TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Combinatòria d'escales musicals i acords

Autor: Alejandro Garcia Herrera

Director: Xavier Gràcia Sabaté

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2020 - 2021

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya

Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau de Matemàtiques

Treball de fi de grau

Combinatòria d'escales musicals i acords

Alejandro Garcia Herrera

Director: Xavier Gràcia Sabaté
Departament de Matemàtiques

Maig 2021

Resum

En aquest treball es realitza un estudi de diferents conjunts i successions de notes musicals, com són les escales, els acords i les fileres de tons. Fent servir eines matemàtiques de la branca de la combinatòria es resolen diversos problemes de comptatge, com ara la deducció del nombre d'escales i acords diferents que existeixen. També es fan diverses classificacions d'aquests segons les propietats que poden tenir, i es valoren les implicacions musicals que se'n desprenen.

Paraules clau: música, acord, escala, filera de tons, interval, partició, combinatòria.

Abstract

Along this project, different sets and sequences of musical notes such as scales, chords and tone rows are studied. Various counting problems, like the number of possible scales and chords, are solved using tools from combinatorics. Besides, classifications by musical properties are also taken into account and the implications that emerge from them are approached.

Keywords: music, chord, scale, tone row, interval, partition, combinatorics.

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio de diferentes conjuntos y sucesiones de notas musicales, como las escalas, los acordes y las series de tonos. Usando herramientas matemáticas de la rama de la combinatoria se resuelven varios problemas de contaje, como por ejemplo la deducción del número de escalas y acordes diferentes que existen. También se realizan diversas clasificaciones según las propiedades que pueden tener, y se valoran sus implicaciones musicales.

Palabras clave: música, acorde, escala, serie de tonos, intervalo, partición, combinatoria.

MSC: 00A65

Índex

Índex de figures

Introducció

"La música i les matemàtiques estan molt relacionades". Tothom ha sentit una frase d'aquest estil alguna vegada. Però com ho estan, i per què?

La música és un art que serveix per transmetre sentiments i emocions, una forma d'expressió de l'ésser humà i un element present a totes les cultures arreu del món. És cert que existeixen moltes característiques subjectives de la música que no poden ser estudiades per la ciència. Però el fenomen musical succeeix en una realitat que segueix unes regles físiques, i en la que existeixen molts elements mesurables. És en aquest punt, precisament, on es produeix la intersecció entre la música i les matemàtiques. Són aquests elements, com ara la freqüència d'un so o la cadència d'un ritme, els que es poden analitzar i quantificar, i entre els quals es poden establir relacions. En definitiva, els que es poden tractar amb eines matemàtiques.

Els pitagòrics van ser dels primers en intuir una d'aquestes relacions: el so de dues cordes de la mateixa naturalesa tocades simultàniament és més agradable quan les seves longituds formen raons d'enters petits. Aquestes longituds, com sabem, són inversament proporcionals a les freqüències de les notes respectives. Així, experimentant amb diferents raons entre enters, com ara 2:1 o 3:2, i escoltant els sons que es produïen, es va construir la primera escala musical.

Des d'aleshores, s'han anat desenvolupant diferents teories en relació als intervals entre notes musicals, estretament relacionats amb els nombres racionals. Aquests diferents corrents musicals han anat modificant les escales emprades a l'hora de compondre peces i d'afinar els instruments. Des de les mencionades escales pitagòriques, passant per les escales mesotòniques i les escales amb temperaments irregulars. No va ser fins al segle XIX que es va imposar definitivament l'escala que es fa servir en l'actualitat: l'escala de 12 tons amb temperament igual.

La principal característica d'aquesta escala és que la raó entre les freqüències de qualsevol parell de notes adjacents és la mateixa. Això suposa diversos avantatges. El que més ens interessa és que aquesta regularitat entre notes dota d'una estructura cíclica l'espai de freqüències. Així, és molt més fàcil establir connexions entre aquests intervals i diferents objectes matemàtics.

Aquesta és precisament una de les bases d'aquest treball, que té per objectiu estudiar des d'un punt de vista matemàtic diferents conjunts i successions de notes musicals, com són les escales, els acords i les fileres de tons.

Primer de tot, és necessari definir amb claredat els objectes que es volen treballar. Un cop establert el context matemàtic, es fan servir eines de la branca de la combinatòria per tal de resoldre diferents problemes de comptatge i de classificació.

Volem conèixer el nombre d'acords i escales diferents que existeixen i trobar diferents classificacions d'aquests que tinguin implicacions musicals. Per exemple, que expliquin perquè alguns acords i escales es fan servir més que d'altres, o que proporcionin una manera de quantificar aspectes tan subjectius com ara la "raresa" d'aquests acords i escales.

Contingut i recursos

El treball consta de cinc capítols, que es poden pensar com tres blocs prou diferenciats. A continuació, es presenta un breu resum dels continguts de cadascun d'ells, juntament amb la bibliografia que s'ha fet servir.

Capítols 1 i 2

En aquests capítols s'assenten les bases necessàries per als posteriors. En el primer s'introdueixen els conceptes musicals que es tracten al llarg del treball: el so i les notes musicals, els acords i les escales. Es fan servir recursos diversos. Entre els més destacats es troben els llibres [2, 4], i l'apèndix musical de l'article [3]. En el segon capítol es presenten dos objectes matemàtics, els collars i les cadenes, que es poden vincular amb els conceptes musicals previs. També es desenvolupa la combinatòria que els envolta i permet comptar-los. Està basat en el llibre [1] i en alguns resultats de la teoria de grups com el teorema de Pólya.

Capítols 3 i 4

Es pot dir que componen el cos del treball. Al llarg dels dos capítols es fa un anàlisi dels dos tipus de conjunts de notes musicals que es tracten en aquest treball, les escales i els acords. Ambdós capítols segueixen els raonaments exposats per Michael Keith a [1], i recullen les idees que hi apareixen. En el capítol 3, dedicat a l'estudi dels acords, s'identifiquen certes propietats que aquests poden tenir, com ara l'interval mínim o el nombre d'adjacències entre les notes d'un acord, i es classifica el nombre total d'acords segons aquestes diferents propietats. Al llarg de tot el capítol es fa especial èmfasi en el cas de l'escala de dotze tons. Al capítol 4 es fa un anàlisi de les escales musicals, en especial de les formades per set notes. S'estableix una relació amb els acords per tal de poder aprofitar l'estudi realitzat al capítol anterior. A més, s'exploren diferents mesures per tractar de quantificar el seu grau de "raresa".

Capítol 5

A l'últim capítol canvia lleugerament el paradigma. Malgrat que seguim parlant de notes musicals, en lloc de conjunts es passa a considerar successions. En particular, s'estudia un cas senzill com són les fileres de tons. Primer es dota d'estructura matemàtica aquest objecte musical, per després fer-ne un estudi combinatori fent servir eines de la teoría de grups. El capítol està basat en [2], sobretot pel que fa al rigor matemàtic, però també s'han fet servir l'article [6] i un capítol de [5], que fan referència a la música dodecatonal.

Altres recursos

A banda d'aquestes referències bilbiogràfiques, s'han fet servir apunts i resultats de la teoria de grups de l'assignatura d'estructures algebraiques, impartida a la FME pel professor Francesc Planas.

Al llarg del treball s'ha fet ús del paquet TikZ de LaTeX per tal de generar diferents figures, amb la intenció de facilitar la comprensió del contingut i de fer els raonaments més visuals. També s'han realitzat diversos algorismes senzills, programats en llenguatge Python, per calcular els valors d'algunes de les fórmules explícites que es demostren al llarg del treball.

Capítol 1

Conceptes musicals previs

1.1 So i notes musicals

Per aproximar-nos al concepte de nota musical, és interessant tenir primer una noció de què és el so, i com el percebem els humans. Com a concepte físic, el so és un fenomen vinculat a la difusió d'ones elàstiques produïdes per la vibració d'un cos. Per als éssers humans, el so audible consisteix en les variacions que es produeixen en la pressió de l'aire, que l'oïda converteix en ones mecàniques per tal que el cervell pugui rebre-les i processar-les.

Deixant de banda la seva durada, el **so** té tres característiques principals: la intensitat, el to (o alçada) i el timbre. Aquestes estan relacionades amb les propietats físiques de l'ona en qüestió: amplada, freqüència i espectre, respectivament.

La *intensitat* és la amplada de la vibració de l'ona, que es percep com el volum del so. El *to* ve determinat per la freqüència de l'ona, que fa que els sons siguin més aguts o més greus. El *timbre* correspon a la forma que té cada període de l'ona, que pot ser molt diversa, i és el que fa que distingim unes veus d'unes altres, o que identifiquem dos instruments diferents encara que toquin la mateixa nota.

Per diferenciar bé aquests conceptes és interessant veure un exemple. La ona d'un *so pur* amb freqüència f i amplada A és una funció sinusoïdal. Ve donada per $A\sin(2\pi ft)$, i podem identificar el to amb la seva freqüència. Però el so normalment és una superposició de tons purs amb freqüències i amplades diferents, que s'anomenen *parcials*. Aquests són els que formen el que coneixem com el timbre del so.

Una **nota musical** és qualsevol so amb una freqüència ben definida.

Per tant podem comparar les notes entre elles fent servir les seves freqüències. Siguin dues notes amb freqüències f i g respectivament, considerem el quocient f/g, que anomenarem l'*interval* entre aquestes dues notes. És important notar aquesta correspondència logarítmica: quan es parla d'addició d'intervals, s'està parlant també de producte de freqüències.

Així, si $f/g = 1$, és clar que les dues notes són, en realitat, la mateixa. El següent cas més simple (i interessant) és quan el quocient és $f/g = 2$. En aquest cas la freqüència d'una nota és el doble que la de l'altre. Quan això passa, les dues notes sonen molt semblant i a aquest interval se li diu *octava*. Dues notes separades per una octava són essencialment la mateixa, i tenen el mateix nom. En aquest sentit, les considerarem equivalents (principi d'equivalència d'octaves).

Les escales es creen seleccionant notes a partir d'aquestes relacions. El cas més important i amb el que treballarem és el de les **escales de L tons amb temperament igual**, és a dir, de L divisions iguals de l'octava. Es formen partint d'un to inicial, i s'afegeixen $L-1$ notes equiespaiades entre aquest to i la seva octava. Aquesta divisió s'estén a les octaves inferiors i superiors. Com que estem dividint l'interval entre octaves en L intervals de la mateixa mida, si i un d'aquests petits intervals, el que tenim és que $i^L = 2$, donat que la relació entre les freqüències de dues octaves adjacents és $2:1$. Aleshores, veiem que el valor de i és $i = \sqrt[L]{2}$. Aquest interval entre dues notes adjacents l'anomenarem *graó* o pas.

El cas més important i el més estès a la música occidental, és el cas en què $L = 12$, en què el graó s'anomena *semitò* i correspon a una raó de freqüències de $\sqrt[12]{2}$. Tot el sistema de notació musical i el disseny i construcció de molts instruments es basen en aquesta escala.

Aquestes escales amb les freqüències equiespaiades són ideals per fer-ne un estudi matemàtic. Donat que dues notes que es troben a una octava són isomorfes, podem entendre que les notes es repeteixen cíclicament. Per tant es poden pensar i representar de manera circular, com es mostra al diagrama de la figura 1.1. De fet, es pot prescindir de la notació musical, i denotar les 12 notes com els 12 enters entre 0 i 11.

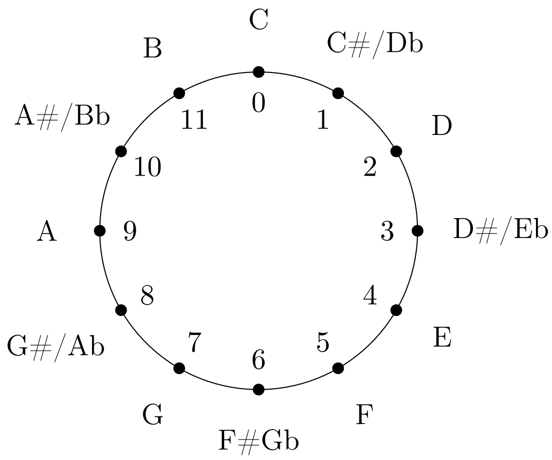

Figura 1.1: Representació circular de les 12 notes musicals

1.2 Acords

Un **acord** és un conjunt de notes que sonen alhora. Això genera un so més complex del que es pot generar amb una sola nota.

És clar que el nombre de notes que poden formar un acord està fitat entre 1 i el nombre total de notes L de l'escala. Generalment els acords es designen per la seva nota *tònica*, que defineix el centre harmònic, seguida d'un nom que especifica el *tipus* d'acord (major, menor, sostingut...). Aquests tipus d'acords ens indiquen quines altres notes formen l'acord. Per exemple, fer un acord major consisteix en afegir a la tònica dues notes situades 4 i 7 semitons per sobre.

De fet, la nota tònica pot aparèixer a qualsevol posició de l'acord. Per exemple, l'acord de do major (C E G) també es pot escriure com (E G C), que té les mateixes notes però en diferent ordre. Diferents ordenacions del mateix acord s'anomenen *inversions*.

En música, dos acords del mateix tipus, independentment de la tònica escollida, es consideren el mateix. Això es deu a que les notes que formen els dos acords tenen la mateixa relació fixada respecte la tònica. En particular, tenen els mateixos *intervals* entre les notes. Com a conseqüència, aquests dos acords tenen sons molt similars.

Canviar la tònica a una altra nota mantenint el tipus d'acord, és el que en música s'anomena *transposició*. Així, podem dir que dos acords són el mateix si podem transposar un en l'altre.

Aquest fet el podem pensar sobre dos diagrames circulars com el de la figura 2.1. Primer de tot seleccionant en el diagrama els subconjunts de notes de l'escala que formen cada acord. Aleshores, direm que dos acords són *isomorfs* si podem fer una rotació d'un dels diagrames per tal que les notes seleccionades coincideixin una a una amb les del diagrama de l'altre acord.

Així, veiem que el que en realitat defineix el so d'un acord són els intervals entre les notes que el formen. Establir aquest isomorfisme entre acords és el que ens permetrà estudiar-los amb eines matemàtiques.

1.3 Escales

Suposem que ens basem en una escala de L tons amb temperament igual. Quan la fem servir per tal de crear melodies, estem restringits a les L notes essencialment diferents que hi ha a l'escala. A banda d'aquesta restricció intrínseca, habitualment les peces musicals fan servir només algun subconjunt d'aquestes L notes.

Una **escala** és un conjunt de notes de l'escala fonamental, que formen un entorn musical.

Per tant, una escala és semblant a un acord, en el sentit que és un subconjunt de les L notes diferents disponibles. Existeix, però, una diferència fonamental. En els acords totes les notes sonen de manera simultània. En canvi, en una escala la primera nota sempre ha de ser la *tònica*, que marca la tonalitat de l'escala. La tonalitat s'entén com una espècie de jerarquia entre notes, en què la tònica juga un paper més important que la resta, i genera una sensació de repòs de la melodia. Això fa que, a diferencia del que passa amb els acords, l'ordre de les notes sigui important.

Tot i així, dues escales també poden ser *isomorfes*, i en aquest cas també tenen el mateix nom (major, menor, pentatònica,...). Aquest isomorfisme es dona quan es pot transposar una escala per tal que mantingui els mateixos intervals entre notes que l'altre.

Però si intentem repetir el procediment dels diagrames per a les escales, s'ha de fixar un punt per marcar l'inici de l'escala, la nota tònica, i s'ha de mantenir sempre a la primera posició. Per tant, en realitat no es poden fer els moviments de rotació que hem vist amb els acords. Així, ja no ajuda pensar en les notes com a la figura 1.1, sinó que més aviat les hem de disposar en una línia recta en la que la nota tònica sempre apareixerà la primera.

Capítol 2

Collars i cadenes

És necessari introduir les definicions de dos objectes matemàtics que podem relacionar directament amb els conceptes musicals anteriors, i ens permetran així abordar les qüestions musicals plantejades a partir del seu estudi.

Definició 1. *Una* ***cadena*** *és un conjunt de n boles de m colors diferents disposades en ordre al llarg d'una línia recta. Dues n-cadenes es consideren la mateixa si i només si les boles corresponents a la mateixa posició són del mateix color. En aquest cas direm que les dues cadenes són isomorfes.*

Definició 2. *Un* ***collar*** *és una cadena amb els dos extrems connectats, formant així una cadena circular. Dos n-collars són isomorfs si i només si podem fer una rotació d'un d'ells per tal que els colors de les boles corresponguin un a un amb els de les boles de l'altre.*

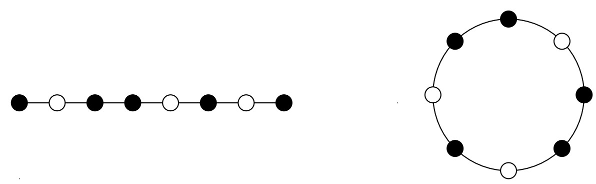

Figura 2.1: Exemples de cadena i collar amb $n = 8$ i $m = 2$

L'anàlisi d'aquests dos objectes és fonamental per analitzar la música des del punt de vista de la combinatòria. Donat que, com veurem a continuació, tenim una relació directa entre les cadenes i les escales i entre els collars i els acords.

