1 Topologia en espais mètrics

Desigualtats

1.1 Sigui E un espai normat. Proveu que per a $x, y \in E$ es compleix:

a) $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$

b) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

1.2 a) Proveu que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ són nombres reals positius amb producte 1, aleshores $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$. Quan val la igualtat?

Indicació: Feu servir inducció.

b) Apliqueu aquest resultat per provar que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són nombres reals positius, la mitjana aritmètica, $A = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, la mitjana geomètrica $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ i la mitjana harmònica $H = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$, satisfan les desigualtats $H \leq G \leq A$. Quan valen les igualtats?

(Tornarem a aquest problema amb altres mètodes en el context d'extrems de funcions.)

Distàncies, normes i producte escalar. Successions

1.3 Sigui X un conjunt no buit. Demostreu:

a) $\|f\| = \sup\{|f(x)| \, ; x \in X\}$, defineix una norma en l'espai $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ d'aplicacions $X \to \mathbb{R}$ acotades.

b) Sigui ara X finit i $d(A, B) = \mathrm{Card}(A \triangle B)$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ (conjunt de parts de X). que les següents aplicacions defineixen una distància en els conjunts que s'indiquen ($A \triangle B = A \cup B - A \cap B$ *s'anomena diferència simètrica.*)

1.4 Sigui (X, d) un espai mètric i A, B subconjunts no buits d'X. Definim

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b); \; a \in A, \; b \in B\}$$

Es demana:

a) És cert que $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$?

b) Demostreu $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$, $\forall x,y \in X$. *(Hem usat $d(x,A)$ per indicar $d(\{x\},A)$.)*

1.5 Considereu l'aplicació

$$f:[-1,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \quad \text{definida per } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|} & \text{si } |x| \neq 1 \\ +\infty & \text{si } x = 1 \\ -\infty & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

a) Demostreu que f és una bijecció. *(Trobeu f^{-1})*

b) Definim $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ com $d(x,y) = |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|$. Proveu que d és una distància en $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Proveu que, amb aquesta distància, tot subconjunt de $\overline{\mathbb{R}}$ és acotat.

1.6 Si $\|\cdot\|$ és la norma euclídia i $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és el producte escalar euclidi en $\mathbb{R}^n$, proveu

a) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ (desigualtat de Schwarz).

b) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ (llei del paral·lelogram)

c) $4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ (identitat de polarització)

d) Si x,y són ortogonals, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

e) $\|x+y\|\,\|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

i interpreteu-les geomètricament.

1.7 Considereu $C^0[a,b]$ l'espai vectorial de les funcions, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, contínues (comproveu que, efectivament, és un espai vectorial i que té dimensió infinita). Demostreu que $\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx$ és una norma.

1.8 a) Donat X un conjunt no buit, definim d per $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$, $\forall x,y \in X$. Demostreu que és una distància en X. (*S'anomena distància discreta*).

b) Proveu que tot subconjunt és fitat respecte de la distància discreta.

c) Doneu un exemple d'espai mètric (E,d), on E és un espai vectorial real, tal que d no sigui la distància associada a cap norma.

c) Demostreu que les distàncies definides per normes equivalents, són equivalents.

d) Comproveu que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_\infty = \text{màx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

són normes. Relacioneu-les amb les normes $\|\cdot\|_r$ de l'exercici 1.9.

e) Proveu que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_r$ amb $r > 1$ i $\|\cdot\|_\infty$ són equivalents en $\mathbb{R}^n$ i que en $\mathbb{R}$ són iguals.

f) Proveu que les distàncies

$$\begin{aligned} d_1((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ d_r((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &= (|x_1 - y_1|^r + \ldots + |x_n - y_n|^r)^{\frac{1}{r}} \quad (\text{amb } r > 1) \\ d_\infty((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &= \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

són equivalents en $\mathbb{R}^n$ i que en $\mathbb{R}$ són iguals.

g) Dibuixeu per $n = 1, 2, 3$ les boles obertes de centre 0 i radi δ respecte de les distàncies anteriors.

1.11 Siguin E i E' dos espais vectorials sobre $\mathbb{R}$ amb normes $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ respectivament. Demostreu que les aplicacions $E \times E' \longrightarrow [0, \infty)$, definides sobre l'espai vectorial producte, respectivament, per

$$\|(x, x')\|_1 = \|x\| + \|x'\|' \qquad \|(x, x')\|_r = (\|x\|^r + (\|x'\|')^r)^{\frac{1}{r}} \qquad \|(x, x')\|_\infty = \text{màx}\{\|x\|, \|x'\|'\}$$

són normes equivalents. Fent servir això, demostreu que les normes de $\mathbb{R}^n$, $\|.\|_1, \|.\|_r$ i $\|.\|_\infty$, definides en el problema anterior són equivalents.

1.12 Sigui (x_n) una successió d'un conjunt X. Si d_1, d_2 són distàncies equivalents en X, es demana:

a) (x_n) és fitada respecte de la distància d_1 si i només si ho és respecte de d_2.

b) (x_n) és convergent cap a x respecte de la distància d_1 si i només si ho és respecte de d_2.

c) (x_n) és de Cauchy respecte de la distància d_1 si i només si ho és respecte de d_2.

1.13 Considereu $\mathbb{R}^N$ i $\mathbb{R}$ amb les seves distàncies euclídies. Donada una successió $S = (x_n)$ de $\mathbb{R}^N$, amb $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^N)$, considereu les N successions $S_i = (x_n^i)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Proveu

a) S és fitada si i només si les S_i ho són.

b) S és convergent (resp. de Cauchy) si i només si les S_i són convergents (resp. de Cauchy).

c) Deduïu-ne la completesa de $\mathbb{R}^N$.

1.14 Estudieu la convergència de les successions:

a) $\left\{\left(\frac{n}{n+1}, e^{-1/n}\right)\right\}$

b) $\left\{\left(n^2, \frac{2n}{n+2}\right)\right\}$

c) $\left\{\left(1, \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}, e^{-1/(n^2-n)}\right)\right\}$

i calculeu-ne el límit si existeix.

Conjunts oberts i tancats

En el que segueix, si no es diu el contrari, la distància i la norma a $\mathbb{R}^N$ és l'euclídia.

1.15 Sigui (X, d) un espai mètric on d és la distància discreta (exercici 1.8). Demostreu que tot subconjunt de X és obert.

1.16 Sigui (X, d) un espai mètric. Per $A \subset X$ considereu $D_A = \{d(x, y) : x \in A,\ y \in A\}$. Proveu que aquest conjunt és fitat si i només si A ho és. En aquest cas, definim *diàmetre* de A per $\text{diàm}(A) = \sup D_A$. Sigui ara $X = \mathbb{R}^n$ i A_i, $i = 1, 2, \infty$, la bola unitat per a les distàncies d_1, d_2, d_∞ (exercici 1.10) respectivament. Calculeu el diàmetre de cadascuna respecte de les tres distàncies.

1.17 Un k-rectangle tancat és el subconjunt de $\mathbb{R}^k$ definit per

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i = 1, \ldots, k\}$$

on $(a_1, \ldots, a_k)$ i $(b_1, \ldots, b_k)$ són de $\mathbb{R}^k$. Demostreu que si $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una successió de k-rectangles tancats tals que $R_{n+1} \subset R_n$, per a tot n, aleshores $\bigcap_n R_n \neq \emptyset$ i, que si a més $\text{diàm}(R_n) \to 0$, aleshores existeix un únic $x \in \mathbb{R}^k$ amb $\bigcap_n R_n = \{x\}$ *(recordeu el teorema dels intervals encaixats).*

1.18 Demostreu que tota successió de $\mathbb{R}^n$ fitada, té una parcial convergent *(recordeu el teorema de Weierstrass per a successions de nombres reals).*

1.19 Veieu que $\mathbb{Q}^n$ és dens a $\mathbb{R}^n$.

1.20 Demostreu que en $\mathbb{R}^n$ tota bola oberta és reunió de boles obertes amb centre a $\mathbb{Q}^n$ i radi racional. És cert que tot conjunt obert no buit de $\mathbb{R}^n$ és unió numerable de boles obertes? i que un conjunt tancat és unió numerable de boles tancades?

1.21 Respecte de la distància euclídia, demostreu

a) $\partial(B_r(a)) = \partial(\overline{B}_r(a))$

b) $\overline{\mathrm{B}}_r(a) = \overline{\mathrm{B}_r(a)}$.

1.22 Doneu exemples de conjunts que no són ni oberts ni tancats, i concluiu, doncs, que el ser obert o tancat no és cap partició del conjunt de parts de $\mathbb{R}^n$.

1.23 Demostreu que un conjunt és tancat si i només si conté tots els seus punts d'acumulació.

1.24 Descriviu l'interior, exterior, frontera, adherència i conjunt de punts d'acumulació dels conjunts

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = \lambda y\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$.

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1, y = 0\}$

e) $E = A - \{(0,1)\}$

f) $F = B \cup \{(0,-1)\}$

g) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$

h) $H = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

i) $I = \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$.

1.25 Demostreu que si A és un subconjunt d'un espai mètric (E,d), llavors

a) $\mathring{A}$ és el conjunt obert més gran contingut en A.

b) $\overline{A}$ **és el conjunt tancat més petit que conté** A.

1.26 Sigui A un subconjunt d'un espai mètric (X, d). Proveu

a) A és obert si i només si $\partial A \subset X \setminus A$.

b) A és tancat si i només si $\partial A \subset A$.

1.27 Essent $A, B \subset \mathbb{R}^n$, determineu quines de les següents identitats són certes:

a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

b) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

e) $\left(\mathring{A}\right)^c = \overline{A^c}$

f) $\overbrace{A \cup B}^{\circ} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$

g) $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

h) $\overline{\left(\mathring{A}\right)^c} = \left(\mathring{A}\right)^c$

i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

j) $\overline{\partial A} = \partial A$

1.28 Determineu quines de les següents afirmacions són certes, per a $A_i, B_i \subset \mathbb{R}^n$ on A_i és obert i B_i és tancat $\forall i \in \mathbb{N}$.

a) $\bigcap_{i \geq 1} A_i$ és obert.

b) $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ és obert.

c) $\bigcap_{i \geq 1} B_i$ és tancat.

d) $\bigcup_{i \geq 1} B_i$ és tancat.

