LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

COMBINATÒRIA

Oriol Serra
Marc Noy

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

Combinatòria
Problemes

1 Enumeració bàsica

1. (aplicacions) Donats dos conjunts finits M i N amb cardinals m i n respectivament, N^M denota el conjunt d'aplicacions de M en N i $(N^M)_i$ el conjunt d'aplicacions injectives de M en N.
A N^M definim les relacions d'equivalència

$$f \sim_{R_1} g \Leftrightarrow \exists \sigma \in Sym(M) : f(x) = g(\sigma x) \forall x \in M$$

i

$$f \sim_{R_2} g \Leftrightarrow \exists \tau \in Sym(N) : f(x) = \tau g(x) \forall x \in N.$$

Calculeu $|N^M|$, $|(N^M)_i|$, $|N^M/R_1|$, $|(N^M)_i/R_1|$ i $|(N^M)_i/R_2|$.

2. (multiconjunts) Un multiconjunt finit M de $X = \{1, \ldots, n\}$ és una aplicació $M : X \to \mathrm{N}$ tal que $M(i) < \infty, 1 \leq i \leq n$ i es denota $M = \{1^{M(1)}, \ldots, n^{M(n)}\}$. La mida de M és $|M| = \sum_{i=1}^{n} M(i)$.

a. Calculeu el nombre de multiconjunts de mida k de X.

b. Calculeu el nombre de permutacions de $M = \{1^{a_1}, \ldots, n^{a_n}\}$.

3. (equacions) Calculeu el nombre de solucions de la equació

$$x_1 + \ldots + x_k = n$$

(una solució és una k-tupla ordenada de nombres $(a_1, \ldots, a_k)$ que satisfan la equació),

a. si x_i són enters no negatius,

b. si x_i són enters positius,

c. si x_i són enters més grans que un enter positiu r donat.

d. Calculeu el nombre de solucions de la desigualtat $x_1 + \ldots + x_k \leq n$ en enters no negatius.

4. (desenvolupaments) Calculeu amb un 'argument combinatori' el coeficient de x^k en

a. $(1 + x)^n$;

b. $(\sum_{i \geq 0} x^i)^n$.

5. Quin és el coeficient de $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ al polinomi de Taylor de grau $k = a_1 + \ldots + a_n$ centrat a l'origen d'una funció $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de classe C^∞?

6. Trobeu solucions el més simple possibles a les qüestions següents.

a. Quants subconjunts de $[10]$ contenen com a mínim un nombre senar?

b. De quantes maneres poden seure set persones en un cercle si considerem dos arranjaments iguals quan cadascú té els mateixos veïns (no necessàriament en el mateix costat)?

c. Quantes permutacions $\pi : [6] \to [6]$ satisfan $\pi(1) \neq 2$?

7. Tenim n caselles en línia numerades de 1 a n. Cal marcar-ne k de manera que no hi hagi dues marques consecutives. De quantes maneres es pot fer? I si les caselles estan disposades en un cercle (mantenint la numeració)?

8. Calculeu les sumes següents. Podeu emprar altres igualtats conegudes amb coeficients binomials i manipulacions algebraiques amb el teorema del binomi $(1+x)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k$.

a. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

b. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$.

c. $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

d. $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.

e. $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$.

f. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots$

g. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots$

9. Quants resultats possibles es poden obtenir en tirar n daus? (Els daus són indistingibles i tenen sis cares.)

10. Sigui $|S| = n$. Quantes parelles de subconjunts A i B de S hi ha tals que $A \subseteq B$? Busqueu una demostració bijectiva del resultat.

11. Sigui $|S| = n$ i $k > 0$. Quantes succsessions $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ hi ha de subconjunts A_i de S tals que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k$?

12. Quin és el mínim nombre de torres necessàries per controlar completament un escaquer $n \times n$? De quantes maneres es poden col·locar amb aquest requeriment?

13. Demostreu que si $n \geq 4$, és possible disposar n reines en un escaquer $n \times n$ de manera que cap parella s'ataqui mutuament.

14. Calculeu el nombre de

a. Cicles hamiltonians en el graf complet K_n.

b. Emparellaments perfectes a K_n.

c. Triangles a K_n. Més generalment, el nombre de k-cicles a K_n.

d. Cicles hamiltonians en el graf bipartit complet $K_{n,n}$.

e. Emparellaments perfectes a $K_{n,n}$.

15. Recordem que una (vèrtex) coloració d'un graf G amb t colors, és una asignació d'un enter entre 1 i t a cada vèrtex, de manera que vèrtexs adjacents no tinguin el mateix color (no cal fer servir tots els colors). Donat un graf G (on es permeten arestes múltiples), es defineix el *polinomi cromàtic* $\chi(G,t)$ com el nombre de coloracions de G amb t colors.

a. Calculeu $\chi(K_n,t)$, $\chi(K_{n,m},t)$ i $\chi(P_n,t)$, on K_n és un graf complet, $K_{n,m}$ és bipartit complet i P_n un camí.

b. Calculeu $\chi(T,t)$ si T és un arbre amb n vèrtexs.