2.1 Connexió musical

Com ja hem vist, una escala de L notes amb temperament igual es pot identificar amb una disposició circular de les notes. És a dir, en realitat es tracta d'una seqüència cíclica, que també podem identificar amb els enters des de 0 fins a $L - 1$.

Tant els acords com les escales són subconjunts d'aquestes notes, i observem que es poden representar de manera binària. Això és, fer correspondre a les notes que pertanyen al subconjunt el color negre, i a les notes que no es fan servir el color blanc.

A més, dos acords es consideren el mateix si podem transposar un en l'altre. Aleshores, veiem que la condició per tal que dos acords siguin isomorfs és la mateixa que per a que dos collars ho siguin. En el cas de les escales, no disposem d'aquest isomorfisme rotacional, donat que la tònica sempre ha de ser a la primera posició. Per tant, les podem identificar amb les cadenes.

Donat que els acords i les escales són conjunts de notes musicals que es poden identificar amb enters, podem fer servir aquests nombres per representar-los. Sovint, també ens referirem a aquests conjunts fent servir els intervals entre les n notes que formen els acords i les escales. És a dir, el nombre de semitons que les separen. És interessant observar que aquests intervals sempre sumen L. Per tant, direm que són una *partició ordenada* de L en n parts. La figura 2.2 recull les diferents opcions de les que disposem per tal de representar els acords i les escales, tant de forma musical com matemàtica, que farem servir al llarg del treball.

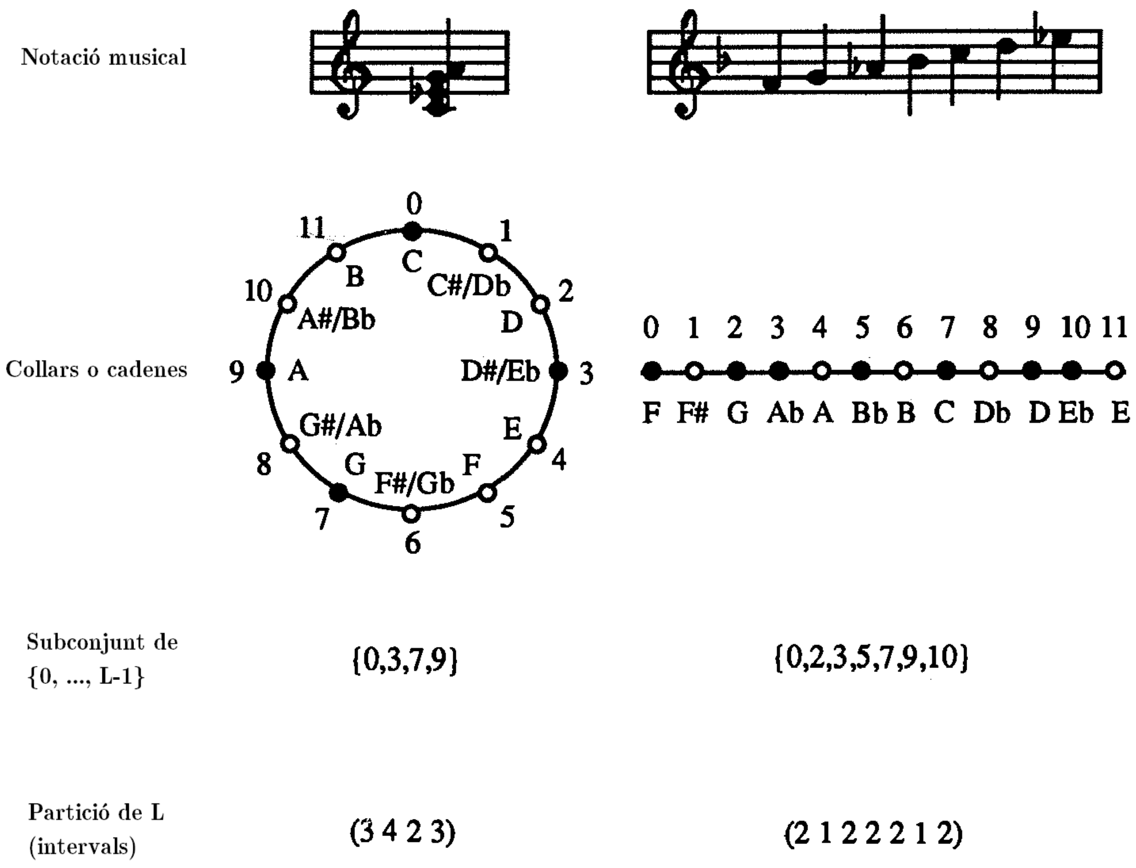

Figura 2.2: Diferents tipus de notacions equivalents. (Imatge de [1])

Així, hem establert una connexió entre els conceptes musicals que es volen estudiar i determinats objectes que podem treballar mitjançant les matemàtiques. Ara ja disposem, doncs, de la base necessària per tal d'explorar les diferents propietats dels acords i les escales. La primera qüestió que sorgeix és saber quants acords i escales essencialment diferents existeixen. Aquesta és precisament la motivació de les seccions següents. Així doncs, el problema de comptatge que es planteja és el següent:

Quantes cadenes i collars diferents hi ha amb n boles de m colors, donat el nombre de boles de cada color?

Observem que per tal de representar els acords i les escales en tenim prou amb el cas $m = 2$. No obstant, en els capítols posteriors també necessitarem conèixer la solució per al cas general amb m colors.

2.2 Comptar cadenes

Restringim-nos primer al cas en què $m = 2$. És a dir, només tenim 2 colors possibles per a les boles (per exemple, negres i blanques). Volem saber quantes cadenes diferents hi ha amb n boles i exactament k boles negres.

La solució a aquest problema és ben coneguda. Tenim k boles negres: $n_1, n_2, ..., n_k$. Per tant, és clar que tenim $n - k$ boles blanques: $b_1, b_2, ..., b_{n-k}$.

Com en total tenim n posicions, sabem que hi ha $n!$ permutacions possibles en la cadena. I com que estem considerant iguals les boles del mateix color, les possibles permutacions de les boles blanques i negres en una posició donada és $k!\,(n-k)!$.

Aleshores el nombre total de cadenes és el nombre total de permutacions de totes les posicions dividit entre el nombre de vegades que comptem cada ordenació amb les boles blanques i negres en una posició donada. Això és

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{2.1}$$

Hem obtingut el coeficient binomial, que també es pot interpretar com el nombre de maneres diferents de triar k objectes d'entre n objectes diferents. En el nostre cas, estem triant en quines de les n diferents posicions posarem les k boles negres. A la figura 2.3 es mostra un exemple pel cas $n = 4$ i $k = 2$.

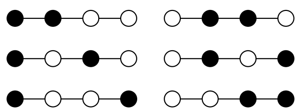

Figura 2.3: Les 6 cadenes possibles per a $n = 4$ i $k = 2$

En realitat no es fa servir en cap moment?!Considerem ara el problema general en què $m > 2$. Volem saber quantes cadenes diferents hi ha amb n boles de m colors diferents que continguin exactament k_i boles del color i (amb $1 \leq i \leq m$). Notem que la suma de les boles de cada color ha de ser exactament n. És a dir, que $\sum k_i = n$.

Repetint el raonament anterior, el resultat és el nombre total de permutacions de totes les diferents posicions dividit entre el nombre de possibles permutacions de les k_i boles de cada color i. Per tant, obtenim

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,...\,k_m!} = \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} \tag{2.2}$$

Això és el que coneixem com a coeficient multinomial. A la figura 2.4 es mostra un exemple pel cas en què $n = 4$ i $k = 3$ amb dues boles negres, una grisa i una altra de blanca.

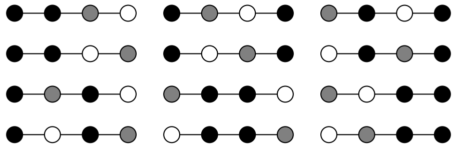

Figura 2.4: Les 12 cadenes possibles per a $n = 4$ i $k = 3$ amb $k_1 = 2$ i $k_2 = k_3 = 1$

2.3 Comptar collars

El problema de comptar collars es més complex que el de comptar cadenes. Per resoldre'l necessitarem un teorema molt potent, però abans d'enunciar-lo és necessari analitzar el nostre problema i introduir un concepte que ens permetrà abordar-lo correctament.

Definició 3. ***Configuració:*** *Suposem que tenim un conjunt de n caixes, i m tipus d'objectes diferents. A cada objecte li assignem un pes $(w_1, w_2, ..., w_m)$, i tenim un nombre il·limitat de cada tipus. Obtenim una configuració omplint cada capsa amb un objecte de qualsevol tipus d'entre els m disponibles. El* ***pes*** *de la configuració és la suma dels pesos dels objectes de cada capsa.*

Així, el problema de les configuracions consisteix en, donat un pes, comptar el nombre diferent de configuracions que existeixen amb aquest pes donat. Cal notar que els pesos w_i no són nombres, sinó més aviat símbols, o simplement diferents tipus d'objectes. El que es vol evitar és que algun pes pugui ser una combinació lineal d'altres.

Aplicat al nostre problema, les n caixes són les n posicions diferents del collar i els m tipus diferents d'objectes són les boles dels m colors diferents. Aleshores, el problema de saber quants collars hi ha amb n boles escollides d'entre els m colors diferents amb exactament k_i boles de color i, és equivalent a comptar quantes configuracions diferents existeixen amb pes $k_1w_1 + k_2w_2 + ... + k_mw_m$.

Encara cal fer una altra consideració per identificar del tot el problema de les configuracions amb el de comptar collars. Notem que en els collars les posicions on es troben les boles de diferents colors són importants i, per tant, també s'han de tenir en compte. Aleshores, té sentit imposar que dues configuracions es considerin equivalents si són la mateixa sota qualsevol permutació d'un conjunt de permutacions G donat.

Com ja hem vist, dos collars es consideren isomorfs si un és una rotació de l'altre. Per tant, el conjunt G a considerar ha de ser el de totes les rotacions possibles d'un collar. Això és el conjunt generat per

$$G = \left\{ a^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{on} \quad a = \begin{pmatrix} 1 \; 2 \; 3 \cdots n-1 \; n \\ 2 \; 3 \; 4 \cdots \quad n \quad 1 \end{pmatrix}$$

És clar que aquest conjunt G és un grup. De fet, es tracta del *grup cíclic d'orde n*, que denotem pel símbol C_n.

Així, hem obtingut la versió definitiva del problema, en el que voldrem saber el nombre de configuracions diferents amb uns pesos donats i imposant la condició que dues configuracions són equivalents si són iguals sota alguna permutació (escollida del grup G definit) de les caixes. Introduïm ara les últimes definicions necessàries abans d'enunciar el teorema que ens permetrà resoldre'l.

Definició 4. *El* ***monomi d'índexs cíclics*** *d'una permutació de n elements és l'expressió $z_1^{a_1} z_2^{a_2} ... z_n^{a_n}$. On z és un símbol arbitrari, i els a_i són el nombre de cicles de mida i que conté la permutació.*

Definició 5. *El* ***polinomi d'índexs cíclics*** *d'un grup de permutacions G és la suma de tots els monomis d'índexs cíclics de cada permutació en G. Notarem aquest polinomi com*

$$P(G; z_1, z_2, ..., z_n)$$

Veiem un exemple per tal d'aclarir aquestes definicions. Considerem directament un grup de permutacions com els que necessitem, pel cas $n = 5$.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \right\}$$

Observem que la primera permutació té 5 cicles de mida 1, per tant el seu monomi d'índexs cíclics és z_1^5. Les altres quatre permutacions són cicles de mida 5, així els seus monomis seran tots z_5. Aleshores, obtenim el següent polinomi d'índexs cíclics associat al grup G

$$P(G; z_1, z_2, ..., z_n) = z_1^5 + z_5 + z_5 + z_5 + z_5 = z_1^5 + 4z_5$$

Ara ja estem en condicions d'introduir el teorema que necessitem per a resoldre el problema.

Teorema 1. ***Pólya***. *El nombre de configuracions (fent servir n caixes i m tipus d'objectes diferents) amb pes $k_1w_1 + k_2w_2 + ... + k_mw_m$, on dues configuracions es consideren equivalents si són la mateixa sota alguna permutació d'un grup de permutacions G, és igual al coeficient de $w_1^{k_1}w_2^{k_2}...w_m^{k_m}$ en el polinomi*

$$\frac{1}{|G|}P(G; \sum w_i, \sum w_i^2, ..., \sum w_i^n) \tag{2.3}$$

No es donarà una demostració explícita, però es pot trobar a [2, 7]. El teorema ens diu com trobar el nombre de configuracions diferents del problema plantejat. Hem de canviar cada z_r en el polinomi d'índexs cíclics per $\sum w_i^r$ i després dividir el coeficient del terme $w_1^{k_1}w_2^{k_2}...w_m^{k_m}$ entre $|G|$, que és el nombre de permutacions considerades.

Tornem a l'exemple anterior per entendre millor com funciona. Ens preguntem quants collars diferents amb 5 boles hi ha, per exemple, amb 2 boles negres i 3 de blanques. Estem fixant, doncs, $n = 5$ i $m = 2$, i els hi assignem als dos tipus de boles diferents (negres i blanques) els pesos w_1 i w_2. Per tant, volem saber el nombre de configuracions amb pes $2w_1 + 3w_2$.

Com hem vist, el polinomi associat al grup $G = C_5$ és $z_1^5 + 4z_5$. Substituint els z_r pels $\sum w_i^r = (w_1^r + w_2^r)$ i dividint entre $|G| = 5$ obtenim

$$\frac{1}{5}\left[(w_1 + w_2)^5 + 4(w_1^5 + w_2^5)\right]$$

I fent la seva expansió binomial obtenim

$$w_1^5 + w_1^4w_2 + 2w_1^3w_2^2 + 2w_1^2w_2^3 + w_1w_2^4 + w_2^5$$

Donat que el coeficient del terme $w_1^2w_2^3$ és 2, el teorema de Pólya ens diu que existeixen dues configuracions amb exactament 2 boles negres i 3 de blanques. Són les que es mostren a la figura 2.5. Es pot comprovar que la resta de collars amb dues boles negres són, en realitat, una rotació d'aquests dos.

També és interessant observar que el teorema de Pólya alhora resol el problema de comptar cadenes, on ara el nostre grup de permutacions G serà el grup trivial format només per la permutació identitat, donat que quan comptem cadenes no permetem fer cap canvi entre les caixes. Per tant, el polinomi d'índexs cíclics per a G serà z_1^n, ja que la permutació identitat té n cicles de mida 1. Substituint el z_1 per $\sum w_i$ tenim el nou polinomi

$$\left(\sum w_i\right)^n = (w_1 + w_2 + ... + w_m)^n$$

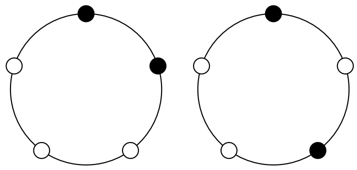

Figura 2.5: Els dos collars possibles amb 2 boles negres i 3 boles blanques

Del qual podem calcular els coeficients $w_1^{k_1}w_2^{k_2}...w_m^{k_m}$ que vulguem conèixer. Això és pot fer fàcilment observant que l'expressió és la suma de m termes elevats a una potència n. Sabem que els coeficients venen donats precisament pel coeficient multinomial $\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m}$. Així, hem obtingut el mateix resultat que amb l'anàlisi de la secció anterior: el nombre de cadenes donat el nombre de boles de cada color és igual al coeficient multinomial.

Fórmules per a $N(n,k)$ i $N(n,k_1,k_2,...,k_m)$

Finalment, ja disposem de totes les eines necessàries per resoldre el problema de comptar collars. Notem per $N(n,k)$ el nombre de n-collars de dos colors amb k boles negres, i per $N(n,k_1,k_2,...,k_m)$ el nombre de n-collars de boles de m colors amb k_i boles de cada color i (amb $1 \leq i \leq m$). Aquests nombres són anàlegs als coeficients binomials i multinomials, però ara compten collars en comptes de cadenes. Fent servir el teorema de Pólya volem obtenir una fórmula per a $N(n,k)$ i per al cas més general $N(n,k_1,k_2,...,k_m)$. Per tal d'aplicar el teorema, necessitem calcular el polinomi d'índexs cíclics del grup de permutacions C_n associat als collars amb n boles. Per simplicitat, considerem primer el cas amb dos colors.