1.29 Donats A i B subconjunts de $\mathbb{R}^n$, definim $A+B=\{x\in\mathbb{R}^n : \exists a\in A,\ \exists b\in B : x=a+b\}$. Demostreu que si A és obert, també ho és $A+B$. És cert que si A és tancat, també ho és $A+B$?

Conjunts compactes

1.30 Fent servir la definició, demostreu que cap dels conjunts *i)* $(a,b)\subset\mathbb{R}$, *ii)* $\mathrm{B}_r(a)\subset\mathbb{R}^n$ i *iii)* $\mathbb{R}^n$ és compacte.

1.31 Quins són els conjunts compactes més petits que contenen els següents conjunts, cas d'existir:

a) Una successió convergent $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^N$.

b) $\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ n,m\in\mathbb{N}\}$.

c) Una successió fitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^N$.

d) $(a,b)\subset\mathbb{R}$.

e) $B_r(a)\subset\mathbb{R}^N$.

1.32 Demostreu que si $K_1\subset\mathbb{R}^{n_1}$, $K_2\subset\mathbb{R}^{n_2}$, ..., $K_r\subset\mathbb{R}^{n_r}$ són compactes, aleshores $K_1\times K_2\times\cdots\times K_r\subset\mathbb{R}^{n_1+n_2+\cdots+n_r}$ també és compacte. En particular, tot k-rectangle tancat és compacte.

1.33 Demostreu, a partir de la definició, que un interval tancat $[a,b]\subset\mathbb{R}$, és compacte. *(Indicació: Podeu fer servir, per exemple, un raonament similar al de la demostració per intervals encaixats del teorema de Weierstrass).*

1.34 De l'exercici 1.32 resulta que tot k-rectangle tancat és compacte. Demostreu-ho directament a partir de la definició.

1.35 Sigui K_i per $i\in\mathcal{I}$ una família de compactes de $\mathbb{R}^n$. Demostreu

a) $\mathcal{I}$ finit $\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathcal{I}} K_i$ és compacte.

b) $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} K_i$ no és necessariament compacte si $\mathcal{I}$ no és finit.

c) $\bigcap_{i\in I} K_i$ és compacte.

1.36 Proveu que tot conjunt infinit fitat en $\mathbb{R}^n$, té un punt d'acumulació.

1.37 Considereu $\mathbb{Q}$ com un espai mètric amb la distància $d(x,y) = |x-y|$. Demostreu que el conjunt:

$$\{x \in \mathbb{Q} \ : 2 < x^2 < 3\}$$

és tancat i fitat en $\mathbb{Q}$, però que no verifica la propietat dels recobriments oberts.

2 Funcions de diverses variables. Continuïtat

Gràfiques, seccions i conjunts de nivell

2.1 Dibuixeu les gràfiques de les següents funcions:

a) $f(x,y) = xy$

b) $f(x,y) = ax^2 + by^2,\ a,b \in \mathbb{R}^+$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$

d) $f(x,y) = |y|$

e) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$

2.2 Trobeu les seccions de graf(f) amb els plans $S_\theta = \{(x,y,z) : y = x\mathrm{tg}\theta\}$, per a cada θ, quan f és

a) $f(x,y) = x + y + 2$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$

2.3 Dibuixeu els conjunts de nivell de les següents funcions:

a) $f(x,y,z) = xy + yz$.

b) $f(x,y,z) = xy + z^2$.

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

d) $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2,\ a,b,c \in \mathbb{R}^+$

e) $f(x,y,z) = y^2 + z^2$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

g) $f(r,\theta) = \frac{\cos 2\theta}{r^2}, r \in (0,+\infty),\ \theta \in [0,2\pi]$

Límits

2.4 Estudieu el límit a l'origen de la restricció de les següents funcions a qualsevol recta passant per l'origen

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2y+xy^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^3+y^4}$

Deduïu que no existeixen els límits $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2.5 Sigui $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\}$ i $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in A \cup \{(0,0)\} \\ 1 & \text{altrament} \end{cases}$. Demostreu que tot i que el límit de la restricció de f a qualsevol recta passant per l'origen, quan les variables tendeixen cap a l'origen és 1, no existeix $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2.6 Demostreu que són equivalents:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = a$

b) $\displaystyle\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) = a.$

Com aplicació, discutiu segons els valors de $p \geq 0$ i $q \geq 0$ l'existència del límit de

$$\frac{x^p y^q}{x^2+y^2-xy}$$

quan $(x,y) \to (0,0)$ i $x > 0$, $y > 0$. Usant l'equivalència anterior doneu una prova alternativa de la no existència dels límits de les funcions de l'exercici 2.4.

2.7 Estudieu l'existència de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ essent $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2.8 Per cadascuna de les següents funcions, calculeu en cas de que existeixin, els límits

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)),$$

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)),$$

on:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $x, y \neq 0$. Així, tot i existint ambdós límits iterats, poden ser diferents.

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x, y \neq 0$. Així, tot i existint i essent iguals els límits iterats, pot no existir el límit.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} & \text{si } x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x > 0 \\ -y & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ Així pot existir el límit tot i no existir alguns dels límits iterats.

En general si $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació i $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, podem definir límits iterats com $\lim\limits_{x_{i_1}\to a_{i_1}} \cdots \lim\limits_{x_{i_m}\to a_{i_m}} f(x)$, i es poden trobar fàcilment exemples que generalitzin els anteriors a dimensió n.

Continuïtat

2.9 Demostreu que una funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$ és contínua si i només si ho són totes les seves components.

2.10 Sigui $A = \cup_i A_i$ i $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $f|_{A_i}$ és contínua per a cada i. Es pot assegurar que f és contínua en A? I si els A_i són oberts?

2.11 Siguin $(E, \|\cdot\|)$ un espai normat, d la distància associada. Demostreu que la aplicació $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua. Vegeu també que $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua prenent en $E \times E$ qualssevol de les normes del problema 1.11.

2.12 Sigui $\| \ \|'$ una norma qualsevol en $\mathbb{R}^n$ i $\| \ \|$ la norma euclídia. Demostreu que:

a) $\|x\|' \leq \text{màx}\{\|e_1\|', \dots, \|e_n\|'\}\|x\|_1 \leq M\|x\|$, per a un cert $M \in \mathbb{R}$ i on $e_1, \dots, e_n$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$ i $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$.

b) $\| \ \|' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua respecte de les normes euclídies de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}$.

c) $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ és compacte (respecte de la topologia euclídia de $\mathbb{R}^n$).

d) $\| \ \|'$ és equivalent a $\| \ \|$.

Finalment, demostreu que dues normes en un espai vectorial real de dimensió finita són equivalents.

2.13 Siguin $c_{ij} \in \mathbb{R}$ i $g(h) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} h_i h_j$ tal que $g(h) > 0$ per a tot $h \neq 0$. Demostreu que existeix $m > 0$ tal que $g(h) \geq m\|h\|^2$.

2.14 Sigui $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el conjunt de totes les aplicacions linials de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Comproveu que és un espai normat respecte de $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|$. Demostreu:

a) $\|A\|$ és el més petit de tots els $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifiquen $\|A(x)\| \leq \lambda \|x\|$.

b) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

c) $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \exists A^{-1}\}$ és un obert de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

d) L'aplicació $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n) \ni A \longrightarrow A^{-1} \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ és contínua.

2.15 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica $\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0$, es pot afirmar que f és contínua en $\mathbb{R}$? I el recíproc?

2.16 Definim:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{altrament} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{altrament.} \end{cases}$$

Demostreu la veracitat o falsedat de les següents afirmacions:

a) Les restriccions de f i g a qualsevol recta de $\mathbb{R}^2$ són funcions contínues.

b) f és fitada a $\mathbb{R}^2$.

c) f no és contínua en $(0,0)$.

d) La restricció de g a qualsevol entorn de l'origen, és fitada.

e) g és contínua a la regió

$$D_\delta = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \ r \geq 0, \ |\cos\varphi| > \delta\} \qquad (\delta < 1)$$

però no és contínua a $\mathbb{R}^2$.

2.17 Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una funció tal que la seva restricció a qualsevol compacte $K \subset A$ és una funció contínua. Demostreu que si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió dins de A convergent cap a $x \in A$, aleshores $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent cap a $f(x)$.

2.18 Considerem la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que té components

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y^2} & \text{si } x \neq -y^2 \\ 0 & \text{si } x = -y^2 \end{cases}$$

a) Estudieu la continuïtat de f, i proveu que el seu conjunt de punts de discontinuïtat és tancat.

b) Proveu que $f(\{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\})$ és compacte.

2.19 El *suport* d'una funció $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és l'adherència del conjunt de punts on f és diferent de zero:

$$\text{suport} f = \overline{\{x \in U \ : \ f(x) \neq 0\}}.$$

a) Sigui U obert. Proveu que si f és contínua i té suport compacte contingut en U, aleshores es pot estendre a una funció $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua i fitada.

b) Proveu que si f té suport compacte i $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, aleshores el producte $g \cdot f$ té també suport compacte.

c) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ té suport compacte i és contínua, i $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, aleshores

c.1. És cert que $g(x)$ té suport compacte?

c.2. És cert que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$, aleshores g té suport compacte?

2.20 Sigui $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ amb K compacte. Demostreu que f és contínua si i només si la seva gràfica és compacta.

2.21 Una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ s'anomena pròpia si per a tot compacte $K \subset \mathbb{R}^m$, el conjunt $f^{-1}(K)$ és compacte. Demostreu que si $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és una aplicació linial, aleshores L és pròpia si i només si L és injectiva.

2.22 Una funció s'anomena tancada (respectivament oberta) si la imatge de tot conjunt tancat (respectivament obert) del seu domini és un conjunt tancat (respectivament obert). Doneu exemples de funcions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínues que siguin obertes i d'altres que siguin tancades. Demostreu que les projeccions $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ són obertes, no tancades i no pròpies.