16. Seguim amb les notacions del problema anterior.

a. Demostreu que si e és una aresta qualsevol de G, llavors

$$\chi(G,t) = \chi(G-e,t) + \chi(G^e,t),$$

on G^e és el graf obtingut de G per contracció de l'aresta e, és a dir, per identificaci'o dels extrems de e.

b. Demostreu que si G té n vèrtexs, llavors $\chi(G,t)$ és efectivament un polinomi en t, mònic i de grau n.

c. Demostreu que $\chi(G,t)$ no té terme constant i que el coeficient de t^{p-1} és igual a m, el nombre d'arestes de G.

17. En quantes regions divideixen el pla n rectes en posició general (tals que no hi ha dues paral·leles ni tres concurrents)? Calculeu també el nombre de vèrtexs i d'arestes de la subdivisió del pla que s'obté. Comproveu la fòrmula d'Euler per a aquesta subdivisió.

18. Quin és el nombre màxim de parts en que queda dividit el pla mitjançant

a. n rectes;

b. n cercles.

19. Una **triangulació** d'un polígon és una subdivisió del polígon en triangles mitjançant diagonals disjuntes. Sigui P_n un polígon convex amb n costats.

a. Si T és una triangulació de P_n, demostreu que el nombre de diagonals i de triangles a T només depén de n.

b. Calculeu el nombre de triangulacions de P_n tals que cap triangle està format per tres diagonals internes.

20. Sigui $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ una col·lecció de punts en el pla amb la propietat que no hi ha tres que siguin colineals, i considerem el conjunt dels triangles que tenen per vèrtexs punts de P. Demostreu que hi ha un mínim de $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$ d'aquests triangles que són buits, és a dir, que no tenen cap punt de P al seu interior.

2 Principi d'inclusió-exclusió

1. Calculeu el nombre d'aplicacions exhaustives de $M = \{1,\ldots,m\}$ en $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Deduiu-ne les identitats

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^n}{k!(n-k)!}(-1)^k = (-1)^n$$

i

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^m}{k!(n-k)!}(-1)^k = 0,\ 0 \le m < n.$$

2. Proveu la identitat

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i} = \begin{cases} \binom{m}{k} & \text{si } m \ge k \\ 0 & \text{si } m < k \end{cases}$$

[Indicació: Feu servir la fórmula d'inclusió-exclusió per contar el nombre de subconjunts de mida k de $X = \{1,2,\ldots,m+n\}$ que són subconjunts de $\{1,2,\ldots,m\}$.]

3. Siguin $p_1,\ldots,p_k$ nombres primers diferents i $p = \prod_{i=1}^{k} p_i$. Obteniu una fórmula per a la funció $\phi_p(n)$ que conta el nombre d'enters positius mś petits que np tals que $\mathrm{mcd}(x,pn) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}, \beta_i > 0\}$. (per a $p=1$, ϕ_1 és la funció ϕ d'Euler).
Quants enters positius més petits que 120 són divisibles per 3 però no per 2 ni per 5? Quants enters positius més petits que 210 són divisibles per 2 o per 3 però no per 5 ni per 7?

4. Obteniu una fórmula per al nombre $f(n,r)$ de permutacions del multiconjunt $\{1^{(r)},2^{(r)},\ldots,n^{(r)}\}$ que no tenen r símbols consecutius iguals. (Per exemple, $f(2,2)=2$ i les permutacions són 1212 i 2121.)

5. La *baixada* d'una permutació $\sigma \in Sym(X)$, $X = \{1,2,\ldots,n\}$, és $d(\sigma) = \{i \in X \setminus \{n\} : \sigma(i+1) < \sigma(i)\}$. Per exemple, $d(1432) = \{2,3\}$.

a. Proveu que el nombre de permutacions tals que $d(\sigma) \subset T$ és $\binom{n}{i_1, i_2-i_1, \ldots, n-i_k}$. Sigui $T = \{i_1,i_2,\ldots,i_k\} \subset X$ amb $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n$.

b. Calculeu el nombre de permutacions tals que $d(\sigma) = T$.

6. Sigui $P = \{X_1,\ldots,X_k\}$ una partició de $X = \{1,2,\ldots,n\}$ en k parts de la mateixa mida. Doneu una fórmula pel nombre de permutacions $\sigma \in Sym(X)$ tals que $\sigma(i) \notin X_i,\ 1 \le i \le k$. (Quan $k = n$ s'obté el nombre de desarranjaments).

7.

a. Proveu que el nombre de maneres d'escollir k punts no consecutius d'un conjuntde n punts situats en un cercle és $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$.

b. (*problème des ménages*). Quantes permutacions de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ hi ha tals que $\sigma(i) \notin \{i, i+1 \pmod{n}\}$?

