i = 1,\ldots,5 \\ x_1 = 50 \quad , \quad z_1 = 0 \end{cases}$$

Solució del problema 10.

- **Variables:**
  * x_1 : transistors que seran tractats pel mètode 1 cada mes.
  * x_2 : transistors que seran tractats pel mètode 2 cada mes.
  * y_0 : transistors de qualidad defectuosa, producte del mètode 1 o 2, que es refinen cada mes.
  * y_1 : transistors de qualidad G1, producte del mètode 1 o 2, que es refinen cada mes.

  Totes les variables són no negatives i enteres.
- **Funció objetiu:** $\min z = 5000x_1 + 7000x_2 + 2500y_0 + 2500y_1$
- **Constriccions:**
  * *De demanda:*
    - ▷ Demanda transistors qualitat G1 :

$$\underbrace{0.4x_1 + 0.35x_2}_{\text{resultat de la mescla}} + \underbrace{0.3y_0}_{\text{refinats D}\to\text{G1}} - \underbrace{0.4y_1}_{\text{refinats G1}\to\text{G2}} \geq 3000$$

    - ▷ Demanda transistors qualitat G2 :

$$\underbrace{0.3x_1 + 0.5x_2}_{\text{resultat de la mescla}} + \underbrace{0.05y_0}_{\text{refinats D}\to\text{G2}} + \underbrace{0.4y_1}_{\text{refinats G1}\to\text{G2}} \geq 2000$$

  * *Capacitat del forn :* $x_1 + x_2 + y_0 + y_1 \leq 20000$
  * Hem d'assegurar que no refinem una quantitat de transistors major que la produida

per la mescla:

$$y_0 \leq 0.3x_1 + 0.15x_2 \quad ; \quad y_1 \leq 0.4x_1 + 0.35x_2$$

- **Formulació final**

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{aligned} \min z =& 5000x_1 + 7000x_2 + 2500y_0 + 2500y_1 \\ &\text{s. a:} \\ &\quad 0.4x_1 + 0.35x_2 + 0.30y_0 - 0.4y_1 \geq 3000 \\ &\quad 0.3x_1 + 0.50x_2 + 0.05y_0 + 0.4y_1 \geq 2000 \\ &\quad x_1 + x_2 + y_0 + y_1 \leq 20000 \\ &\quad 0.3x_1 + 0.15x_2 - y_0 \leq 0 \\ &\quad 0.4x_1 + 0.35x_2 - y_1 \leq 0 \\ & \\ &\quad x_1, x_2, y_0, y_1 \geq 0 \quad , \quad \text{enteras} \end{aligned}\right.$$

Solució del problema 11.

- **Variables:**
  - * x_A, x_B, x_C: nre. de peces diàrias a fabricar.
  - * x_p, x_s: nre. de premses i màquines de soldar a instal·lar.
  - * y_p, y_s, y_a: nre d'obrers de cada categoria.

  totes les variables són enteres i no negatives.
- **Funció objectiu:** $\max z = (250 - 150)x_A + (350 - 300)x_B + (300 - 200)x_C - 8(550y_p + 650y_s + 360y_a)$
- **Constriccions:**
  - * *Límit de venda:* $x_A \leq 10000$, $x_B \leq 5000$, $x_C \leq 12000$
  - * *Límit d'espai:* $10x_p + 12x_s \leq 10000/4 = 2500$
  - * *Limitació de la producció:*

$$\frac{x_A}{500} + \frac{x_B}{1800} + \frac{x_C}{150} \leq 8x_p$$
$$\frac{x_A}{15} + \frac{x_B}{80} + \frac{x_C}{30} \leq 8x_s$$

  - * *Limitació del nombre d'obrers:* $y_p \geq x_p \quad , \quad y_s \geq x_s \quad , \quad y_a \geq x_p/4 + x_s \quad , \quad y_p + y_s + y_a \leq 400$ (no seria correcte $y_a = x_p/4 + x_s$ doncs y_a és entera).

- **Formulació final:**

$$
(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{ll}
\max & z = 100x_A + 50x_B + 100x_C - 4400y_p - 5200y_s - 2880y_a \\
\text{s.a.:} & \\
& 10x_p + 12x_s \leq 2500 \\
& \frac{x_A}{500} + \frac{x_B}{1800} + \frac{x_C}{150} \leq 8x_p \\
& \frac{x_A}{15} + \frac{x_B}{80} + \frac{x_C}{30} \leq 8x_s \\
& y_p \geq x_p \\
& y_s \geq x_s \\
& y_a \geq x_p/4 + x_s \\
& y_p + y_s + y_a \leq 400 \\
& 0 \leq x_A \leq 10000 \\
& 0 \leq x_B \leq 5000 \\
& 0 \leq x_C \leq 12000 \\
& x_p, x_s, y_p, y_s, y_a \geq 0 \\
& x_A, x_B, x_C, x_p, x_s, y_p, y_s, y_a \text{ enteres}
\end{array}\right.
$$

Solució del problema 13.

S'introdueixen els escreixos x_{52} i x_{53} i una constricció addicional associada al nus que equilibra la xarxa :

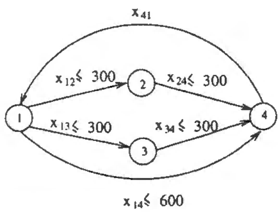
$$
(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{llllllllll}
\min & z= & \multicolumn{8}{l}{3x_{12} + 4x_{13} + 3x_{23} + 5x_{24} + x_{41} + 7x_{43}} \\
\text{s.a.:} & & x_{12} & + & x_{13} & - & x_{41} & & = & 1 \\
& & -x_{12} & + & x_{23} & + & x_{24} & - \; x_{52} & = & -3 \\
& & -x_{24} & + & x_{41} & + & x_{43} & & = & 0 \\
& & -x_{13} & - & x_{23} & - & x_{43} & - \; x_{53} & = & -4 \\
& & & & & & x_{52} & + \; x_{53} & = & 6 \\
& & \multicolumn{8}{l}{x_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}}
\end{array}\right.
$$

Solució del problema 14.

a) Problema de flux màxim.

b) Xarxa

c) Formulació :



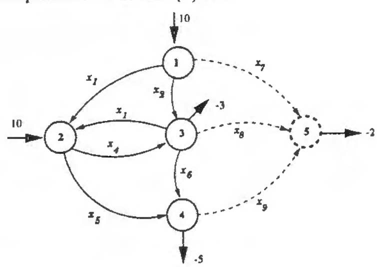
$$
\begin{array}{ll}
\min & -\ x_{41} \\
\text{s.a.:} & -\ x_{41} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 0 \\
& -\ x_{12} + x_{24} = 0 \\
& -\ x_{13} + x_{34} = 0 \\
& x_{41} - x_{24} - x_{34} - x_{14} = 0 \\
& 0 \le x_{ij} \le 300\,,\ \forall(i,j) \neq \{(1,4),(4,1)\} \\
& 0 \le x_{14} \le 600 \quad ; \quad 0 \le x_{41}
\end{array}
$$

Solució del problema 15.

S'han d'afegir variables de folga i incorporar una nova constricció, corresponent a un nus artificial, que sigui suma de totes les constriccions, amb signe canviat:

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{nus 1} \\
\text{nus 2} \\
\text{nus 3} \\
\text{nus 4} \\
\\
\text{nus 5 (artificial)}
\end{array}
\begin{array}{c}
\hspace{4cm}\text{folgues} \\
\left[\begin{array}{cccccc:ccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \cdots \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \\ \cdots \\ -2 \end{bmatrix}
\qquad (1)
$$

La xarxa associada a les equacions de xarxa (1) és:

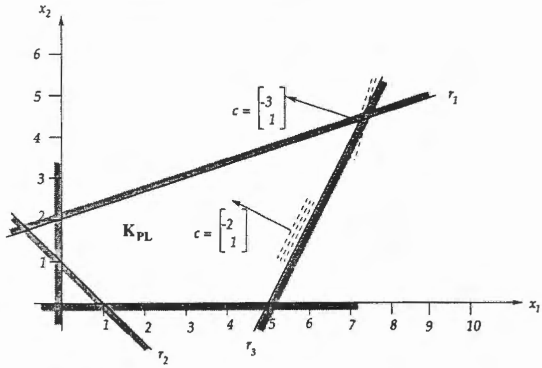


on s'indica en línea puntejada els arcs i nus ficticis.

6 Solucions dels problemes de programació lineal.

Solució del problema 27.

Representem gràficament la regió factible K_{PL}:



a) La solució es troba al vèrtex determinat per la intersecció de les rectes r_1 i r_3:

$$\left.\begin{array}{ll} r_1: & -x_1^* + 3x_2^* = 6 \\ r_3: & 2x_1^* - x_2^* = 10 \end{array}\right\} \boxed{x^* = \begin{bmatrix} 36/5 \\ 22/5 \end{bmatrix}}$$

El problema és factible amb solució única.

b) En aquest cas, l'aresta del polítop associada a la recta r_3 és una aresta òptima:

$$\mathcal{X}^* = \{x \in K_{PL} \mid x = \alpha \begin{bmatrix} 36/5 \\ 22/5 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall \alpha \in [0,1]\}$$

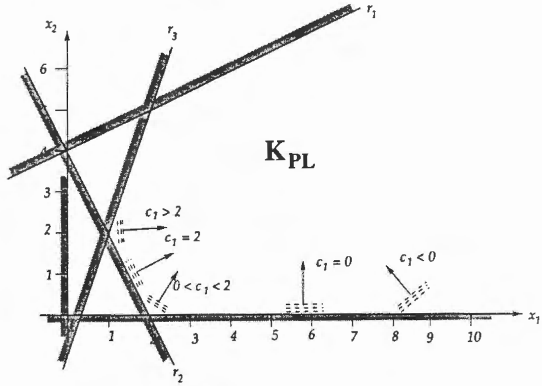
(PL) és un problema factible amb òptims alternatius.

c) Hem de trobar el valor del terme independent b_2 que fa que la recta r_2 passi pel punt intersecció $\hat{x}$ de les rectes r_1 i r_3:

$$r_2: \quad x_1 + x_2 = b_2 \quad ; \quad \boxed{b_2 = \frac{37}{5} + \frac{22}{5} = \frac{59}{5}}$$

Solució del problema 28.

Representem gràficament la regió factible K_{PL}:



- $c_1 < 0$: problema il·limitat: $\mathcal{X}^* = \emptyset$
- $c_1 = 0$: l'aresta associada a la constricció $x_1 \geq 0$ és òptima. És un problema amb òptims alternatius:

$$\mathcal{X}^* = \{x \mid x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall \alpha \geq 0\}$$

- $0 < c_1 < 2$: $x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $c_1 = 2$ l'aresta associada a la recta r_2 és òptima (òptims alternatius):

$$\mathcal{X}^* = \{x \mid x = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \forall \alpha [0, 1]\}$$

- $c_1 > 2$: $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solució del problema 29.

Primer transformarem les constriccions. La primera constricció té el terme independent negatiu: es canvia el signe del dos membres:

$$-x_1 + 3x_2 = 5$$

La segona constricció està doblement afitada. Aquesta constricció es pot transformar en una constricció d'igualtat afegint una folga x_5 amb fita superior:

$$6 \leq x_1 + x_2 - 5x_4 \leq 7 \rightarrow x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = 7 \quad ; \quad 0 \leq x_5 \leq 7 - 6 = 1$$

La forma estàndar no considera fites superiors a les variables: $x_5 \leq 1$ es transforma en una constricció d'igualtat:

$$x_5 \leq 1 \longrightarrow x_5 + x_6 = 1 \quad ; \quad x_6 \geq 0$$

La tercera constricció, no lineal, es pot trasformar facilment en una constricció lineal d'igualtat:

$$\frac{3x_1 + 7x_2}{3x_3} \geq 4 \longrightarrow 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 \leq 0 \longrightarrow 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 + x_7 = 0 \quad ; \quad x_7 \geq 0$$

El problema que tenim fins ara, passant la funció objectiu de min a max, és:

$$(\mathbf{PL}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & z = -6x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & -x_1 + 3x_2 = 5 \\ & x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = 7 \\ & x_5 + x_6 = 1 \\ & 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 + x_7 = 0 \\ & x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\ & x_1 \text{lliure}, x_3 \leq 0 \end{array} \right.$$

L'únic que queda per fer és tractar les variables x_1 i x_3. Primer canviem el signe de la fita de x_3 introduïnt el canvi de variable $\tilde{x}_3 = -x_3$:

$$(\mathbf{PL}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & z = -6x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & -x_1 + 3x_2 = 5 \\ & x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = 7 \\ & x_5 + x_6 = 1 \\ & 3x_1 + 7x_2 + 12\tilde{x}_3 + x_7 = 0 \\ & x_2, \tilde{x}_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\ & x_1 \text{lliure} \end{array} \right.$$

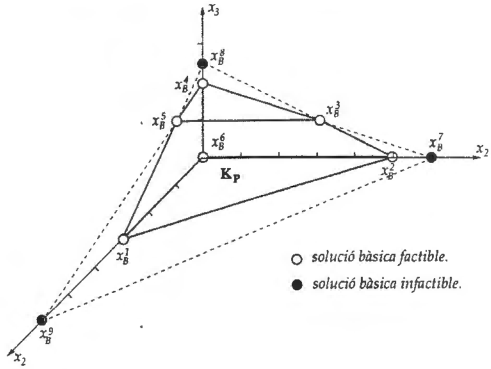
Ara eliminem de la formulació la variable lliure x_1. De la primera constricció tenim que $x_1 = 3x_2 - 5$. Substituïm x_1 per aquesta expressió a tot el problema:

$$(\mathbf{PL}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & z = -23x_2 - 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & 4x_2 - 5x_4 + x_5 = 12 \\ & x_5 + x_6 = 1 \\ & 16x_2 + 12\tilde{x}_3 + x_7 = 15 \\ & x_2, \tilde{x}_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array} \right.$$

D'aquesta forma obtenim un problema amb una variable i constricció de menys. Noti's que la constant 30 provinent de la substitució $x_1 = 3x_2 - 5$ a la funció objectiu s'ha eliminat de la formulació, doncs no afecta al resultat. Un cop resolt el problema anterior les transformacions $x_3 = -\tilde{x}_3$ i $x_1 = 3x_2 - 5$ ens proporcionaran el valor òptim de les variables originals.

Solució del problema 30.