Considerem l'element de C_n que correspon a fer un desplaçament de k posicions. En aquesta permutació, la longitud del cicle d'un element de la permutació donat, és l'enter d més petit tal que

$$dk = mn$$

per a algun enter m. Com que la operació de permutar consisteix en avançar cada element k posicions, i donat que d operacions produeixen un desplaçament d'un múltiple de n posicions, aleshores haurem tornat a la permutació inicial, que és la definició de cicle. El valor $dk = mn$ és, de fet, el mínim comú múltiple de k i n, o $mcm(k,n)$.

Si k és coprimer amb n, aleshores tindrem $mcm(k,n) = kn$, que vol dir que $d = n$. Per tant, si k és coprimer amb n, la longitud del cicle de la permutació serà exactament n.

Ara suposem que k i n no són coprimers, i que tenen un factor en comú s. Aleshores l'equació anterior esdevé

$$d\frac{k}{s} = m\frac{n}{s} = mcm\left(\frac{k}{s}, \frac{n}{s}\right)$$

Com abans, si aquests valors $\frac{k}{s}$ i $\frac{n}{s}$ són coprimers, aleshores $d = \frac{n}{s}$. Notem que en tots els casos d és un divisor de n.

Per a un d donat, si $s = \frac{n}{d}$, el nombre d'elements de C_n amb longitud de cicle d és el nombre d'enters menors que i coprimers amb $\frac{n}{s} = d$. Definim una funció que expressa aquest mateix concepte i ens serà molt útil a nivell de notació.

Definició 6. *La **funció phi de Euler**, o $\phi(d)$, està definida com el nombre d'enters menors* *que d i coprimers amb d. També ve donada per la fórmula:*

$$\phi(d) = d \prod_{\substack{p\, primer \\ p|d}} \frac{p-1}{p}$$

A més, en una permutació amb longitud de cicle d, a cada cicle hi estan involucrats d elements de la permutació, i per tant hi ha $\frac{n}{d}$ cicles així.

Per tant, hem vist que la longitud possible dels cicles dels elements de C_n són tots els divisors d de n. Per a cada d, hi ha $\phi(d)$ elements amb aquesta longitud de cicle. A més, a cadascun d'aquests elements li corresponen $\frac{n}{d}$ cicles. Aleshores obtenim l'expressió

$$P(C_n; z_1, z_2, ..., z_n) = \sum_{d|n} \phi(d) z_d^{\frac{n}{d}} \tag{2.4}$$

Aplicant el teorema de Pólya, substituïm ara cada z_r en el polinomi per $\sum w_i^r$. En aquest cas només tenim dos pesos w_1 i w_2, que anomenarem x i y per simplificar la notació. Aleshores, substituïnt cada z_r per $(x^r + y^r)$ obtenim

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d)(x^d + y^d)^{\frac{n}{d}} \tag{2.5}$$

Per tant, el valor de $N(n, k)$ és el coeficient de $x^k y^{n-k}$ en aquest polinomi. Depenent dels valors de d, hi ha dos casos a considerar:

1. Suposem que d no és un divisor de k. Ara totes les potències de x que apareixen a la expansió del polinomi seran de la forma x^t, on t és un múltiple de d. Si d no és un divisor de k, aleshores cap múltiple de d pot ser igual a k. Per tant, no es pot generar cap terme de la forma $x^k y^{n-k}$ si d no és un divisor de k.

2. Suposem ara que d és un divisor de k. En comptes de fixar-nos en el coeficient de $x^k y^{n-k}$ en la expansió de $(x^d + y^d)^{\frac{n}{d}}$, podem mirar directament el coeficient de $x^{\frac{k}{d}} y^{\frac{n-k}{d}} = x^{\frac{k}{d}} y^{\frac{n}{d} - \frac{k}{d}}$ en la expansió de $(x + y)^{\frac{n}{d}}$. Però això és simplement el coeficient binomial $\binom{n/d}{k/d}$.

Així, hem obtingut una fórmula per a $N(n, k)$, i donem per demostrada la següent proposició.

Proposició 1. *El nombre de n-collars amb boles de dos colors i exactament k boles d'un color ve donat per la fórmula:*

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \sum_{d|n,k} \phi(d) \binom{n/d}{k/d} \tag{2.6}$$

Per veure un exemple, calculem el valor de $N(8, 4)$. És a dir, el nombre de collars de 8 boles amb 4 de negres i 4 de blanques. La d pren valors 1, 2 i 4; que són els divisors de $n = 8$ i $k = 4$. Així

$$N(8, 4) = \tfrac{1}{8} \left[\phi(1)\tbinom{8}{4} + \phi(2)\tbinom{4}{2} + \phi(4)\tbinom{2}{1}\right] = \tfrac{1}{8} [1 \cdot 70 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2] = 10$$

A la taula 2.1. es mostren els valors de $N(n, k)$ i de $N(n, *)$ per a $n, k \leq 12$. Es pot observar que els valors de cada fila són simètrics. És a dir, que

$$N(n, n - k) = N(n, k)$$

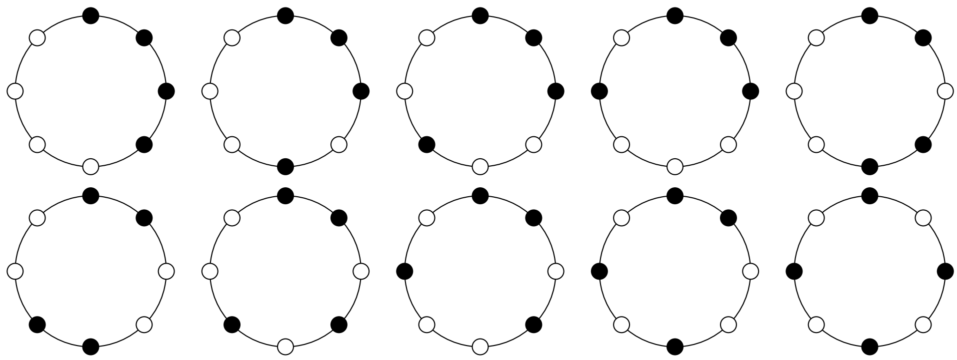

Figura 2.6: Els 10 collars possibles per a $n = 8$ i $k = 4$

		k													
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
	1	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	2
	2	1	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	3
	3	1	1	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	4
	4	1	1	2	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	6
	5	1	1	2	2	1	1	·	·	·	·	·	·	·	8
	6	1	1	3	4	3	1	1	·	·	·	·	·	·	14
n	7	1	1	3	5	5	3	1	1	·	·	·	·	·	20
	8	1	1	4	7	10	7	4	1	1	·	·	·	·	36
	9	1	1	4	10	14	14	10	4	1	1	·	·	·	60
	10	1	1	5	12	22	26	22	12	5	1	1	·	·	108
	11	1	1	5	15	30	42	42	30	15	5	1	1	·	188
	12	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	352

Taula 2.1: Valors de $N(n, k)$ per a $1 \leq n \leq 12$ i per a $0 \leq k \leq 12$

Aquesta propietat també és certa per als coeficients binomials que compten les cadenes, i ho és pel mateix motiu. Veiem una definició que il·lustra aquest fet.

Definició 7. *El **collar dual** d'un collar donat amb $m = 2$, és el collar corresponent a intercanviar les boles negres per boles blanques i viceversa.*

S'estableix de manera immediata una bijecció entre uns collars i els seus duals. Per tant, el nombre de collars diferents amb n boles negres és igual al nombre de collars diferents amb n boles blanques (i $n - k$ negres).

Per tal de trobar una fórmula per al cas generalitzat de comptar collars amb boles de colors diferents, el procediment és anàleg a l'anterior.

Proposició 2. *El nombre $N(n, k_1, ..., k_m)$ de collars de n boles de m colors diferents amb k_i boles de cada color i ve donat per la fórmula:*

$$N(n, k_1, ..., k_m) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d|k_i\ (1 \leq i \leq m)}} \phi(d) \binom{n/d}{k_1/d, k_2/d, ..., k_m/d} \tag{2.7}$$

Capítol 3

Estudi dels acords

Al llarg d'aquest capítol farem servir un punt de vista matemàtic per proposar diferents classificacions dels acords, basant-nos en diverses propietats que poden tenir. També es discutirà la connexió entre aquestes classificacions matemàtiques i les seves implicacions musicals.

Per tal de començar l'anàlisi dels acords, primer de tot volem saber el nombre d'acords diferents de n notes que existeixen en una escala de temperament igual amb L notes, que denotarem per $Ch(L,n)$.

Recordem que aquests acords són equivalents a collars amb L boles de 2 colors. Farem correspondre a les n notes fetes servir a l'acord el color negre, i a les notes que no hi apareixen el color blanc. Així, tenim que $Ch(L,n) = N(L,n)$, on els valors de $N(L,n)$ es poden calcular fent servir la fórmula de la proposició 1. [1] Aleshores el nombre total d'acords en una escala amb L notes és

$$Ch(L,*) = N(L,*) = \sum_{1 \leq n \leq L} N(L,n) \tag{3.1}$$

Notem que no estem comptant l'acord sense cap nota, és a dir quan $n = 0$, donat que no té cap interès musical en particular. Fem doncs el càlcul per al cas habitual en que $L = 12$. Els valors de $Ch(12,n)$ per a cada n es mostren a la taula 3.1.

Nombre de notes (n)	Nombre d'acords
12	1
1 o 11	1
2 o 10	6
3 o 9	19
4 o 8	43
5 o 7	66
6	80

Taula 3.1: Valors de $Ch(12,n)$ per a $1 \leq n \leq 12$

Observem que tornem a trobar la simetria deguda a la dualitat dels collars en els valors de

[1] Es produeix un canvi de notació respecte el capítol anterior. Per comoditat, d'ara endavant n serà sempre el nombre de notes d'un acord o escala.

$Ch(L, n)$. Aleshores, el nombre que volíem calcular és

$$Ch(12, *) = 1 + 2 \cdot (1 + 6 + 19 + 42 + 66) + 80 = 351$$

I arribem a la conclusió que **existeixen 351 acords essencialment diferents** en l'escala de 12 notes que es fa servir habitualment.

L'objectiu d'aquest capítol és el de classificar aquests $Ch(L, *)$ acords en funció de diferents propietats que poden tenir. Definirem un seguit de funcions $F(L, n, p)$ que comptin el nombre d'acords de n notes d'entre una escala de L possibles i que compleixin la condició addicional del paràmetre p, que s'especificarà en cada cas. Voldrem trobar fórmules explícites per a aquestes funcions F.

De la mateixa manera que s'ha fet en aquesta secció, habitualment fixarem $L = 12$. Així serà possible fer els càlculs només en funció de les dues variables n i p. Sempre s'intentarà, però, deduir les fórmules explícites per al cas general on L és arbitrària.

3.1 Anàlisi de l'interval mínim

Definició 8. *L'**interval mínim entre les notes d'un acord** és la distància, mesurada en semitons, entre les dues notes més properes de l'acord. Denotarem el nombre d'acords amb n notes i interval mínim més gran o igual que m com $I(L, n, m)$.*

Hi ha diversos motius pels quals aquesta propietat dels acords és rellevant. El més important és que els intervals entre les notes de l'acord determinen les freqüències relatives i, per tant, l'estructura harmònica de la forma de l'ona resultant. A més, existeix un fenomen físic anomenat *batiment* estretament relacionat amb el mínim interval entre dues notes d'un acord. Veiem-ne un exemple.

Considerem un acord simple format per dues notes, i suposem que cada nota ve donada per una ona cosinusoidal. Si la primera nota té freqüència f i la segona $f + d$, la ona resultant quan les dues sonin alhora tindrà la forma

$$y(t) = \cos 2\pi f t + \cos 2\pi(f + d)t$$

On t és el temps i y és la amplada de l'ona resultant. Aleshores fent servir que $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{b-a}{2}\cos\frac{b+a}{2}$, obtenim la següent expressió

$$y(t) = [2\cos\pi d t]\cos 2\pi\left(\frac{f+d}{2}\right)t = A\cos 2\pi\left(\frac{f+d}{2}\right)t$$

On $A = 2\cos\pi d t$ és l'amplada de l'ona composta. Per tant, veiem que l'amplada varia amb freqüència d, que és la diferència entre les freqüències de les dues notes. Per tant, cada parell de notes d'un acord produeixen un batiment proporcional a l'interval entre aquestes. Per exemple, suposem que formem acords al voltant de la nota La = 440 Hz. Un mínim interval de una nota ($m = 1$) generarà una freqüència de batiment d'uns 26 Hz, que està molt per sota del rang de freqüències fonamentals que formen l'acord, i per tant és molt fàcil de percebre.

Existeixen altres raons per les quals estudiar l'interval mínim d'un acord pot ser interessant, aquestes són més aviat històriques o fins i tot psicològiques. Per exemple, els acords amb valors petits de m són més propensos a generar sensacions com ara tensió o misteri.

Per tal de comptar aquests acords utilitzarem un raonament que es repetirà més vegades al llarg del capítol. La idea és que un acord amb interval mínim m es pot pensar com un collar de L boles compost concatenant dos tipus de subcadenes diferents:

(a) Composta per una bola negra seguida de $m-1$ boles blanques, representant així la nota escollida en l'acord seguida de $m-1$ que no es fan servir. Ens asseguren que efectivament l'interval mínim entre notes serà m.

(b) Formada simplement per una bola blanca, representant una nota buida. Ens habiliten la possibilitat de que l'interval sigui més gran que m.

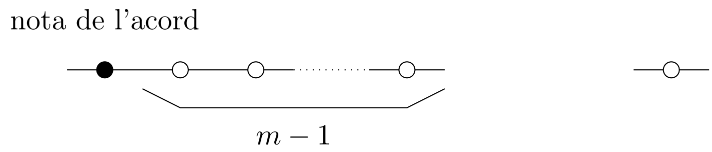

Figura 3.1: Els dos tipus de subcadenes (a) i (b)

Aleshores el collar ha de tenir exactament n subcadenes del tipus (a), donat que cadascuna conté una nota. Com que cadascuna d'aquestes subcadenes té m boles, ja tenim un total de nm boles. Per tal que el collar que representi l'acord, ha de tenir L boles en total. Així, hi ha d'haver $L-nm$ subcadenes del tipus (b). Per tant, el nombre total de subcadenes fetes servir serà $n+L-nm = L-n(m-1)$.

En aquest punt, és important observar que en el collar format per subcadenes, en realitat aquestes actuen com si fossin boles. Això passa perquè les subcadenes (a) i (b) no poden ser isomorfes sota rotacions, donat que una conté una bola negra i l'altre cap.

Així, el nombre de collars diferents formats per subcadenes és precisament el nombre d'acords diferents. Aleshores sabent quantes subcadenes de cada tipus hi ha, i fent servir la fórmula per a $N(L,n)$ de la proposició 1 vista al capítol anterior, donem per demostrat el següent teorema.

Teorema 2. *El nombre d'acords amb n notes i interval mínim més gran o igual que m ve donat per la fórmula:*

$$I(L,n,m) = N(L-n(m-1),n) \tag{3.2}$$

És clar que $I(L,n,m)=0$ si $nm > L$, ja que necessitem un mínim de nm posicions per poder tenir n notes a una distància mínima de m posicions. Tornem ara al cas habitual en que $L=12$. Els valors per a $I(12,n,m)$ es mostren a la taula 3.2.

Veiem que només hi ha 30 acords diferents amb un interval mínim de 2 semitons entre notes. Precisament aquests 30 acords són els que sovint més es fan servir a l'hora de fer música. Una prova d'això és que la majoria d'ells tenen noms propis, com ara l'acord major i el menor, o els acords disminuït i augmentat.

Una altra propietat d'interès és el nombre d'acords diferents amb mínim interval *exactament* igual a m. De fet, aquest resultat és immediat a partir del teorema 2 anterior.

Corol·lari 1. *El nombre d'acords amb n notes i interval mínim exactament igual a m, que denotarem per $K(L,n,m)$, ve donat per la fórmula:*

$$K(L,n,m) = I(L,n,m) - I(L,n,m+1) \tag{3.3}$$

		n												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
m	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	351
	2	1	5	10	10	3	1	·	·	·	·	·	·	30
	3	1	4	4	1	·	·	·	·	·	·	·	·	10
	4	1	3	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	5
	5	1	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	3
	6	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	2
	7,...,12	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1

Taula 3.2: Valors de $I(12, n, m)$: nombre d'acords de n notes amb interval mínim entre notes m.

Per tant, a partir els valors calculats per al cas $L = 12$ de la taula 3.2, podem calcular el nombre total d'acords diferents amb mínim interval $m = 1$.

$$\sum_n K(12, n, 1) = \sum_n (L(12, n, 1) - L(12, n, 2)) = 351 - 30 = 321$$

Així, hem trobat un primer nivell de classificació dels 351 acords en dos grups: els 30 en que tots els intervals superen el semitò, i els 321 que tenen com a mínim un interval d'un semitò. A la següent secció estudiarem i classificarem aquests últims acords amb més detall.