8. Proveu que, si $g(i) = \sum_{j \le i} \binom{i}{j} f(j)$, aleshores $f(i) = \sum_{j \le i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(j)$. En particular, si A, B son matrius $(n+1) \times (n+1)$, $(A)_{i,j} = \binom{i}{j}$, $(B)_{i,j} = (-1)^{i+j} \binom{i}{j}$, aleshores $B = A^{-1}$.

3 Particions de conjunts i particions de nombres

1. Proveu l'equació $S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i,k-1)$.

2. La partició $P = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de $X = \{1, \ldots, n\}$ és de *tipus* $(1^{\lambda_1}, \ldots, n^{\lambda_n})$ si hi ha λ_i conjunts de mida i, $1 \leq i \leq n$.

a. quines relacions han de complir els λ_i per tal que X tingui alguna partició en exactament k parts de tipus $(1^{\lambda_1}, \ldots, n^{\lambda_n})$?

b. Doneu una fórmula pel nombre d'aquestes particions.

3. El conjunt de totes les particions de X és $P(X)$. El *nombre de Bell* B_n és $B_n = |P(X)| = |\bigcup_{k=1}^{n} P(n,k)| = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$. Proveu que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

4. Una aplicació $f : X \to X$, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ és de *creixement restringit* si $f(i) \leq \max\{f(1), \ldots, f(i-1)\} + 1$. Proveu que el nombre d'aplicacions de creixement restringit de X és el nombre de Bell B_n.

5. Quants parells (A_1, A_2) de subconjunts de $\{1, \ldots, n\}$ hi ha tals que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$?

6. Proveu la identitat $x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k$.

7. Proveu la identitat $\sum_{k=m}^{n} S(n,k) s(k,m) = \delta_{n,m}$.

8. Quantes composicions (particions ordenades) té un enter n?

9. Diem $p(n,k)$ el nombre de particions de n en k parts (és a dir, $p(n,k) = |\{(a_1, \ldots, a_k) : a_1 \geq \ldots \geq a_k \geq 1, a_1 + \ldots + a_k = n\}|$. Proveu

a. $p(n+k) = p(n,1) + \ldots + p(n,k)$,

b. $p(2n,n) = p(n)$ i

c. $p(n,k) \geq \frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1}$.

10. Proveu que el nombre de triangles mutuament incongruents que es poden formar escollint tres vertexs d'un n-gon regular és el nombre enter més pròxim a $n^2/12$. Deduiu-ne el nombre de particions de n en tres parts.

4 Funcions generadores

1. Proveu que si $F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$ és una fracció racional $P(x)/Q(x)$, aleshores $(f(n))_{n\geq 0}$ satisfà una equació de recurrència lineal. Expresseu aquesta equació en termes dels coeficients de P i de Q.

2. Si $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$, proveu que el coeficient de x^n a $\frac{F(x)}{1-x}$ és $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

3. Trobeu la funció generadora ordinària dels nombres naturals i dels quadrats dels nombres naturals. Fent servir l'exercici anterior, obteniu una fórmula per a $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

4. Trobeu la funció generadora ordinària de la successió $(a_n)_{n\geq 0}$ que satisfà

$$a_{n+1} = 2a_n + n, n \geq 0, a_0 = 1.$$

Obteniu una expressió tancada per a a_n.

5. Diem $(F_n)_{n\geq 0}, F_0 = F_1 = 1$ la successió dels nombres de Fibonacci. Proveu que, per a cada enter positiu n, existeix una única sequència $(j_1, \ldots, j_m)$ d'enters positius tals que $j_i \geq j_{i+1} + 2, j_m \geq 1$ tal que

$$n = F_{j_1} + \ldots + F_{j_m} \quad \text{(lema de Zeckendorf);}$$

(és a dir, $n < F_m$ s'expressa de manera única com una sequència $(x_1, \ldots, x_m), x_i \in \{0,1\}, x_i + x_{i+1} \leq 1, i < m$; escriviu els nombres de 1 a 20 en aquesta 'base').

6. Proveu que $F_n = \lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \rfloor$.

7. Diem u_n el nombre de subconjunts de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no contenen dos enters consecutius. Trobeu una equació de recurrència de la successió, doneu la funció generadora ordinària i obteniu els valors de u_n. Deduïu la relació

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k+1}{k},$$

on F_n és l'n-éssim nombre de Fibonacci. Resoleu el mateix problema per a v_n, el nombre de subconjunts de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no tenen dos enters consecutius considerant 1 el successor de n.

8. Siguin $(F_n)_{n\geq 0}$ els nombres de Fibonacci amb $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Trobeu una expressió tancada per a la suma

$$\sum_{m>0} \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_m = n \\ k_1, k_2, \ldots, k_m > 0}} F_{k_1} F_{k_2} \cdots F_{k_m}$$

9. Sigui $m \geq 2$ un enter.

a. Trobeu una fórmula tancada per a la funció generadora

$$\sum_{n\geq 0}(n \bmod m)\, z^n,$$

on $n \bmod m \in \{0,1,\ldots,m-1\}$.

b. Deduïu-ne una expressió de $n \bmod m$ en termes de l'arrel n-èssima de l'unitat $\omega = e^{2\pi i/m}$. (Per exemple, si $m = 2$, tenim que $\omega = -1$ i $n \bmod 2 = (1/2) - (1/2)(-1)^n$.)