Representem gràficament la regió factible K_P i els vèrtexs associats a les solucions bàsiques:



Introduïm les varibles de folga x_4 i x_5:

$$
(\mathbf{PL}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = 5x_1 + 3_x 2 + x_3 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ \qquad x \geq 0 \end{array} \right.
$$

a) Solucions bàsiques factibles:

$$* \; x_B^1\colon \mathcal{B} = \{1,4\} \quad , \quad x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad , \quad z^1 = 15$$

$$* \; x_B^2\colon \mathcal{B} = \{2,4\} \quad , \quad x_B^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad z^2 = 15$$

$$* \; x_B^3\colon \mathcal{B} = \{2,3\} \quad , \quad x_B^3 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad z^3 = 10$$

$$* \; x_B^4\colon \mathcal{B} = \{3,5\} \quad , \quad x_B^4 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad z^4 = 2$$

$$* \; x_B^5\colon \mathcal{B} = \{1,3\} \quad , \quad x_B^5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix} \quad , \quad z^5 = 20/3$$

$$* \; x_B^6\colon \mathcal{B} = \{4,5\} \quad , \quad x_B^6 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} \quad , \quad z^6 = 0$$

Veiem com ens trobem devant d'un cas d'una solució amb òptims alternatius: el conjunt solució $\mathcal{X}^*$ és el segment de recta definit per les solucions bàsiques x_B^1 i x_B^2, és a dir :

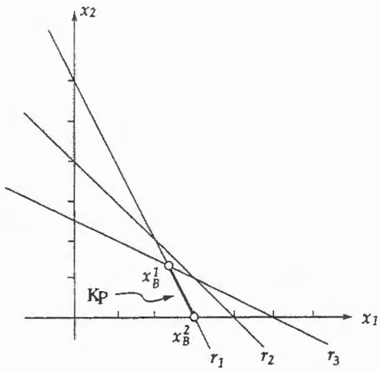
$$\mathcal{X}^* = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha x_B^1 + (1-\alpha) x_B^2 \, , \, \forall \alpha \in [0,1]\}$$

b) Solucions bàsiques infactibles:

* x_B^7: $\mathcal{B}=\{2,5\}$, $x_B^7=\begin{bmatrix}x_2\\x_5\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\not\geq 0$
* x_B^8: $\mathcal{B}=\{3,4\}$, $x_B^8=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5\\-1.5\end{bmatrix}\not\geq 0$
* x_B^9: $\mathcal{B}=\{1,5\}$, $x_B^9=\begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-15\end{bmatrix}\not\geq 0$

Solució del problema 31.

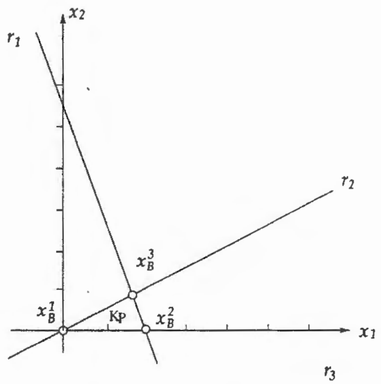
a) Representem gràficament la regió factible K_P:



on r_1 és la recta associada a la primera constriccó, r_2 la recta associada a la segona constricció i r_3 la recta associada a la tercera constricció. Les variables x_3 i x_4 representaran les folgues de la segona i tercera constricció respectivament. En aquest cas, el polítop K_P és el segment de recta entre els dos únic punts extrems x_B^1 i x_B^2:

* x_B^1: $\mathcal{B}=\{1,2,3\}$, $x_B^1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\4/3\\1/3\end{bmatrix}$, $z^1=31/3$
* x_B^2: $\mathcal{B}=\{1,3,4\}$, $x_B^2=\begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$, $z^1=15$

b) Representem gràficament la regió factible K_P:



on r_1 és la recta associada a la primera constriccó, r_2 la recta associada a la segona constricció i r_3 la recta associada a la tercera constricció. Les variables x_3 i x_4 repressentaran, respectivament, les folgues de la segona i tercera constricció. En aquest cas es produeix degeneració sobre el vèrtex situat a l'origen de coordenades: n'hi ha tres solucions bàsiques (x_B^{1a},x_B^{1b} i x_B^{1c}) associades a aquest vèrtex:

* x_B^{1a}: $B = \{3,2\}$, $x_B^{1a} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1a} = 0$
* x_B^{1b}: $B = \{3,1\}$, $x_B^{1b} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1b} = 0$
* x_B^{1c}: $B = \{3,4\}$, $x_B^{1c} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1c} = 0$
* x_B^2: $B = \{1,4\}$, $x_B^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z^2 = -8$
* x_B^3: $B = \{1,2\}$, $x_B^3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$, $z^3 = -6$

Solució del problema 32.

Per calcular una solució factible apliquem la fase 1 del simplex. Passem a la forma estàndar , introduïm una variable artificial a la tercera constricció i iterem amb una funció objectiu $z = x_6$, on x_6 és la variable artificial :

$T_a^0 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	3/2	1	0	0	0	12
$\boxed{4}$	2	0	1	0	0	8
1	1	0	0	-1	1	8
-1	-1	0	0	1	0	-8

$T_a^1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	1	-1/4	0	0	10
1	$\boxed{1/2}$	0	1/4	0	0	2
0	1/2	0	-1/4	-1	1	3
0	-1/2	0	1/4	1	0	-3

$$T_a^3 = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline & -2 & 0 & 1 & -3/4 & 0 & 0 & 6 \\ & 2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ & -1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Donat que $r_N \geq 0$, T_a^3 és el tableau òptim del problema artificial de la fase I. Hem assolit l'òptim de la fase I sense eliminar les infactibilitats (x_6 continua sent bàsica) $\Rightarrow$ no existeix cap solució factible.

Solució del problema 33.

a) Passem el problema a la forma estàndar introduïnt les variables de folga x_3 i x_4:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Es realitzen els càlculs previs a l'aplicació de l'algorisme del simplex:

$$\mathcal{B}^0 = \{1,2\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r_N' = c_N' - c_B' B^{-1} N = [0 \quad 0] - [-1 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 3]$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = y_0$$

- **Primera iteració:**

1.- Detecció d'òptim: $r_N = [-1 \quad 3] \not\geq 0 \Rightarrow$ no òptim.

2.- Selecció de la variable d'entrada: $r_3 = -1 \Rightarrow x_3$ v.n.b. d'entrada.

3.- Detecció prob. il·limitat: $y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq 0$

4.- Selecció de la variable de sortida:
$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4} \{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0\} = \min\{1/1\} = 1 = \frac{y_{10}}{y_{13}} \Rightarrow p = 1$, $\mathcal{B}_p = 1 \Rightarrow x_1$ v.b. de sortida.

5.- Canvi de base: $\mathcal{B} \leftarrow \{3,2\}$; $\mathcal{N} \leftarrow \{1,4\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_N' = [-1 \quad 0] - [0 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **Segona iteració:**

1.- Detecció d'òptim: $r_N = [1 \quad 2] \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$:

$$\mathcal{B}^* = \{3,2\} \quad ; \quad x_B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) El problema $(\widetilde{\mathbf{PL}})$ és

$$(\widetilde{\mathbf{PL}}) \begin{cases} \min & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{forma estàndar} \longrightarrow (\widetilde{\mathbf{PL}}) \begin{cases} \min & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

El problema artificial associat a $(\widetilde{\mathbf{PL}})$ és:

$$(\widetilde{\mathbf{PL}}_a) \begin{cases} \min & z = x_5 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Resolució de $(\widetilde{\mathbf{PL}}_a)$ amb el simplex tabular:

$\tilde{T}_a^0 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\boxed{2}$	1	-1	0	1	3
1	1	0	1	0	2
-2	-1	1	0	0	-3

; $\tilde{T}_a^1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1/2	-1/2	0	1/2	3/2
0	1/2	1/2	1	-1/2	1/2
0	0	0	0	1	0

$r_N \geq 0 \Rightarrow$òptim

La base òptima de $(\widetilde{\mathbf{PL}}_a)$, $\mathcal{B}_a^* = \{1,4\}$, no conté la variable artificial $x_5 \Rightarrow \mathcal{B} = \{1,4\}$ és una base factible per a $(\widetilde{\mathbf{PL}})$. El tableau inicial $\tilde{T}^0$ corresponent a aquesta base es calcula a partir de $\tilde{T}_a^1$:

$\tilde{T}^0 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1/2	-1/2	0	3/2
0	1/2	1/2	1	1/2
0	-1/2	1/2	0	-3/2

Solució del problema 34.

Forma estàndar:

$$
(\text{PL}) \begin{cases}
\min \quad z = -14x_1 - 12x_2 - 3x_3 \\
\text{subj.a}: \quad \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 \leq 1125 \\
\quad x_1 + x_5 \leq 1000 \\
\quad x_2 + x_6 \leq 500 \\
\quad x_3 + x_7 \leq 1500 \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

Primera iteració : solució bàsica inicial factible : $\mathcal{B} = \{4,5,6,7\}$, $B = I$. $\mathcal{N} = \{1,2,3\}$

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [-4 \quad -12 \quad -3] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_1 = -12 < 0 \Rightarrow x_2$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \nleq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- *Selecció de la variable de sortida :* $y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1125 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix}$; $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4} \{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} / y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{1125}{1}, \frac{500}{1}\} = 500 \Rightarrow \quad x_6 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- *Canvi de base :*

$$\mathcal{B} = \{4,5,2,7\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segona iteració : $\mathcal{B} = \{4,5,2,7\}\mathcal{N} = \{1,3,6\}$

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [-4 \quad -3 \quad 12] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_1 = -4 < 0 \Rightarrow x_1$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nleq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- Selecció de la variable de sortida : $y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 625 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix}$; $y_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}}/y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{625}{1/2}, \frac{1000}{1}\} = 1000 \Rightarrow \quad x_5 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- Canvi de base :

$$\mathcal{B} = \{4,1,2,7\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tercera iteració : $\mathcal{B} = \{4,1,2,7\} \mathcal{N} = \{3,5,6\}$

1.- Detecció d'òptim : $r'_N = [-3 \quad 4 \quad 12] \not\geq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- Selecció variable d'entrada : $r_3 = -3 < 0 \Rightarrow x_3$variable d'entrada.

3.- Detecció pb. il.limitat :

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- Selecció de la variable de sortida : $y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 125 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix}$; $y_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}}/y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{125}{1/3}, \frac{1500}{1}\} = 375 \Rightarrow \quad x_4 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- Canvi de base :

$$\mathcal{B} = \{3,1,2,7\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Quarta iteració : $\mathcal{B} = \{3,1,2,7\} \mathcal{N} = \{4,5,6\}$

1.- Detecció d'òptim : $r'_N = [9 \quad -\frac{1}{2} \quad 3] \not\geq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- Selecció variable d'entrada : $r_5 = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x_5$variable d'entrada.

3.- Detecció pb. il.limitat :

$$y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \not\leq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- Selecció de la variable de sortida $:y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 375 \\ 1000 \\ 500 \\ 1125 \end{bmatrix} \; ; \; y_5 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} / y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{1000}{1}, \frac{1125}{3/2}\} = 750 \Rightarrow \quad x_7 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- Canvi de base :

$$\mathcal{B} = \{3,1,2,5\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Quinta iteració : $\mathcal{B} = \{3,1,2,5\} \mathcal{N} = \{4,6,7\}$

1.- Detecció d'òptim : $r'_N = [8 \quad 4 \quad \frac{1}{3}] \geq 0 \Rightarrow$ òptim

$$x_B = B^{-1}b = [x_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_5]' = [1500 \quad 250 \quad 500 \quad 750]'$$

Solució del problema 35.

a) Una solució bàsica és òptima si és factible primal i dual.

Factibilitat primal: la solució bàsica $x = [x_B \;\; | \;\; 0]'$ amb $x_B = B^{-1}b$ satisfà $Ax = b$ per construcció. Serà factible primal si $x_B \geq 0$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad x_B \geq 0 \Rightarrow \text{factible primal.}$$

Factibilitat dual: $x = [x_B \;\; | \;\; 0]'$ serà factible dual si $r_N \geq 0$:

$$r'_N = c'_N - \lambda' N \quad ; \quad \lambda' = c'_B B^{-1} = [2 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0 \quad 4]$$

$$r'_N = [10 \quad 0 \quad 0 \quad] - [-1 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [9 \quad 1 \quad 4] \geq 0 \Rightarrow \text{factible Dual}$$

b)

$$
(\mathbf{D})\begin{cases}
\max\limits_{\lambda} \quad z_{(D)} = & 20\lambda_1 + 40\lambda_2 + 15\lambda_3 \\
\text{subj.a}: & 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 10 \\
& 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 2 \\
& \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \leq 3 \\
& \\
& \lambda_1 \;,\; \lambda_2 \leq 0 \\
& \lambda_3 \geq 0
\end{cases}
$$

El valor de les variables duals λ ja ha estat calculat a l'apartat anterior:

$$
\lambda' = [-1 \quad 0 \quad 4] \begin{cases} \lambda_1 = -1 \leq 0 & \text{correcto} \\ \lambda_2 = 0 \leq 0 & \text{correcto} \\ \lambda_3 = 4 \geq 0 & \text{correcto} \end{cases}
$$

c) Desitgem provocar una disminució dels costos de 10 unitats, és a dir. $\Delta z = -10$. El valor de la funció objectiu pot ser modificat a través de variacions del vector de termes independents. No es permet de modificar les dues primeres components, la qual cosa obliga a disminuir el valor de la funció objectiu modificant b_3:

$$
\Delta z = \lambda'\Delta b = [-1 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = 4\Delta b_3 = -10 \quad \Rightarrow \quad \Delta b_3 = -2.5
$$

La disminució de z repercuteix en la demanda que es por satisfer, fent que disminueixi fins a un valor de $\hat{b}_3 = b_3 + \Delta b_3 = 12.5$. Aquest nou valor de b_3 conserva la factibilitat primal:

$$
\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 12.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 5 \\ 22.5 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \text{factible Primal}
$$

d) La modificació de c_1 només pot afectar al cost reduït de la variable x_1, donat que no és bàsica. Convé produir x_1 a partir del valor de c_1 que provoqui un cost reduit negatiu:

$$
r_1 = c_1 - \lambda' a_1 = c_1 - [-1 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 - 1 < 0 \quad ; \quad c_1 < 1
$$

c_1 haurà de disminuir per sota de $c_1 = 1$ per tal que convingui la seva fabricació.

e) El tableau del simplex associat a la base B és:

$$
T = \begin{array}{|c|c|c}
\hline
I & Y = B^{-1}N & y_0 = B^{-1}b \\
\hline
0 & r'_N = c'_N - \lambda' N & -z_0
\end{array}
$$