2.23 Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ i d és la distància euclídia, es defineix

$$d(A,B) = \text{ínf}\{d(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Comproveu que

a) A, B compactes $\Rightarrow \exists a_0 \in A, b_0 \in B : d(A,B) = d(a_0, b_0)$.

b) A compacte $\Rightarrow \exists a_0 \in A : d(A,B) = d(\{a_0\}, B)$.

c) És cert l'apartat $a)$ si A i B són tancats però no fitats?, i si $A = \{a\}$ i B és tancat?

d) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) = 0\}$

2.24 Proveu que si A, B són dos conjunts compactes disjunts de $\mathbb{R}^n$, aleshores es poden trobar dos oberts disjunts U, V tals que $A \subset U$ i $B \subset V$.

Continuïtat uniforme

2.25 Demostreu que la composició de dues funcions uniformement contínues, també és uniformement contínua.

2.26 Demostreu que per a tota funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ són equivalents

a) f és uniformement contínua en A.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$ diàmetre$(B) < \delta \Rightarrow$ diàmetre$(f(B)) < \varepsilon$

2.27 Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uniformement contínua. Demostreu que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ és una successió de Cauchy, també ho és $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2.28 Demostreu que tota funció $f : \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és uniformement contínua.

2.29 Doneu un exemple de dues funcions $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uniformement contínues, tals que el producte $h = f \cdot g$ no sigui uniformement contínu

2.30 Sigui f una funció amb domini $A \subset \mathbb{R}^n$, i suposem que existeixen successions $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ en A verificant:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \|f(x_n) - f(y_n)\| \in (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{\infty\}.$$

Demostreu que f no pot ser uniformement contínua en A. Com aplicació, discutiu la continuïtat uniforme de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0,1)$ i la de $g(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$, i raoneu si existeixen dominis màxims de definició per a f i per a g on siguin uniformement contínues.

2.31 Una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s'anomena de *Lipschitz* si existeix una constant $L \in \mathbb{R}^+$ (anomenada de Lipschitz) tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Proveu que tota funció de Lipschitz és uniformement contínua.

2.32 a) Demostreu que si $K \subset \mathbb{R}^n$ és compacte i $f : K \to B \subset \mathbb{R}^m$ és contínua i bijectiva, f^{-1} és contínua.

b) Comproveu que tot i que $f : [0, 2\pi) \to S^1 = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ és contínua i bijectiva, f^{-1} no és contínua.

c) $h : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Suposant que B és compacte i que g és bijectiva i contínua, demostreu que si h és uniformement contínua, també ho és f.

2.33 Fixat $X \subset \mathbb{R}^n$, considerem l'espai vectorial $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ de totes les funcions fitades $f : X \to \mathbb{R}$.

a) Demostreu que $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ és un espai normat complet amb la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

b) Sigui $\mathcal{A}^0(X, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R}) : f \text{ és contínua}\}$. Demostreu que $\mathcal{A}^0(X, \mathbb{R})$ és un espai normat complet.
(Noteu que la distància deduïda d'aquesta norma és la definida en el problema 1.3(a)).

3 Diferenciació de funcions de diverses variables

3.1 Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{A}$ i $v \in \mathbb{R}^n$ unitari. Proveu que $D_{-v}f(a)$ existeix si i només si $D_v f(a)$ existeix i llavors $D_{-v}f(a) = -D_v f(a)$.

3.2 Veieu que per a la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

existeixen totes les derivades direccionals en $(0,0)$ però que no és contínua en aquest punt.

3.3 Trobeu totes les derivades direccionals en l'origen de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

3.4 Trobeu totes les direccions respecte de les quals la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

té derivades direccionals en l'origen.

3.5 Considereu la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Donat $v \in \mathbb{R}^2$ unitari, estudieu l'existència de $D_v f(0,0)$ i calculeu-la si és el cas.

3.6 Calculeu les derivades direccionals de les següents funcions en els punts i en les direccions que s'indiquen:

(a) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $a(1,2)$, $v = (3/5, 4/5)$.

(b) $f(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $a(1,0)$, $v = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$

(c) $f(x,y) = e^x \cos(\pi y)$, $a(0,-1)$, $v = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$

(d) $f(x,y) = xy^2 + x^3 y$, $a(4,-2)$, $v = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$

(e) $f(x,y) = x^y$, $a(e,e)$, $v = (5/13, 12/13)$

(f) $f(x,y,z) = e^x + yz$, $a(1,1,1)$, $v = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

(g) $f(x,y,z) = xyz$, $a(1,0,1)$, $v = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$

(h) $f(x,y,z) = xy^2 + y^2 z^3 + xz^3$, $a(4,-2,-1)$, $v = (1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14})$

(i) $f(x,y,z) = x^{yz}$, $a(e,e,0)$, $v = (12/13, 3/13, 4/13)$

3.7 Si $f(x,y) = 3xy + 5x - 2y$, calculeu la derivada direccional de f a $(0,0)$ en la direcció del vector $(1,1)$ de dues maneres diferents: com la derivada d'una funció real i fent servir la diferencial de f.

3.8 Per a $f(x,y) = xy$, trobeu la direcció en la qual la derivada direccional de f a $(1,2)$ és màxima analitzant les funcions $g_\alpha(t) = f(1 + t\cos\alpha, 2 + t\sin\alpha)$. Justifiqueu-ne el resultat.

3.9 Calculeu el gradient de cadascuna de les següents funcions

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

3.10 Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Fixat un punt $a \in U$, indiquem per $D(\alpha)$ la derivada direccional en la direcció que forma angle α amb $\nabla f(a)$. Per exemple $D(0) = \|\nabla f(a)\|$, $D(\pi/2) = 0$. Proveu que la mitjana integral de les derivades direccionals sobre un angle recte, $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_\omega^{\omega+\frac{\pi}{2}} D(\alpha)$, és $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} D(\omega + \dfrac{\pi}{4})$.

3.11 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 0$, es pot afirmar que f és diferenciable en x? I el recíproc?

3.12 Sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Calculeu les derivades parcials de les següents funcions

a) $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{x+y} g.$

b) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{y} g.$

c) $f(x,y,z) = z\displaystyle\int_0^{xy} g.$

3.13 Si $f(x,y) = x^{(\log x)(\arctan(\sin(\cos xy))} + y$, calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(1,1)$. *(Indicació: No és llarg).*

3.14 Calculeu les derivades parcials de les següents funcions

a) $f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/2} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

b) $f(x_1,\ldots,x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots x_i$

3.15 Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

a) Doneu un exemple d'una funció f que satisfaci $\|f(x)\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ i per a una constant M, que no sigui diferenciable en 0 (hi ha un exemple senzill per a $n = m = 1$).

b) Proveu que si $\|f(x)\| \leq M\|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ aleshores f és diferenciable en $x = 0$ i $Df(0) = 0$, l'aplicació linial nul·la.

3.16 Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U obert.

a) Proveu que si f és constant en U, aleshores és diferenciable a tots els seus punts i $Df(a) = 0$, $\forall a \in U$.

b) Proveu que si f és diferenciable en U i $Df(a) = 0$, $\forall a \in U$ i U és diferenciablement arc-connex (és a dir, cada parell de punts es pot unir per un arc de corba diferenciable), aleshores f és constant a U. Doneu un contraexemple de l'afirmació anterior si U no és diferenciablement arc-connex.

3.17 Useu el mètode de Newton en diverses variables per trobar les solucions del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \ln y + x^2 & = & 0 \\ -x + e^{-x}\operatorname{tg} y & = & 0 \end{array}\right\}$$

(Indicació: Useu un raonament geomètric per decidir el nombre de solucions del sistema i la seva situació aproximada).

3.18 Proveu que la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

és contínua però no diferenciable en $(0,0)$.

3.19 Raoneu si la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

és contínua, si té derivades parcials i si és diferenciable.

3.20 Per a la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1/2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Proveu que existeixen totes les derivades parcials però que no són contínues en $(0,0)$.

b) Proveu que és diferenciable en tot el seu domini.

Aquest és un exemple de funció diferenciable que no és C^1.

3.21 Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ una funció amb derivades parcials de primer ordre totes fitades sobre A. Demostreu que f és contínua. Feu servir aquest resultat per demostrar que si f és de classe C^1 en un entorn d'un punt a, aleshores f és contínua en a.

3.22 a) Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un obert, $a \in A$ i $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funció contínua en A i diferenciable en $A \setminus \{a\}$. Demostreu que si per a tot $j \in \{1, \ldots, n\}$, existeix el límit de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ quan x tendeix cap a a, aleshores f és diferenciable en a i $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ es el límit de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ quan x tendeix cap a a.

Indicació: Feu primer el cas $n = 1$.

b) Deduïu de l'apartat anterior que si $g : A \to \mathbb{R}^m$ és una funció tal que existeixen les derivades parcials $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$, $x \in A, \forall i, j$ i són totes contínues en el punt $a \in A$, aleshores g és diferenciable en a.

c) Deduïu que si g és C^1 en un obert, aleshores és diferenciable en aquest obert.

3.23 (a) Sigui U un obert convex de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe C^{k+1} i $a \in U$. Demostreu que existeixen funcions $g_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ de classe C^k tals que

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)g_i(x)$$

i a més $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

(b) Sigui U un obert convex de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe C^{k+2} i $a \in U$. Demostreu que

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i,j=1}^{n}(x_i - a_i)(x_j - a_j)A_{ij}(x)$$

on A_{ij} són funcions de classe C^k en U que verifiquen $A_{ij}(a) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

3.24 Sigui $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$, on $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una aplicació diferenciable. Proveu que F satisfà l'equació en derivades parcials

$$x\frac{\partial F}{\partial y} = y\frac{\partial F}{\partial x}.$$

3.25 Verifiqueu la regla de la cadena per a derivar

$$f(x, y, z) = g(u(x, y), v(x, y, z)) \quad \text{on } g(u, v) = uv^2 + \sin(uv)\ ,\ u(x, y) = xe^y \text{i } v(x, y, z) = xy - z$$

(escriviu bé la composició).