10. Fix n, diem $\{CR_n^k\}$ el conjunt de les combinacions amb repetició de n elements presos de k en k. Diem u_k el nombre de combinacions de $\{CR_n^k\}$ en les que cada element apareix *almenys* una vegada. Diem v_k el nombre de combinacions de $\{CR_n^k\}$ en les que cada element apareix un nombre *parell* de vegades. Trobeu les funcions generadores $U_n(x) = \sum_{k\geq 0} u_k x^k$ i $V_n(x) = \sum_{k\geq 0} v_k x^k$.

11.

a. Determineu el coeficient de z^m a les funcions generadores

$$(1+a_1z)\cdots(1+a_nz), \text{ i } \frac{1}{(1-a_1z)\cdots(1-a_nz)}$$

b. Donats els enters positius n, m, trobeu formes tancades per a

$$\sum_{1\leq k_1<k_2<\ldots<k_m\leq n} k_1k_2\cdots k_m,$$

i

$$\sum_{1\leq k_1\leq k_2\leq\ldots\leq k_m\leq n} k_1k_2\cdots k_m,$$

12. De quantes maneres es pot partir un n-gon convex (amb els vèrtexs numerats de 1 a n) en triangles amb $n-3$ diagonals (rectes unint vèrtexs del polígon) que no es creuen? (per exemple, hi ha dues triangulacions d'un quadrilàter convex)

13. (problema dels votants) Quina és la probabilitat que durant l'escrutini en l'el·lecció entre dos candidats, A i B, el candidat A vagi sempre per davant de B si el resultat final és de p vots d'avantatge per a A i hi ha $2n$ votants?

14. Calculeu el nombre d'aplicacions $f : X \to X$, $X = \{1,2,\ldots,n\}$ que satisfan $f(i) \leq i$, $i \in X$.

15. Fent servir la funció generadora dels nombres de Stirling de segon tipus, deduïu la identitat

$$S(n,k) = \sum 1^{a_1}2^{a_2}\cdots k^{a_k},$$

on el sumatori està extès a totes les composicions de n, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n, a_i \geq 1$.

16. (Problema del canvi, Pólya). Diem u_n el nombre de maneres de donar n unitats de canvi amb monedes de $1, 5, 10, 25$ i 50. Doneu la funció generadora de u_n.

17. Proveu que la funció generadora exponencial de $S(n,k)$, k fix, és

$$S_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

(feu servir inducció sobre k i $S_0(x) = 0$.)

18.

a. Trobeu una fórmula tancada per a la funció generadora en dues variables

$$M(\omega, z) = \sum_{m,n\geq 0} \min\{m,n\}\omega^m z^n.$$

b. Generalizeu el resultat anterior i obteniu, per a cada $k \geq 2$, una fórmula tancada per a

$$M(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{n_1,\ldots n_k \geq 0} \min\{n_1, \ldots n_k\} z_1^{n_1} \cdots z_k^{n_k}.$$

19. Els nombres *harmònics* són $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Trobeu la funció generadora de la successió $(H_n)_{n\geq 0}$.

5 Posets

1. Si $\mathcal{A}$ és una família de subconjunts d'un n-conjunt tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ per a tots $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, llavors $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$. A més, si $|\mathcal{A}| < 2^{n-1}$, $\mathcal{A}$ es pot estendre a una família de 2^{n-1} subconjunts que també satisfan la propietat d'intersecció.

2. Pot haver-hi igualtat en l'exercici anterior sense que tots els A_i tinguin un element en comú?

3. Sigui $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Una família $\mathcal{A}$ de subconjunts de S es diu que és un *sistema completament separador* de S si per a tots $x_i \neq x_j$ de S existeixen A_k i A_h de $\mathcal{A}$ tals que $x_i \in A_k$, $x_j \notin A_k$, $x_i \notin A_h$, $x_j \in A_h$. El dual $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$ és la família $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de subconjunts de $\{1, \ldots, m\}$ donada per $X_i = \{k : x_i \in A_k\}$. Proveu que $\mathcal{A}$ és completament separador si, i només si, $\mathcal{A}^*$ és una anticadena.

4. Sigui $\mathcal{A}$ una família de subconjunts d'un n-conjunt S tal que si $A \in \mathcal{A}$ i $A \subset B$, llavors $B \in \mathcal{A}$. Proveu que la mida mitjana dels conjunts de $\mathcal{A}$ és $n/2$.

5. Proveu que si $k \leq n$ llavors

$$k^{n-k} \leq S(n,k) \leq \binom{n-1}{k-1} k^{n-k},$$

on els $S(n,k)$ són nombres de Stirling de segon tipus.