En el nostre cas:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad y_0 = x_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$r'_N = [9 \quad 1 \quad 4] \quad ; \quad -z_0 = -c'_B x_B = -40$

$$T = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 15 \\ \hline 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -40 \end{array}$$

f) Donat que x_1 és variable no bàsica, un canvi de c_1 només pot afectar al seu cost reduït. El cost reduït r_1 associat al valor $c_1 = 1/2$ és :

$$r_1 = c_1 - \lambda' a_1 = 1/2 - [-1 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/2 - 1 = -1/2$$

Com que $r_1 < 0$, es perd la factibilitat primal, sent necessari reoptimitzar aplicant el simplex primal:

Primera iteració :

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [-1/2 \quad 1 \quad 4] \not\geq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_1 = -1/2 < 0 \Rightarrow$ $x_1$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_1 = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \not< 0 \quad \text{no il.limitat}$$

4.- *Selecció variable de sortida :* $x_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} ; \; y_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3} \{ \frac{y_{i0}}{y_{iq}} / y_{iq} > 0 \} = \min \{ \frac{5}{2}, \frac{15}{1} \} = \frac{5}{2} \Rightarrow \quad x_2 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- *Canvi de base :* $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$

Segona iteració :

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = c'_N - c'_B B^{-1} N = [\frac{1}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{17}{4}] \geq 0 \Rightarrow$ òptim

$x_B = B^{-1} b = [x_1 \quad x_3 \quad x_5]' = [5/2 \quad 25/2 \quad 25/2]'$

Solució del problema 36.

a) La solució bàsica associada a la base B^* és : $x^*_B = B^{*-1}b = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

La solució dual associada a x^*_B és :

$$\lambda' = c'_B B^{*-1} = [-2 \quad -1 \quad -4] \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix} = [-11/10 \quad -9/20 \quad -1/4]$$

Comprovem ara el teorema de la folga complementària:

$\underline{x_i(c_j - \lambda' a_j) = 0 \quad i = 1, \ldots, m}$

$x_1 = 2 \Rightarrow c_1 - \lambda' a_1 = 0 \quad ; \quad -2 - 1\times(\frac{-11}{10}) - 2\times(\frac{-9}{20}) - 0\times(\frac{-1}{4}) = -2+2 = 0 \Rightarrow$ correcte

$x_2 = 2 \Rightarrow c_2 - \lambda' a_2 = 0 \quad ; \quad -4 - 3\times(\frac{-11}{10}) - 1\times(\frac{-9}{20}) - 1\times(\frac{-1}{4}) = -4+4 = 0 \Rightarrow$ correcte

$x_3 = 1 \Rightarrow c_3 - \lambda' a_3 = 0 \quad ; \quad -1 - 0\times(\frac{-11}{10}) - 0\times(\frac{-9}{20}) - 4\times(\frac{-1}{4}) = -1+1 = 0 \Rightarrow$ correcte

$\underline{\lambda_j(b_j - a^j x) = 0}$

$\lambda_1 = -11/10 \Rightarrow x_5 = b_1 - a^1 x = 0$: x_5 no básica=> correcte.

$\lambda_2 = -9/20 \Rightarrow x_6 = b_2 - a^2 x = 0$: x_6 no básica=> correcte.

$\lambda_3 = -1/4 \Rightarrow x_7 = b_3 - a^3 x = 0$: x_7 no básica=> correcte.

b) La formulació del problema artificial $(\widehat{\mathbf{PL}}_a)$ és:

$$(\widehat{\mathbf{PL}}_a) \begin{cases} \min \quad z_a = x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{subj.a :} \quad x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 8 \quad \text{R1} \\ \qquad 2x_1 + x_2 + x_6 = 6 \quad \text{R2} \\ \qquad x_2 + 4x_3 + x_4 + x_7 = 6 \quad \text{R3} \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \geq 0 \end{cases}$$

i el tablau del simplex incial per a $(\widehat{\mathbf{PL}}_a)$ és:

$T^0_a =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	3	0	1	1	0	0	8
2	1	0	0	0	1	0	6
0	1	4	1	0	0	1	6
-3	-5	-4	-2	0	0	0	-20

c) Càlcul de l'interval d'estabilitat de b_2:

$$\hat{x}_B = B^{*-1} \begin{bmatrix} 8 \\ b_2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{5} + \frac{3}{5}b_2 \\ \frac{-8}{10} + \frac{6}{4} + \frac{b_2}{20} \\ \frac{16}{5} - \frac{b_2}{5} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{interval d'estabilitat : } \underline{\frac{8}{3} \leq b_2 \leq 16}$$

$b_2 = 20 > 16 \quad \Rightarrow$ es perd la factibilitat primal. En una iteració del simplex dual s'obté el nou òptim:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	0	0	-1/5	-1/5	3/5	0	52/5
0	0	1	3/20	-1/10	1/20	1/4	17/10
0	1	0	2/5	2/5	$\boxed{-1/5}$	0	-4/5
0	0	0	7/20	11/10	9/20	1/4	193/10

;

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	3	0	1	1	0	0	8
0	1/4	1	1/4	0	0	1/4	3/2
0	-5	0	-2	-2	1	0	4
0	9/4	0	5/4	2	0	1/4	35/2

Solució òptima associada a $b_2 = 20$: $x^*_B = [x_1 \quad x_3 \quad x_6]' = [8 \quad 3/2 \quad 4]'$

d) Interessa produir x_8 si el seu cost reduït és negatiu:

$$r_8 = c_8 - \lambda' a_8 = -8 - [\tfrac{-11}{10} \quad \tfrac{-9}{20} \quad \tfrac{-1}{4}] \begin{bmatrix} 10-2\theta \\ 20-\theta \\ 1-5\theta \end{bmatrix} = \frac{49}{4} - \frac{78}{20}\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta > \frac{245}{78}$$

Interessa produir x_8 a partir de $\theta = \frac{245}{78}$

Solució del problema 37.

a) La base estarà formada per tres variables. De les variables del nostre problema la x_1 i la x_3 són no nules i, conseqüentment, bàsiques. La tercera variable bàsica s'ha de buscar entre les folgues:
   * $x_5 = 9 - x_1 - 2x_2 = 9 - 2 = 7 > 0 \Rightarrow$ bàsica.
   * $x_6 = 2 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \Rightarrow$ no bàsica.

   Si totes dues folgues haguessin estat nul·les la solució bàsica seria degenerada. La solució bàsica òptima és doncs:

$$x^*_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   La matriu bàsica i la seva inversa són:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{*-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

b) Si $x^*_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$ és solució òptima, llavors els vector de costos reduïts és no negatiu: $r_2 \geq 0$

i $r_4 \geq 0$:

$$\lambda' = c'_B B^{-1} = [2 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = [0 \quad -1/2 \quad 7/2]$$

$$r_2 = c_2 - \lambda' a_2 = c_2 - [0 \quad -1/2 \quad 7/2] \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_2 - 5/2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{c_2 \geq 5/2}$$

$$r_4 = c_4 - \lambda' a_4 = c_4 - [0 \quad -1/2 \quad 7/2] \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = c_4 - 1/2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{c_4 \geq 1/2}$$

c) La nova variable x_5 (no confondre-la amb la folga de la primera constricció) serà bàsica si el seu cost reduït associat és negatiu ($r_5 < 0$) i si és possible fer la pivotació amb alguna variable bàsica ($y_5 = B^{*-1} a_5 \nleq 0$):

$$r_5 = c_5 - \lambda' a_5 = 3 - [0 \quad -1/2 \quad 7/2] \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{-1/2 < 0}$$

$$y_5 = B^{*-1} a_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 31/4 \end{bmatrix} \underline{\nleq 0}$$

Així doncs, x_5 esdevindrà varible bàsica al nou òptim.

Solució del problema 38.

a) Per a demostrar que una solució no és la millor possible s'han de comprovar les condicions d'optimalitat. Donat que $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ i $x_3 \neq 0$, aquestes s'han de prendre com a variables bàsiques. L'enunciat ens dona la inversa de la matriu bàsica corresponent a l'ordenació $B = \{3, 1, 2\}$:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -032258 & -0.16129 & 1.29032 \\ -0.1935 & 0.40322 & -0.22580 \\ 0.5161 & -0.24193 & -0.06451 \end{bmatrix}$$

* *Factibilitat primal:* es comprova la condició de factibilitat primal $x_B \geq 0$:

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} -032258 & -0.16129 & 1.29032 \\ -0.1935 & 0.40322 & -0.22580 \\ 0.5161 & -0.24193 & -0.06451 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4830 \\ 0.2903 \\ 0.2258 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{factible primal}}$$

* *Factibilitat dual:* es comprova la condició de factibilitat dual $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0$. Es calcula previament el vector $\lambda = c'_B B^{-1}$:

$$\lambda' = c'_B B^{-1} = [20 \quad 25 \quad 30] \begin{bmatrix} -032258 & -0.16129 & 1.29032 \\ -0.1935 & 0.40322 & -0.22580 \\ 0.5161 & -0.24193 & -0.06451 \end{bmatrix} = [4.193 \quad -0.4032 \quad 18.2258]$$

i, seguidament, els costos reduïts:

$$r'_N = c'_N - \lambda' N = [10 \quad 0 \quad 0] - [4.193 \quad -0.4032 \quad 18.2258] \begin{bmatrix} 7.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [-39.4758 \quad -4.193 \quad -0.4032] \not\geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{infactible dual}}$$

b) $\mathcal{B} = \{3,1,2\}, \mathcal{N} = \{4,5,6\}$

Primera iteració :

1.- *Detecció d'òptim* $: r'_N = [-39.4758 \quad -4.193 \quad -0.4032] \not\geq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada* $: r_q = \min_{j\in\mathcal{N}}\{r_j\} = r_4 = -39.475 \Rightarrow x_4$variable d'entrada

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} -1.2096 \\ -1.4758 \\ 3.6854 \end{bmatrix} \not\leq 0 \quad \text{no il.limitat}$$

4.- *Selecció variable de sortida :* $x_B = \begin{bmatrix} 0.4830 \\ 0.2903 \\ 0.2258 \end{bmatrix} \; ; \; y_4 = \begin{bmatrix} -1.2096 \\ -1.4758 \\ 3.6854 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{p4}} = \min_{i=1,2,3}\{\frac{y_{i0}}{y_{i4}} \mid y_{i4} > 0\} = \min\{\frac{0.2258}{3.6854}\} = \frac{y_{30}}{y_{34}} \Rightarrow \quad x_{B3} = x_2 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- *Canvi de base :* pivotació $x_4 \leftrightarrow x_2$:

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}\backslash\{2\} \cup \{4\} = \{3,1,4\}$: aquesta base ja correspón a la solució òptima del tableau T^*:

$$x^*_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.558 \\ 0.381 \\ 0.061 \end{bmatrix} \quad ; \quad r^*_N = \begin{bmatrix} 10.711 \\ 1.335 \\ 2.188 \end{bmatrix} \quad ; \quad z^* = 21.291$$

c) Interessa introduir el nou carbó a la mescla òptima si el seu cost reduït és negatiu:

$$r_5 = c_5 - \lambda' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 15 - 19.7702 = -4.7702 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{millora la funció objectiu}}$$

Si x_5 entrés a la base milloraria la funció objectiu. Cal comprovar però que x_5 pot entrar a la base:

$$y_5 = B^{*-1}a_5 = \begin{bmatrix} 0.8753 \\ 0.0678 \\ 0.0569 \end{bmatrix} \not\leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{pot entrar a la base}}$$

Així doncs, interessa canviar la proporció de mescla introduïnt el nou carbó.

d) Comprovem si les normatives dels EUA i Japó fan variar l'optimalitat de $\mathcal{B}^* = \{3,2,4\}$:

* EUA: $\tilde{x}_B = B^{*-1}\tilde{b} = B^{*-1}\begin{bmatrix}1.1\\1.5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.7396\\0.2223\\0.3807\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva la factibilitat primal}}$.

* Japó: $\tilde{x}_B = B^{*-1}\tilde{b} = B^{*-1}\begin{bmatrix}2.0\\2.5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.3610\\0.5405\\0.0985\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva la factibilitat primal}}$.

Calculem ara la variació en la funció objectiu deguda a l'adequació de les proporcions òptimes a la legislació de cada pais. Haurem de fer ús del preus ombra λ:

$$\lambda' = c_B{}^* B^{*-1} = [-1.335 \quad 2.1882 \quad 18.9168]$$

* EUA: $\Delta z = \lambda'\Delta b = [-1.335 \quad 2.1882 \quad 18.9168]\begin{bmatrix}-0.4\\-0.5\\0\end{bmatrix} = -0.5602 < 0 \Rightarrow$ millora els costos de producció.

* Japó: $\Delta z = \lambda'\Delta b = [-1.335 \quad 2.1882 \quad 18.9168]\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0\end{bmatrix} = 0.4267 > 0 \Rightarrow$ millora els costos de producció.

Decidim exportar als EUA, doncs la seva legislació admet unes proporcions òptimes amb uns costos de producció més baixos ($20.7308 \cdot 10^4$pts/Tm) que al Japó ($21.7177 \cdot 10^4$pts/Tm).

Solució del problema 39.

a) S'analitza la variació de la funció objectiu per increment del terme independent b_1 (llet de cabra): $\Delta z = \lambda_1 \Delta b_1$. De la taula òptima s'obté $\lambda_1 = -r_4 = -30 \Rightarrow$ un litre addicional de llet de cabra provoca un increment en el benefici total de $\Delta z = 30$pts$\Rightarrow$ el preu màxim que estariem disposats a pagar per un litre addicional de llet de cabra searia l'original (20pts) més $\Delta z = 30$: $\boxed{\text{50pts/l}} \Rightarrow \boxed{\text{no comprariem a 60pts/l}}$.

b) La tercera constricció no és activa, com mostra el fet que la seva variable d'excés x_6 sigui bàsica. Així doncs, si s'eliminés no afectaria la planificació òptima.

c) Si el preu venda del formatge 1 passes de 190pts a 320pts llavors el cost c_1 passaria de $c_1 = -30$ a $c_1 = -160$. Calculem els cost reduït de la variable x_1: $r_1 = -160 - [-30 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix} = -10 < 0 \Rightarrow$ pèrdua de la factibilitat dual: es reoptimitza amb el simplex primal:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
$\boxed{3/2}$	0	-1/2	1/2	0	1	25	
-4	0	3	-1	1	0	50	$x_1 \longleftrightarrow x_6$
5/2	1	1/2	1/2	0	0	425	
-10	0	10	30	0	0	25500	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	-1/3	1/3	0	2/6	50/3
0	0	5/3	1/3	1	8/6	350/3
0	1	4/3	-1/3	0	-5/3	1150/3
0	0	20/3	12/3	0	20/3	77000/3

Nova planificació òptima: $\boxed{x^*_B = [x_1 \quad x_5 \quad x_2]' = [50/3 \quad 350/3 \quad 1150/3]'}$

d) Per tal que els formatges 1 i 2 entressin a formar part conjuntament de la planificació òptima haurien d'entrar a la base. Per tal que aquest canvi de base no afectés al benefici total caldria que es produís una situació on tant la base actual $\mathcal{B} = \{6, 5, 2\}$ com la nova base, amb x_3 com a variable bàsica fossin solucions òptimes alternatives. Això es pot aconseguir portant el coeficient c_3 fins a un dels seus extrems del seu interval d'estabilitat:

* *Interval d'estabilitat de c_3:* $r_3 = c_3 - \lambda' a_3 = c_3 - [-30 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = c_3 + 30 \geq 0.$

  L'interval d'estabilitat de c_3 és $\boxed{c_3 \geq -30}$.