3.26 Sigui $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Doneu l'expressió de les derivades parcials de $F \circ P$ en termes de les derivades parcials de F , on $P(\rho, \phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ (és a dir, doneu l'expressió de les derivades parcials de F respecte de les coordenades polars).

3.27 Calculeu la derivada en el punt zero de la funció que s'obté composant

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

amb $x = t$, $y = t$. Es pot aplicar en aquest cas la regla de la cadena?

3.28 Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert tal que $\forall x \in U$ també $tx \in U$ per a tot $0 \leq t < 1$ (es diu que U és estel·lat respecte de l'origen). Si $p > 0$, $p \in \mathbb{R}$, una funció $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ s'anomena *homogènia de grau* p si

$$f(tx) = t^p f(x),\ \forall x \neq 0, t > 0.$$

Sigui f diferenciable en $U \setminus \{0\}$. Demostreu que f és homogènia de grau p si i només si

$$\mathrm{D}f_x(x) = pf(x) \qquad \text{(Teorema d'Euler).}$$

Comproveu el resultat per a les funcions $f(x,y,z) = x^3 + y^2 z$, $g(x,y) = \sqrt{x^p + y^p}$, $h(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

3.29 Per a quins k la funció $f(x,y) = (x+y)^\alpha$, $(x+y>0)$, on α és racional positiu no enter, és de classe C^k?

3.30 Trobeu tots els punts $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ on

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

3.31 Veieu que les derivades creuades de segon ordre de la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

coincideixen en $(0,0)$ tot i que no verifica la hipòtesi del teorema de Schwartz.

3.32 Definim $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ per

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x & (0 \leq x \leq \sqrt{t}) \\ -x + 2\sqrt{t} & (\sqrt{t} \leq x \leq 2\sqrt{t}) \\ 0 & (\text{en altre cas}) \end{array}\right\} & (\text{si } t \geq 0) \\ -\varphi(x,|t|) & (\text{si } t < 0) \end{cases}$$

(a) Demostreu que φ és contínua i que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = 0$ per a tot x.

(b) Definim $f(t) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi(x,t)\mathrm{d}x$. Proveu que $f(t) = t$ si $|t| < \frac{1}{4}$. Concloeu que $f'(0) \neq \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0)\mathrm{d}x$.

3.33 Considereu les funcions $f, f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a < b)$, definides per

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad , \quad f_{a,b}(x) = f(x-a)f(b-x)$$

Es demana:

(a) **Proveu que f i $f_{a,b}$ són funcions C^∞. Dibuixeu aproximadament les seves gràfiques.**

(b) Demostreu que existeix una funció C^∞, $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $g(x) = 0$ per a $x \leq 0$ i $g(x) = 1$ per a $x \geq \varepsilon$. *(Indicació: considereu* $g(x) = \dfrac{\int_0^x f_{0,\varepsilon}}{\int_0^\varepsilon f_{0,\varepsilon}}$*).*

(c) Si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, es defineix $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per

$$g(x) = f_{-1,1}\left(\frac{x_1 - a_1}{\varepsilon}\right) \cdots f_{-1,1}\left(\frac{x_n - a_n}{\varepsilon}\right)$$

Proveu que g és una funció C^∞ que és positiva en $(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ i zero en la resta de punts.

(d) Si A és obert i $K \subset A$ és compacte, proveu que existeix una funció C^∞ no negativa, $F : A \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) > 0$ per a $x \in K$ i $F = 0$ en l'exterior d'un conjunt tancat contingut en A.

(e) Proveu que pot triar-se H tal que $H : A \to [0,1]$ i $H(x) = 1$ per a $x \in K$ i $H = 0$ en l'exterior d'un conjunt tancat contingut en A. *(Si la funció F de (d) compleix $F(x) \geq \varepsilon$ per a $x \in K$, considereu $g \circ F$, on g és la funció de (b)).*

3.34 Sigui $f \in C^k(A)$, on A és un obert de $\mathbb{R}^n$. Raoneu que per a cada $a \in A$ existeixen $\varepsilon > 0$ i M tals que

$$\left|\frac{\partial^p f_i}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(x)\right| \leq M \qquad 1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n \quad \forall p \leq k \quad i = 1, \ldots, n \quad \forall x \in B_\varepsilon(a)$$

3.35 Si f i g són de classe C^k, llavors $g \circ f$ també és de classe C^k.

3.36 Proveu que la funció $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}$ satisfà l'equació en derivades parcials

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad \text{(equació del calor)}.$$

3.37 Considereu la funció

$$(x,y) = \varphi(u,v) = (u^{1/2}v^{-1/2}, u^{1/2}v^{1/2})$$

definida en $(0,\infty) \times (0,\infty)$. Donada una funció $z = f(x,y)$, transformeu l'expressió $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en termes de u, v. Apliqueu-ho a trobar les funcions $z(x,y)$ tals que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$.

3.38 Siguin f i g funcions reals de classe $\mathcal{C}^2$. Calculeu les derivades parcials de segon ordre de les funcions

a) $F(x,y) = f(x,xy)$ en funció de les derivades parcials de f.

b) $F(x,y) = f(x,y,g(x,y))$ en funció de les derivades parcials de f i g.

c) $F = f\circ L$ on L és una aplicació linial de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ amb matriu (respecte de la base canònica) (c_{ij}). Comproveu que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \displaystyle\sum_{h,k=1}^{n} c_{ki}c_{hj}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_h \partial y_k}\circ L\right)$ per a $i,j=1,\ldots,m$.

3.39 Indiquem $\psi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ el pas a polars. Donada f una funció de classe $\mathcal{C}^2$, sigui $F = f\circ\psi$ (es diu que F és f passada a polars). Demostreu que

$$(f_{11}+f_{22})\circ\psi = F_{11} + \frac{1}{r^2}F_{22} + \frac{1}{r}F_1.$$

L'expressió $f_{11}+f_{22}$ s'anomena *laplaciana de* f i s'indica Δf. Aquesta igualtat descriu la laplaciana de f en coordenades polars.

3.40 Una aplicació $\mathbb{R}^{n_1}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_k} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ s'anomena k-multilinial (o simplement linial, bilinial o trilinial en els casos $k=1,2$ i 3 respectivament) si per a cada $i=1,\ldots,k$ i per a tot $a_j\in\mathbb{R}^{n_j}$, $1\le j\le k$, $i\neq j$, l'aplicació

$$\mathbb{R}^{n_i}\ni x\to g(x) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_k)\in\mathbb{R}^m$$

és linial. Demostreu

a) Tota aplicació k-multilinial és de classe $\mathcal{C}^\infty$, i a més:

$$\mathrm{D}f(a_1,\ldots,a_k)(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{j=1}^{k} f(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_k).$$

b) Deduïu que les aplicacions determinant

$$\mathbb{R}^n\times\overset{(n)}{\cdots}\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$$

i producte escalar

$$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \ni (x,y)\longrightarrow\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}$$

són ambues de classe $\mathcal{C}^\infty$ i que es verifica:

$$\mathrm{D}\det(a_1,\ldots,a_n)(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\det(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_k)$$

$$\mathrm{D}\langle\ ,\ \rangle(x_0,y_0)(x,y)=\langle x_0,y\rangle+\langle x,y_0\rangle.$$

c) Si $A\subset\mathbb{R}^n$ és un obert i $A\xrightarrow{f,g}\mathbb{R}^m$ són funcions diferenciables, demostreu que $\langle f,g\rangle(x)=\langle f(x),g(x)\rangle$ és diferenciable i $\mathrm{D}\langle f,g\rangle(x)y=\langle \mathrm{D}f(x)y,g(x)\rangle+\langle f(x),\mathrm{D}g(x)y\rangle$.

d) Si $I\subset\mathbb{R}$ és un interval obert i $I\xrightarrow{a_{ij}}\mathbb{R}$, $1\le i,j\le n$ són aplicacions derivables, proveu

(i) $f(t)=\det(a_{ij}(t))$ és derivable i

$$f'(t)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a'_{j1}(t) & \ldots & a'_{jn}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

(ii) Si per a tot $t\in I$, $\det(a_{ij}(t))\neq 0$, i $I\xrightarrow{b_1,\ldots,b_n}\mathbb{R}$ són funcions derivables, aleshores les solucions $I\xrightarrow{s_1,\ldots,s_n}\mathbb{R}$ del sistema

$$\begin{array}{rcl} a_{11}s_1+\ldots+a_{1n}s_n &=& b_1\\ \vdots && \vdots\\ a_{n1}s_1+\ldots+a_{nn}s_n &=& b_n \end{array}$$

també són derivables. Trobeu les seves derivades.

3.41 Sigui $\varphi(x,t)=\int_{x-ct}^{x+ct}f(s)\mathrm{d}s$, essent $c>0$ i $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Demostreu que $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$

3.42 Sigui f una funció contínua en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0,y\ge 0\}$. Demostreu que la funció $\varphi(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}s\int_0^y f(s,t)\mathrm{d}t$, $x>0,y>0$ satisfà $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=f$.

4 Teoremes sobre funcions diferenciables

Teorema del valor mitjà i fórmula de Taylor

4.1 Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida com $f(t) = (t^2, t^3)$. Existeix algun valor $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(1) - f(0) = Df(t_0)$? Contradiu això el teorema del valor mitjà?

4.2 Fent servir el teorema del valor mitjà, proveu que si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és diferenciable, $Df(x) = 0$ $\forall x \in U$ i U és un obert convex, aleshores f és una funció constant. Demostreu el mateix resultat en el cas més general en què l'obert U no és necessàriament convex, però és tal que dos punts qualssevol d' U es poden unir per una poligonal.