3.2 Anàlisi d'adjacències

Definició 9. *Quan en un acord hi ha un interval d'un semitò direm que conté una* ***adjacència****. Denotarem per $A(L, n, a)$ el nombre d'acords amb n notes d'entre L possibles que tinguin exactament a adjacències.*

Volem fer una classificació dels 351 acords en funció del nombre exacte d'adjacències que continguin. És un fet estès que els acords que contenen adjacències es poden considerar estranys, misteriosos, o fins i tot molestos. Una prova d'això és que els acords de la gran majoria de peces musicals tenen un nombre mitjà d'adjacències inferior a 1, i de fet, sovint molt proper a 0. Només algunes composicions contemporànies tenen valors mitjans de a superiors a 1.

Per tant, comptar el nombre d'adjacències pot ser una manera de classificar els acords segons el seu grau de raresa. El cas $a = 1$ és de particular interès, donat que els acords amb una adjacència són només lleugerament més estranys que els 30 acords amb $a = 0$.

Per tal de calcular els valors de $A(L, n, a)$, farem servir un raonament semblant al de la secció anterior. Ara, però, haurem de treballar amb collars de 3 o més colors.

Considerem primer el cas més simple en que $a = 1$. Donat que aquests acords tenen exactament una adjacència, els podem construir a partir de tres subcadenes diferents:

(a) Dues boles negres seguides d'una bola blanca. Aquí és on es produeix l'adjacència.

(b) Una bola negra representant una nota feta servir seguida d'una blanca. Aquestes boles blanques al final ens asseguren que no hi haurà més adjacències a l'acord.

(c) Formada simplement per una bola blanca, representant una nota buida.

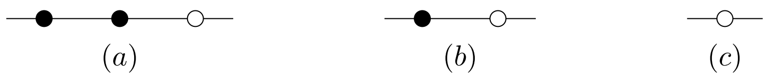

Figura 3.2: Els tres tipus de subcadenes que formen els acords amb $a = 1$

Aleshores el collar tindrà exactament una subcadena de tipus (a). Per tal de satisfer que l'acord tingui n notes, hi haurà d'haver $n-2$ subcadenes de tipus (b). Per tant, donat que hi ha L notes a l'escala, el nombre de subcadenes de tipus (c) és $L-3-2(n-2) = L-2n+1$. Així, el nombre total de subcadenes fetes servir és de $1+(n-2)+(L-2n+1) = L-n$.

Com abans, podem pensar els subcollars com a boles. D'aquesta manera el nombre d'acords diferents serà el nombre de collars formats per subcadenes. Però ara, donat que tenim tres tipus de subcadenes diferents, el collar està format per boles de tres colors diferents. Per tant ens queda

$$A(L,n,1) = N(L-n,\ 1,\ n-2,\ L+1-2n)$$

Estem fent servir la fórmula $N(L, k_1, ..., k_m,)$ de la proposició 2 que hem vist al capítol anterior. Els pesos són $(k_1, k_2, k_3) = (1, n-2, L+1-2n)$. Com que d ha de dividir tots els k_i, l'únic divisor possible és $d = 1$. Així, només obtindrem un terme al sumatori

$$A(L,n,1) = \frac{1}{L-n}\frac{(L-n)!}{1!\,(n-2)!\,(L+1-2n)!} = \frac{(L-n-1)!}{(n-2)!\,(L+1-2n)!}$$

Aquesta última expressió és, en realitat, un coeficient binomial. Aleshores, arribem a la següent fórmula

$$A(L,n,1) = \binom{L-n-1}{n-2} \quad \text{per} \quad 2 \leq n \leq \left\lfloor \frac{L+1}{2} \right\rfloor \tag{3.4}$$

Si ho pensem bé, aquesta solució binomial té molt sentit. Donat que només hi ha una adjacència, sense pèrdua de generalitat, la podem fixar al principi de l'acord. Després podem seleccionar les $n-2$ notes restants, però complint la restricció que cada nota ha d'anar seguida d'una altra que no es faci servir. Per tant, tindrem $L-1-(n-2) = L-n-1$ espais disponibles per escollir.

També ens interessa conèixer el nombre total d'acords amb només una adjacència, independentment del nombre de notes n. Trobem una sorprenent connexió amb la *successió de Fibonacci.*

Teorema 3. *El nombre total d'acords amb només una adjacència en una escala de L notes és igual al terme $L-3$ de la successió de Fibonacci.*

$$A(L,*,1) = F(L-3) \tag{3.5}$$

Demostració.

$$A(L,*,1) = \sum_{n=2}^{\lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor} \binom{L-n-1}{n-2} = \sum_{i \geq 0} \binom{L-3-i}{i}$$

En aquesta última expressió, observem que el primer terme de la suma és $\binom{L-3}{0}$ i que cada terme posterior és un coeficient binomial $\binom{n}{k}$ on la n va disminuint, mentre que la k va augmentant. Aleshores, veiem que $A(L,*,1)$ és igual a la suma de la diagonal $L-3$ del triangle de Pascal.

Sigui doncs $D(n)$ la suma de la diagonal del triangle de Pascal que comença a $\binom{n}{0}$, recordem una propietat important dels coeficients binomials:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Tal com es mostra de manera visual a la figura 3.3, fent servir aquesta identitat es pot deduir que

$$D(n) = D(n-1) + D(n-2)$$

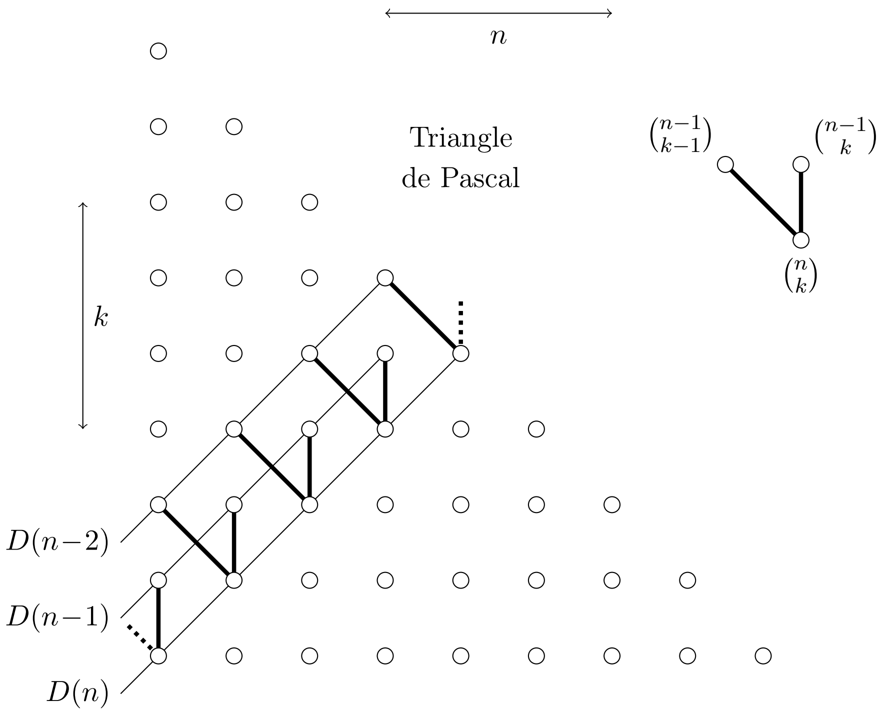

Figura 3.3: Demostració gràfica de $D(n) = D(n-1) + D(n-2)$

Observem que aquesta és precisament la recurrència que defineix els nombres de Fibonacci. A més, els termes inicials de la successió també són els mateixos, ja que $D(0) = D(1) = 1$. Per tant, és cert que $D(n) = F(n), \forall n$. Amb això, donem per demostrat el teorema. $\square$

Aleshores podem calcular, per a l'escala amb $L = 12$ notes, el nombre d'acords amb exactament 1 adjacència. Aquest nombre és $F(9) = 55$. Només uns quants d'aquests acords es fan servir habitualment. Probablement el més comú sigui l'acord major sèptima, molt estès en la música jazz, i que té intervals (4 3 4 1) entre les seves notes.

El cas $a = 2$ és lleugerament més complex. Això es deu a que aquests acords els podem separar en dos tipus: els que tinguin les dues adjacències consecutives i els que no. Així, a l'hora de construir els acords, cada tipus podrà estar format per diferents subcadenes. Aquestes es mostren a la figura 3.4, on també s'indica quantes d'aquestes subcadenes de cada tipus hi ha d'haver per tal de formar l'acord, que es calculen de manera anàloga al cas anterior.

Per tant, fent servir el mateix raonament que pel cas $a = 1$, obtenim la següent fórmula:

$$A(L, n, 2) = N(L-n,\ 1,\ n-3,\ L+2-2n) + N(L-n,\ 2,\ n-4,\ L+2-2n) \tag{3.6}$$

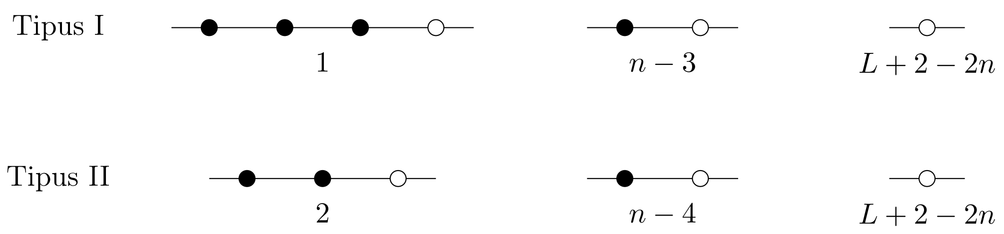

Figura 3.4: Les dues maneres diferents de crear acords amb $a = 2$

Seguint amb aquest procediment podríem trobar les fórmules per a valors de a superiors. Però cada vegada amb més dificultat, ja que el nombre de maneres diferents d'obtenir les adjacències va augmentant. Per tant, no ens entretindrem amb aquests càlculs.

Si que és interessant, però, comentar els resultats que se'n desprenen. Trobem que la majoria dels 351 acords tenen valors $a = 2$ i $a = 3$. De fet, si escollim un acord de manera aleatòria d'entre tots els possibles, el nombre esperat d'adjacències és aproximadament de 3.

Aquest fet és el que fa que, per exemple, quan algú toca les tecles d'un piano de manera aleatòria, el so resultant sigui normalment poc agradable. Recordem que si els acords amb $a = 1$ ja són relativament estranys, encara ho són més aquells que tenen valors de $a > 1$.

Així, per a una persona sense formació musical, una manera de tocar música que soni més "raonable" podria ser tocar només acords amb $a = 0$. Per a fer això es pot, per exemple, fer servir només les tecles negres del piano, donat que no són adjacents entre elles.

3.3 Anàlisi del període

Definició 10. *El **període** d'un acord és l'enter P més petit tal que si transposem aquest acord P notes obtenim exactament el mateix acord amb la mateixa tònica. O equivalentment, si després de fer una rotació de P posicions en el collar que representa l'acord, obtenim una altra vegada el mateix collar.*

Cal remarcar que, en aquest cas, per mateix collar entenem que les boles han d'estar *exactament* a la mateixa posició, obviant el concepte d'isomorfisme rotacional.

Aquesta propietat és útil quan es formen acords en un instrument de corda, com per exemple una guitarra. En aquests instruments els acords es formen posant els dits a les cordes en determinades posicions, normalment anomenades trasts, que es troben a cada semitò de la corda. Donada una posició dels dits a les cordes, podem transposar aquest acord movent tota la mà al llarg del mànec de l'instrument. Així, el període de l'acord serà el nombre de posicions que hem de moure per tal que aquest acord es repeteixi exactament. Per aquest mateix motiu, els acords amb un període petit són especialment interessants, donat que permeten tocar diferents inversions del mateix acord en ràpida successió de manera relativament senzilla.

Busquem doncs una fórmula per a $P(L, n, p)$, el nombre d'acords de n notes en una escala de L possibles amb període exactament p.

La deduirem amb la següent estratègia recursiva. Primer comptem el nombre de collars amb període $d \leq p$, per als d divisors de p, incloent totes les permutacions cícliques diferents. Després restem el nombre de collars amb període estrictament més petit que p (i les seves permutacions cícliques). Per tant, ens queden tots aquells amb període p més els seus cíclics. Donat que tots tenen període p, cadascun d'ells apareix exactament de p maneres diferents. Aleshores, si tornem a tenir en compte el concepte d'isomorfisme rotacional, el nombre de collars diferents és el nombre obtingut dividit entre p.

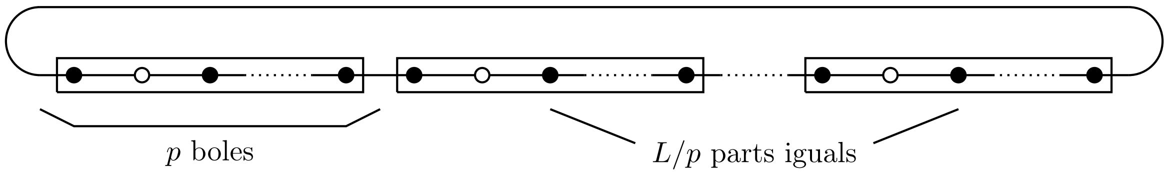

Figura 3.5: Un collar de L boles amb n negres i de període p (o possiblement igual a un divisor de p), que consisteix en L/p peces idèntiques amb p boles cadascuna.

A la figura 3.5 es mostra un collar genèric amb període p. Per definició, una rotació de p posicions és un isomorfisme, i per tant el collar ha d'estar format per una sèrie de segments idèntics de mida p. Notem que p ha de ser un divisor de L i que hi haurà L/p d'aquests segments. Donat que hi ha n boles negres en total, a cada segment n'hi ha d'haver $\frac{n}{L/p}$. Aleshores, si ignorem els isomorfismes de rotació, i només comptem els collars com els de la figura 3.5, veiem que hi ha

$$\binom{p}{\frac{n}{L/p}}$$

diferents. És possible, però, que entre aquests collars també hi siguin aquells amb períodes més petits que p i les seves respectives permutacions cícliques. Per a cada possible període d (ha de ser $d \mid p$) hi ha $P(L, n, d)$ collars diferents, i donat que les permutacions cícliques estan incloses, cadascun d'ells es repeteix d vegades. Així, després de restar els collars amb període més petit que p ens queden únicament aquells amb període exactament igual a p i les seves permutacions cícliques. Per tant, fent una última divisió entre p obtenim el resultat desitjat, i donem per demostrat el següent teorema.

Teorema 4. *El nombre d'acords de n notes amb període p ve donat per la fórmula:*

$$P(L,n,p) = \frac{1}{p}\left[\binom{p}{\frac{n}{L/p}} - \sum_{\substack{1\le d<p \\ d\mid p \\ (L/d)\mid n}} dP(L,n,d)\right] \tag{3.7}$$

On $P(L,n,L/n) = 1$, i $P(L,n,p) = 0$ si $p \nmid L$ o bé si $(L/p) \nmid n$.

Observem que si n és coprimer amb L no hi pot haver cap període menor que L, donat que L/p no pot dividir cap n excepte per $n = p$. En aquest cas, el sumatori val 0 i ens queda l'expressió

$$P(L,n,L) = \frac{1}{L}\binom{L}{n}$$

Per exemple, per a l'escala de 12 notes, els únics enters menors que i coprimers amb $L = 12$ són 1, 5, 7 i 11. Això vol dir que tots els acords d'una, cinc, set i onze notes tenen període $p = 12$. Aquest fet serà molt útil quan estudiem les propietats de les escales.

Veiem que la taula 3.3 presenta una simetria respecte la columna $n = 6$. A priori el valor per a $n = 12$ sembla trencar-la, però es pot evitar considerant també l'acord trivial amb $n = 0$, que no s'inclou a cap de les taules anteriors per no tenir un significat musical especial.

		n												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	1
	2	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	1
	3	·	·	·	1	·	·	·	1	·	·	·	·	2
	4	·	·	1	·	·	1	·	·	1	·	·	·	3
	6	·	1	·	2	·	3	·	2	·	1	·	·	9
	12	1	5	18	40	66	80	66	40	18	5	1	·	335
	Total	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	351

Taula 3.3: Valors de $P(12, n, p)$: nombre d'acords amb n notes i període p

Aquests simetria es deu a que el període d'un collar és manté invariant també per al seu collar dual, és a dir, si intercanviem els colors de les boles. Per tant, tenim que

$$P(L, L-n, p) = P(L, n, p)$$

Es pot observar que en l'escala habitual amb $L = 12$ notes, la majoria dels 351 acords (prop del 95%) tenen període 12. Només hi ha 16 amb $p < 12$, dels quals únicament es poden tocar amb una guitarra els 10 que involucren 6 o menys notes.

3.4 Anàlisi d'amplada i intervals màxims

De la mateixa manera que conèixer el període d'un acord és interessant quan es toquen acords en instruments de corda, hi ha una altra propietat que és important estudiar a l'hora de tocar instruments de teclat, com podria ser un piano.