Si $c_3 = -30$ s'obté $r_3 = 0 \Rightarrow$ òptims alternatius. Podem entrar x_3 a la base sense que la funció objectiu augmenti. De la taula òptima s'obté $y_3 = [-1/2 \quad 3 \quad 1/2]'$ i $y_0 = [25 \quad 50 \quad 425]'$. La variable de sortida correspon al $\min_{1 \leq i \leq 3}\{\frac{y_{i0}}{y_{i3}} | y_{i3} > 0\} = \min\{40/3, 2 \times 425\} = 40/3 \Rightarrow x_5$ variable bàsica de sortida $\Rightarrow$ nova base : $\mathcal{B} = \{6, 3, 2\}$

Solució del problema 40.

a) Primer es comprova si les modificacions introduïdes al vector de termes independents fan perdre l'optimalitat de la base:

* $\mathcal{B}^* = \{3, 5, 2\}$. B^{*-1} es pot obtenir de les columnes del tableau òptim associades a les dues folgues SLK 2 i SLK 3 i a la variable x_1, doncs aquesta variable té columna $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ al tableau inicial:

$$B^{*-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{SLK 2} & \text{SLK 3} & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

* $\Delta b_R = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\tilde{x}_B = B^{*-1}(b + \Delta b_R) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.5 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva l'optimalitat de } \mathcal{B}^*}$$

$$* \ \Delta b_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_B = B^{*-1}(b+\Delta b_E) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva l'optimalitat de } B^*}$$

Es calculen ara els costos marginals o preus ombra λ:

$$\lambda' = c'_B B^{*-1} = [-3 \quad 0 \quad -2.5] \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0 \quad -1]$$

Ampliació planta de refinat: $\Delta z = \lambda_1 \Delta b_1 = -2 \times 1/2 = -1$ milions. S'obté un increment de beneficis d'un milió de pessetes amb una inversió de 1.5 milions: <u>no interessa</u>.
Ampliació de la planta d'embassat: la constricció d'embassat no és activa. Això implica que un canvi de b_2 que conservi la factibilitat primal de B^* no afectarà mai al valor de la funció objectiu (els preus ombra de les constriccions inactives són sempre nuls). Així doncs, tampoc interessa invertir en aquesta planta.

b) Addició de x_6 amb $c_6 = -6$, $a_6 = [2 \quad 1.5 \quad 1]'$. Hem de comprovar la conservació de la fectibilitat dual:

$$r_6 = c_6 - \lambda' a_6 = -6 - [-2 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{interessa produir } x_6}$$

Solució del problema 41.

a)

$$(\mathbf{PL}) \left\{ \begin{array}{lccll} \text{min .} & 2x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & = 2 & \Rightarrow \lambda_1 \text{ lliure} \\ & 2x_1 & -x_2 & \geq 3 & \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 & \Rightarrow \lambda_3 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 & & & \\ & \Downarrow & \Downarrow & & \\ & a'_1\lambda \geq c_1 & a'_2\lambda = c_2 & & \end{array} \right.$$

$$\boxed{(\mathbf{D}) \left\{ \begin{array}{lcccl} \max & 2\lambda_1 & 3\lambda_2 & \lambda_3 & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & \lambda_1 & 2\lambda_2 & \lambda_3 & \geq 2 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & = 1 \\ & & \lambda_2 \leq 0, & \lambda_3 \geq 0 & \end{array} \right.}$$

b)

$$
(\mathbf{PL})\left\{\begin{array}{llllll}
\min & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & & \\
\text{s.a.:} & & & & & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 2 & \Rightarrow \lambda_1 \geq 0 \\
 & x_1 & & -x_3 & \geq 1 & \Rightarrow \lambda_2 \geq 0 \\
 & & x_2 & +x_3 & = 1 & \Rightarrow \lambda_3 \text{ lliure} \\
 & 2x_1 & +x_2 & & \leq 3 & \Rightarrow \lambda_4 \leq 0 \\
 & & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & & \\
 & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \\
 & a_1'\lambda = c_1 & a_2'\lambda \leq c_2 & a_3'\lambda \leq c_3 & &
\end{array}\right.
$$

$$
\boxed{(\mathrm{D})\left\{\begin{array}{llllll}
\max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +3\lambda_4 & \\
\text{s.a.:} & & & & & \\
 & \lambda_1 & +\lambda_2 & & +2\lambda_4 & = 2 \\
 & \lambda_1 & & +\lambda_3 & +\lambda_4 & \leq 4 \\
 & \lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & & \leq 6 \\
 & \lambda_1 \geq 0, & \lambda_2 \geq 0, & & \lambda_4 \leq 0 &
\end{array}\right.}
$$

Solució del problema 42.

a) $\mathcal{B}^0 = \{1, 3, 7\}$

* *Factibilitat primal :* $x_B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 36 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ factible primal

* *Factibilitat dual :*

$$r_N^{0\,\prime} = c_N' - \lambda' N \quad ; \quad \lambda' = c_B'(B^0)^{-1} = [28 \quad 12 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [4 \quad 12 \quad 0]$$

$$r_N' = [67 \quad 35 \quad 0 \quad 0] - [4 \quad 12 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad 7 \quad 4 \quad 12] \ngeq 0 \Rightarrow \boxed{\text{infactible Dual}}$$

Algorisme del simplex primal :

Primera iteració :

1.- *Detecció de òptim :* $r_N' = [-1 \quad 7 \quad 4 \quad 12] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_2 = -1 < 0 \Rightarrow x_2$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :* $y_2 = B^{-1}a_2 = [2 \quad 1 \quad 1]' \nleq 0$ no il.limitat

4.- *Selecció variable de sortida :* $x_B = \begin{bmatrix} 17 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$; $y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}}/y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{17}{2},\frac{2}{1},\frac{9}{1}\} = \frac{2}{1} \Rightarrow \quad x_3 \text{ v.b. de salida}$$

5.- *Canvi de base :* $\mathcal{B} = \{1,2,7\}$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Segona iteració :

6.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = c'_N - c'_B B^{-1} N = [1 \quad 7 \quad 6 \quad 11] \geq 0 \Rightarrow$ òptim

$$x^*_B = B^{-1}b = [x_1 \quad x_2 \quad x_7]' = [13 \quad 2 \quad 7]'$$

b) Problema artificial de la fase I : x_5, x_6 i x_7 són els escreixos de la forma estàndar i x_8 i x_9 les variables artificials de la fase I.

$$(\mathbf{PL}_a)\left\{\begin{array}{llcccccccccccccc} \min & z_a= & x_8 & + & x_9 \\ \text{s.a.:} & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & + & x_8 & \geq & 17 \\ & & 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_6 & & & \geq & 36 \\ & & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & - & x_7 & + & x_9 & \geq & 8 \\ \\ & & x_i \geq 0 & , & \forall i \end{array}\right.$$

$$T^0_a = \begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -2 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -25 \end{array}$$

c) $\hat{x}_B = B^{*-1}\hat{b} = [13 \quad 2 \quad -1]' \Rightarrow$ pèrdua de la factibilitat primal de $\mathcal{B}^*$ $\Rightarrow$ reoptimització amb l'algorisme del símplex dual :

$$\hat{T}^0 = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & 11 & 0 & -498 \end{array} \qquad x_7 \rightarrow x_3$$

$$\hat{T}^1 = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 12 & 1 & -499 \end{array}$$

Solució del problema 43.

a) La folga de la primera constricció és bàsica $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_1 = 0}$.

$$x_3 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_3 = c_3$$
$$x_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 + 2\lambda_3 = c_1$$

$$\begin{array}{l} \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = -3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_2 = -5/3} \\ \\ \boxed{\lambda_3 = -2/3} \end{array} \right.$$

b)

$$z_{(P)} = c^{\mathsf{T}} x = c_1 x_1 + c_3 x_3 = -3\frac{14}{3} - \frac{13}{3} = -\frac{55}{3}$$
$$z_{(D)} = \lambda^{\mathsf{T}} b = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = -\frac{5}{3}9 - \frac{2}{3}5 = -\frac{55}{3}$$

c.1) x_7 entrarà a la base si *1)* $r_7 < 0$ i *2)* $\exists\ i$ t.q. $y_{7i} > 0$.

$$r_7 = c_7 - \lambda^{\mathsf{T}} a_7 = -1 - \alpha \left[0 \quad -\tfrac{5}{3} \quad -\tfrac{2}{3} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + \frac{7}{3}\alpha$$

$$r_7 = \frac{7}{3}\alpha - 1 < 0 \qquad \Rightarrow \alpha < \frac{3}{7}$$

x_7 entrarà a la base $\Leftrightarrow \exists\ \ i$t.q.$y_{7i} > 0$:

$$y_7 = B^{-1} a_7 = B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha/3 \\ \alpha/3 \\ 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \forall \alpha > 0 \quad y_{7i} > 0 \quad i = 1,2,3$$

$$\boxed{0 < \alpha \leq \tfrac{3}{7}}$$

c.2)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = B^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 2/9 \\ 1 & 2/3 & -1/3 & 1/9 \\ 3 & 1 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$r_N = c_N - \lambda^{\mathsf{T}} N = [3 \quad 5/3 \quad 2/3 \quad -2/9]$$

$$z = c_B B^{-1} b = -55/3$$

$T^0 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	0	0	0	1/3	1/3	2/9	14/3
0	1	1	0	2/3	-1/3	1/9	13/3
0	3	0	1	1	0	$\boxed{2/3}$	13
0	3	0	0	5/3	2/3	-2/9	55/3

$T^1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	-1	0	-1/3	0	1/3	0	1/3
0	1/2	1	-1/6	1/2	-1/3	0	13/6
0	9/2	0	3/2	3/2	0	1	39/2
0	4	0	1/3	2	2/3	0	68/3

$\boxed{r_N \geq 0 \Rightarrow \text{òptim}}$

Solució del problema 44.

- Formulació del problema a resoldre a la fase I. Introducció de variables de folga (x_4), escreix (x_3) i artificials (x_5,x_6) :

$$
(\mathbf{PL}_a)\left\{
\begin{array}{lllcccccccccc}
\min & z_I = & x_5 & + & x_6 & & & & & & & & \\
\text{subj.a :} & & 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & = 6 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & = 3 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & & & & & & & + x_6 & = 3 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , x_6 & \geq 0
\end{array}
\right.
$$

- Fase I :

$T_a^1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	3	-1	0	1	0	6
1	2	0	1	0	0	3
$\boxed{3}$	1	0	0	0	1	3
-7	-4	1	0	0	0	-9

; $T_a^2 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	$\boxed{5/3}$	-1	0	1	-4/3	2
0	$\boxed{5/3}$	0	1	0	-1/3	2
1	1/3	0	0	0	1/3	1
0	-5/3	1	0	0	7/3	-2

- S'ha de notar que en la segona iteració es produeix empat entre x_5 (artificial) i x_4 (folga). És lògic treure de la base la variable artificial, donat que busquem una solució sense variables artificials a la base. El tableau resultant de la pivotació $x_2 \leftrightarrow x_5$ és l'indicat a la taula $3a$, i el de la pivotació $x_2 \leftrightarrow x_4$ a la taula $3b$.

$T_a^{3a} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	-3/5	0	3/5	-4/5	6/5
0	0	1	1	-1	1	0
1	0	1/5	0	-1/5	3/5	3/5
0	0	0	0	1	1	0

òptim de $(\mathbf{PL}_a)$, s.b.f. de $(\mathbf{PL})$

; $T_a^{3b} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	-1	-1	1	0	
0	1	0	3/5	0	6/5	
1	0	0	-1/5	0	3/5	
0	0	1	1	0	0	

òptim de $(\mathbf{PL}_a)$. NO s.b.f. de $(\mathbf{PL})$

- La taula T_a^{3a} és òptima ($r \geq 0$) i conté una solució bàsica factible de **(PL)**, donat que la suma d'infactibilitats és zero ($z_a = 0$). La base està formada per les variables x_2, x_4 i x_1, amb valors :

$$x_B = [x_2, \ \ x_4, \ \ x_1]' = [6/5, \ \ 0, \ \ 3/5]'$$

- El tableau T_a^{3b}, tot i ser òptim ($r \geq 0$) i tenir suma d'infactibilitats nul.la ($z_a = 0$) *no conté una solució bàsica factible de* **(PL)** donat que a la base hi resta una variable artificial, x_5. Per tal d'obtenir una s.b.f. a partir de la taula $3b$ caldria pivotar x_5 amb x_4, recuperant així la taula $3a$.

b)

$$(\mathbf{D})\left\{\begin{array}{llrcrcrcr} \min & z_{(D)} = & 6\lambda_1 & + & 3\lambda_1 & + & 3\lambda_3 & & \\ \text{subj.a :} & & 4\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & \geq & -4 \\ & & 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & \geq & -1 \\ & & \lambda_1 \leq 0 & , & \lambda_2 \geq 0 & & & & \end{array}\right.$$

c) El valor de les variables duals del problema **(PL)** expressat com a problema de minimització ($\hat{\lambda}$) pot ser llegit directament del tableau òptim a partir dels costos reduïts de les variables de folga, escreix o artificials amb un eventual canvi de signe :

$$\hat{\lambda}_1 = r_3 = 0 \quad , \quad \hat{\lambda}_2 = -r_4 = -1/5 \quad , \quad \hat{\lambda}_3 = -r_6 = 7/5$$

Aquests valors corresponen al problema **(PL)** expressat com a problema de minimització. Els valors de les variables duals pel problema **(PL)** expressat com a problema de maximització, λ, s'obté canviant de signe el vector $\hat{\lambda}$: $\lambda' = -\hat{\lambda}'$

d) Calculem el cost reduït de x_3 :

$$r_3 = \hat{c}_3 - \hat{\lambda}' a_3 = 1 - [0, \ \ -1/5, \ \ 7/5]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = -1/5 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{no es conserva l'optimalitat}}.$$

7 Solucions dels problemes de programació lineal entera.

Solució del problema 48.