4.3 Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en l'obert A, i $x_0, y_0 \in A$ tals que el segment $[x_0, y_0]$ que determinen està inclós en A. Demostreu que per a tot $a \in A$:

$$||f(y_0) - f(x_0) - \mathrm{D}f(a)(y_0 - x_0)|| \leq \sup_{\xi \in [x_0, y_0]} ||\mathrm{D}f(\xi) - \mathrm{D}f(a)|| \, ||y_0 - x_0||$$

4.4 (a) Sigui $\mathbb{R}_k[x_1, ..., x_n]$ l'espai vectorial de polinomis de grau menor o igual que k amb coeficients reals en les variables $x_1, ..., x_n$. Demostreu que si $a \in \mathbb{R}^n$ i $P \in \mathbb{R}_k[x_1, ..., x_n]$, el polinomi de Taylor de P de grau k centrat en a és el propi polinomi P.

(b)Demostreu que si $P, Q \in \mathbb{R}_k[x_1, ..., x_n]$ verifiquen $P(x) - Q(x) = o(||x - a||^k)$, $x \to a$, per algun $a \in \mathbb{R}^n$, aleshores $P = Q$.

(c)Demostreu que si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^{k+1}(U)$, llavors el seu polinomi de Taylor centrat en $a \in U$ de grau k, diguem-li T, és l'únic polinomi de grau menor o igual que k tal que $f(x) - T(x) = o(||(x - a)||^k)$, $x \to a$.

4.5 Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ en l'obert A i $a \in A$, notarem com T_f el seu polinomi de Taylor de grau k centrat en $a \in A$. Demostreu:

1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, aleshores: $T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g$.
2. El polinomi de Taylor de grau k centrat en a de la funció producte fg és igual al producte $T_f T_g$, expressat en la base $\{(x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_n - a_n)^{i_n},\ i_1 + \cdots + i_n = r,\ r = 0, ..., k\}$, truncat en el grau k.
3. Siguin: $H(t_1, ..., t_n)$ un polinomi homogeni de grau r en les variables $t_1, ..., t_n$; f una funció real de variable real de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ i $P(t)$ el seu polinomi de McLaurin de grau k; δ_{-a} la traslació de $\mathbb{R}^n$ amb vector $-a$. Demostreu que la composició $P \circ H \circ \delta_{-a}$ és el polinomi de Taylor de grau kr centrat en a de la composició $f \circ H \circ \delta_{-a}$.

4.6 Trobeu els polinomis de Taylor de grau k centrat en a de les següents funcions:

1. $f(x,y,z) = xyz, \quad k \in \mathbb{N},\ a = (1,-1,0)$.
2. $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \quad k \in \mathbb{N},\ a = (a_1,\dots,a_n)$.
3. $f(x,y) = \sin x^2 y, \quad k = 9,\ a = (0,0)$.
4. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}, \quad k = 2,\ a = (0,0)$.
5. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x}\cos y, \quad k = 4,\ a = (0,0)$.

4.7 Donats $a, b \in \mathbb{R}$ i ϕ una funció real de variable real de classe $C^{k+1}(A)$, on A és un entorn obert de 0, es defineix $f(x,y) = \phi(ax+by)$. Demostreu que

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{k} \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (ax)^j (by)^{m-j} + \mathrm{R}_{k+1}(x,y)$$

on $\mathrm{R}_{k+1}(x,y)$ és la resta del polinomi de McLaurin de grau k de f.

4.8 Sigui $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$. Calculeu $\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)$.

Indicació: Intenteu obtenir primer el polinomi de Taylor de f a $(0,0)$.

4.9 Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció de classe C^∞. Definim $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^p \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^q = \dfrac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}$. Proveu que els termes de grau k del polinomi de Taylor de f centrat en a són

$$\frac{1}{k!}\left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k_{(a)} (f).$$

4.10 Demostreu que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és de classe C^{k+1} en l'obert convex A, per a tots $x, a \in A$ es verifica l'anomenada fórmula de Taylor amb resta integral:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \mathrm{D}^i f(a)(x-a)^{(i)} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \mathrm{D}^{k+1} f(a + t(x-a))(x-a)^{(k+1)} \mathrm{d}t$$

Considereu $g(t) = f(a + t(x-a))$ i calculeu per parts iteradament la integral $\dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_0^1 g^{(k+1)}(t)(1-t)^k\,\mathrm{d}t$.

4.11 Fent servir el polinomi de Taylor de grau 2 de $f(x,y) = e^x + e^y$ en $(0,0)$, doneu un valor aproximat de $f(0.2,-0.1)$. Doneu també una cota superior de l'error d'aquesta aproximació.

4.12 Fent servir polinomis de Taylor proveu que

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x} = 0.$

Teoremes de la funció inversa i de la funció implícita

4.13 *(Teorema del punt fix)* Una funció es diu *contractiva* quan és de Lipschitz i admet una constant de Lipschitz $\lambda \in [0,1)$. Si f és una funció contractiva tal que $f(\mathrm{Dom}(f)) \subset \mathrm{Dom}(f)$, demostreu:

1. Per a qualsevol $x \in \mathrm{Dom}(f)$ la successió
$$x, f(x), f^2(x), \ldots, f^k(x), \ldots,$$
on $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$, $k \geq 1$ i $f^0(x) = x$, és de Cauchy.
Indicació:fiteu primer $\|f^{r+1}(x) - f^r(x)\|$ *i feu servir després la desigualtat triangular i el fet que* $0 \leq \lambda < 1$.

2. Si $\mathrm{Dom}(f)$ és tancat, demostreu que $u = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ és l'únic punt que coincideix amb la seva imatge (es diu que u és l'únic punt fix de f).

4.14 Determineu si g satisfà les hipòtesis del teorema de la funció inversa. Trobeu la imatge de g. En cas de que g sigui bijectiva, trobeu explícitament g^{-1}.

1. $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}^n$, $g(x) = x + a, a \in \mathbb{R}^n$ (translació pel vector a).
2. $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x+2y, x-y)$.
3. $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $g(x,y) = (x^2-y^2, xy)$.
4. $\mathrm{Dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$, $g(x,y) = (\log xy, (x^2+y^2)^{-1})$.

4.15 De la funció $g(s,t) = (\cosh s \cos t, \sinh s \sin t)$ demostreu:

1. Té inversa local entorn de tot punt del semiplà $H = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s > 0\}$.
2. $g(H)$ és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^2$.
3. La restricció de g a $\{(s,t) \in H : 0 < t < 2\pi\}$ té inversa.

4. Dibuixeu $g(H)$.

4.16 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2y, xy^2)$.

(a) Proveu que f és localment inversible al voltant de (x,y) si $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

(b) Calculeu la diferencial de la inversa local de f en $f(2,1)$.

(c) Suposant que la inversa local de l'apartat anterior està definida en un entorn que conté el punt $(4.1, 1.9)$, feu servir la diferencial de la inversa per a obtenir un valor aproximat de $f^{-1}(4.1, 1.9)$.

(d) Sigui $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0,\ y \neq 0\}$. Proveu que f bijectiva A amb $f(A)$ i doneu explícitament la funció inversa. Calculeu $f^{-1}(4.1, 1.9)$ i compareu el resultat amb l'aproximació de l'apartat anterior.

(e) Obteniu $\mathrm{D}f^{-1}(u,v)$ fent servir el teorema de la funció inversa i directament.

4.17 Considereu la funció $g(x,y,z) = (x+y+z^2, x-y+z, 2x+y-z)$. Es demana:

(a) Proveu que g admet una inversa local diferenciable al voltant del punt $(1,-1,2)$ i calculeu $Dg^{-1}(4,4,-1)$.

(b) Trobeu explícitament $g^{-1}(u,v,w)$ i calculeu directament $Dg^{-1}(4,4,-1)$.

4.18 Demostreu que les següents funcions són canvis de variables locals de classe C^∞ en tot punt del domini que s'indica. Doneu oberts màxims d'aquests dominis on les seves restriccions siguin canvis de variables.

1. $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $(r,\varphi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ (canvi a polars).
   Indicació: $f : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0, x \geq 0\}$ *té inversa i* f^{-1} *no es pot estendre amb continuïtat a cap obert que contingui estrictament* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0 \ i \ x > 0\}$ *(recordeu 2.32 b).*
2. $f(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$, $(r,\varphi,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (canvi a esfèriques).
3. $f(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, $(r,\varphi,z) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ (canvi a cilíndriques).

4.19 Proveu que la condició $\det Df(a) \neq 0$ no és necessària per poder assegurar l'existència d'una inversa local al voltant del punt a (considereu la funció $y = x^3$ al voltant de zero). Proveu en canvi que si f és inversible al voltant d'un punt a on $\det Df(a) = 0$, aleshores la inversa no pot ser diferenciable en $f(a)$.

4.20 (a)Demostreu que tota funció g real de variable real definida en un interval i de classe C^1 amb derivada no nul·la en tots els punts del seu domini té inversa de classe C^1 definida en la seva imatge.

(b)Demostreu que $f(x,y) = e^x(\cos y, \sin y)$ té inversa local però no pas global.

4.21 Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funció de classe C^1 en l'obert U amb $\det Df(x) \neq 0$, $\forall x \in U$.

(a) Proveu que f és una funció oberta.

(b) Si f és injectiva proveu que existeix la funció inversa global $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$ i que és de classe C^1.

4.22 Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \det Df(x) = 0\}$ és discret i tal que cada $x \in D$ és un punt d'acumulació de $f^{-1}(f(x))$. Demostreu que f és oberta.

4.23 Considereu el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - z &= 0 \\ x + yt &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(a) Veieu si el sistema defineix implícitament funcions $z = g_1(x,y)$ i $t = g_2(x,y)$ al voltant del punt $(1,1,-1,-1)$.

(b) Calculeu $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}(1,1)$ $\dfrac{\partial g_2}{\partial x}(1,1)$ i $\dfrac{\partial g_2}{\partial y}(1,1)$ fent servir derivació implícita.

(c) Calculeu explícitament g_1 i g_2 i comproveu directament els resultats de (b).

(d) Trobeu els polinomis de Taylor de segon grau de g_1 i g_2 centrats en $(1,1)$.

4.24 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funció de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que les seves derivades parcials no s'anul·len en cap punt.