Definició 11. *L'* ***amplada*** *d'un acord consistint en les notes* $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ *tals que* $m_1 < m_2 < ... < m_n$ *és igual a* $m_n - m_1$*. És a dir, és el nombre de semitons que separen la primera i l'ultima nota de l'acord. O dit d'una altra manera, la distància entre la nota més greu i la més aguda.*

Per tal de refinar aquesta definició és important considerar les diferents ordenacions possibles de l'acord, anomenades inversions. Tot i que es consideren isomorfes, canvien el valor de l'amplada d'un mateix acord. És a dir, el valor de $m_n - m_1$ és diferent per a cada inversió, donat que cadascuna canvia l'ordre dels m_i. Així, en realitat calcularem l'*amplada mínima d'entre totes les inversions de l'acord.*

Notem que, segons la definició d'acord, en una escala amb $L = 12$ notes el màxim valor possible per a l'amplada és 11.

La connexió amb els teclats és que l'amplada d'un acord equival a la separació que s'ha de cobrir amb una mà per tal de tocar alhora totes les notes d'aquest acord. Aquesta apreciació és aproximada, donat que en els teclats convencionals no totes les tecles blanques i negres estan separades per la mateixa distància. Per simplicitat, ignorem aquesta distinció i considerem l'amplada en nombre de semitons de distància. En general, els acords amb més amplada són més difícils de tocar en un teclat.

Sigui $S(L, n, s)$ el nombre d'acords amb n notes en una escala de mida L i una amplada exactament igual a s, trobem una fórmula explícita per a $S(L, n, s)$.

Considerem primer un collar genèric amb L boles, n d'aquestes negres i amb amplada s, com el que es mostra a la figura 3.6.

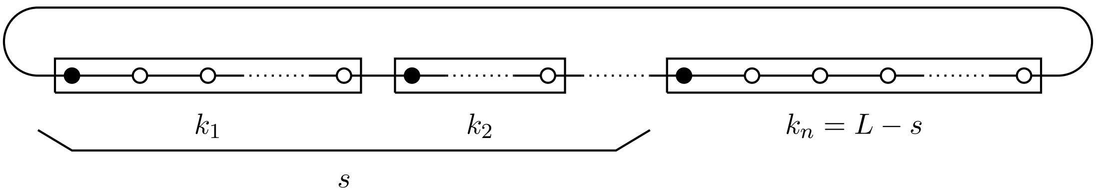

Figura 3.6: Un collar de L boles amb n boles negres i amplada s

Donat que hem definit l'amplada com la mínima de totes les inversions de l'acord, podem rotar el collar de manera que totes les boles negres quedin situades en les primeres $s+1$ posicions. Això es possible per definició, ja que la amplada és s. Considerem ara que el collar està compost per n subcadenes, cadascuna de elles formada per una bola negra seguida per $k_i - 1$ boles blanques. Notem que $k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} = s$ per la definició d'amplada, i per tant $k_n = L - s$.

Per a un conjunt donat de valors dels $\{k_i\}$, podem determinar el nombre de collars diferents que es poden formar. Notem que cada k_i és un nombre entre 1 i n. Considerem doncs aquests valors possibles dels $\{k_i\}$ com si fossin n colors diferents, i comptem el nombre de vegades que apareixen les subcadenes de cada color. Suposem que hi ha $\nu(r)$ subcadenes de color r presents, amb $1 \leq r \leq n$. Aleshores el nombre total de collars formats per aquest tipus i nombre de subcadenes és

$$N(n, \nu(1), \nu(2), ..., \nu(n))$$

on $N(n, ...)$ és la fórmula genèrica per comptar collars de la proposició 2. Ara podem fer servir el mateix raonament que hem fet servir diverses vegades: donat que les subcadenes no poden ser isomorfes entre elles sota cap rotació, en realitat les podem pensar com si fossin boles d'un collar. Per tant, el nombre de collars formats per subcadenes equival al nombre de collars diferents.

Fins ara hem considerat un conjunt qualsevol dels valors dels $\{k_i\}$. Per tal de comptar el nombre total de collars possibles, hem de considerar també tots els conjunts $\{k_i\}$ possibles. Tenim que $k_1 + k_2 + ... + k_n = L$, el que vol dir que els $\{k_i\}$ són una *partició sense ordre* de L en n parts. [2] A més, $k_i \leq L - s, \forall i$, ja que si algun k_i fos més gran que $L - s$, implicaria una amplada menor que s. De la mateixa manera, per tal que la amplada sigui exactament s hem d'imposar que al menys un prengui el valor $k_i = L - s$. Així, donem per demostrat el teorema següent.

Teorema 5. *El nombre d'acords de n notes amb amplada s ve donat per la fórmula:*

$$S(L, n, s) = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + ... + k_n = L \\ 1 \leq k_i \leq L - s \\ \text{al menys un } k_i = L - s}} N(n, \nu(1), \nu(2), ..., \nu(n)) \tag{3.8}$$

On $\nu(r)$ es el nombre de r's en el conjunt $\{k_i\}$.

[2] A la secció següent es tracten les particions d'enters més a fons.

A la taula 3.4 es mostren els valors per a l'escala de dotze notes (cas $L = 12$) calculats fent servir aquesta fórmula.

		n												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
s	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1
	1	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1
	2	·	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	2
	3	·	1	2	1	·	·	·	·	·	·	·	·	4
	4	·	1	3	3	1	·	·	·	·	·	·	·	8
	5	·	1	4	6	4	1	·	·	·	·	·	·	16
	6	·	1	5	10	10	5	1	·	·	·	·	·	32
	7	·	·	3	14	20	15	6	1	·	·	·	·	59
	8	·	·	1	8	25	33	21	7	1	·	·	·	96
	9	·	·	·	1	6	25	35	25	8	1	·	·	101
	10	·	·	·	·	·	1	3	10	10	5	1	·	30
	11	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	1
	Total	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	351

Taula 3.4: Valors de $S(12, n, s)$: nombre d'acords amb n notes i amplada s

Podem observar diferents característiques interessants en aquesta taula. La primera és el patró geomètric format pels valors diferents de zero. Notem que el màxim valor possible per a $\sum k_i$ s'obté quan tots els $k_i = L - s$, i equival a $n(L - s)$. El mínim l'obtenim quan un dels $k_i = L - s$ i tota la resta valen 1. En aquest cas $\sum k_i = L - s + (n - 1)$. Aleshores, tenint en compte que la suma total ha de ser igual a L, tindrem que $S(L, n, s) = 0$ quan

$$n(L - s) < L \quad \text{o bé} \quad L - s + (n - 1) > L$$

I podem reescriure aquestes equacions com

$$n < \frac{L}{L - s} \quad \text{o bé} \quad n > s + 1$$

Aquestes equacions d'una hipèrbola i d'una recta en l'espai (n, s) són les que, com podem observar a la taula, fiten els valors de $S(L, n, s)$ diferents de zero.

També veiem una interessant connexió entre l'amplada i l'interval mínim. Comparem la fila $s = 10$ de la taula 3.4 i la fila $m = 2$ de la taula 3.2.

$$\begin{array}{lcllllll} S(12, 6\,\text{a}\,11, 10) & = & 1 & 3 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ I(12, 1\,\text{a}\,6, 2) & = & 1 & 5 & 10 & 10 & 3 & 1 \end{array}$$

Veiem que per al cas $L = 12$ es compleix que el nombre de n-acords amb amplada $s = 10$ és el mateix que el nombre de $(12 - n)$-acords amb interval mínim $m \geq 2$.

$$S(12, n, 10) = I(12, 12 - n, 2)$$

El motiu és que per tal que un acord tingui amplada $s = 10$, no pot tenir dues notes consecutives que no es facin servir. Altrament, l'amplada seria menor que 10. El dual d'aquest conjunt d'acords són els acords amb $12-n$ notes i sense dues notes consecutives, que és precisament $I(12, 12-n, 2)$. A més, per definició, és el mateix que el nombre d'acords sense adjacències ($a = 0$). En general, obtenim que

$$S(L, n, L-2) = I(L, L-n, 2) = A(L, L-n, 0) \tag{3.9}$$

Amplada i interval màxim

El problema de l'interval mínim que hem vist prèviament en aquest mateix capítol, consisteix en determinar el nombre d'acords amb mínim interval igual a m.

L'amplada té una estreta relació amb el problema dual al de l'interval mínim. El de trobar el nombre d'acords amb un *interval màxim* determinat.

Proposició 3. *El nombre d'acords de n notes amb interval màxim $L-s$ és igual al nombre d'acords de n notes amb amplada s.*

Demostració. Per definició, estem considerant l'amplada com l'amplada mínima de qualsevol inversió (o rotació) de l'acord. Per tant, un acord amb amplada s no pot contenir un interval més gran que $L-s$. Altrament, podríem rotar l'acord per tal de situar aquest acord al final. I veient la figura 3.6, és clar que aquest acord tindrà una amplada menor que s, fet que porta a contradicció. □

3.5 Conjunts d'intervals

En algunes de les seccions prèvies d'aquest capítol, hem considerat classificacions dels acords de n notes en funció de diverses propietats relacionades amb els intervals entre les seves notes: l'interval mínim, el nombre d'intervals de mida 1 (adjacències) i l'interval màxim. Totes elles són casos particulars d'un problema més general.

Definició 12. *El* ***conjunt d'intervals*** *d'un acord que consisteix en les notes $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ amb $m_1 < m_2 < ... < m_n$, és el conjunt* ***sense ordre*** $\{m_2-m_1, m_3-m_2, ..., m_n-m_{n-1}, L-m_n\}$.

Definim també el concepte de partició, donat que el necessitarem d'ara endavant.

Definició 13. *Una* ***partició*** *d'un enter L en n parts és una expressió de L com a suma de n enters positius i més petits o iguals que n.*

Observem que la suma dels elements d'un conjunt d'intervals sempre val L. Per tant, el nombre de conjunts d'intervals possibles és el nombre de particions de L en n parts, que denotarem per $p(L, n)$.

Aleshores volem conèixer els valors de la funció $p(L, n)$. Notem que l'ordre dels sumands no és important i que, per tant, es tracta de particions sense ordre. Aquest és un problema encara més difícil que el de comptar collars. De fet, la determinació d'una formula explícita per a $p(L, n)$ és un important problema matemàtic, que finalment va ser resolt l'any 1918 per G.H.Hardy i S.Ramanujan. La demostració d'aquesta fórmula explícita queda fora dels objectius del treball. A la taula 3.5 es mostren els diferents valors pel cas $L = 12$.

Veiem que en total hi ha 77 particions diferents, o equivalentment, que hi ha **77 conjunts d'intervals diferents**.

	n												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
L = 12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1	77

Taula 3.5: Valors de $p(12, n)$, amb $1 \leq n \leq 12$.

És molt important entendre que cadascuna d'aquestes particions genera un nombre d'acords diferent, donat que als acords sí que és important l'ordre dels intervals.

Aquest nombre es pot calcular fent servir la fórmula de la proposició 2 per a comptar collars de m colors, on podem considerar cada valor diferent dels intervals com un color diferent al collar, i el cop de vegades que hi apareixen com el nombre de boles d'aquest color.

Veiem ara un tipus interessant de conjunt d'intervals, que tenen un interès musical especial i que tornarem a veure al capítol següent, dedicat a les escales.

Definició 14. *Els **conjunts d'intervals k-àtons** són aquells en què tots els intervals entre* 1 *i* k *queden representats.*

Per a $k = 2$, els anomenarem conjunts d'intervals diatònics. Per a $k = 3$ triatònics, i així successivament. És natural preguntar-nos, per a un valor de L donat, quins conjunts d'intervals k-àtons són possibles d'assolir.

Sigui $\sigma(k) = \frac{k\,(k+1)}{2}$ la suma dels enters des de 1 fins a k, és clar que s'ha de complir $\sigma(k) \leq L$. Si aillem la k d'aquesta equació obtenim

$$k \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{8L+1}-1}{2} \right\rfloor$$

Per tant, per al cas en que $L = 12$ tenim $k \leq 4$. És a dir, que com a molt existeixen conjunts d'intervals quadratònics.

3.6 Acords elegants

A la secció anterior hem considerat que, quan un acord de n notes sona, hi ha n intervals presents. Existeix, però, una altra manera d'analitzar els intervals que també pot ser musicalment interessant. Donat que les n notes sonen de manera simultània, es forma un interval entre cada parell de notes de l'acord, i no només entre les notes adjacents. Per tant, es pot considerar que en realitat hi ha $\binom{n}{2}$ intervals, i que el so d'un acord està influenciat per cadascun d'aquests intervals.

Definició 15. *El **conjunt d'intervals complet** d'un acord format per les notes* $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ *amb* $m_1 < m_2 < ... < m_n$*, és el conjunt de valors* $m_i - m_j$*, per tot* $i < j$*.*

Definició 16. *La **varietat** d'un acord, que denotarem per* v*, és el nombre d'intervals diferents en el seu conjunt d'intervals complet.*

Com passava amb l'anàlisi d'amplada dels acords, la varietat tampoc és la mateixa per a totes les inversions d'un mateix acord. Això és degut a que les inversions canvien l'ordre dels m_i, i per tant també modifiquen el conjunt de valors $m_i - m_j$ amb $i < j$. Així, en realitat ens referirem en tot moment a la *varietat màxima d'entre totes les inversions de l'acord.*

El valor de la varietat és una manera de comptabilitzar la complexitat d'un acord. Com més gran sigui v, hi haurà presents més intervals diferents. Per tant, la forma de la ona del so resultant serà més complexa, degut a la interacció entre les ones periòdiques de les diferents relacions entre freqüències.

La varietat està estretament lligada a un concepte de la teoria de grafs: *graceful graph numbering*, o numeració elegant de grafs. El problema demana una numeració dels nodes d'un graf amb enters (≥ 0) diferents tals que:

1. Tots els números de les arestes siguin diferents, on el número associat a cada aresta és la diferència entre els números dels dos nodes que uneix.
2. El número del node més gran és el més petit possible.

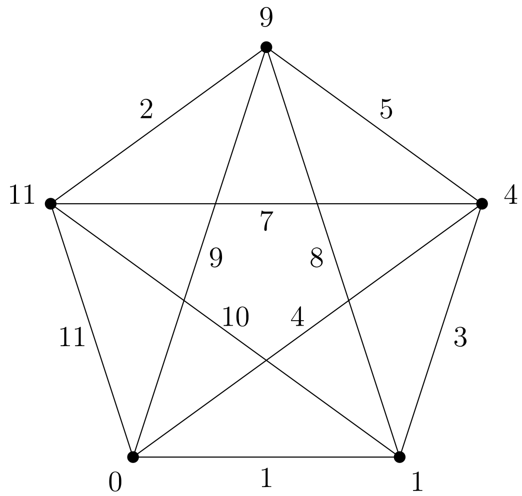

Figura 3.7: Numeració elegant del graf complet K_5

La clau d'aquest problema rau en determinar quin és el mínim valor possible per al número del node més gran, que denotarem per M. Notem que el node mínim sempre serà 0. Sigui a el nombre d'arestes, és clar que M ha de ser més gran o igual que a. Altrament, donat que la màxima diferència entre nodes serà M, hauríem d'assignar a les a arestes un nombre de enters inferior a a.

Així, podríem considerar com la numeració "més elegant" aquella en què $M = a$. En aquest cas, els enters corresponents a les arestes no només són diferents, sinó que són exactament el conjunt $\{1, 2, ..., a\}$. Aquest cas particular és molt poc habitual. En l'exemple de la figura 3.7 es pot veure que en la numeració elegant del graf K_5 tenim $e = 10$ i $M = 11$.

Com que estem considerant tots els intervals entre notes, identificarem els acords de n notes amb els grafs complets K_n, on els nodes numerats equivalen als enters corresponents a cada nota de la escala i les arestes numerades als intervals. Aquesta relació és consistent perquè els intervals són les diferències entre notes.

Definició 17. *Un **acord elegant** és aquell en que tots els intervals en el seu conjunt d'intervals complet són diferents.*

Per tant, per tal de trobar un acord de n notes amb el valor de v el més gran possible, hem de trobar una numeració elegant del graf complet K_n.

Per a valors petits de n, el valor més gran possible per a v és $\binom{n}{2}$. Aquests són precisament els acords elegants, ja que és el cas en què tots els intervals en el conjunt d'intervals complet són diferents. No obstant, hem de tenir en compte la restricció que imposa el nombre de notes L de la escala. Només serà possible assolir aquest valor màxim per a la varietat quan el graf corresponent tingui una numeració elegant que compleixi que $M < L$. La seqüència de valors de M per als diferents K_n és:

n:	2	3	4	5	6	7	8
M:	1	3	6	11	17	25	34

Veiem doncs que $M < 12$ per a $n \leq 5$. Per tant, en l'escala amb $L = 12$, els acords elegants només es poden formar amb cinc o menys notes. Per $n > 5$, el màxim valor de v és $L - 1 = 11$.