a)

- **Inicialització** $L := \{(PE1)\}$
- **Primera iteració** es processa (PE1)
  - * *Relaxació* Es resol (PR1) : $x^*_{PR1} = (34/3, 8/3, 0)'$, $z^*_{PR1} = -14$
  - * *Eliminació* no es pot eliminar.
  - * *Separació* es selecciona com a variable de ramificació x_1 i es crean els subproblemes (PE2) ($x_1 \leq 11$) i (PE3) ($x_1 \geq 11$) : $L = \{(PE2), (PE3)\}$
- **Segona iteració** s'explora la branca $x_1 \leq 11$ (PE2)
  - * *Relaxació* Es resol (PR2) : $x^*_{PR2} = (11, 5/2, 11/4)'$, $z^*_{PR2} = -13.75$.
  - * *Eliminació* no es pot eliminar
  - * *Separació* es selecciona com a variable de ramificació x_2 i es crean els subproblemes (PE4) ($x_2 \leq 2$) i (PE5) ($x_2 \geq 3$). $L = \{(PE4), (PE5), (PE3)\}$.
- **Tercera iteració** s'explora la branca $x_2 \leq 2$ (PE4)
  - * *Relaxació* es resol (PR4) : $x^*_{PR4} = (10, 2, 1)'$, $z^*_{PR4} = -13$.
  - * *Eliminació* x^*_{PR4} entera$\Rightarrow$ solució de (PE4). Hem obtingut la primera incumbent. $z^* := z^*_{PR4}$, $x^* := x^*_{PR4}$. S'elimina (PE4) de la llista : $L = \{(PE5), (PE3)\}$.
- **Quarta iteració** s'explora la branca $x_2 \geq 3$ (PE5)
  - * *Relaxació* es resol (PR5) : problema infactible.
  - * *Eliminació* (PR5) no factible $\Rightarrow$ s'elimina (PE5). $L = \{(PE3)\}$

b) Cap solució factible del problema (PE) pot tenir un valor de funció objectiu menor que la fita inferior proporcionada per $z^*_{PR1} = -14$. Tampoc és possible igualar aquest valor, donat que (PR1) no té òptims alternatius que puguin correspondre a solucions enteres. El vector de costos és enter, la qual cosa indica que z adoptarà valors enters per a tota solució entera. De tot això es dedueix que el menor valor possible de z serà -13, el que demostra que la solució associada a la incumbent trobada a (PE4) és òptima.

c)

1.- $L = \{(PE3)\} \neq \emptyset$

2.- Seleccionem (PE3).

3.- Resolució de la relaxació lineal (PR3).
Afegim a (PR1) la constricció $x_1 \geq 12 \Rightarrow -x_1 + f_1 = -12$, on f_1 és variable bàsica de valor negatiu $f_1 = \frac{-2}{3}$. El tableau del simplex s'obtindrà a partir del tableau òptim de

la relaxació lineal de (PE1) amb la inclusió d'una nova fila, corresponent a la constricció afegida:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	
1	0	4/3	2	4/3	0	34/ 3
0	1	2/3	0	2/3	0	8/ 3
0	0	4/3	2	4/3	1	-2/ 3
0	0	1	2	2	0	14

La solució associada a aquest tableau és factible dual però no es factible primal, havent-se de reoptimitzar usant el simplex dual, Tanmateix, en intentar trobar una variable no bàsica per a pivotar amb f_1 no es troba cap candidata, donat que $y_{3j} \geq 0 \quad \forall j$, fet que indica que (PR3) és infactible.

4.- (PR3) és infactible $\Rightarrow$ s'elimina de la llista : $L := \emptyset$

1.- $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució òptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^*_{PR4} = [10 \;\; 2 \;\; 1]} \quad ; \quad \boxed{z^*_{PE} := z^* = -13}$$

Solució del problema 49.

a) Criteris de ramificació: 1) ramificar primer en x_1, 2) explorar primer la branca $x_i \leq \lfloor x^*_i \rfloor$.

- **Primera iteració** $L := \{(PE1)\}$, $z^* = +\infty$. Es processa (PE1)
  - *Relaxació:* Es resol gràficament (PR1). Observant la regió factible de (PR1) K_{PR1} i l'orientació del vector de costos c (Fig. 1) es determina que la solució x^*_{PR1} és el vèrtex associat a la intersecció entre les rectes r_1 i r_2:

$$x^*_{PR1} = \begin{bmatrix} 2.842 \\ 2.210 \end{bmatrix}$$

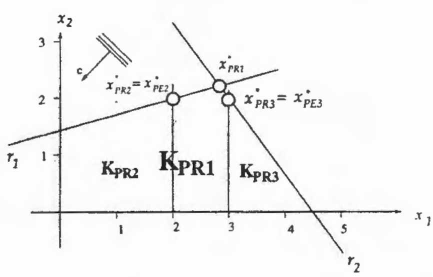


Figura 1 : Resolució gràfica ramificant primer en x_1.

  - *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$no es pot eliminar.
  - *Separació:* variable de ramificació $x_1 = 2.842 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_1 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}; L = \{(PE2), (PE3)\}$

- **Segona iteració** $L = \{(PE2), (PE3)\}, z^* = +\infty$. Es processa (PE2)
  - *Relaxació:* Es resol gràficament (PR2). Observant la Fig. 1) es determina que la solució x^*_{PR2} és:

$$x^*_{PR2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR2} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar.
    - ▷ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -4$, $x^* := x^*_{PE2} = [2 \quad 2]'$
    - ▷ Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$
- **Tercera iteració** $L = \{(PE3)\}$, $z^* = -4$. Es processa (PE3)
  - *Relaxació:* Es resol gràficament (PR3). Observant la Fig. 1) es determina que la solució x^*_{PR3} és:

$$x^*_{PR2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR3} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR3} = x^*_{PE3} \Rightarrow$ es pot eliminar.
    - ▷ Inicialització de la incumbent : $z^* := \min\{z^*, z^*_{PE3}\} = z^*_{PE3} = -5$, $x^* := x^*_{PE3} = [3 \quad 2]'$
    - ▷ Actualització de la llista : $L := \emptyset$
- **Quarta iteració** $L = \emptyset$. L'òptim és:

$$\boxed{x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} , \; z^* = -5}$$

b) Criteris de ramificació: 1) ramificar primer en x_2, 2) explorar primer la branca $x_i \leq \lfloor x_1^* \rfloor$.

- **Primera iteració** $L := \{(PE1)\}$, $z^* = +\infty$. Es processa (PE1)
  - *Relaxació:* mateixa solució que a l'anterior apartat (Fig. 2)

$$x^*_{PR1} = \begin{bmatrix} 2.842 \\ 2.210 \end{bmatrix} , \; z^*_{PR1} = -5.052 \Rightarrow z^*_{PE} \geq -5 = \underline{z}^*_{PE}$$

  - *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$no es pot eliminar.
  - *Separació:* variable de ramificació $x_1 = 2.842 \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_2 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}; L = \{(PE2), (PE3)\}$
- **Segona iteració** $L = \{(PE2), (PE3)\}$. Es processa (PE2)
  - *Relaxació:* la Fig. 2 mostra que l'òptim de la funció objectiu sobre la regió factible de (PR2) K_{PR2} s'obté sobre el punt:

$$x^*_{PR2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR2} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar.

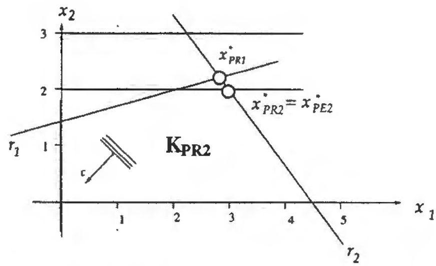


Figura 2 : Resolució gràfica ramificant primer en x_2.

▷ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -5$, $x^* := x^*_{PE2} = [3 \quad 2]'$
▷ Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$

Hem trobat una incumbent amb el mateix valor que la fita inferior $\underline{z}^*_{PE}$. Això implica que x^*_{PE2} és la solució del problema, i ja no caldria continuar explorant. Si processessim el node que queda obtindriem el següent

- **Tercera iteració** $L = \{(PE3)\}$, $z^* = -5$. Es processa (PE3)
  - *Relaxació:* en afegir la constricció $x_2 \geq 3$ s'obté un problema infactible (vegi's la Fig. 2).
  - *Eliminació:*

    ▷ $K_{PR3} = \emptyset \Rightarrow$ s'elimina (PE3)
    ▷ Actualització de la llista : $L := \emptyset$
- **Quarta iteració** $L = \emptyset$. L'òptim és:

$$\boxed{x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \; z^* = -5}$$

Solució del problema 50.

Inicialització: $L := \{(PE1)\}$
Primera iteració : es processa (PE1)
Relaxació : Es resol (PR1) :

$$T^*_{PR1} = \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \\ & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 25/2 \\ & 0 & 7/2 & 1/2 & 0 & 1 & 11/2 \\ \hline & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}$$

$$x^*_{PR1} = [5/2 \quad 0]' \quad , \quad z^*_{PR1} = -5/2$$

Eliminació : $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$no es pot eliminar.

Separació : variable de ramificació $x_1 = 2.5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_1 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}; \; L = \{(PE2), (PE3)\}$

Segona iteració: s'explora la branca $x_1 \leq 2$ (PE2)

Relaxació : Es resol (PR2) : s'afegeix la restricció $x_1 \leq 2$ a (PE1) i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} :

$$T^0_{PR2} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & f_1 & \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 25/2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 11/2 \\ 0 & -1/2 & \boxed{-1/2} & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ \hline 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array} \quad ; \quad T^1_{PR2} = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & f_1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$x^*_{PR2} = [2 \quad 0]' \quad , \quad z^*_{PR2} = -2$$

Eliminació :

- $K_{PR2} \neq \emptyset$,
- $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar :
  - $*$ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -2$, $x^* := x^*_{PE2} = (2,0)'$
- Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$

Tercera iteració: s'explora la branca $x_1 \geq 3$ (PE3)

Relaxació : Es resol (PR3) : s'afegeix la restricció $x_1 \geq 3$ a (PE1) i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} :

$$T^0_{PR3} = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & f_1 & \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 25/2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 11/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ \hline 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}$$

Problema (D) il.limitat $\Rightarrow$ (PR3) infactible

Eliminació :

- $K_{PR3} = \emptyset, \Rightarrow$ s'elimina (PE3) : $L := \emptyset$.

Quarta iteració: $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució óptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^* = [2 \quad 0]' \quad ; \quad z^*_{PE} := z^* = -2}$$

Solució del problema 51.

- **Inicialització:** $L := \{(PE1)\}$
- **Primera iteració:** es processa (PE1)

∗ *Relaxació:* Es resol (PR1) :

$T^*_{PR1} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	4/3	2	4/3	34/3
0	1	2/3	0	2/3	8/3
0	0	1	2	2	14

$$x^*_{PR1} = [34/3 \quad 8/3 \quad 0]' \quad , \quad z^*_{PR1} = -14$$

∗ *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset, x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$ no es pot eliminar.

∗ *Separació:* es selecciona com a variable de ramificació x_1, creant-se els subproblemes (PE2) ($x_1 \leq 11$) y (PE3) ($x_1 \geq 11$) : $L = \{(PE2), (PE3)\}$

- **Segona iteració:** s'explora la branca $x_1 \leq 11$ (PE2)

  ∗ *Relaxació:* Es resol (PR2) : s'introdueix la constricció $x_1 \leq 11$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} aplicant l'algorisme del simplex dual.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	
1	0	4/3	2	4/3	0	34/3
0	1	2/3	0	2/3	0	8/3
0	0	$\boxed{-4/3}$	−2	−4/3	1	−1/3
0	0	1	2	2	0	14

; $T^*_{PR2} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	
1	0	0	0	0	1	11
0	1	0	−1	0	1/2	5/2
0	0	1	3/2	1	−3/4	1/4
0	0	0	1/2	0	3/4	55/4

$$x^*_{PR2} = [11 \quad 5/2 \quad 11/4]' \quad , \quad z^*_{PR2} = -13.75$$

  ∗ *Eliminació:* no es pot eliminar.

  ∗ *Separació:* es selecciona com a variable de ramificació x_2, creant-se els subproblemes (PE4) ($x_2 \leq 2$) y (PE5) ($x_2 \geq 3$). $L = \{(PE4), (PE5), (PE3)\}$.

- **Tercera iteració:** s'explora la branca $x_2 \leq 2$ (PE4)

  ∗ *Relaxació:* Es resol (PR4) : s'introdueix la constricció $x_2 \leq 2$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR2} aplicant l'algorisme del simplex dual.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	
1	0	0	0	0	1	0	11
0	1	0	−1	0	1/2	0	5/2
0	0	1	3/2	1	−3/4	0	1/4
0	0	0	1	0	$\boxed{-1/2}$	1	−1/2
0	0	0	1/2	0	3/4	0	55/4

; $T^*_{PR4} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	
1	0	0	2	0	0	2	10
0	1	0	0	0	0	1	2
0	0	1	0	1	0	−3/2	1
0	0	0	−2	0	1	−2	1
0	0	0	2	0	0	3/2	13

$$x^*_{PR4} = [10 \quad 2 \quad 1]' \quad , \quad z^*_{PR4} = -13$$

  ∗ *Eliminació:* x^*_{PR4} entera$\Rightarrow$ solució de (PE4). Hem obtingut la primera incumbent. $z^* := z^*_{PR4}$, $x^* := x^*_{PR4}$. S'elimina (PE4) de la llista : $L = \{(PE5), (PE3)\}$.