(a) Proveu que la equació $f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$ defineix implícitament tres funcions diferenciables

$$x = g_1(y,z), \;\; y = g_2(x,z), \;\; z = g_3(x,y)$$

al voltant del punt (x_0,y_0,z_0).

(b) Proveu que

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}(y_0,z_0)\frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,z_0)\frac{\partial g_3}{\partial y}(x_0,y_0) = -1.$$

(c) Calculeu les derivades parcials de segon ordre de g_1, g_2 i g_3.

4.25 Considereu l'equació

$$x^2 + y^2 + z^2 = \psi(ax + by + cz), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0$$

on $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $C^2(\mathbb{R})$ i satisfà $\psi(0) = 0$, i $\psi'(0) \neq 0$.

(a) Proveu que en un entorn de $(0,0,0)$ les solucions de l'equació són $(x, y, f(x,y))$ on f és diferenciable en un entorn de $(0,0)$.

(b) Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$

4.26 Proveu que el sistema

$$\left.\begin{aligned} xz^3 + y^2u^3 &= 1 \\ 2xy^3 + u^2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

permet definir x i y com a funcions implícites diferenciables de z i u a un entorn de $(0,1,0,1)$.

Si $x = h(z,u)$ i $y = g(z,u)$ són les funcions implícites esmentades, proveu que la funció $F(z,u) = (h(z,u), g(z,u))$ té inversa local diferenciable al voltant del punt $(0,1)$.

4.27 Considereu el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x - u - v &= 0 \\ y - u^2 - v^2 &= 0 \\ z - u^3 - v^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Trobeu els punts $P = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^5$ que compleixin les dues condicions següents:

(a) el sistema defineix tres funcions implícites diferenciables

$$z = f_1(x,y) \quad u = f_2(x,y) \quad v = f_3(x,y)$$

al voltant de P.

(b) la derivada direccional de f_1 en (x_0, y_0) és màxima en la direcció del vector $(1,0)$, i el valor d'aquesta derivada és 3.

4.28 Demostreu que l'equació $x^2y + e^x + z = 0$ defineix implícitament x en funció de y i z al voltant del punt $(0,1,-1)$. Trobeu el polinomi de Taylor de x d'ordre dos centrat en $(1,-1)$.

4.29 (Teorema de rectificació de la imatge) Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ de classe $\mathcal{C}^r$, en l'obert A ($r \geq 1$) i $a \in A$ tal que $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a) \neq 0$. Demostreu que existeixen $U \subset \mathbb{R}^n$ i $V, W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ entorns oberts d'$a, f(a)$ i $(a,0)$ respectivament, i una aplicació bijectiva $\varphi : V \longrightarrow W$ de classe $\mathcal{C}^r$ amb $\det D\varphi(x) \neq 0, \forall x \in V$ (és a dir un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^r$), tals que $(\varphi \circ f)(x) = (x, 0)$ per a tot $x \in U$.
(*Indicació: apliqueu el teorema de la funció inversa a la funció* $F(x,y) = f(x) + (0,y)$, *on* $(x,y) \in A \times \mathbb{R}^m$).

4.30 Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $m > 0$ de classe $\mathcal{C}^k(A)$ ($k \geq 1$) tal que el rang de $Df(a)$ sigui n. Proveu que no existeix cap entorn de $f(a)$ on f sigui exhaustiva.

4.31 (Teorema de rectificació del domini) Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, en l'obert A i $a = (a_1, a_2) \in A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a) \neq 0$. Demostreu que existeixen U, V oberts de $\mathbb{R}^{n+m}$, entorns respectius de $(f(a), a_2)$ i a, i un difeomorfisme $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^r$ tals que $(f \circ \varphi)(x_1, x_2) = x_1$.
(*Indicació: apliqueu el teorema de la funció inversa a* $F(x,y) = (f(x,y), y)$, *on* $(x,y) \in A$).

4.32 Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $m > 0$ de classe $\mathcal{C}^k(A)$ ($k \geq 1$) tal que existeix si més no un punt $a \in A$ en el qual $Df(a)$ té rang n. Proveu que f no és injectiva.

Aplicacions geomètriques del càlcul diferencial

4.33 Trobeu l'equació de la recta tangent de les següents corbes en el punt especificat:

1. $r(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, $t = 0$
2. $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{3/2})$, $t = 0$

4.34 Sigui σ una corba de $\mathbb{R}^2$ tal que $\sigma(0) = (0,0)$ i $\sigma'(0) = (1,1)$. Calculeu el vector tangent de la corba $\gamma = f \circ \sigma$ en el punt $\gamma(0)$, essent $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$.

4.35 Suposem que una partícula segueix la trajectòria $(e^t, e^{-t}, \cos t)$ fins que en l'instant $t = 1$ es desprèn de sobte impulsada només per la seva velocitat. Quina serà la posició de la partícula en $t = 2$?

4.36 Siguin $\alpha_1(t) = e^{-\frac{1}{t}} \cos \dfrac{1}{t}$ i $\alpha_2(t) = e^{-\frac{1}{t}} \sin \dfrac{1}{t}$ si $t \neq 0$ i $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$.

1. Demostreu que $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ és una funció de classe $C^1(\mathbb{R})$.
2. És α una corba regular?

4.37 Demostreu que tot pla normal a la corba

$$\gamma(t) = (a\sin^2 t, \frac{a}{2}\sin 2t, a\cos t)$$

passa per l' origen. Observeu després que $\gamma(t)$ està sobre una esfera de centre $(0,0,0)$. És cert que tots els plans normals a una corba qualsevol sobre una esfera centrada en un punt p passen per p?

4.38 Comproveu que la corba definida en forma implícita per l'equació $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$ és simètrica respecte d'els eixos i respecte de l'origen. Determineu, si n'hi ha, els punts on la tangent a la corba és paral·lela a l'eix Y i els punts on és paral·lela a l'eix X.

4.39 El sistema d' equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3 \\ -3x^2+y^2+2z^2 &=& 0 \end{array}\right\}$$

defineix una corba regular al voltant del punt $p = (1,1,1)$? Demostreu que és possible posar aquesta corba en forma paramètrica al voltant de p agafant com a paràmetre o bé z o bé x. Trobeu el vector tangent a la corba en p respecte aquestes dues parametritzacions. Són iguals? Són iguals les rectes tangents respecte de cada una de les parametritzacions? Per què?

4.40 Recordeu que la trajectòria gradient de f a través del punt p és la corba γ tal que $\gamma' = \mathrm{grad} f(\gamma(t))$, $\gamma(0) = p$.

1. Trobeu la trajectòria gradient de

$$z = a^2x^2 + b^2y^2,\ a > 0, b > 0$$

   pel punt $(1/a, 1/b)$. Si li diem α, verifiqueu gràficament que és ortogonal als conjunts de nivell de z. Raoneu sobre la gràfica de $(\alpha, z\circ\alpha)$ que la trajectòries gradients segueixen el màxim pendent.

2. Trobeu les trajectòries gradient de

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

   Verifiqueu que aquestes trajectòries es troben sobre les hipèrboles xy =constant i són ortogonals als conjunts de nivell de f.

(En el problema 4.52 trobareu com es poden fer servir les trajectòries gradients per trobar punts crítics.)

4.41 Considereu les superfícies $s_1(u,v) = (u,v,0)$ i $s_2(u,v) = (u^3,v^3,0)$ on $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Mostreu que la imatge d'ambdues és el pla de $\mathbb{R}^3$ d'equació $z = 0$.
2. Demostreu que s_1 és regular però que s_2 no ho és.

4.42 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2+v^2)$. Trobeu l'obert A més gran de $\mathbb{R}^2$ tal que $f_{|A}$ és una superfície regular. Trobeu el vector normal a la superfície en tots els punts corresponents a paràmetres d'A.

4.43 Trobeu l'equació del pla tangent a les superfícies en els punts que s'indiquen

a) $z = x^2 + 2y^2$ en $(1,2,9)$.

b) $2y - z^3 - 3xz = 0$ en $(1,7,2)$.

c) $s(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ en $s(\pi/4, -\pi/4)$.

4.44 Considereu la superfície parametritzada

$$(u,v) \longmapsto (u^2 - v, u+v, uv).$$

Trobeu el seu pla tangent en el punt de paràmetres $(u,v) = (1,2)$. Trobeu una equació explícita de la superfície i obteniu el mateix pla fent servir el gradient de la funció trobada.
Indicació:Considereu el sistema

$$\begin{array}{rcl} x &=& u^2 - v \\ y &=& u+v \\ z &=& uv \end{array}$$

d' on podeu aïllar explícitament z en funció de x i y, obtenint una equació $z = f(x,y)$.

4.45 És cert que si les equacions $f(x,y) = z$ i $g(x,y) = z$ defineixen dues superfícies regulars ambdues passant pel punt p, el sistema

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = z \\ g(x,y) = z \end{array}\right\}$$

defineix una corba regular passant per p? Raoneu la vostra resposta en els dos exemples següents:

a) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, $z = g(x,y) = -x^2 + y^2 + xy^3$ en el punt $(0,0,0)$.

b) $z = f(x,y) = x^2 - y^2$, $z = g(x,y) = 0$ en el punt $p = (0,0,0)$.

4.46 Sigui $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Per a quins valors de $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunt $f^{-1}(\lambda)$ és una superfície regular? (Recordeu el problema 2.3) Trobeu parametritzacions d'aquests conjunts de nivell.

4.47 (a) Demostreu que el conjunt de nivell $f^{-1}(1)$ on $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, $a > 0, b > 0, c > 0$ és una superfície implícita regular. S'anomena *el·lipsoide* . Comproveu que $s(u,v) = (a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v)$ on $0 < u < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, és una parametrització de l'el·lipsoide llevat de mitja el·lipse.

(b) Demostreu que el conjunt de nivell $f^{-1}(r^2)$, $0 < r < a$ on $f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2$ és una superfície implícita regular. S'anomena *tor*. Comproveu que $s(u,v) = ((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\sin v, r\sin u)$ on $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$, és una parametrització del tor llevat dues circumferències.