6. Proveu que si $k \leq n$ llavors

$$k^{n-k} \leq S(n,k) \leq \binom{n-1}{k-1} k^{n-k},$$

on els $S(n,k)$ són nombres de Stirling de segon tipus.

7. Proveu que en el conjunt parcialment ordenat dels subconjunts d'un conjunt B_n les úniques anticadenes més llargues són les formades pels conjunts de mida $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ i els de mida $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.(Anderson, p3)

8. Considereu el conjunt parcialment ordenat $C_{m,n} = (P, \leq)$ on $P = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}^n$ i una n-tupla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P$ cobreix la n-tupla $y = (y_1, \ldots, y_n) \in P$ si $x_i = y_i$, $i \neq j$ i $x_j = y_j - 1$ per un únic j. Proveu que $C_{m,n}$ admet una funció rang, que els seus nombres de Whitney formen una seqüència unimodal i que satisfà la propietat de Sperner.

9. Donats dos conjunts parcialment ordenats P, Q, el seu producte cartesià és un conjunt parcialment ordenat amb $(x, y) \leq_{P \times Q} (x', y') \Leftrightarrow x \leq_P x'$ i $y \leq_Q y'$.

a. Proveu que si P, Q admeten una funció rang, aleshores $P \times Q$ també i expresseu els nombres de Whitney de $P \times Q$ en termes dels de P i Q.

b. Proveu que, si P, Q són dos conjunts parcialment ordenats que satisfan la propietat de Sperner, $P \times Q$ també.

10. Siguin $A_1, \ldots A_m$ una família de conjunts que admeten un transversal T.

a. Proveu que, per a cada $a \in A_1$ hi ha un transversal de la família que conté a.

b. Si $|A_i| \geq k$ per a cada $i = 1, \ldots, m$, proveu que la família admet almenys $k!$ transversals diferents si $k \leq m$ i almenys $\frac{k!}{(k-m)!}$ si $k > m$.

11. Un conjunt parcialment ordenat amb funció rang és *regular* si dos elements del mateix rang cobreixen el mateix nombre d'elements i són coberts pel mateix nombre d'elements. Proveu que en aquest cas, el conjunt parcialment ordenat és de Sperner.

12. Proveu que el conjunt parciament ordenat de les particions d'un conjunt de n elements, $\mathcal{P}_n$ admet una funció rang i que la successió de nombres de Whitney és unimodal.

13. Proveu que la llargada de la cadena més llarga a un conjunt parcialment ordenat P coincideix amb el mínim nombre d'anticadenes en què es pot descomposar P (Teorema de Mirsky). Proveu que un poset de $rs+1$ elements, o bé té una anticadena de mida $r+1$ o bé una cadena de llargada $s+1$. Deduïu que una successiò de $rs+1$ nombres reals diferents conté una subsuccessi'o creixent de llargada $r+1$ o una de decreixent de llargada $s+1$ (Teorema d'Erdős-Szekeres).

El poset $L(n,q)$

Sigui $V_n(q)$ un espai vectorial de dimensió n sobre $\mathbf{F_q}$ i sigui $L(n,q)$ el conjunt de tots els subespais vectorials de $V_n(q)$ ordenats per inclusió.

14. Proveu que amb les operacions d'intersecció i suma de subespais, $L(n,q)$ és un reticle.

15. Sigui $M(n,q)$ el nombre de cadenes maximals a $L(n,q)$. Proveu que

$$M(n,q) = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\ldots(q^2-1)(q-1)}{(q-1)^n}.$$

16. Proveu que el nombre de subespais vectorials de $V_n(q)$ de dimensió k és igual a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{M(n,q)}{M(k,q)M(n-k,q)} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\ldots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\ldots(q-1)}.$$

[Indicació: conteu el nombre de parells (U,C), on U és un k-subespai i C una cadena maximal.] Aquests nombres s'anomenen *coeficients gaussians*. Demostreu que $\lim_{q\to 1} M(n,q) = n!$ i que $\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$.

17. Demostreu que els coeficients gaussians satisfan la recurrència següent:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q .$$

[indicació: sigui H un hiperplà de $V_n(q)$ i classifiqueu els k-subespais segons que estiguin o no continguts a H.] Deduïu que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ és un polinomi en q.

18. (q-anàleg del lema de Sperner) Si $\mathcal{A}$ es una anticadena del reticle $L(n, q)$, llavors

$$|\mathcal{A}| \leq \begin{bmatrix} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{bmatrix}_q .$$

[Indicació: comproveu que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \leq \begin{bmatrix} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{bmatrix}_q$ per a tot k, i adapteu la prova LYM del lema de Sperner per a subconjunts.]

Dimensió de posets

Tots els posets considerats aquísón finits. Siguin (X, P) i (X, Q) dos posets sobre un mateix conjunt. Diem que Q és una extensió de P si $P \subset Q$, es a dir, $x \leq y$ a P implica que $x \leq y$ a Q.