- **Quarta iteració:** s'explora la branca $x_2 \geq 3$ (PE5)

  ∗ *Relaxació:* Es resol (PR5) : s'introdueix la constricció $x_2 \geq 3$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR2} aplicant l'algorisme del simplex dual.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	
1	0	0	0	0	1	0	11
0	1	0	−1	0	1/2	0	5/2
0	0	1	3/2	1	−3/4	0	1/4
0	0	0	−1	0	1/2	1	−1/2
0	0	0	1/2	0	3/4	0	55/4

Variable bàsica de sortida : $x_{B_4} = f_2$. $y_{4j} \geq 0 \, \forall j \in \mathcal{N} \Rightarrow$ dual il.limitat, primal infactible : $K_{PR5} = \emptyset$

* *Eliminació:* (PR5) no factible $\Rightarrow$ s'elimina (PE5). $L = \{(PE3)\}$

- **Quinta iteració:** s'explora la branca $x_1 \geq 12$ (PE3)
  * *Relaxació:* Es resol (PR3) : s'introdueix la constricció $x_2 \geq 12$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} aplicant l'algoritmo del simplex dual.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	
1	0	4/3	2	4/3	0	34/3
0	1	2/3	0	2/3	0	8/3
0	0	4/3	2	4/3	1	−2/3
0	0	1	2	2	0	14

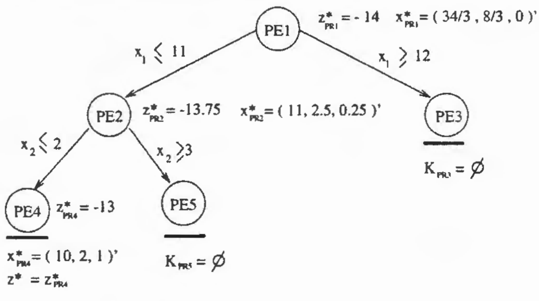
Variable bàsica de sortida : $x_{B_3} = f_1$. $y_{3j} \geq 0 \, \forall j \in \mathcal{N} \Rightarrow$ dual il.limitat, primal infactible : $K_{PR3} = \emptyset$

* *Eliminació:* (PR3) no factible $\Rightarrow$ s'elimina (PE3). $L = \emptyset$

- **Sisena iteració:** $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució òptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^* = [10 \quad 2 \quad 1]'} \quad ; \quad \boxed{z^*_{PE} := z^* = -13}$$

L'arbre d'exploració d'aquest problema és:



Solució del problema 52.

- **Inicialització** $L := \{(PE1)\}$
- **Primera iteració** es processa (PE1)

* *Relaxació:* Es resol (PR1) :

$$T^*_{PR1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \begin{array}{|ccccc|c} \hline 0 & 1 & 5/4 & -1/4 & 0 & 5/2 \\ 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1/2 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \end{array}$$

$$x^*_{PR1} = [5/2 \quad 5/2 \quad 0]' \quad ; \quad z^*_{PR1} = -5$$

* *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1}$ $\Rightarrow$no es pot eliminar.
* *Separació:* variable de ramificació $x_1 = 2.75 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_1 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}; \; L = \{(PE2), (PE3)\}$

- **Segona iteració** s'explora la branca $x_1 \leq 2$ (PE2)
  * *Relaxació:* Es resol (PR2) : s'afegeix la restricció $x_1 \leq 2$ a (PE1) i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} :

$$T^0_{PR2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & f_1 & \end{array} \\ \begin{array}{|cccccc|c} \hline 0 & 1 & 5/4 & -1/4 & 0 & 0 & 5/2 \\ 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1/2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1/4 & \boxed{-1/4} & 0 & 1 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \end{array}$$

$$T^1_{PR2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & f_1 & \end{array} \\ \begin{array}{|cccccc|c} \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \end{array}$$

$$x^*_{PR2} = [2 \quad 3]' \quad ; \quad z^*_{PR2} = -5$$

  * *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR2} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar.
    - ▷ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -5$, $x^* := x^*_{PE2} = [2 \quad 3]'$
    - ▷ Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$

(ATENCIÓ : $z^*_{PE2} = z^*_{PR1}$, i sabem que z^*_{PR1} és una fita inferior de z^*_{PE}. Així doncs, podem assegurar que $x^*_{PE} = x^*_{PE2}$ i no caldria explorar el nus (PE3)).

- **Tercera iteració** s'explora la branca $x_1 \geq 3$ (PE3)
  * *Relaxació:* Es resol (PR3) : s'afegeix la restricció $x_1 \geq 3$ a (PE1) i es reoptimitza a

partir de T^*_{PR1} :

$$T^0_{PR3} = \begin{array}{|cccccc|c} \multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \multicolumn{1}{c}{f_1} & \\ \hline 0 & 1 & 5/4 & -1/4 & 0 & 0 & 5/2 \\ 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1/2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/4} & 1/4 & 0 & 1 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$$T^1_{PR3} = \begin{array}{|cccccc|c} \multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \multicolumn{1}{c}{f_1} & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

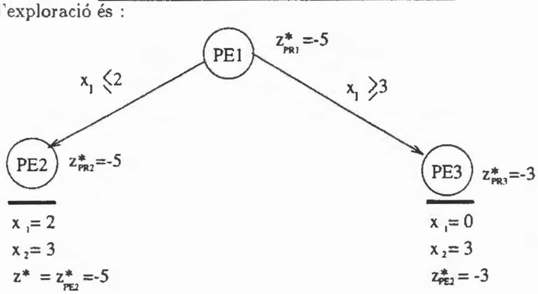
$$x^*_{PR3} = [0 \quad 3]' \quad ; \quad z^*_{PR2} = -3$$

* *Eliminació:*
  - ▷ $K_{PR3} \neq \emptyset$.
  - ▷ $x^*_{PR3} = x^*_{PE3} \Rightarrow$ es pot eliminar.
  - ▷ Actualització de la incumbent : $z^*_{PE3} = -3 \not< z^* = -5 \Rightarrow$ no s'actualitza.
  - ▷ Actualització de la llista : $L := \emptyset$.

- **Sisena iteració** $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució óptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^* = [2 \quad 3]' \quad ; \quad z^*_{PE} := z^* = -5}$$

L'arbre d'exploració és :



8 Solucions dels problemes de programació no lineal.

Solució del problema 53.

a) Calcularem primer els punts estacionaris:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla f(x^*) = [0] \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ únic punt estacionari.}$$

Estudiem ara la convexitat de $f(x)$ sobre el punt trobat:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

la matriu Hessiana és constant: es tracta d'una funció quadràtica. Comprovem la definició de l'Hessiana:

$$\Delta_1 = 2 > 0 \quad , \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0 \quad , \quad \Delta_3 = \det \nabla^2 f(x) = 4 > 0$$

$$\Delta_k > 0 \, , \, k = 1,2,3 \Rightarrow \nabla^2 f(x) \text{ def} + \forall x \in \mathbb{R}^3$$

l'Hessiana és definida positiva arreu ($f(x)$ estrictament convexa): el punt $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és un mínim global estricte de $f(x)$.

b) Punts estacionaris de f(x):

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1 - x_2} - e^{x_2 - x_1} + 2xe^{x^2} \\ -e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_1} \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x^*) = [0] \Rightarrow \begin{cases} x_3^* = 0 \\ e^{x_2^*-x_1^*} = e^{x_1^*-x_2^*} \Rightarrow x_1^* - x_2^* = x_2^* - x_1^* \Rightarrow \boxed{x_1^* = x_2^*} \\ \left.\begin{array}{r} e^{x_1^*-x_2^*} - e^{x_2^*-x_1^*} + 2x^* e^{x^{*2}} = 2x_1^* e^{x_1^{*2}} = 0 \\ e^{x_1^{*2}} > 0 \end{array}\right\} \boxed{x_1^* = 0} \Rightarrow \boxed{x_2^* = 0} \end{cases}$$

Comprovem la definició de la Hessiana sobre x^*:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} + 4x_1^2 e^{x_1^2} + 2\epsilon^{x_1^2} & -e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} & 0 \\ -e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} & e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 > 0$ doncs és suma de termes positius

$$\Delta_2 = (e^{x_1-x_2}+e^{x_2-x_1})^2 + (e^{x_1-x_2}+e^{x_2-x_1})(e^{x_1-x_2}+e^{x_2-x_1}+4x_1^2e^{x_1^2}+2e^{x_1^2}) - (e^{x_1-x_2}+e^{x_2-x_1})^2 =$$

$$= (e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1})(e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} + 4x_1^2 e^{x_1^2} + 2e^{x_1^2}) > 0$$

$\Delta_3 = 2\Delta_2 > 0$

$$\Delta_k > 0\,,\ k = 1,2,3 \Rightarrow \nabla^2 f(x) \text{ def} + \forall x \in \mathbb{R}^3$$

b) l'Hessiana és definida positia arreu ($f(x)$ estrictament convexa): el punt $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és un mínim global estricte de $f(x)$.

c) Es calculen els punts estacionaris de $f(x)$:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} \\ -e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x^*) = [0] \Rightarrow e^{x_1^*-x_2^*} = e^{x_2^*-x_1^*}\,,\ x_1^* - x_2^* = x_2^* - x_1^*\,,\ 2x_1^* = 2x_2^*\,,\ \boxed{x_1^* = x_2^*}$$

En aquest cas ens trobem amb un conjunt de punts estacionaris $\mathcal{X}^*$ determinat pels punts de $\mathbb{R}^2$ amb $x_1 = x_2$. Comprovem ara la definició de la matriu Hessiana:

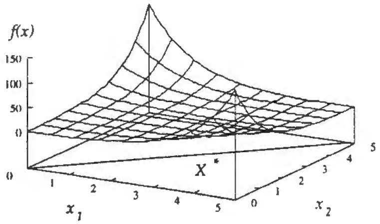
$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} & -e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} \\ -e^{x_1-x_2} - e^{x_2-x_1} & e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} > \forall x \in \mathbb{R}^2$

$\Delta_2 = (e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1})^2 - (e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1})^2 = 0$

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0 \Rightarrow \nabla^2 f(x) \text{ semidef} + \forall x \in \mathbb{R}^2$$

La matriu Hessiana és semidefinida positiva arreu ($f(x)$ és convexa): el conjunt de punt $\mathcal{X}^*$ són mínims global febles. La següent figura mostra la respresentació gràfica de la funció $f(x)$ i del conjunt $\mathcal{X}^*$:



d) Càlcul de punts estacionaris:

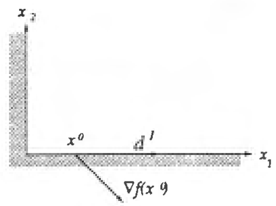
$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2} \\ -e^{x_1-x_2} + e^{x_1-x_2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x^*) = [0] \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1+x_2} = e^{x_1-x_2}\,,\ x_1 + x_2 = x_1 - x_2\,,\ x_2 = -x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0} \\ \left.\begin{array}{r} e^{x_1-x_2} = -e^{x_1+x_2} \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{x_1} = -e^{x_1} \Rightarrow \boxed{\nexists x^*} \end{cases}$$

En aquest cas no existeixen punts estacionaris, i el conjunt solució $\mathcal{X}^*$ és buit (el problema no té solució). La funció $f(x)$ no està afitada inferiorment: per a un valor donat de x_2, la funció objectiu decreix a mida que ho fa x_1.

Solució del problema 55.

- $d^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. La representació gràfica d'aquest primer cas és:



  * *Factibilitat:* Els punts a partir de x^0 al llarg de d^1 es representen per:

$$x(\alpha) = x^0 + \alpha d^1 = \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

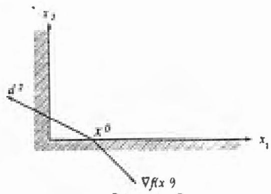
  donat que $x(\alpha) \geq 0$ per a tot $\alpha \geq 0$ la direcció és factible.

  * *Descens:* Fem el producte escalar amb el vector gradient:

$$\nabla f(x^0)d^1 = [2 \quad -2]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 > 0$$

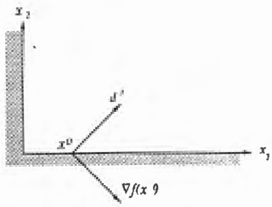
  donat que $\nabla f(x^0)d^1 > 0$, la direcció no és de descens.

- $d^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.



* *Factibilitat:* $x(\alpha) = x^0 + \alpha d^2 = \begin{bmatrix} 1-2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$. Per a qualssevol valor de α entre zero i $\alpha = 1/2$ es satisfà $x(\alpha) \geq 0$, sent doncs d^1 factible.
* Descens: $\nabla f(x^0)d^2 = [2 \;\; -2] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 < 0$. d^2 és de descens.

• $d^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$



* Factibilitat: $x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1+2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \geq 0 \forall \alpha > 0$, sent doncs factible.
* Descens: $\nabla f(x^0)d^2 = [2 \;\; -2] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$. En aquest cas, per tal de saber si d^3 és de descens hem d'estudiar les segones derivades de $f(x)$ al llarg de d^3:

$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

La corbatura de $f(x)$ al llarg de d^3, $g''(\alpha)$ ens pot indicar, si la direcció és de descens ($g''(\alpha) < 0$) o d'ascens ($g''(\alpha) > 0$). En el nostre cas és:

$$g''(\alpha) = d^{3'} \nabla f(x^0) d^3 = [2 \;\; 2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Així doncs, l'estudi de la corbatura tampoc ens permet dir si la direcció és de descens.

Solució del problema 57.

Càlcul de la direcció de decens::

Es calcula en primer lloc la direcció de moviment del mètode del gradient:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - (x_2 - x_3)^3 + x_1 x_2 x_3 \quad ; \quad x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x)' = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 x_3 \\ 2x_2 - 3(x_2 - x_3)^2 + x_1 x_3 \\ 3(x_2 - x_3)^2 + x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Direcció de moviment del mètode del gradient: $\boxed{d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$

Exploració lineal::

A continuació es realitza exploració lineal per Fibonacci amb $N = 4$ i interval d'incertessa $[0, 0.1]$, de londitud inicial $d_1 = 0.1$. La funció univaluada sobre la que s'aplicarà Fibonacci és:

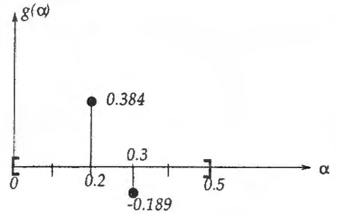
$$g(\alpha) = f(x^0 + \alpha d^0) = f(-3\alpha + 1, 3\alpha - 1, \alpha - 1)$$
$$g(\alpha) = -17\alpha^3 + 33\alpha^2 - 19\alpha + 3$$

Els valors dels números de Fibonacci que s'usaran són:

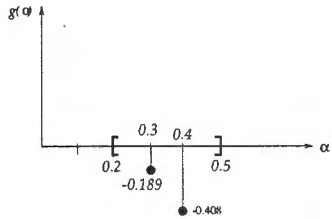
$$F_0 = F_1 = 1 \quad ; \quad F_2 = 2 \quad ; \quad F_3 = 3 \quad ; \quad F_4 = 5$$

i les iteracions del procés són:

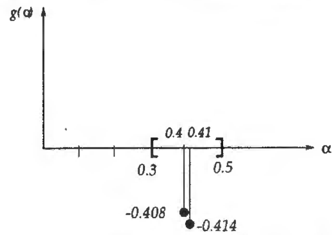
- **Primera iteració:**
  - $\alpha_1 = 0 + \frac{F_3}{F_5} d_1 = \frac{3}{5} 0.5 = 0.3 \quad ; \quad g(0.5) = -0.189$
  - $\alpha_2 = 0.5 - \frac{F_3}{F_5} d_1 = 0.5 - 0.3 = 0.2 \quad ; \quad g(0.2) = 0.384$
  - $g(0.2) > g(0.5)$: es descarta $[0, 0.2[$. El nou interval d'incertessa és $[0.2, 0.5]$.