(c) Demostreu que el conjunt de nivell $f^{-1}(1)$ on $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2$ és una superfície implícita regular. S'anomena *hiperboloide de dos fulls*. Trobeu-ne una parametrització.

4.48 Parametrització estereogràfica de l'esfera. Considereu l'esfera S^2 d'equació $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$. La projecció estereogràfica de S^2 des d'el pol nord és l'aplicació $\pi : S^2 \setminus \{(0,0,2)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que assigna a cada punt P la intersecció amb el pla $z = 0$ de la recta que uneix P amb $(0,0,2)$. Demostreu que π és bijectiva amb inversa $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,2)\}$

$$\pi^{-1}(u,v) = \left(\frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}\right).$$

Observeu que és possible recobrir tota l'esfera amb dues parametritzacions.

Càlcul d'extrems

4.49 Trobeu i classifiqueu tots els punts crítics de les funcions

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2y^2 + 4xy - 2x^2$

b) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$

c) $f(x,y) = \exp(1 - x^2 - y^2)$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$

4.50 Demostreu que si f és una funció definida en A que assoleix un valor extrem en $a \in A$, aleshores si $A = \cup_i A_i$ i $a \in A_i$, $\forall i$, $f_{|A_i}$ assoleix un valor extrem en a. Per demostrar que el recíproc d'aquest enunciat no és cert, considereu la funció $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$ i proveu que:

a) l'origen és un punt crític.

b) la restricció de f a qualsevol recta passant per l'origen, té un mínim en aquest punt.

c) f no té mínim en l'origen.

4.51 Trobeu les trajectòries gradient de

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Verifiqueu que si $\alpha(t)$ és una de les anteriors trajectòries verificant $\alpha(0) = (0, y_0)$, aleshores $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = (0,0)$ (és a dir: les trajectòries gradient que surten dels punts $(0, y_0)$ s'acosten al punt de sella $(0,0)$).

4.52 (Mètode del gradient) Sigui f una funció real de classe C^1 en l'obert $U \subset \mathbb{R}^n$, i $p \in U$ un punt que no és crític per f. Suposeu que existeix una *trajectòria gradient de f a través de p*, que per definició és una corba γ en U tal que $\gamma'(t) = \text{grad} f(\gamma(t)),\ \gamma(0) = p$. Demostreu:

1. $f \circ \gamma$ és creixent.
2. Si γ està definida per a tot $t \geq 0$ i tendeix cap a un límit $x_0 \in U$ quan $t \to +\infty$, aleshores x_0 és un punt crític de f.

4.53 Comproveu que $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ té un punt crític on no assoleix cap extrem.

4.54 Determineu el comportament de $z = x^5 y + xy^5 + xy$ en els seus punts crítics.

4.55 Trobeu els punts de màxim, mínim i sella de $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$.

4.56 Trobeu i classifiqueu els punts crítics (si existeixen) de les funcions

a) $f(x,y) = y^2 - x^3$

b) $f(x,y) = (x-1)^2 + (x-y)^2$

c) $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^4$

4.57 Sigui $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, i $a \in \mathbb{R}^n$. Demostreu que tots els punts crítics de $f(x) = \varphi(a \cdot x)$ són degenerats. ($a \cdot x$ indica el producte escalar de a i x).

4.58 Sigui x_0 un punt crític no degenerat d'una funció de classe C^2. Demostreu que x_0 és un punt aïllat, és a dir, que existeix un entorn obert de x_0 que no conté cap altre punt crític.
Indicació: Suposeu que x és un punt crític no degenerat, apliqueu el teorema del valor mitjà a les derivades parcials $f_1, \ldots, f_n$ per a obtenir el sistema d'equacions $0 = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y_i)(x^j - x_0^j)$, $i = 1, \ldots, n$. Observeu que $\det f_{ij}(y_i) \neq 0$, i d' aquí que l'única solució de l'anterior sistema és $x - x_0 = 0$.

4.59 Trobeu els extrems absoluts de les següents funcions f sobre els recintes K que s'especifiquen

a) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq \frac{\pi}{2}\}$
b) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^3 + 3y^2$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + y + x$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq -3,\ x \leq y,\ y \leq 0\}$

4.60 Trobeu els extrems absoluts de $f(x,y) = x - x^2 - y^2$ en el disc $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

4.61 Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida com $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$.

a) Trobeu i classifiqueu tots els seus punts crítics.

b) Calculeu els extrems absoluts de f en el quadrat $[\pi/2, \pi] \times [\pi/2, \pi]$.

4.62 Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ sobre la circumferència de radi 1 centrada a l'origen (la superfície $z = f(x,y)$ s'anomena *cadira del mico*).

4.63 Sigui M la varietat regular en forma implícita amb equació $f(x) = 0$. Sigui $x_1 \notin M$ i x_0 un punt on la funció $x \mapsto d(x, x_1)$ assoleix un extrem local condicionat a M. Demostreu que $x_1 - x_0$ és normal a M.

4.64 Trobeu la distància entre el punt $(0,b)$ i la paràbola $x^2 - 4y = 0$. Feu el problema com a mínim usant dos mètodes diferents.
(Indicació: el de Lagrange i algun altre).

4.65 Trobeu la distància mínima entre les corbes d'equació $x + y = 4$ i $x^2 + 4y^2 = 4$.

4.66 Trobeu els vèrtexs i semieixos de l'el·lipse obtinguda intersecant l'el·lipsoide $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ amb el pla d'equació $x + y + z = 0$.

4.67 Trobeu l'àrea de l'el·lipse obtinguda intersecant l'el·lipsoide sòlid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ amb el pla $Ax + By + Cz = 0$.

4.68 Sigui $f(x) = x_1 \cdots x_n$ i $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + ... + x_n = 1, x_1 > 0, ..., x_n > 0\}$.

1. Demostreu que $f(x) \leq n^{-n}$, $\forall x \in M$ i que es produeix la igualtat quan $x_1 = ... = x_n = n^{-1}$
2. Proveu que la mitjana geomètrica de n nombres positius és menor o igual que la seva mitjana aritmètica.
3. Proveu que la mitjana geomètrica de n nombres positius coincideix amb la mitjana aritmètica si, i només si, els n nombres són iguals.

5 Integració de funcions de diverses variables

5.1 Siguin S i R dos N-rectangles tals que $S \subset R \subset \mathbb{R}^N$. Demostreu que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P}$ és una partició de R, els N-rectangles P de la qual verifiquen $\text{diàm}_\infty(P) < \delta$, aleshores $\text{vol}(P_1) + \ldots + \text{vol}(P_n) \leq \text{vol}(S) + \varepsilon$, essent $P_1, \ldots, P_n$ els N-rectangles de $\mathcal{P}$ que tallen S.

5.2 Sigui R un N-rectangle i $A \subset R$ un conjunt de contingut zero. Demostreu que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ i existeix una partició $\mathcal{P}$ de R els N-rectangles P de la qual verifiquen $\text{diàm}_\infty(P) < \delta$ i tal que si $P_1, \ldots, P_n$ són els N-rectangles de $\mathcal{P}$ que tallen A, aleshores $\text{vol}(P_1) + \cdots + \text{vol}(P_n) \leq \varepsilon$.

5.3 Sigui $A \subset \mathbb{R}^N$. Es diu que A té contingut (respectivament, mesura) zero respecte dels N-rectangles tancats si $\forall \varepsilon > 0, \exists \{R_i\}_{i \in I}$ essent I un conjunt finit (respectivament, finit o numerable) i R_i N-rectangles tancats tals que $A \subset \bigcup_{i \in I}$ i $\sum_{i \in I} \text{vol}(R_i) < \varepsilon$. Similarment, A té contingut (respectivament, mesura) zero respecte dels N-rectangles oberts si en l'anterior definició, els R_i són N-rectangles oberts. Demostreu que tenir contingut (respectivament, mesura) zero respecte dels N-rectangles tancats és equivalent a tenir contingut (respectivament, mesura) zero respecte dels N-rectangles oberts.

5.4 Demostreu que

1. Tot conjunt compacte té contingut zero si i només si té mesura zero.
2. Tot subconjunt d'un conjunt de mesura zero té mesura zero.
3. Tot compacte contingut en un conjunt de mesura zero té contingut zero.
4. Tot conjunt fitat de mesura zero té contingut zero.

5.5 Demostreu que la intersecció finita o numerable, la unió finita o numerable i el complementari relatiu de conjunts de mesura zero, és de mesura zero (Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$, el complementari relatiu de B en A és $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$).

5.6 Demostreu que tota successió convergent de $\mathbb{R}^N$ té contingut zero, i que tota successió fitada de $\mathbb{R}^N$ amb un número finit de punts límit (límits de les subsuccessions convergents) també té contingut zero.

5.7 Si $A \subset \mathbb{R}^N$ proveu que són equivalents:

1. A té contingut zero.
2. Per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un nombre finit de N−cubs $C_1, \ldots, C_p$ tals que $A \subset C_1 \cup \ldots \cup C_p$ i $\text{vol}(C_1) + \cdots + \text{vol}(C_p) < \varepsilon$.

5.8 Sigui $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunt de contingut zero. Demostreu

1. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ és una funció Lipschitz i $M \geq N$, aleshores $f(A)$ té contingut zero.
2. La implicació anterior no és certa si $M < N$.
3. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^M$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en l'obert U, $\overline{A} \subset U$ i $\overline{A}$ és convexa i $M \geq N$, aleshores $f(A)$ té contingut zero.

5.9 Sigui $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunt fitat amb adherència convexa. Demostreu:

1. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ és una funció Lipschitz i $N < M$, aleshores $f(A)$ té contingut zero.
2. Si U és un obert de $\mathbb{R}^N$ que conté l'adherència de A, i $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^M$ és de classe $\mathcal{C}^1$ i $N < M$, aleshores $f(A)$ té contingut zero.

5.10 Demostreu que la gràfica de tota funció contínua definida en un compacte té contingut zero.

5.11 Siguin $g_1, g_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dues funcions contínues tals que $g_1 \leq g_2$. Demostreu que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ és un conjunt admissible.