Anomenem $V(L, n, v)$ la funció que compta el nombre d'acords de n notes amb exactament v intervals diferents en el seu conjunt d'intervals complet. Donat que la numeració elegant de grafs és un problema matemàtic notablement difícil, no existeix cap fórmula per a $V(L, n, v)$. A la taula 3.6, extreta de [1], es mostren els valors per a $L = 12$ calculats per un algorisme informàtic.

		n												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
v	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1
	1	·	6*											6
	2	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1
	3	·	·	18*	1	·	·	·	·	·	·	·	·	19
	4	·	·	·	2	·	·	·	·	·	·	·	·	2
	5	·	·	·	7	1	1	·	·	·	·	·	·	9
	6	·	·	·	33*	1	·	·	·	·	·	·	·	34
	7	·	·	·	·	7	1	·	·	·	·	·	·	8
	8	·	·	·	·	19	1	·	·	·	·	·	·	20
	9	·	·	·	·	34	9	·	·	·	·	·	·	43
	10	·	·	·	·	4*	42	7	1	·	·	·	·	54
	11	·	·	·	·	·	26	59	42	19	6	1	1	154
	Total	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	351

Taula 3.6: Valors de $V(12, n, v)$: nombre d'acords amb n notes i varietat v. Els valors amb asterisc corresponen als acords elegants.

Observem que els valors amb asterisc són aquells en que $v = \binom{n}{2}$, i per tant identifiquen els acords elegants. És a dir, aquells amb tots els intervals diferents. En total hi ha $6+18+33+4 = 61$ acords elegants.

Els més interessants probablement són els 4 amb $n = 5$, corresponents a les 4 numeracions elegants diferents del graf K_5. Un d'aquests és l'acord de la figura 3.7, format per les notes $\{0, 1, 4, 9, 11\}$ i amb conjunt d'intervals complet $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Capítol 4

Estudi de les escales

En aquest capítol farem un anàlisi matemàtic de les escales. Ens centrarem en les escales de set notes, que són de les més importants al món de la música occidental. Considerarem moltes de les propietats del capítol anterior, ara anàlogues per a les escales, i proposarem diferents maneres de quantificar el seu grau de particularitat.

4.1 Resultats bàsics

Recordem que una escala és un subconjunt de les L notes d'una escala amb temperament igual, és a dir, un subconjunt dels enters $\{0, 1, ..., L-1\}$. La diferència amb els acords és que ara no tenim isomorfisme rotacional, i per tant les podem identificar amb les cadenes.

Per definició, la *tònica* o la *clau* de l'escala sempre ha de ser la primera nota. La representarem com l'element $\{0\}$ i sempre demanarem que estigui present.

Volem saber el nombre d'escales diferents de n notes que es poden formar amb una escala de temperament igual de L notes. Donat que la primera nota $\{0\}$ està fixada i les altres $n-1$ notes es poden escollir d'entre les $L-1$ notes restants, el nombre d'escales diferents amb n notes és

$$Sc(L, n) = \binom{L-1}{n-1}$$

Aleshores el nombre total d'escales diferents en una escala de temperament igual amb L notes és

$$Sc(L, *) = \sum_{1 \leq n \leq L} \binom{L-1}{n-1} = \sum_{0 \leq n \leq L-1} \binom{L-1}{n} = 2^{L-1} \tag{4.1}$$

Notem que això té sentit donat que, excepte la primera nota, cadascuna de les $L-1$ restants pot ser a l'escala o bé no ser-hi. Per tant hi ha 2^{L-1} escales diferents.

Així, per al cas més habitual en que $L = 12$, podem dir que **existeixen 2048 escales essencialment diferents**.

A la taula 4.1 es mostren els diferents valors de $Sc(12, n)$. Com passava amb els acords, observem una simetria en els valors, però amb una lleugera diferència. Ara tenim que

$$Sc(L, n) = Sc(L, L+1-n)$$

En canvi, a la taula 3.1 del capítol anterior hem vist que

$$Ch(L, n) = Ch(L, L-n)$$

Nombre de notes (n)	Nombre d'escales
1 o 12	1
2 o 11	11
3 o 10	55
4 o 9	165
5 o 8	330
6 o 7	462

Taula 4.1: Valors de $Sc(12, n)$ per a $1 \leq n \leq 12$

Això és degut a que el nombre d'acords l'hem calculat amb la fórmula dels collars $N(L, n)$, que involucra coeficients binomials de la forma $\binom{L}{*}$. En canvi, els coeficients per a calcular el nombre d'escales diferents són de la forma $\binom{L-1}{*}$. Així, torna a relluir la importància d'imposar que la tònica sigui sempre la primera nota de l'escala.

4.1.1 Relació entre acords i escales

Volem veure si hi ha alguna relació entre el nombre d'acords i escales amb n notes. A l'hora de comptar acords, els objectes que són isomorfs sota rotacions es consideren només una vegada. Per a les escales, en canvi, es compten de manera separada. Aquest fet fa pensar que a partir dels diferents acords es pot generar el conjunt de les diferents escales.

Per tal de generar el conjunt d'escales de n notes, podem partir del conjunt d'acords amb n notes i rotar cada acord n vegades per tal de situar cadascuna de les notes a la primera posició.

Degut a l'isomorfisme rotacional dels acords, es pot assegurar que la rotació d'un acord no produirà la mateixa escala que cap rotació d'un altre acord. Altrament, aquests dos acords serien el mateix. El que sí que pot passar és que dues rotacions del mateix acord produeixin la mateixa escala. Per tal de saber quan es donarà aquest cas, podem fer servir la propietat del període del acords.

El període ens indica el nombre de rotacions després de les quals l'acord es repeteix. Per tant, també és el nombre de posicions després de les quals ja no es generaran més escales diferents. A la figura 3.5 hem vist que aquests acords tenen L/p parts idèntiques, i per tant $\frac{n}{(L/p)}$ boles negres a cada part. Cadascuna d'aquestes boles es pot situar a la posició inicial per tal de generar una escala diferent. Sigui $Sp(L, n, p)$ el nombre d'escales de n notes formades a partir dels diferents acords de n notes amb període p, donem per demostrat el següent teorema.

Teorema 6. *El nombre total d'escales de n notes en una escala de temperament igual de L notes és:*

$$Sc(L, n) = \sum_{1 \leq p \leq L} Sp(L, n, p) = \sum_{1 \leq p \leq L} \frac{n}{L/p} P(L, n, p) \tag{4.2}$$

En el capítol anterior hem vist que si n és coprimer amb L, el període només pot prendre el valor $p = L$. En aquest cas, la fracció de la fórmula anterior val n, i obtenim que

$$Sc(L, n) = n\, Ch(L, n) \tag{4.3}$$

És a dir, si n és coprimer amb L, el nombre de escales de n notes és n vegades el nombre d'acords de n notes. Pel cas $L = 12$, els enters coprimers són 1, 5, 7 i 11. A la secció següent estudiarem el cas $n = 7$, que té un interès musical particular.

4.2 Les escales de 7 notes

Hi ha diverses raons històriques per les quals les escales de 7 notes són importants. La més obvia és que la majoria de la música (almenys l'occidental) fa servir escales de 7 notes, en particular les escales major i menor. Una prova d'això és que els noms de les notes que tothom coneix són precisament els de les 7 notes de l'escala major en clau de do: *do, re, mi, fa, sol, la, si.*

Una excepció destacada és l'escala de 5 notes $\{0, 2, 4, 7, 9\}$, corresponent a les tecles negres del piano. Aquesta escala s'anomena *pentatònica* i és la base d'alguns tipus de música orientals.

Un altre motiu pel qual el cas $n = 7$ és especialment interessant és que 7 és coprimer amb $L = 12$. Per tant, podem fer servir el teorema 6 que acabem de veure per relacionar fàcilment els acords amb aquestes escales.

Sabem que hi ha 462 escales de 7 notes, generades per les 7 rotacions dels 66 acords. Donat que estan generades per 66 acords diferents, direm que hi ha 66 *tipus d'escales.* A més, a la taula 3.5 del capítol anterior hem vist que hi ha 7 conjunts d'intervals per a $n = 7$, que generen els 66 acords. Ens referirem a aquests conjunts d'intervals com *classes d'escales.*

	n = 7
Escales	462
Tipus d'escales	66
Classes d'escales	7

Taula 4.2: Nombre d'escales, tipus d'escales, i classes d'escales per als casos $n = 5$ i $n = 7$.

Aleshores direm que les classes d'escales són isomorfes als 7 conjunts d'intervals dels acords, i que els tipus d'escales són isomorfs als 66 acords que generen el conjunt de totes les escales.

Aquest isomorfisme amb els acords és el que fa que les escales que pertanyen a un tipus d'escala en particular, tinguin exactament les mateixes propietats que l'acord que genera aquestes escales, ja que tenen es conserven els mateixos intervals entre notes. Així, fent servir els resultats del capítol anterior, trobem de manera directa molts resultats sobre els 66 tipus d'escales. Aquestes propietats es troben resumides a la taula 4.3.

Interval mínim	Totes tenen interval mínim $m = 1$					
Període	Totes tenen període $p = 12$					
Conjunt d'intervals (classes d'escales)	El nombre de conjunts d'intervals és 7					
Adjacències	a	2	3	4	5	6
	Nombre d'escales	3	20	30	12	1
Interval màxim	m	2	3	4	5	6
	Nombre d'escales	3	35	21	6	1

Taula 4.3: Propietats bàsiques dels 66 tipus d'escales per a $n = 7$

De la mateixa manera que al capítol anterior s'han mostrat resultats específics de les diferents propietats dels acords per al cas $L = 12$, en aquest ens centrarem també en el cas $n = 7$. És a dir, estudiarem les propietats de les escales de 7 notes formades amb les notes de l'escala de temperament igual de 12 notes. No obstant, també es farà referència al cas general.

4.3 Regularitat d'una escala

Identificar els tipus d'escales ens ha permès fer una primera classificació de les 462 escales segons a quin dels 66 tipus diferents pertanyin. Ara volem fixar-nos en les classes d'escales, per trobar una classificació més general. Per tant, estem parlant de conjunts d'intervals (sense ordre).

Dels 7 diferents possibles per a $n = 7$, el diatònic (2 2 2 2 2 1 1) és el que més es fa servir a l'hora de fer música. Quina propietat té aquest que no tinguin altres? Una possible resposta és que de tots 7, és el que té els intervals més uniformes.

Aparentment, és més agradable per a l'oïda humana sentir escales equilibrades o regulars. És a dir, escales en les quals els intervals entre les successives notes de l'escala són el més similars possible. Aquest fet està relacionat amb l'ús de les escales quan es formen melodies. Habitualment es fan servir seqüències de notes consecutives de l'escala, ja siguin ascendents o bé descendents. Quan això passa, és prou desconcertant que hi hagin salts molt grans entre notes.

Normalment és impossible obtenir una escala perfectament equilibrada, ja que n no és necessàriament un divisor de L, i els intervals són enters per definició. Pel cas $L = 12$ i $n = 7$, l'escala ideal hauria de tenir tots el intervals de mida $L/n = 12/7$, que no és un enter. Si que podem, però, calcular la proximitat de cada conjunt d'intervals amb aquest conjunt ideal.

Definició 18. *La **regularitat** d'un conjunt d'intervals és la distància entre aquest conjunt i el conjunt d'intervals ideal* $(L/n, L/n, ..., L/n)$. *Per mesurar aquesta distància farem servir l'error quadràtic mig, definit com la mitja dels quadrats de les diferències. Així, la regularitat d'un conjunt d'intervals* $(I_1, I_2, ..., I_n)$ *és el valor*

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \le i \le n} \left(I_i - \frac{L}{n} \right)^2$$

Per conveniència, farem que aquest valor sigui un enter multiplicant-lo per n^2. Aleshores el valor de regularitat e és

$$e = \frac{1}{n} \sum_{1 \le i \le n} (n\, I_i - L)^2 = n \sum_{1 \le i \le n} I_i^2 - L^2$$

On s'ha fet servir que $\sum I_i = L$. En aquesta fórmula es veu clarament que el valor de e no depèn de l'ordre de les I_i. Això té sentit, ja que els conjunts d'intervals no són conjunts ordenats.

El valor de la regularitat e ens proporciona una manera d'ordenar els conjunts d'intervals segons el seu grau de raresa. És similar al valor d'adjacències a dels acords. Com més poc regular sigui un conjunt d'intervals, més estranyes musicalment parlant seran les escales construïdes amb aquest interval.

Els valors de e dels 7 conjunts d'intervals per a $n = 7$ i $L = 12$ es mostren a la taula 4.4, ordenats en funció de e. Aquest mateix ordre és també, de fet, la freqüència amb que es fan servir en la música aquests conjunt d'intervals. Veiem que el conjunt diatònic és el primer, seguit pels triatònics, i així successivament. L'escala menor, que és la més emprada de les escales triatòniques, es construeix a partir del conjunt triatònic més regular (3 2 2 2 1 1 1).

L'error mitjà per interval és l'arrel de l'error quadràtic mitjà. Donat que hem multiplicat per n^2 al definir el valor de e, tenim que l'error mitjà val $\sqrt{e/n^2}$. Per al conjunt d'intervals diatònic aquest valor és $\sqrt{10/49} \approx 0,45$. És a dir que, en mitjana, cada interval d'una escala diatònica es troba aproximadament a mig semitò de distància de l'interval ideal de 12/7.

Conjunt d'intervals							e
2	2	2	2	2	1	1	10
3	2	2	2	1	1	1	24
3	3	2	1	1	1	1	38
4	2	2	1	1	1	1	52
4	3	1	1	1	1	1	66
5	2	1	1	1	1	1	94
6	1	1	1	1	1	1	150

Taula 4.4: Els set conjunts d'intervals per $n = 7$, ordenats pel seu grau de regularitat

4.4 Idealitat d'una escala

La regularitat ens aporta una manera de quantificar el grau de raresa de les classes d'escales. Aquest valor, però, és el mateix per a totes les escales a dins d'una mateixa classe, que es poden generar a partir dels conjunts d'intervals.

No obstant, entre els 66 tipus d'escales diferents pel cas $n = 7$, també hi ha alguns més populars que d'altres. El mateix succeeix per a les diferents escales generades a partir de les 7 rotacions d'aquests tipus d'escales.

Per tant, volem trobar una mesura més forta que ens permeti ordenar totes les 462 escales per ordre de raresa o peculiaritat. El problema amb la e és que mesura la regularitat dels intervals sense ordenar. Una altra manera de mesurar la uniformitat d'una escala pot ser calcular la distància entre cada nota de l'escala i la nota ideal. En una escala ideal tots els intervals tenen mida L/n, i per tant cada nota ideal es troba a un múltiple de L/n de la primera nota.

Definició 19. *La **idealitat** d'una escala és la distància de cada nota de l'escala a la nota ideal corresponent. Definim l'error quadràtic mig acumulatiu d'una escala amb intervals* $(I_1, I_2, ..., I_n)$ *com*

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < n} \left(\sum_{0 \leq j < i} I_j - \frac{i\,L}{n} \right)^2$$

Com abans, multipliquem per n^2 per tal que aquest nombre sigui un enter. Aleshores el valor d'idealitat E d'una escala és

$$E = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < n} \left(n \sum_{0 \leq j < i} I_j - i\,L \right)^2$$

És molt convenient fer una interpretació geomètrica de E. Podem considerar un sistema de coordenades on cada unitat de l'eix de les x representi les notes de l'escala de n notes, i cada unitat de l'eix de les y representi cadascuna de les notes de l'escala d'igual temperament de mida L. En aquestes coordenades, l'escala ideal amb intervals de mida L/n és una recta amb pendent L/n.

Així, una escala amb intervals enters és una aproximació discreta a aquesta recta. El valor de E és una mesura de l'error entre els punts d'aquesta aproximació i l'escala ideal representada per la recta amb pendent L/n. Aleshores, donats valors de L i n, ens interessa saber quines escales tenen el mínim valor de E.

Per tal de minimitzar l'error quadràtic mig acumulatiu, podem minimitzar l'error de cada terme de manera local. És a dir, l'error entre cada nota i la recta L/n. Per tal de fer això, simplement hem d'escollir l'enter més pròxim a cada nota ideal iL/n per $0 \leq i < n$. Observem que l'escala resultant pot no ser única, donat que algun valor decimal de iL/n pot valer $\frac{1}{2}$. En aquest cas l'error resultant serà el mateix tant si arrodonim a la part entera inferior com si ho fem a la superior.