- **Segona iteració:**
  - $\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{F_2}{F_5} d_1 = 0.4 \quad ; \quad g(0.4) = -0.408$
  - $g(0.4) < g(0.5)$: es descarta $[0.2, 0.3[$. El nou interval d'incertessa és $[0.3, 0.5]$



- **Tercera iteració:**
  - $\alpha_4 = \alpha_1 + \frac{F_1}{F_5} d_1 + 0.001 = 0.41 \quad ; \quad g(0.41) = -0.414$
  - $g(0.4) > g(0.41)$: es descarta $[0.3, 0.4[$. L'interval final d'incertessa és $[0.4, 0.5]$.



Es pot prendre com a longitud de pas el punt mig $\boxed{\alpha^0 = 0.45}$.

Actualització de les variables:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0 d^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.45 \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.35 \\ 0.35 \\ -0.35 \end{bmatrix}$$

Test d'optimalitat:

$$\|\nabla f(x^1)\|_2 = \| [-0.89250 \quad -0.23250 \quad 2.30750] \|_2 \approx 2.485 > \epsilon = 0.1 \Rightarrow x^1 \neq x^*$$

Solució del problema 59.

2.- Condició d'òptim: $\|\nabla(x^0)\|_2 = 2\sqrt{2} \not< \epsilon = 0.5$

3.- Direcció de moviment: $d^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

4.- Exploració lineal per Fibonacci: $\alpha^0 = 1/6$

5.- Actualització de variables: $x^1 = x^0 + \alpha^0 d^0 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$

Solució del problema 60.

a) $x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\nabla f(x) = (\,2x_1 + 2x_2 - 2 \quad 3x_2 + 2x_1 - 2\,)'$; $\nabla f(x^0) = (\,-4 \quad -4\,)'$

1.- Condició d'aturada: $\|\nabla f(x^0)\|_2| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 5.6568 > \epsilon = 0.5$

2.- Direcció de descens : $d^0 = -\nabla f(x^0) = (\,4 \quad 4\,)'$

3.- Exploració lineal : $g(\alpha) = f(x^0 + \alpha d^0) = f(-1 + 4\alpha, 4\alpha) = 72\alpha^2 - 32\alpha + 3$ $g(\alpha)' = 144\alpha - 32$; $g(\alpha^*)' = 144\alpha^* - 32 = 0$; $\alpha^* = 32/144 \approx 0.2$

4.- Actualització : $x^1 = x^0 + \alpha^* d^0 = (\,-1/9 \quad 8/9\,)'$

b) $N = 4$: $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5$, $g(\alpha) = 72\alpha^2 - 32\alpha + 3$, $\alpha^0 = 0$ Interval d'incertessa inicial : $g(0) = 3$, $g(1) = 43 > g(0) \Rightarrow \mathrm{I}^0 = [0,1]$

1.- Primera iteració : $d_2 = F_3/F_4 d_1 = 3/5 = 0.6$; $\alpha_1 = 0 + 0.6 = 0.6$, $\alpha_2 = 1 - 0.6 = 0.4$

$g(\alpha_1) = 9.72 \quad > \quad g(\alpha_2) = 1.72 \quad \Rightarrow$ es descarta $[0.6, 1]$: $\mathrm{I}^2 = [0, 0.6]$

2.- Segona iteració : $d_3 = F_2/F_4 d_1 = 2/5 = 0.4$; $\alpha_3 = 0.6 - 0.4 = 0.2$

$g(\alpha_3) = -0.52 \quad < \quad g(\alpha_2) = 1.72 \quad \Rightarrow$ es descarta $[0.4, 0.6]$: $\mathrm{I}^3 = [0, 0.4]$

3.- Tercera iteració : $d_4 = F_1/F_4 d_1 = 1/5 = 0.2$; $\alpha_4 = 0 + 0.2 + 0.01 = 0.21$

$g(\alpha_4) = -0.54 \quad < \quad g(\alpha_3) = -0.52 \quad \Rightarrow$ es descarta $[0, 0.2]$: $\mathrm{I}^4 = [0.2, 0.4]$

Interval final d'incertessa : $\boxed{\mathrm{I}^4 = [0.2, 0.4]}$. Es pren com a longitud de pas òptima el millor extrem de I^4: $\boxed{\alpha^* = 0.2}$

Solució del problema 61.

a) $x^1 = [\,-2.8571 \quad 4.8571 \quad -0.5928\,]$

b) Si es calcula la definició de la matriu Hessiana (constant, doncs $f(x)$ és quadràtica), s'obté que és indefinida. Així doncs, el problema **(PNL)** no té solució, doncs no n'hi ha cap punt de $\mathbb{R}^3$ que satisfaci les condicions necessàries de segon ordre ($\nabla f(x) = [0]$ i $\nabla^2 f(x)$ semidef +).

c) Atés que el problema no té solució, no té sentit calcular la taxa de convergència. Si es calculés s'obtindria $\beta = 7.77 > 1$, que no té sentit.

Solució del problema 62.

a) Una corba diferenciable sobre una superficie S s'expressa com una parametrització de les variables x_i en funció del paràmetre t. L'enunciat ens dona l'expressió paramètrica corresponent a la primera variable: hem de trobat l'expressió paramètrica de x_2 i substituir per $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x_1(t) = t \\ h(x(t)) = x_1^2(t) - x_2(t) = 0 \end{array}\right\} t^2 - x_2(t) = 0\,,\; x_2(t) = t^2 \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}\,,\; \boxed{x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

b)

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}f(x(t))\right|_{t=0} = \nabla f(x(0))\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t)\right|_{t=0} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \underline{1}$$

$$\nabla f(x) = [(x_2+1)e^{x_1(x_2+1)} \quad x_1e^{x_1(x_2+1)}] \ , \ \nabla f(x(0)) = [1 \quad 0]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t) = \begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2t\end{bmatrix} \ , \ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t)\right|_{t=0} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

c) $x(0)$ no pot ser un punt estacionari del problema indicat, doncs una condició necessària és que $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}f(x(t))\right|_{t=0} = 0$ per a totes les corbes diferenciables de S que passin per $x(0)$, i aquesta condició no es satisfà per la corba trobada a l'apartat a). Si fessim un moviment a partir de $x(0) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ al llarg de la corba $x(t) = \begin{bmatrix}t\\t^2\end{bmatrix}$ amb $t < 0$ $f(x)$ milloraria.

Solució del problema 63.

$$\begin{array}{l} \min f(x_1,x_2) \\ \text{s.a.}: g_1(x_1,x_2) \le b_1 \\ \quad g_2(x_1,x_2) \ge b_2 \, ; \\ \quad x_1 \ge 0 \\ \quad x_2 \ge 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} i) & \nabla f(x_1,x_2) + \mu_1 \nabla g_1(x_1,x_2) + \mu_2 \nabla g(x_1,x_2) + \mu_3 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0 \\ ii) & \mu_1(b_1 - g_1(x_1,x_2)) = 0 \quad , \quad \mu_2(b_2 - g_2(x_1,x_2)) = 0 \\ & \mu_3 x_1 = 0 \quad , \quad \mu_4 x_2 = 0 \\ iii) & \mu_1 \ge 0 \quad , \quad \mu_2 \le 0 \quad , \quad \mu_3 \le 0 \quad , \quad \mu_4 \le 0 \end{array} \right.$$

Solució del problema 64.

a) $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} >$ def $+ \Rightarrow$ la funció objectiu és convexa i la regió factible és un conjunt convex, doncs està definit a partir de constriccions lineals. Aixídoncs es trata d'un problema convex, satisfent-se llavors que qualsevol solució factible que cumpleixi les condicions necessàries de primer ordre és un mínim global.

b) Passem el problema **(PNL)** a la forma estàndar canviant el signe de la primera constricció:

$$(\mathbf{PNL}) \left\{ \begin{array}{lcrcrcl} \min & \mathrm{f(x)} = & (x_1-1)^2 & + & (x_2-2)^2 & & \\ \text{subj.a}: & & x_1 & - & x_2 & \le & 1 \\ & & x_1 & + & x_2 & \le & 2 \\ & & -x_1 & & & \le & 0 \\ & & & - & x_2 & \le & 0 \end{array} \right.$$

Condicions de Khun i Tucker:

$$i)\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 2 + \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ 2x_2 - 4 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$ii)\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(1 - x_1 + x_2) = 0 \quad ; \quad \mu_3 x_1 = 0 \\ \mu_2(2 - x_1 - x_2) = 0 \quad ; \quad \mu_4 x_2 = 0 \end{array} \right.$$

iii) $\mu_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, 4$

c) $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow \mu_3 = \mu_4 = 0$. Substituïnt a les condicions de Kuhn i Tucker trobades a l'apartat anterior s'obté:

$$2x_1 + \mu_1 + \mu_2 = 2 \qquad (1)$$
$$2x_2 - \mu 1 + \mu_2 = 4 \qquad (2)$$
$$\mu_1(1 - x_1 + x_2) = 0 \qquad (3)$$
$$\mu_2(2 - x_1 - x_2) = 0 \qquad (4)$$
$$\mu_1 \geq 0, \ \mu_2 \geq 0 \qquad (5)$$

Provant diversos valors de μ_1 y μ_2 s'obté:

a) $\mu_1 = \mu_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2 \Rightarrow \underline{x_1 + x_2 \not\leq 2 \Rightarrow \text{viola la segunda restricción}}$
b) $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0 \Rightarrow \mu_2 = 1,\ \underline{\mu_1 = -2 \not\geq 0 \Rightarrow \text{viola (5)}}$
c) $\mu_1 \neq 0,\ \mu_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1 \Rightarrow \underline{x_1 + x_2 \not\leq 2 \Rightarrow \text{viola la segunda restricción}}$
d) $\mu_1 = 0,\ \mu_2 \neq 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 1/2,\ x_2 = 3/2\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1 > \text{óptimo}}$

Solució del problema 65.

Calcularem prèviament el gradient de la funció objectiu i la matriu Jacobiana de les constriccions:

$$f(x) = (x_1x_2 - 3)^2 - 4x_1x_2 + 2(x_1x_3 - 1)^3 - \frac{15}{2}x_2 + 5x_3$$

$$\nabla f(x)' = \begin{bmatrix} 2(x_1x_2 - 3)x_2 - 4x_2 + 6(x_1x_3 - 1)^2 x_3 \\ 2(x_1x_2 - 3)x_1 - 4x_1 - 15/2 \\ 6(x_1x_3 - 1)^2 x_1 + 5 \end{bmatrix}$$

$$g_1(x) = 6x_1^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 - 5 \quad ; \quad \nabla g_1(x)' = \begin{bmatrix} 12x_1 \\ -3x_3 \\ -3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$g_2(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 + x_3^2 - 4 \quad ; \quad \nabla g_2(x)' = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 1/2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

a) **Condicions de Kuhn i Tucker:** Sigui x factible (**PNL**) ($g(x) \leq 0$). Llavors si x és mínim local de (**PNL**) existeix el vector $\mu \in \mathbb{R}^2$ que satisfà les següents condicions:

i) $\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{2} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$. En el nostre cas:

$$\left.\begin{aligned} 2(x_1x_2 - 3)x_2 - 4x_2 + 6(x_1x_3 - 1)^2 x_3 + 12x_1\mu_1 + 2x_1\mu_2 &= 0 \\ 2(x_1x_2 - 3)x_3 - 4x_1 - 15/2 - 3x_3\mu_1 + (1/2)\mu_2 &= 0 \\ 6(x_1x_3 - 1)^2 x_1 + 5 - 3x_1\mu_1 - 2x_3\mu_1 + 2x_3\mu_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ii) $\mu_j g_j(x) = 0\ ,\ j = 1, \ldots, 2$:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(6x_1^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 - 5) =& 0 \\ \mu_2(x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 + x_3^2 - 4) =& 0 \end{aligned}\right\}$$

iii) $\mu_j \geq 0\ ,\ j = 1, 2$

b) Hem de comprovar les condicions de l'apartat anterior sobre el punt $x = [0 \quad -2 \quad 1]'$:

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow x \text{ factible } \mathbf{(PNL)}$$

ii) La segona constricció és inactiva ($g_2(x) = -4 \neq 0$): això implica que el multiplicador μ_2 s'ha d'anular: $\underline{\mu_2 = 0}$.

i) Substituïnt els valors de $x = [0 \quad -2 \quad 1]'$ i $\mu_2 = 0$ al sistema d'equacions (1) s'obté:

$$\left.\begin{aligned} 26 =& 0 \\ -15/2 + 6\mu_1 =& 0 \\ 5 + 4\mu_1 =& 0 \end{aligned}\right\} \text{sistema incompatible} \Rightarrow \boxed{x = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ no és mínim de } \mathbf{(PNL)}}$$

Solució del problema 67.

b) El punt $x^0 = [0 \quad 1]'$ no és un mínim local de **(PNL)** perquè viola la condició de signe dels multiplicadors de Lagrange ($\lambda_1 = -3/5$).

c) El conjunt factible és convex, doncs la primera constricció és de menor o igual i la funció que la defineix és convexa ($\nabla^2 g_1(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$). Les constriccions de signe $x \geq 0$ també defineixen conjunts convexos, i la intersecció de conjunts convexos és un conjunt convex. La matriu Hessiana de la funció objectiu és:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 + 2 & 2(x_1 - 1) - 2 \\ 2(x_1 - 1) - 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Hem d'estudiar la definició d'aquesta matriu:

* $\Delta_1 = 2x_2 + 2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq -1$. Això sempre es satisfà per a tota solució factible **(PNL)**.
* $\Delta_2 = -4x_1^2 + 16x_1 + 4x_2 - 12 \geq 0$: aquesta condició es pot satisfer en funció dels valors de x_1 i x_2. Si provem, però, el la solució factible de l'anterior apartat $x^0 = [0 \quad 1]'$ s'obté $\Delta_2 = -8 \not\geq 0$. Així doncs. $f(x)$ no és convexa ($\nabla^2 f(x)$ no és semidefinida positiva) sobre la regió factible, i, llavors, **(PNL)** no és un problema de programació convexa.