19. Si s'ordenen totes les extensions d'un poset (X, P) per inclusió, demostreu que els elements maximals d'aquest ordre són ordres totals.

Una extensió que sigui un ordre total s'anomena *extensió lineal*

20. Proveu que si x i y són elements incomparables d'un poset (X, P), llavors existeix una extensió lineal en la que $x < y$. Deduïu que (X, P) és igual a la intersecció de totes les seves extensions lineals.

S'anomena *dimensió* d'un poset (X, P) al mínim enter positiu t tal que P és intersecció de t extensions lineals. El problema anterior demostra que tot poset té dimensió finita.
Donat un conjunt X de punts a $\mathbf{R}^d$, es defineix la relació d'ordre de *dominació vectorial*:

$$(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d) \iff x_i \leq y_i, \quad 1 \leq i \leq d.$$

21. Demostreu que un poset té dimensió $\leq t$ si, i només si, pot realitzar-se com un ordre de dominació vectorial a $\mathbf{R}^d$.

22. Sigui S_n el poset sobre el conjunt $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ amb les úniques relacions $a_i < b_j$ si, i només si, $i \neq j$.

a. Demostreu que $\dim \mathrm{S}_n \leq n$, tot exhibint n extensions lineals $L_1, \ldots, L_n$ tals que S_n sigui igual a $L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_n$.

b. Demostreu que si $i \neq j$, no es pot tenir $b_i < a_i$ i $b_j < a_j$ en una mateixa extensió lineal. Deduïu que $\dim \mathrm{S}_n \geq n$.

6 Geometries finites

1. Sigui P el conjunt de vectors no nuls de l'espai vectorial $\mathbf{F}_2^4$ i L el conjunt de ternes $\{x, y, z\}$ de vectors de P tals que $x+y+z=0$. Proveu que $E=(P,L)$ és un espai lineal.

2. Sigui P el conjunt de branques del graf complet de 6 vèrtexs K_6 i L el conjunt de ternes de branques de P que formen o bé un triangle o bé un aparellament perfecte. Proveu que $E=(P,L)$ és un espai lineal (de fet isomorf al del problema anterior).

3. Sigui $E=(P,L)$ un sistema d'incidència amb k^2+k+1 punts tal que cada línia conté $k+1$ punts i dos punts estan en una única línia. Proveu que E és un pla projectiu.

4. Proveu que la matriu d'incidència A d'un pla projectiu finit d'ordre k satisfà l'equació $A \cdot A^T = kI + J$, on I és la matriu identitat i J la matriu amb tots els elements iguals a 1.

5. Proveu que el pla projectiu $\mathcal{P}_2(p^r)$ és isomorf al seu dual.

6. Sigui $\mathcal{P}_2=(P,L)$ un pla projectiu. Un subpla és un pla projectiu $\mathcal{P}_2'=(P',L')$ amb $P' \subset P$ i $L' \subset L$. Proveu que, per a cada divisor s de r, el pla projectiu $\mathcal{P}_2(p^r)$ admet un subpla isomorf a $\mathcal{P}_2(p^s)$.

7. Sigui $\mathcal{P}_2=(P,L)$ un pla projectiu d'ordre k i $\mathcal{P}_2'$ un subpla propi (és a dir, diferent de $\mathcal{P}_2$) d'ordre r. Proveu que o bé $k=r^2$ o bé $k \geq r^2+r$.
[*Indicació: Conteu el nombre de punts incidents a una línia de $\mathcal{P}_2'$ i que no estan a $\mathcal{P}_2'$*]

8. Sigui $E=(P,L)$ un espai lineal en el que cada línia té almenys tres punts i que satisfà la següent propietat: Per a cada quatre punts p,q,r,s no colineals tres a tres, $pq \cap rs \neq \emptyset$ implica $pr \cap qs \neq \emptyset$ (Axioma de Pasch). Proveu que E és un espai projectiu.

9. Proveu que una geometria parcial amb $\alpha = t+1$ satisfà l'axioma de Pasch.

10. Proveu que l'únic pla projectiu d'ordre 2 és el Pla de Fano. Estudieu la unicitat del pla projectiu d'ordre 3.

11. Sigui $P=\mathbf{Z}_7$ i L el conjunt de ternes de P de la forma $\{x, x+1, x+3\}$, $x \in \mathbf{Z}_7$. Proveu que (P,L) és un pla projectiu d'ordre 2. Similarment, amb $P=\mathbf{Z}_{13}$ i L format pels subconjunts de la forma $\{x, x+1, x+3, x+9\}$ $x \in \mathbf{Z}_{13}$ s'obté el pla projectiu d'ordre 3.