Les millors escales

Apliquem ara aquest procediment pel cas $L = 12$ i $n = 7$. Les posicions de les notes de l'escala ideal són els múltiples de $L/n = 12/7$.

$$\{0, 1 + \frac{5}{7}, 3 + \frac{3}{7}, 5 + \frac{1}{7}, 6 + \frac{6}{7}, 8 + \frac{4}{7}, 10 + \frac{2}{7}\}$$

Arrodonint als enters més propers i intercanviant les notes de l'escala a la notació d'intervals entre notes ens queda

$$\{0, 2, 3, 5, 7, 9, 10\} = (2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 2)$$

Aquesta és l'anomenada *escala Dòrica*. El seu valor d'idealitat és

$$E = \frac{1}{7}\left(0 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2\right) = 28/7 = 4$$

Aleshores el seu error mitjà per nota és $\sqrt{E/n^2} = \sqrt{4/49} \approx 0,29$. És a dir que, en mitjana, cada nota de l'escala dòrica es troba a $0,29$ semitons de la nota corresponent en l'escala ideal.

També és interessant observar que el valor d'idealitat E d'una escala no canvia si prenem els intervals en l'ordre invers. Siguin N_i les notes d'una escala, les notes de l'escala en l'ordre invers són $M_i = L - N_{n-i}$. Aleshores

$$E(M) = \frac{1}{n}\sum_i (n\,M_i - i\,L)^2 = \frac{1}{n}\sum_i \Big[-\big(n\,N_{n-1} - (n-i)\,L\big)\Big]^2 = E(N)$$

Per tant, veiem que les escales amb un valor de E donat sempre van en parelles. Excepte aquelles escales que tenen conjunts d'intervals palíndroms. L'escala que hem vist que té el mínim valor de E és palíndroma, i per tant, és única.

Té sentit preguntar-nos quines són les següents escales amb els valors més petits de E. Aquesta qüestió s'il·lustra gràficament a la figura 4.1, que mostra les 10 "millors" escales en funció del seu valor d'idealitat E.

És un bon exemple de la interpretació geomètrica de E. Els cercles negres corresponen a la millor aproximació, que hem vist que és l'escala Dòrica. Els blancs representen les següents millors opcions per a les quatre notes que es troben més allunyades de la recta. Escollint només una, o bé dues d'aquestes notes alternatives obtenim les següents escales amb valors més petits de E.

Notem la simetria en aquest diagrama, donada pel fet que s'ha exposat anteriorment que el valor de E és el mateix per a l'escala inversa. Les escales Dòrica i B6 són palíndromes, però les altres 8 escales són, en realitat, 4 parelles d'escales simètriques.

És interessant veure que l'escala triatònica més ideal és l'escala menor ordinària (i la seva inversa). De manera satisfactòria, veiem que les dues escales més fetes servir a la música occidental, la major i la menor, es troben entre aquestes 10 escales d'entre totes les 462 escales

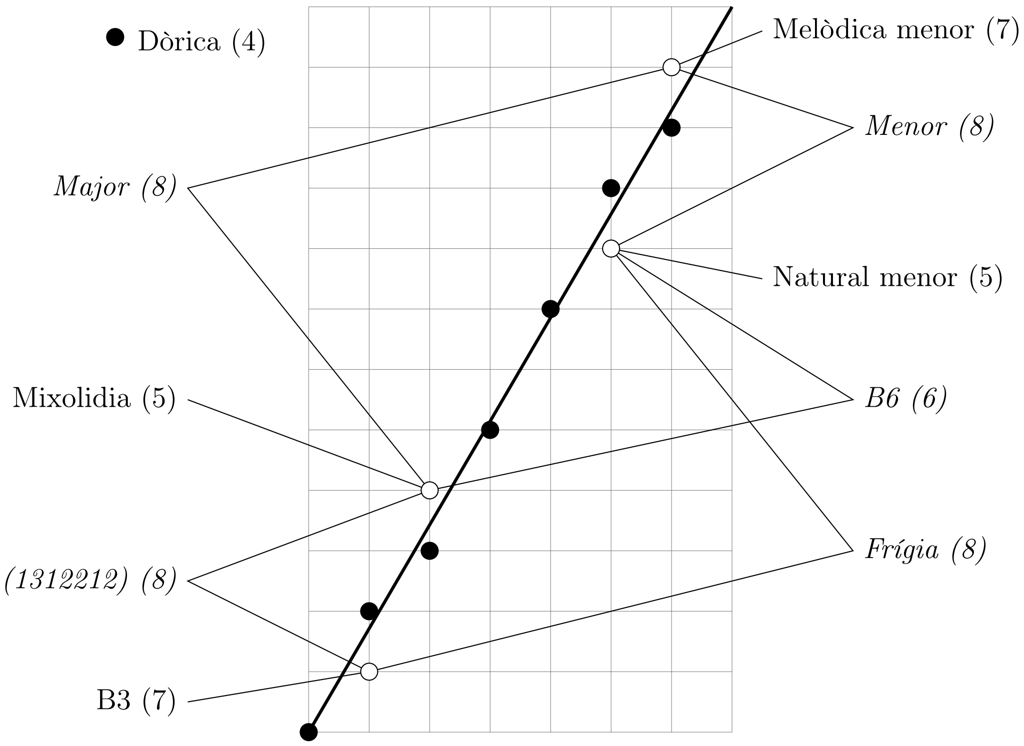

Figura 4.1: Les 10 escales més ideals. Els valors de E es mostren entre parèntesi per a cada escala. Les escales en cursiva tenen dues notes diferents respecte l'escala Dòrica, mentre que les altres, només una.

diferents. Per tant, sembla que aquest és un bon mètode per classificar les escales segons la seva raresa. Això no vol dir, però, que moltes altres escales que estiguin lluny d'aquests paràmetres no siguin vàlides per tal de fer música i de crear bones composicions.

4.5 Mesures de distància

Així com hem fet amb la mesura d'idealitat E, el conjunt de totes les escales $Sc(L, n)$ també es pot concebre de manera geomètrica per tal d'extreure aplicacions musicals.

Donat que la primera nota d'una escala és sempre $\{0\}$, cada escala és un conjunt de la forma $\{0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$. Això es pot interpretar com un punt en un espai de dimensió $n-1$. De fet, aquest espai és discret, ja que totes les coordenades del punt $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ són enteres.

El conjunt de totes les escales possibles $Sc(L, n)$ consisteix, doncs, en tots els conjunts de punts de la forma $\{0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ tals que

$$0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < L$$

Geomètricament, això correspon a tots els punts discrets continguts en la intersecció dels semiplans

$$\{0 < a_1\},\ \{a_1 < a_2\},\ ...,\ \{a_{n-1} < L\}$$

Això es mostra a la figura 4.2 per al cas $n = 3$, que correspon a un espai de dues dimensions. El nombre de punts discrets a dins del triangle, que té dos costats de mida $L-2$, és igual a

$\frac{(L-1)(L-2)}{2}$. Això és el que s'esperava, ja que recordem que el nombre d'escales diferents és

$$\binom{L-1}{n-1} = \binom{L-1}{2} = \frac{(L-1)(L-2)}{2}$$

Recordem també que l'escala ideal té tots els intervals iguals a L/n, per tant és tal que $a_i = iL/n$. En el cas 2-dimensional això és el punt $(L/3, 2L/3)$.

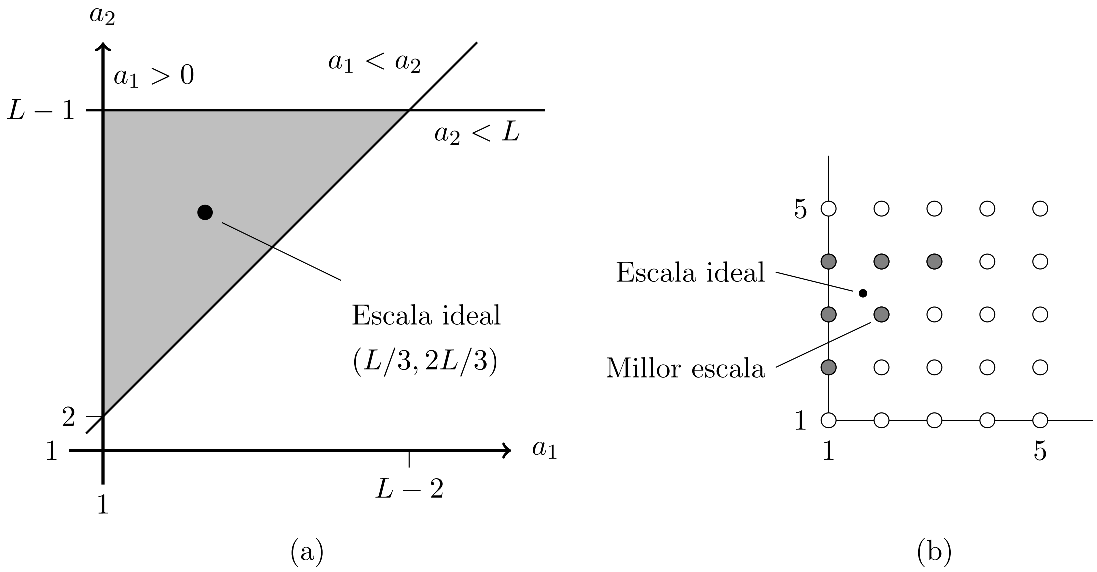

Figura 4.2: (a) La regió del pla corresponent a les escales amb $n = 3$, per a L arbitrària. (b) El cas específic $n = 3$, $L = 5$

Amb aquesta interpretació geometrica, és veu més clarament que la mesura E és simplement la distància euclídia entre el punt corresponent a l'escala en qüestió i el punt P de l'escala ideal.

La distància del taxista

A l'hora de comparar escales amb l'escala ideal, té sentit considerar la distància euclidiana, donat que és la distància entre un punt amb coordenades enteres i un punt normalment no discret.

Però una altra qüestió interessant és demanar per la distància entre dues escales de (L, n), o trobar totes les escales que siguin properes a una escala concreta. Per tal de comparar dues escales amb coordenades enteres, existeix una mètrica més útil en termes musicals.

Definició 20. *Siguin $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ les coordenades dels punts corresponents a les dues escales. La **distància del taxista**, també coneguda com distància L_1, pren el valor*

$$T = \sum_i |x_i - y_i|$$

Aquesta mètrica ens permet mesurar com de prop a nivell de percepció musical es troben dues escales, en particular per a distàncies petites. Si una escala concreta (per exemple, la major) es toca seguida d'una escala que es trobi a poca distància, és relativament fàcil detectar que les escales són diferents. A mesura que la distància del taxista augmenta, la segona escala sona cada cop menys similar a la original, i en cas que l'original fos una escala comuna, sona també més estranya. Això ens proporciona una altra manera de mesurar la raresa d'una escala, depenent de la distància a la que es trobi d'una escala molt comuna, com per exemple l'escala major.

Per tant volem saber, donada una escala (L, n) particular, quantes escales hi ha a una distància T. Veiem-ho per al cas més interessant en què $L = 12$, $n = 7$, i prenent l'escala major de referència. Considerem primer el cas $T = 1$. L'escala major es pot representar com

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
*		*		*	*		*		*		*

On les notes amb un asterisc són les que formen l'escala. Observem que la nota 2 es pot moure una posició de dues maneres, a la primera posició o bé a la tercera. Les notes 7 i 9 també es poden canviar de dues maneres diferents, mentre que les notes 4, 5 i 11 només d'una. Per tant, en total hi ha 9 escales a distància $T = 1$. D'aquestes 9 escales, tres d'elles són diatòniques i les altres sis són triatòniques.

A la figura 4.3 es mostren aquestes 9 escales, així com algunes de les escales més destacades que es troben a distància 2 de l'escala major.

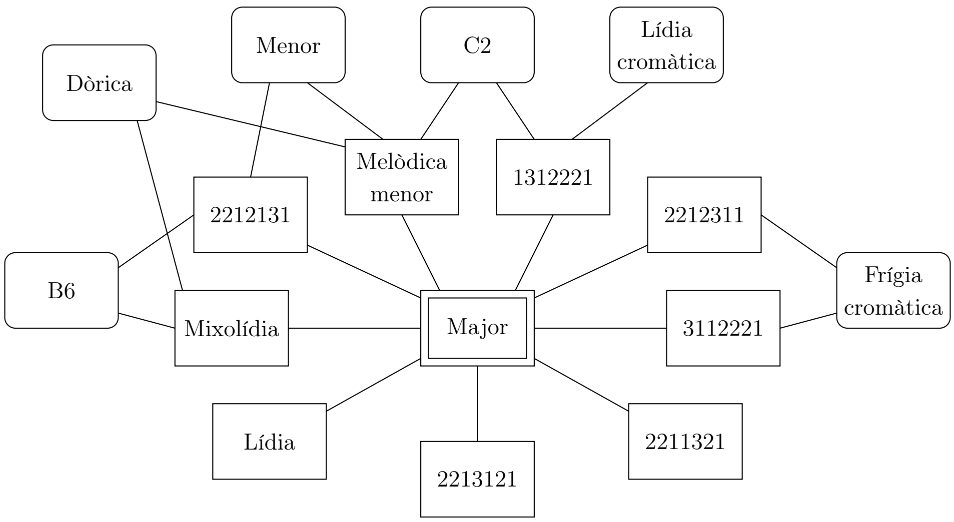

Figura 4.3: Porció de l'espai de les 462 escales. Es mostren les 9 escales a distància $T = 1$ de la Major, i en els rectangles arrodonits 6 de les 31 que es troben a distància $T = 2$.

Aquest diagrama també respon a una qüestió musical interessant, donat que relaciona l'escala menor i la escala major. Aquestes dues escales són conegudes en certa manera per tenir unes qualitats concretes. S'acostuma a dir que l'escala major té un só alegre, mentre que amb l'escala menor les melodies que es formen són més aviat tristes. Com que l'escala menor es troba a distància $T = 2$ de l'escala major, amb la distància del taxista hem trobat quines escales es troben a mig camí entre l'escala major i la menor. En termes poc estrictes, es podria dir que aquestes dues escales tenen un so mixt entre l'alegria i la tristor, i es poden fer servir per crear composicions curioses i intrigants.

Capítol 5

Fileres de tons

Fins ara, hem estudiat dos tipus de conjunts de notes musicals, com són les escales i els acords. En aquest últim capítol es pretén estudiar un tipus de successions de notes musicals, les anomenades fileres de tons. Ens centrarem en la música formada a partir d'una escala de temperament igual de dotze tons, és a dir, el mateix cas $L = 12$ que hem prioritzat fins ara. No obstant, l'anàlisi d'aquest objecte és anàleg per a altres escales.

5.1 Definicions bàsiques

Definició 21. *Una **filera de tons** és una seqüència de totes les notes de l'escala amb un ordre determinat, de manera que cap to es repeteix dues vegades.*

Donat que es tracta d'una successió de notes musicals, seguim treballant amb el concepte d'isomorfisme entre octaves. Així, cada to és en realitat una classe de tons. Aquestes classes les identificarem amb els enters de 0 a 11.

Veiem dos exemples de fileres de tons pel cas $L = 12$. Un de genèric, q, i un altre de concret, p.

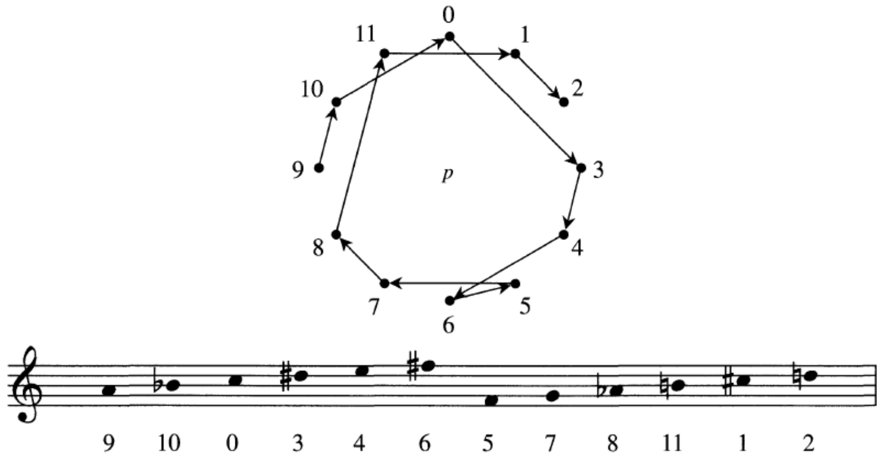

Figura 5.1: Diagrama circular i representació en notació musical de la filera de tons p, extreta de *Schoenberg's Serenade, opus 24, Movement 5.* (Imatge de [6])

$$q = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}\} \quad , \quad p = \{9, 10, 0, 3, 4, 6, 5, 7, 8, 11, 1, 2\}$$

Per tal de modificar les fileres de tons es poden aplicar diferents operacions.