Solució del problema 68.

a) Calulem les primeres derivades de la funció objectiu i de les constriccions:

$$\nabla f(x)' = \begin{bmatrix} (x_2 + 1)e^{x_1(x_2+1)} \\ x_1 e^{x_1(x_1+1)} \end{bmatrix} \quad ; \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 6x_1^2 - 4x_1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Condicions de Kuhn i Tucker: n'hi ha dos multiplicadors de Lagrange μ_1 i μ_2 associats al problema **(PNL)**

i) $\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{2} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$

$$(x_2+1)e^{x_1(x_2+1)} + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 6x_1^2 - 4\mu_2 x_1 = 0 \quad (1)$$
$$x_1 e^{x_1(x_2+1)} - \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (2)$$

ii) $\mu_j g_j(x) = 0\ ,\ j = 1,\ldots,2$:

$$\mu_1(x_1^2 - x_2) = 0 \quad (3)$$
$$\mu_2(2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1) = 0 \quad (4)$$

iii) $\mu_j \geq 0\ ,\ j = 1,2$

$$\mu_1 \geq 0 \quad (5)$$
$$\mu_2 \geq 0 \quad (6)$$

Condicions de factibilitat:

$$x_1^2 - x_2 \leq 0 \quad (7)$$
$$2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0 \quad (8)$$

Per a resoldre **(PNL)** a partir de les equacions (1)-(8) caldria explorar els quatre casos següents:

1) Dues constriccions actives: hem de trobar un punt solució del sistema (1)-(8) sencer.
2) Cap constricció activa: de (3) i (4) s'obté $\mu_1 = \mu_2 = 0$ i el sistema es redueix a calcular $\nabla f(x) = 0$, és a dir, un punt estacionari de $f(x)$ a l'interior de la regió factible de **(PNL)**.
3) $g_1(x) = 0$, $g_2(x) < 0$: llavors $\mu_2 = 0$ i s'ha de resoldre (1), (2), (5), (7) i (8), el·liminant μ_2 de (1) i (2).
4) $g_1(x) < 0$, $g_2(x) = 0$: de (3) tenim $\mu_1 = 0$ i s'ha de resoldre (1), (2), (6) i (8), el·liminant μ_1 de (1) i (2).

La major dificultat consisteix en que els sistemes que s'obtenen en els quatre casos anteriors són sistemes d'equacions no lineals que, en general, no es poden resoldre de forma directa.

b) A la sortida de GINO observem que el valor d'un dels multiplicadors de Lagrange, μ_2, és negatiu, violant la condició (6): el punt $\tilde{x} = \begin{bmatrix} -0.455418 \\ 0.396285 \end{bmatrix}$ no és mínim local de **(PNL)**.

c) Comprovem primer que el punt $\tilde{x}$ és regular. Calculem la jacobiana de les constriccions actives $J = \{2\}$:

$$\nabla g_2(\tilde{x}) = [3.0661 \quad -1] \quad \text{rang}(\nabla g_2(\tilde{x})) = 1 \Rightarrow \text{rang complet}$$

El subespai tangent sobre $\tilde{x}$ regular és:

$$M = \{y \mid \nabla g_j(\tilde{x})y = 0\ ,\ j \in J\} = \{y \mid [3.0661 \quad -1]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0\} = \{y \mid y_2 = 3.0661 y_1\}$$

La dimensió del subespai M és dim(M)=1, llavors qualsevol vector de M serveix com a base d'aquest subespai:

$$\boxed{Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.0661 \end{bmatrix}}$$

Solució del problema 69.

Per tal de comprovar si x^* és òptim de **(PNL)** hem de comprovar les condicions suficients de segon ordre (que inclouen, recordeu, a les de primer ordre). El primer pas és trobar els multiplicadors de Lagrange μ_1 i μ_2 associats a x^*, si es que aquests existeixen. Per tal de calcular aquests multiplicadors usarem les condicions necessàries de primer ordre (condicions de Khun i Tucker). Calculem el gradient i la matriu Jacobiana sobre el punt x^*:

$$\nabla f(x)' = \begin{bmatrix} (x_2+1)e^{x_1(x_2+1)} \\ x_1 e^{x_1(x_2+1)} \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla f(x^*)' = \begin{bmatrix} 0.6691 \\ -0.2675 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ 6x_1^2 - 4x_1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla g(x^*) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3.5 & -1 \end{bmatrix}$$

S'observa que la matriu Jacobiana és de rang complet, sent doncs x^* regular. Les dues constriccions són actives sobre x^*. Si plantejem la primera condició de Khun i Tucker tenim:

$$\nabla f(x^*) + [\mu_1^* \quad \mu_2^*]\nabla g(x^*) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 0.6691 - \mu_1^* + 3.5\mu_2^* = 0 \\ -0.2676 - \mu_1^* - \mu_2^* = 0 \end{array}\right\} \boxed{\mu_1^* = -0.05947 \,,\ \mu_2^* = -0.20816}$$

Les constriccions del problema **(PNL)** estan plantejades com de ≥ 0. Això implica que la condició de signe sobre els multiplicador (tercera condició de Kuhn i Tucker) és $\mu^* \leq 0$, que és satisfeta pel vector trobat. Així doncs, el parell $x^* = [-1/2 \quad 1/4]'$, $\mu^* = [-0.05947 \quad -0.20816]$ satisfan les condicions necessàries de primer ordre. Comprovem ara les de segon ordre, calculant la definició de la matriu Hessiana de la funció Lagrangiana sobre el subespai tangent M. Calculem primer $\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*, \mu^*)$:

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 0.8363 & 0.2007 \\ 0.2007 & 0.1338 \end{bmatrix} , \nabla^2 g_1(x^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \nabla^2 g_2(x^*) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*, \mu^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{j=1}^{2} \mu_j \nabla^2 g_j(x^*) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8363 & 0.2007 \\ 0.2007 & 0.1338 \end{bmatrix} - 0.05947 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 0.20816 \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.799 & 0.2007 \\ 0.2007 & 0.1338 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2.799 > 0 \\ \Delta_2 = 0.334 > 0 \end{array}\right\} \text{def } +$$

Donat que $\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*, \mu^*)$ és def + sobre $\mathbb{R}^2$, també ho serà sobre qualsevol subespai de $\mathbb{R}^2$. En particular, serà def + sobre el subespai tangent M. Així doncs, el punt x^* és un mínim local estricte de **(PNL)**.

Solució del problema 70.

S'ha de comprovar la definició de l'Hessiana de la funció Lagrangiana sobre x^*, λ^*, $\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$

sobre el subespai M:

$$\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*) = \nabla^2 f(x^*) + \lambda^{*\prime}\nabla^h(x^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} + (-1/4)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

La matriu $\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*)$ és indefinida. Hem de comprovar la definició de $Z'\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*)Z$ on Z és una base del subespai $\mathrm{M} = \{y \mid \nabla h(x^*)y = 0\}$. S'han de trobar dos vectors z_1 i z_2 pertanyents a M i linealment independents. La condició de pertinença a M és:

$$\nabla h(x^*) = [2 \quad 2 \quad -1] \quad ; \quad \nabla h(x^*)y = 0 \Rightarrow \underline{2y_1 + 2y_2 - y_3 = 0} \tag{1}$$

Trobem ara dos vectors vectors linealment independent que satisfacin (1):

$$\left.\begin{array}{l} y_3 = 0 \quad ; \quad y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = -1 \quad ; \quad z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_3 = 1 \quad ; \quad y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 1/2 \quad ; \quad z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calulem $Z'\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*)Z$ i la seva definició:

$$Z'\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*)Z = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/8 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array}\right\} \text{semidef}-$$

Donat que $Z'\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*)Z$ és semidef - , el punt estacionari x^* pot ser màxim local, tot i que no es pot assegurar.

Solució del problema 72.

Hem de començar realitzant la selecció de les variables dependents i independents sobre x. Es calcula prèviament la matriu Jacobiana $\nabla h(x)$:

$$h(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{2} + x_2 - x_3 + 2x_4x_5 - x_5 + 2 \\ \frac{3x_1^2}{2} + x_2x_3 - 2x_2 + \frac{3x_4^2}{2} + x_5 - \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & -1 & 2x_5 & 2x_4 - 1 \\ 3x_1 & x_3 - 2 & x_2 & 3x_4 & 1 \end{bmatrix}$$

que, avaluada sobre $x = [1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1/2]'$ proporciona:

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La variable x_2 no hauria de ser independent, doncs es troba a fita inferior. Una possible selecció de variables dependents seria $y = [x_1 \quad x_3]'$ ja que ambdues es troben entre fites i la matriu:

$$\nabla_y h(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

és no singular. Les variables independients serien $z = [x_2 \quad x_4 \quad x_5]'$, y la matriu $\nabla_z h(x)$:

$$\nabla_z h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si calculem l'expressió del gradiente:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_3^2}{2} - x_5 + 3 & -6 & \frac{2x_1x_3}{2} - 4 & -4 & -x_1 \end{bmatrix}$$

i l'avaluem sobre $x = [1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1/2]'$ s'obté:

$$\nabla f(x) = [7 - 6 - 1 - 4 - 1] \quad ; \quad \nabla_y f(x) = [7 \quad -1] \quad ; \quad \nabla_z f(x) = [-6 \quad -4 \quad -1]$$

Determinem el gradient reduït sobre el punt x. A la pràctica, el càlcul del gradient reduït es duu a terme en dues passes. A la primera es calcula el producte $\lambda' = \nabla_y f(y,z)[\nabla_y h(y,z)]^{-1}$ mitjançant la resolució del sistema d'equacions $\nabla_y h(y,z)'\lambda = \nabla_y f(y,z)'$. La raó d'aquest procediment és que és més estable i eficient treballar amb la factorització LU de la matriu $\nabla_y h(y,z)$ que amb la seva inversa. La factorització LU de $\nabla_y h(x)$ és:

$$\nabla_y h(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolent el sistema s'obté el valor de λ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

A continuació es procedeix al càlcul de $r = \nabla_z f(y,z)' - \nabla_z h(y,z)'\lambda$:

$$r = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Tenint en compte que $z = [0 \quad 1 \quad 1/2]$ i les fites $l_z = 0$ i $u_z = [4 \quad 4 \quad 4]$, s'obté $\Delta z = -r$:

$$\Delta z = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Un cop determinada Δz (i després de comprobar que és diferent de zero), es procedeix al càlcul de Δy. En la pràctica, aquest càlcul es fa a través de la resolució del sistema d'equacions $\nabla_y h(y,z)\Delta y = -\nabla_z h(y,z)\Delta z$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Delta y = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -46 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta y_1 = -46/3 \\ \Delta y_2 = 26/3 \end{cases}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} -46/3 \\ 26/3 \end{bmatrix}$$

Calculem ara la longitud de pas màxima $\bar{\alpha}$. Tenint en compte que $l = 0$ i $u = [4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4]'$ tenim que:

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}', \Delta y = \begin{bmatrix} -46/3 \\ 26/3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{y_1} = \dfrac{1}{46/3} \\ \bar{\alpha}_{y_2} = \dfrac{(4-3)}{26/3} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\alpha}_y = \min\{\frac{3}{46}, \frac{3}{26}\} = \frac{3}{46}$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}', \Delta z = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{z_1} = (4-0)/9 = 4/9 \\ \bar{\alpha}_{z_2} = (4-1)/11 = 3/11 \\ \bar{\alpha}_{z_3} = (4-1/2)/4 = 7/8 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\alpha}_z = \min\{\frac{4}{9}, \frac{3}{11}, \frac{7}{8}\} = \frac{3}{11}$$

$$\bar{\alpha} = \min\{\frac{3}{46}, 3/11\} = \frac{3}{46}$$

Prenem ara una longitud de pas arbitrària $\alpha^* = \bar{\alpha}/2 = 3/92$. El punt iterat serà:

$$\tilde{x} = x + \alpha^* \Delta x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{3}{92} \begin{bmatrix} -46/3 \\ 9 \\ 26/3 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 27/92 \\ 151/46 \\ 125/92 \\ 29/46 \end{bmatrix} \; ; \tilde{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 151/46 \end{bmatrix}, \tilde{z} = \begin{bmatrix} 27/92 \\ 125/92 \\ 29/46 \end{bmatrix}$$

Com era d'esperar, el punt $\tilde{x}$ no és factible, ja que $h(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1.98488 \\ 3.26364 \end{bmatrix} \neq 0$. Apliquem una passa del procés iteratiu de recuperació de factibilitat a partir de $\tilde{x}$. El càlcul de $\Delta\tilde{y} = -[\nabla_y h(y,z)]^{-1} h(\tilde{y},\tilde{z})$ es realitza resolent el sistema $\nabla_y h(y,z)\Delta\tilde{y} = -h(\tilde{y},\tilde{z})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Delta\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{y}_1 \\ \Delta\tilde{y}_2 \end{bmatrix} = -h(\tilde{y},\tilde{z}) = \begin{bmatrix} -1.98488 \\ -3.26364 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta\tilde{y}_1 = -1.08788 \\ \Delta\tilde{y}_2 = 0.897 \end{array}\right.$$

Tenint en compte el valor de les variables $\tilde{y}' = [1/2 \quad 151/46]'$ i les fites $u_y = [4 \quad 4]$, $l_y = 0$, la longitud de pas màxima al llarg de $\Delta\tilde{y}$ és:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{\tilde{y}_1} = \dfrac{1/2}{-1.08788} = 0.4596 \\ \bar{\alpha}_{\tilde{y}_2} = \dfrac{4 - 151/46}{0.897} = 0.7997 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\alpha}_{\tilde{y}} = 0.4596 \quad ; \quad \alpha_{\tilde{y}} = \min\{1, 0.4596\} = 0.4596$$

és a dir:

$$\tilde{y} \leftarrow \tilde{y} + \alpha_{\tilde{y}}\Delta\tilde{y} \approx \begin{bmatrix} 0. \\ 3.6948 \end{bmatrix} \quad ; \quad h(\tilde{y},\tilde{z}) = \begin{bmatrix} -0.3186 \\ 0.3969 \end{bmatrix}$$

El nou punt $\tilde{x}$ està més a prop de la hipersuperfície S de les constriccions $h(x) = 0$ que el punt original. Com que $\alpha_{\tilde{y}} = \bar{\alpha}_{\tilde{y}_1}$, hem d'intercanviar $\tilde{y}_1$ amb una variable independent $\tilde{z}_q$ apropiada. El valor de $\nabla h(x)$ sobre el nou punt $\tilde{x} = [\tilde{y}', \tilde{z}']$ és:

$$\nabla f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1 & 1.2608 \\ 3/2 & 1.2826 & 0.2934 & 4.0760 \end{bmatrix}$$

La variable $\tilde{z}_1 \equiv x_2$ està entre fites i, junt amb $\tilde{y}_2$, proporciona un nou $\nabla_y h(y,z)$ no singular:

$$\nabla_y h(y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1.2826 & 0.2934 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\nabla_y h(y,z)) = 1.57608$$

així doncs, es por intercanviar $\tilde{y}_1 \equiv x_1$ per $\tilde{z}_1 \equiv x_2$.