12. (arcs en plans projectius) Un subconjunt de punts A d'un pla projectiu $\mathcal{P}$ d'ordre k és un *d-arc* si $|A| \geq d$ i no conté cap subconjunt de d punts colineals.

a. Proveu que un d-arc no pot tenir més de $dk-k+d$ punts.

b. Sigui A un d-arc amb $dk-k+d$ punts de $\mathcal{P}$. Sigui P el conjunt de punts de $\mathcal{P}$ que no estan a A i L la restricció a P de les línies de $\mathcal{P}$ que tallen A exactament en d punts. Proveu que $S=(P,L)$ és una geometria parcial i determineu-ne els paràmetres.

c. Proveu que un 3-arc de $\mathcal{P}$ té com a molt $k+1$ punts si k és senar i $k+2$ si k és parell.(Un 3-arc de $k+1$ punts s'anomena *òval* i un de $k+2$ punts, *hiperòval*).

d. Proveu que per a cada punt p d'un òval O hi passa una única línia que no talla cap altra punt de O (anomenada tangent a O per p).

e. Proveu que en un pla projectiu d'ordre parell k, el conjunt de tangents a un òval $\mathcal{O}$ es tallen a un punt comú p i que $\mathcal{O} \cup \{p\}$ és un conjunt de $k+2$ punts que interseequen cada línia en cap ó 2 punts.

[*Indicació: Si x_i denota el nombre de punts fora de l'òval que estan en i tangents, vegeu que $x_0 = 0$ i calculeu $\sum(i-1)(i-(q+1))x_i$.*]

13. Proveu que, en una geometria parcial amb $\alpha = t$, per a cada punt p no pertanyent a una línia l hi passa una única línia que no talla l.

7 Dissenys Combinatoris

1. Sigui S el conjunt d'arestes del graf complet de 5 vèrtexs K_5. Prenem per blocs els conjunts de quatre arestes d'un dels següents tipus: (a) quatre arestes incidents en un vèrtex; (b) tres arestes formant un triangle i una aresta independent; (c) quatre arestes formant un quadrilàter. Proveu que (S, B), B el conjunt de blocs, és un 3-disseny i determineu-ne els paràmetres.

2. Sigui S el conjunt d'arestes del graf complet de 7 vèrtexs, K_7. Prenem per blocs els conjunts de cinc arestes d'un dels següents tipus: (a) cinc arestes incidents en un vèrtex; (b) cinc arestes formant un pentàgon; (c) tres arestes formant un triangle i dues branques independents. Proveu que s'obté un 3-disseny i determineu-ne els paràmetres.

3. Proveu que el complement d'un disseny $t-(v,k,\lambda)$ és també un t-disseny i determineu-ne els paràmetres.

4. Sigui D un disseny $2-(v,k,\lambda)$ amb b blocs i tal que cada punt està en r blocs. Proveu que, per a cada bloc B, el nombre de blocs que interseqen B és com a mínim

$$\frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1)+(r-1)},$$

i que es satisfà la igualtat si i només si, per a cada bloc $B' \neq B$, o bé $B \cap B' = \emptyset$ o bé $|B \cap B'| = h$ per a un enter h fix.

5. (Construcció de Sistemes de triples de Steiner) Un disseny $2-(v,3,1)$ s'anomena sistema de triples de Steiner i es denota simplement per $S(v)$.

a. Proveu que $S(v)$ pot existir només si $v \cong 1 \pmod 6$ o bé $v \cong 3 \pmod 6$.

b. Sigui $S = \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_3$ amb $n = 2s+1$ i prenem per blocs els triples dels tipus (a) $\{(x,0),(x,1),(x,2)\}$, $x \in \mathbf{Z}_n$ i (b) $\{(x,i),(y,i),(\frac{1}{2}(x+y),i+1)\}$, $x,y \in \mathbf{Z}_n, x \neq y$, $i \in \mathbf{Z}_3$. Proveu que s'obté un sistema de triples de Steiner $ST(6s+3)$ per a cada s.

c. Sigui $S = \mathbf{Z}_{13}$ i prenem per blocs els conjunts de la forma $\{0,1,4\}+x$, $x \in \mathbf{Z}_{13}$ i $\{0,2,8\}+x$, $x \in \mathbf{Z}_{13}$. Proveu que s'obté $S(13)$.

d. Siguin $S(v_1)$ i $S(v_2)$ dos sistemes de triples de Steiner amb conjunts base $V_1 = \{1,2,\ldots,v_1\}$ i $V_2 = \{1,2,\ldots,v_2\}$ respectivament. Suposem que $S(v)$ un subsistema de Steiner de $S(v_1)$, $v < v_1$ amb conjunt base $V = \{s+1,\ldots,v_1\}$, $s = v_1 - v$. Considerem el conjunt $S = V \cup (V_1 \setminus V) \times V_2$. Definim com a blocs els triples d'un dels següents tipus: (a) els blocs de $ST(v)$; (b) $\{u,(i,x),(j,x)\}$ amb $\{u,i,j\}$ un triple de $S(v_1)$ i $x \in V_2$; $\{(i,x),(j,x),(k,x)\}$ amb $\{i,j,k\}$ un triple de $S(v_1)$ que no conté cap element de V i $x \in V_2$; (c) $\{(i,x),(j,y),(k,z)\}$ amb $\{x,y,z\}$ un triple de $S(v_2)$ i els enters i,j,k satisfent $i+j+k \cong 0 \pmod{v_1 - 1}$. Proveu que s'obté $S(v + v_2(v_1 - v))$.