5.12 Demostreu que la intersecció finita, la unió finita i la diferència de conjunts admissibles, és admissible.

5.13 Siguin f i g funcions admissibles tals que $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ té contingut zero. Demostreu que per a tot conjunt admissible A, $\int_A f = \int_A g$.

5.14 Sigui A un conjunt admissible i f una funció admissible tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$. Demostreu que si $\int_A f = 0$, aleshores $\{x \in A : f(x) > 0\}$ té mesura zero. Demostreu també que si f i g són funcions admissibles, també ho és $|f - g|$, i que si $\int_A |f - g| = 0$, aleshores $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ té mesura zero.

5.15 Siguin R i S N-rectangles, $S \subset R$ i $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ admissible tal que $f(x) = 0$ si $x \notin S$. Demostreu que la restricció $f_{|S}$ és admissible i que $\int_R f = \int_S f_{|S}$.

5.16 Donada f una funció real amb domini $B \subset \mathbb{R}^N$ i donat $A \subset \mathbb{R}^N$, definim

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B \cap A \\ 0 & \text{altre cas.} \end{cases}$$

Demostreu que si A és admissible i R i S són rectangles que contenen A, aleshores $\int_R f_A = \int_S f_A$.

5.17 La funció característica $\mathcal{X}_A : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ d'un subconjunt $A \subset \mathbb{R}^N$ es defineix com

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Demostreu que són equivalents:

1. A és admissible.
2. $\mathcal{X}_A$ és admissible.

5.18 Demostreu que existeix una única aplicació real I definida en el producte cartesià del conjunt de conjunts admissibles de $\mathbb{R}^N$ i el conjunt de les funcions admissibles, $(A, f) \mapsto I_A f$, que verifica les següents propietats:

1. $f \mapsto I_A f$ és lineal.
2. $f \geq 0 \Rightarrow I_A f \geq 0$.
3. $I_A f = I_A f_A$, on $f_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ i $f_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
4. Si S és un N-rectangle, aleshores $I_S 1 = \text{vol}(S)$.

5.19 Sigui A un conjunt admissible, f una funció admissible. Donat $v \in \mathbb{R}^N$, definim $A + v = \{a + v : a \in A\}$ i $f_{-v}(x) = f(x - v)$. Demostreu que $\int_A f = \int_{A+v} f_{-v}$.

5.20 Sigui R un N-rectangle i f una funció integrable en R. Suposeu que a tot N-rectangle S contingut en R li podem assignar un número $I_S f$ tal que

1. si $\mathcal{P}$ és una partició de R: $I_R f = \sum_{P \in \mathcal{P}} I_P f$

2. si donat S un N-rectangle contingut en R, existeixen números m i M tals que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in S$, aleshores $m\mathrm{vol}(S) \leq I_S f \leq M\mathrm{vol}(S)$.

Demostreu que $I_R f = \displaystyle\int_R f$.

5.21 Sigui $A = \{\left(\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n}\right) : p, q \text{ senars}, \ 1 \leq p, q \leq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Es demana:

1. Interpreteu geomètricament A.
2. Proveu que la funció característica de A, χ_A, no és integrable sobre el quadrat $[0,1] \times [0,1]$.
3. Calculeu les integrals iterades de χ_A en el quadrat $[0,1] \times [0,1]$.

5.22 1. Proveu que els cilindres $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq a\}$ i $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-z)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq a\}$ tenen el mateix volum.

2. Proveu el *Principi de Cavalieri* per al càlcul de volums: Siguin A, B dos subconjunts admissibles de $\mathbb{R}^3$ tals que les seccions $A_c = \{(x,y) : (x,y,c) \in A\}$, $B_c = \{(x,y) : (x,y,c) \in B\}$ són admissibles per a cada c. Si $\mu(A_c) = \mu(B_c)$ $\forall c$, aleshores $\mu(A) = \mu(B)$.

5.23 Calculeu les integrals dobles $\int_\Omega f$ en els següents casos:

1. $f(x,y) = \frac{1}{8}xy$, i $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4 \, , \ x - 1 \leq y \leq 2x\}$.
2. $f(x,y) = x^2 - y$, essent Ω la regió compresa entre les paràboles $y = x^2$ i $y = -x^2$ i les rectes $x = 1$ i $x = -1$.
3. $\int_\Omega (x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, essent Ω el semicercle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5.24 Mitjançant el teorema de Fubini hem obtingut les igualtats:

a) $$\int_A f = \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

b) $$\int_B f = \int_{-2}^2 \left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x + \int_2^{\frac{10}{3}} \left[\int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

Expliciteu els conjunts A i B i expresseu les integrals canviant l'ordre d'integració.

5.25 Calculeu $\int_\Omega xy + yz + zx$, essent $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$.

5.26 Calculeu el volum dels següents cossos

1. El tetraedre amb vèrtexs $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$.
2. La regió compresa entre el cilindre parabòlic $z = 4 - y^2$ i el paraboloide el·líptic $z = x^2 + 3y^2$.
3. La regió compresa entre el paraboloide el·líptic $z = x^2 + y^2$ i el pla $z = y$ (*Recordeu el canvi a coordenades cilíndriques*).

5.27 Donats $0 < a < b$ i $0 < \alpha < \beta$ calculeu l'àrea del recinte

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, a \leq xy \leq b, \alpha \leq x^2 - y^2 \leq \beta\}$$

5.28 Trobeu la massa d' un cilindre recte de radi R i alçada h quan la seva densitat és

1. proporcional a la distància a la base del cilindre.
2. proporcional a la distància a l'eix del cilindre.

5.29 Calculeu el volum d' un cilindre recte de radi R i alçada h fent servir integració respecte de les coordenades cilíndriques, i sense fer cap canvi de coordenades.

5.30 Calculeu la integral

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{h}{a^2}}^{h} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}z$$

fent un canvi a coordenades cilíndriques.

5.31 Calculeu la integral

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z$$

canviant a coordenades esfèriques.

5.32 Calculeu $\int_\Omega f$ en els següents casos

1. $f(x,y) = e^{\frac{y-x}{y+x}}$ i Ω és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$ i $(0,2)$.
2. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ essent Ω la regió de l' espai determinada per $x^2+y^2+z^2 \leq x$.
3. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ i $\Omega = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, on $a>0$, $b>0$ i $c>0$.

5.33 Considereu una esfera i un con tal que el vèrtex del con està sobre la superfície de l'esfera i el centre d'aquesta en l'eix del con. Determineu l'obertura α del con per tal que el volums de les parts de l'esfera interior i exterior al con siguin iguals.

5.34 Determineu l'angle de semiobertura del con que té la propietat que a l'encaixar-hi una esfera, el volum comprés entre con i esfera és igual al d'aquesta.

5.35 Sigui π un hiperplà a $\mathbb{R}^n$. Indiquem π_+, π_- els semiespais en què descomposa $\mathbb{R}^n$ i $S_\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la simetria respecte de π. Considerem una funció $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, on A és simètric respecte de π $(S_\pi(A) = A)$. Proveu:

a) Si $f \circ S_\pi = -f$ llavors $\displaystyle\int_A f = 0$.

b) Si $f \circ S_\pi = f$ llavors $\displaystyle\int_A f = 2\int_{A\cap\pi^+} f = 2\int_{A\cap\pi^-} f$.

5.36 Considereu una equació de segon grau $ax^2+bx+c=0$ on els coeficients a,b,c, pertanyents a l'interval $[0,1]$, s'han obtingut aleatòriament. Calculeu la probabilitat que les arrels de l'equació siguin reals.

5.37 Calculeu la integral impròpia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.
(*Indicació: integreu sobre recintes adequats la funció* $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$).

5.38 Calculeu el volum de

1. El paral·lelepípede $\{x = (x_1,\ldots,x_n) : x = t_1a_1+\cdots+t_na_n,\ 0 \leq t_i \leq 1\}$ on $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\forall i$.
2. El n-símplex $\left\{x = (x_1,\ldots,x_n) : x = t_0a_0+\cdots+t_na_n,\ t_i \geq 0,\ \forall i,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\right\}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\forall i$.

3. L'el·lipsoide sòlid $\left\{(x_1,\ldots,x_n) : \dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{a_n^2}\le 1\right\}$ on $a_i>0$, $\forall i$.

5.39 La funció Gamma d'Euler és $\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x$, definida per als reals $p>0$. Comproveu que:

1. $\Gamma(p)=2\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}\mathrm{d}x$.
2. es compleix la reducció $\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$, per tant si $p\in\mathbb{N}$ llavors $\Gamma(p)=(p-1)!$, i a més $\Gamma(p)=(p-1)(p-2)\cdots(p-[p])\Gamma(p-[p])$, amb el que Γ queda determinada pels seus valors en $(0,1]$.

La funció Beta d'Euler definida per a $p>0$, $q>0$, és $\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$. Comproveu que:

1. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.
2. $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{q-1}{p}\mathrm{B}(p+1,q-1)$.
3. si p i q són enters, llavors $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. $(\star)$
4. $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi$ (considereu el canvi $x=\sin^2 t$).

Demostreu que:

1. $\Gamma(p)\Gamma(q)=\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)$, per a qualssevol p,q positius, que generalitza $(\star)$. (*Apliqueu Fubini per calcular el producte* $\Gamma(p)\Gamma(q)$.)
2. deduïu $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ (compareu amb el problema 5.37).
3. donada $n\ge 2$ siguin

$$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-n}\quad (p_i>0)$$
$$\Delta=\{x\in\mathbb{R}^n : x_i\ge 0,\ x_1+\cdots+x_n\le 1\}$$
$$\Omega=\left\{x\in\mathbb{R}^n : x_i\ge 0,\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\le 1\right\}\quad (a_i>0,\alpha_i>0).$$

   (a) Comproveu que $\displaystyle\int_\Delta f=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$.

   (b) Fent servir l'apartat anterior, proveu l'anomenada Fórmula de Dirichlet:

$$\int_\Omega f=\frac{a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1\cdots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}+1\right)}.$$

   (c) Deduïu el volum de l'esfera n-dimensional (compareu el resultat amb el del problema 5.38).