e. Proveu que si existeix un sistema de Steiner amb n punts també n'existeix un amb $3n$, $3n-2$ i amb $3n-6$ punts.

f. Proveu que existeixen sistemes de triples de Steiner per a cada valor possible de v. [*Indicació: Feu servir inducció analitzant els possibles valors de n mòdul* 18]

6. Siguin $x_1, \dots, x_8$ els punts d'un octògon regular i x_9 el centre. Considerem les ternes que s'obtenen fent girs de $\pi/4$ a $\{x_2, x_t, x_8\}, \{x_3, x_4, x_6\}$ i $\{x_1, x_9, x_5\}$. Proveu que s'obté un sistema de triples de Steiner $S(9)$ i que es poden agrupar els triples en 4 grups de manera que cada element aparegui exactament una vegada a cada grup (es diu que el disseny és *resoluble*).

7. Les apostes d'un sistema de lotería consisteixen en 7 nombres diferents entre 1 i 49. Quin és el nombre mínim teòric d'apostes que garanteix quatre encerts? Existeix el disseny corresponent?

8. Un *empaquetament*–$(2,3)$ d'un conjunt finit X és un conjunt de triples de X tals que cada subconjunt de dos elements de X està com a molt en un triple. Un *recobriment*–$(2,3)$ de X és un conjunt de triples tals que cada subconjunt de dos elements està almenys en un triple. Si $p(n)$ és la mida de l'empaquetament$-(2,3)$ més gran d'un conjunt de mida n i $r(n)$ la mida del recobriment$-(2,3)$ més petit, proveu que $p(n) \le n(n-1)/6 \le r(n)$, i que la igualtat es satisfà si i només si existeix un sistema triple de Steiner de X.

9. Sigui H una matriu de Hadamard d'ordre $4k$ i S el conjunt de les columnes. Per a cada $1 \le i < j \le 4k$, diem B_{ij}^{+} el conjunt de columnes de H en les que les files i, j coincideixen i B_{ij}^{-} el conjunt de columnes en les que difereixen. Proveu que s'obté un 3-disseny i, per a $k = 3$, un 5-disseny.

8 Quadrats Llatins

1. Sigui Q un quadrat llatí d'ordre n. Proveu que el valor més petit $m \geq n$ pel qual existeix un quadrat llatí d'ordre m que conté Q com a subquadrat és $m = 2n$.

2. Sigui Q un quadrat llatí parcial d'ordre $r \times s$ i n símbols, $r, s \leq n$. Proveu que Q és pot estendre a un quadrat llatí d'ordre n si i només si $|Q[-1(i)| \geq r + s - n,\ 1 \leq i \leq n$. Comproveu, per exemple, que el quadrat llatí parcial

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & * & * \\ 5 & 6 & 3 & 1 & * & * \\ 1 & 3 & 6 & 2 & * & * \\ 3 & 2 & 4 & 6 & * & * \\ & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

no es pot completar a un quadrat llatí d'ordre 6.

3. Sigui $E = (P, L)$ una geometria parcial amb paràmetres (α, k, s). Proveu que

4.

a. Sigui $Q_1, \ldots, Q_k$ un sistema de MOLS d'ordre n. Proveu que es pot construïr un sistema de $k-1$ MOLS, $Q'_1, \ldots, Q'_{k-1}$ d'ordre n idempotents, és a dir, amb $Q'_i(i,i) = i,\ 1 \leq i \leq n$.

b. Sigui $E = (P, L)$ un espai lineal regular (totes les línies tenen el mateix nombre $k+1$ de punts). Si $Q_1, \ldots, Q_k$ és un sistema de MOLS d'ordre $k+1$, construïu un sistema d'almenys k MOLS idempotents d'ordre $|P|$. [*Indicació: Per a dos punts diferents x, y, definiu $Q''_i(x,y) = Q'_i(x,y)$ aquest darrer interpretat com a quadrat llatí a l'única línia que conté x i y.*]

c. Sigui $E = (P, L)$ un espai lineal i L' un conjunt de línies paral*cdot*leles. Si per a cada línia $l \in L \setminus L'$ hi ha una sistema de r MOLS d'ordre $|l|$ i per a cada línia $l \in L'$ hi ha un sistema de $r-1$ MOLS d'ordre $|l|$, proveu que existeix un sistema de $r-1$ MOLS d'ordre $|P|$.

d. Proveu que hi ha almenys tres quadrats llatins d'ordre 21 (contraexemple de la conjectura de MacNeish).

e. Suprimint tres punts del pla projectiu d'ordre 4, deduïu que hi ha almenys dos quadrats llatins ortogonals d'ordre 18 (contraexemple de la conjectura d'Euler)