Definició 22. *La* ***transposició*** *d'una filera de tons x en n semitons, que denotarem com $T^n(x)$, consisteix en augmentar cadascuna de les classes de tons de x en n semitons.*

Per exemple, si apliquem dues transposicions de n i 1 semitons a les fileres de tons q i p respectivament, obtenim les noves fileres

$$T^n(q) = \{t_0 + n,\, t_1 + n,\, t_2 + n,\, ...,\, t_{11} + n\} \quad , \quad T^1(p) = \{10, 11, 1, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 0, 2, 3\}$$

Definició 23. *La* ***inversió*** *d'una filera de tons x, que denotarem com $I(x)$, es fa respecte del primer to, i consisteix en intercanviar la classe de cada to per la classe del seu to negatiu.*

Veiem com afecta aquesta operació a les dues fileres de tons d'exemple

$$I(q) = \{t_0,\, 2t_0 - t_1,\, 2t_0 - t_2,\, ...,\, 2t_0 - t_{11}\} \quad , \quad I(p) = \{9, 8, 6, 3, 2, 0, 1, 11, 10, 7, 5, 4\}$$

Podem observar que aquesta operació no afecta a la posició de la classe del to t_0, donat que la reflexió es fa a partir d'ella mateixa. Les seqüències $T^n I(x)$ també es consideren inversions de x, donat que només fan rotar l'eix de simetria.

Definició 24. *La* ***retrogradació*** *d'una filera de tons x, que denotarem com $R(x)$, es tracta de la mateixa seqüència però en ordre invers.*

Aplicant a q i p la retrogradació, ens queden les fileres de tons

$$R(q) = \{t_{11}, t_{10}, t_9, t_8, t_7, t_6, t_5 t_4, t_3, t_2, t_1, t_0\} \quad , \quad R(p) = \{2, 1, 11, 8, 7, 5, 6, 4, 3, 0, 10, 9\}$$

La representació circular de les fileres de tons és especialment útil per entendre aquestes operacions. A la figura 5.2 és mostren les representacions resultants d'aplicar les diferents operacions a la filera p de l'exemple.

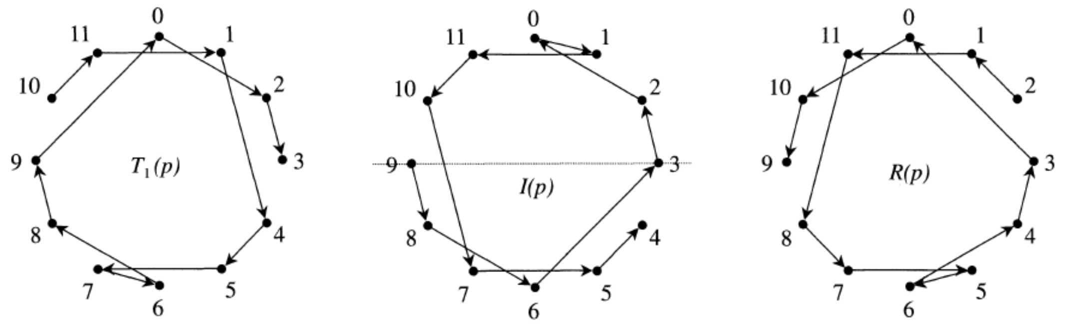

Figura 5.2: Diagrames circulars de les diferents operacions aplicades a la filera de tons p.

Veiem que la transposició T^n consisteix en fer una rotació de n posicions. Per fer la inversió s'ha de reflexar la figura respecte l'eix de simetría que passa pel to t_0. La retrogradació és simplement canviar el sentit del recorregut.

A partir d'aquestes definicions, i amb la ajuda de la interpretació gràfica dels diagrames circulars, podem deduir les següents relacions entre les operacions T, I i R:

$$T^0 = e\,, \quad T^nR = RT^n\,, \quad T^nI = IT^{-n}\,, \quad RI = IR$$

On e representa la operació identitat, que deixa invariant a la filera de tons. Totes les relacions entre les operacions T, I i R es segueixen d'aquestes.

Per tant, hi ha quatre formes possibles per a una filera de tons x. Direm forma primitiva a la filera original x o qualsevol de les seves transposicions $T^n(x)$. La forma inversa és qualsevol de les fileres $T^nI(x)$. La forma retrògrada consisteix en les fileres $T^nR(x)$. Finalment, direm que la filera de tons x està en forma retrògrada inversa si es tracta de qualsevol de les fileres del tipus $T^nRI(x)$. Recordem que en tots els casos n pren valors entre 0 i 11.

Així, donada una filera de tons x qualsevol i combinant totes aquestes operacions, podem formar un total de $4 \cdot 12 = 48$ fileres diferents.

5.2 Resultats de teoria de grups

Per tal de seguir treballant les fileres de tons, és interessant enfocar el seu estudi des de la teoria de grups. De la mateixa manera que s'ha fet al capítol 2, es donaran per coneguts molts conceptes com ara el de classe lateral o el de subgrup normal, així com altres resultats bàsics. No obstant, és important recordar algunes altres definicions no tan elementals.

En termes de teoria de grups, les operacions T^n, $(0 \leq n \leq 11)$ formen un grup cíclic $\mathbb{Z}/12$. L'operació R juntament amb l'operació identitat forma un grup cíclic $\mathbb{Z}/2$.

A més, les operacions T^n i R commuten. Una manera de descriure un grup amb dos tipus d'operacions diferents que commuten és un producte cartesià. El grup format per les operacions T^n i T^nR és un producte intern del subgrup consistent en les operacions T^n i el subgrup format per l'operació identitat i R. Aleshores, veiem que aquest grup és isomorf a $\mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/2$.

La relació entre T i I és més complexa, ja que aquestes dues operacions no commuten. Però sí que es satisfà que $T^nI = IT^{-n}$, fet que fa pensar automàticament en el grup diedral.

Definició 25. *El **grup diedral** està generat per dos elements g i h tals que $h^2 = 1$ i tals que $gh = hg^{-1}$. Tots els elements del grup són de la forma g^i o bé g^ih. Quan g té ordre n, les seves potències formen el subgrup cíclic $\mathbb{Z}/n$. En aquest cas, el grup té $2n$ elements i s'escriu com D_{2n}.*

És clar, doncs, que les operacions T^n i T^nI formen un grup isomorf al grup diedral D_{24}.

Finalment, ajuntant tots aquests resultats, arribem a la conclusió que el grup amb les operacions

$$T^n, \quad T^nR, \quad T^nI, \quad T^nRI$$

forma un grup isomorf a $D_{24} \times \mathbb{Z}/2$, fet que lliga amb la conclusió de la secció anterior: a partir d'una filera de tons i aplicant aquestes operacions es poden obtenir 48 fileres diferents.

Accions, òrbites i estabilitzadors

Ja tenim una definició formal de grup per a les nostres operacions. El següent pas és formalitzar que actuen sobre el conjunt de totes les fileres de tons. Estem parlant, doncs, d'una acció d'un grup sobre un conjunt.

Definició 26. *Una* ***acció*** *d'un grup G sobre un conjunt X és una aplicació $\varphi : G \times X \to X$ que envia la parella (g, x) a l'element $\varphi(g, x) = g(x) \in X$. Ha de satisfer que $h(g(x)) = g(h(x))$ i que $e(x) = x$, $\forall g, h \in G$, $\forall x \in X$.*

En tot moment aplicarem aquesta definició al nostre cas, entenent que el conjunt d'operacions G actua com un grup de permutacions sobre el conjunt de fileres de tons X. Per a cada element x del conjunt X, podem definir dos subconjunts d'interès.

Definició 27. *L'**òrbita** de x és el subconjunt $O(x) = \{g(x) \,|\, g \in G\} \subseteq X$.*

És a dir, dos elements x i y de X es troben a la mateixa òrbita si existeix un element $g \in G$ tal que $g(x) = y$. Això indueix una partició de X en subconjunts disjunts. Aquests subconjunts són les òrbites de G en X.

Per exemple, el grup $T^n \cong \mathbb{Z}/12$ actua sobre el conjunt X de les fileres de tons. Per a aquest grup G, dues fileres de tons es troben a la mateixa òrbita quan una és una transposició de l'altra.

Si G actua com una permutació en el conjunt X, aleshores hi ha una connexió estreta entre òrbites i classes laterals dels subgrups de G, que es pot descriure en termes de l'estabilitzador. Veiem la definició i el resultat que necessitarem a la secció següent.

Definició 28. *L'**estabilitzador** de x és el subconjunt $S_G(x) = \{g \in G \,|\, g(x) = x\} \subseteq G$.*

Proposició 4. *Sigui $H = S_G(x)$. Aleshores l'aplicació que envia la classe lateral gH a l'element $g(x) \in X$ està ben definida, i estableix una bijecció entre les classes laterals per l'esquerra de H en G i els elements de X a la òrbita que conté x.*

Demostració. Per veure que l'aplicació està ben definida hem de veure que donat un altre element g' tal que $gH = g'H$, aleshores $g(x) = g'(x)$. Això és cert ja que existeix un element $h \in H$ tal que $gh = g'$, i per tant $g'(x) = gh(x) = g(h(x)) = g(x)$.

És clar que també és injectiva per la definició de òrbita. Només ens falta veure doncs que l'aplicació és injectiva. Si $g(x) = g'(x)$ aleshores $x = g^{-1}g'(x)$, i per tant $g^{-1}g' \in H$, que és equivalent a $gH = g'H$. □

Com a conseqüència d'aquest teorema, veiem que el cardinal d'una òrbita és igual a l'índex de l'estabilitzador d'un dels seus elements.

$$|O(x)| = |G : S_G(x)| \tag{5.1}$$

5.3 Comptatge de fileres de tons

Ja hem treballat a fons l'estructura matemàtica que envolta les fileres de tons i les operacions que hem definit. L'objectiu ara és fer-la servir per resoldre alguns problemes de comptatge relacionats amb les fileres de tons.

Donat que una filera de tons consisteix en 12 possibles classes de tons en qualsevol ordre, hi ha $12! = 470.001.600$ fileres de tons diferents. Això és, per tant, el cardinal del conjunt X.

També podríem considerar que dues fileres de tons són la mateixa si una es pot transformar en una altra aplicant una operació de transposició de la forma T^n. En aquest cas, cada filera de tons té dotze imatges diferents, una per a cadascuna d'aquestes operacions. Per tant, el nombre total de fileres de tons considerant aquesta noció d'equivalència és una dotzena part del nombre total, és a dir $11! = 39.916.800$.

Si volem fer la situació encara més interessant, podem considerar que dues fileres de tons són la mateixa si es pot obtenir una d'elles a partir de l'altra fent servir totes les operacions T^n, I i R. Ara l'inconvenient és que algunes de les fileres estan fixades per altres elements del grup, i el problema de comptatge degenera en molts casos particulars.

Per solucionar això, és convenient fer una formulació més abstracta. Sabem que tenim un grup finit G actuant com un grup de permutacions sobre un conjunt finit X. Dues fileres de tons es trobaran a la mateixa òrbita quan és pugui fer una transformació d'una en l'altra mitjançant les operacions de G. Per tant, el que volem saber és el nombre d'òrbites de G en X.

El lema següent ens permet comptar el nombre d'òrbites, suposant que coneixem el nombre de punts fixos de cada element $g \in G$. Ens diu que el nombre d'òrbites és la mitja del nombre de punts fixos.

Lema 1. ***Burnside.*** *Sigui G un grup finit actuant sobre permutacions d'un conjunt finit X. Per un element $g \in G$, direm $n(g)$ el nombre de punts fixos de g en X. Aleshores, el nombre d'òrbites de G en X és igual a*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} n(g) \tag{5.2}$$

Demostració. Comptem de dues maneres diferents el nombre de parelles (g, x) formades per un element $g \in G$ i un punt $x \in X$ tals que $g(x) = x$. Si comptem primer els elements del grup G, aleshores per a cada element del grup haurem de comptar el nombre de punts fixos, i tindrem $\sum_{g\in G} n(g)$. D'altra banda, si primer comptem els elements de X, per a cada x podem aplicar l'equació (5.1). Aleshores veiem que el nombre d'elements $g \in G$ que estabilitzen el grup és igual a $|G|$ dividit entre la mida de la òrbita a la que pertany x. Per tant, cada òrbita contribueix en $|G|$ al recompte. □

Tornem doncs al problema de comptar fileres de tons amb equivalència sota les operacions T, I i R. Com ja hem vist, volem comptar el nombre d'òrbites del grup $G = D_{24} \times \mathbb{Z}/2$ generat per T, I i R en el conjunt X de totes les fileres de tons.

Per tal de poder aplicar el lema, hem de trobar el nombre de fileres de tons fixades per cada operació del grup. La més fàcil és l'operació identitat, donat que fixa totes les fileres. Les operacions T^n amb $1 \leq n \leq 11$ no deixen invariant cap filera de tons, així que aquestes també són fàcils.

Els punts fixos de l'operació R són aquelles fileres de tons en què les classes de les sis últimes notes siguin les classes en ordre invers de les sis primeres, però aleshores hi ha repeticions, i per tant no compten com a fileres de tons.

Per a l'operació T^6R, els punts fixos són les fileres en que les classes de les sis últimes notes són les sis primeres en ordre invers, però ara transposades 6 semitons. Per tant, les sis primeres s'han d'escollir de manera que només facin servir una de cada parella de notes relacionades per aquesta distància de mitja octava. El nombre de maneres de fer això és

$$12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 46.080$$

Per a altres valors de n diferents de 6, T^nR no deixa fixa cap filera de tons. Observem que repetir aquesta operació dos cops resulta en T^{2n}, que ja hem vist que no té punts fixos.

Considerem ara les inversions. L'operació I fixa només aquelles fileres de tons compostes amb les classes de tons entre 0 i 6. Però una altra vegada, donat que no es pot repetir cap classe de tons, aquesta operació no deixa invariant cap filera vàlida. El mateix passa per a les inversions en la forma genèrica T^nI.

Finalment, considerem l'operació del tipus T^nIR. De nou, les classes que determinen si la filera de tons és un punt fix són les sis primeres. Per tant, tenim una filera de la forma

$$\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, n - t_5, n - t_4, n - t_3, n - t_2, n - t_1, n - t_0\}$$

Si n és parella, hi ha alguna classe fixada per T^nI, el que ens força a repetir de to, i per tant no hi ha fileres invariants. Si n és senar, en canvi, passa el mateix que amb l'operació T^6R, i el nombre de fileres de tons que romanen fixes és 46.080.

A la taula 5.1 es mostra un recull de tota aquesta casuística de punts fixos.

Operació	Elem. diferents en G	Punts fixos
identitat	1	479.001.600
T^n $(1 \leq n \leq 11)$	11	0
T^6R	1	46.080
T^nR $(n \neq 6)$	11	0
T^nI	12	0
T^nIR $(n\ parell)$	6	0
T^n $(n\ senar)$	6	46.080

Taula 5.1: Forma dels diferents elements de G i els seus punts fixos sobre el conjunt X.

Per tant, ara ja podem fer servir el lema de Burnside 1. La suma dels punts fixos de g en X per a tots els $g \in G$ és

$$479.001.600 \cdot 1 + 46.080 \cdot (1 + 6) = 479.324.160$$

Ara, dividint entre el cardinal de $|G| = 48$, obtenim que el nombre total d'òrbites de G sobre el conjunt de totes les fileres de tons X és 9.985.920. Amb tot això, es dona per demostrat el següent teorema:

Teorema 7. ***David Reiner.*** *Si dues fileres de tons es consideren la mateixa quan una es pot obtenir a partir de l'altre fent servir les operacions T, I, i R; aleshores existeixen 9.985.920 fileres de tons diferents.*

Conclusions

Al llarg del treball hem fet un estudi exhaustiu de les escales, els acords i les fileres de tons. Al tractar-se de conceptes que pertanyen a una altra disciplina, hem necessitat donar-ne una descripció matemàtica, per tal de poder tractar-los amb les eines adequades. S'han definit diferents propietats que poden satisfer tant els acords com les escales. Per a cadascuna d'aquestes, hem pogut fer una classificació i valorar les seves implicacions musicals.

En el cas del acords, per exemple, hem vist que el nombre d'adjacències entre notes està estretament relacionat amb el seu tipus de so. Això ens ha proporcionat una idea de per què alguns es fan servir més que d'altres. També els hem pogut classificar segons si són fàcils de tocar amb un teclat o no, o en funció de si es repeteixen de manera periòdica al llarg del mànec d'una guitarra.

D'altra banda, hem vist com les escales es poden generar a partir dels diferents intervals que formen els acords. Així, hem deduït de manera directa moltes de les propietats establertes per als acords. També s'han estudiat els conceptes de regularitat i idealitat, que ens han donat mètodes per quantificar les característiques musicals d'una escala.

Les fileres de tons suposen un enfoc diferent, ja que en comptes d'analitzar objectes propis de la música, s'intenta posar aquesta a disposició de les matemàtiques. Un bon exercici pot ser fer servir les diferents classes de tons que hem trobat per compondre melodies i explorar les qüestions que puguin sorgir, com ara quines són les que generen sons més agradables, i per què.

S'ha comprovat que, en realitat, només es fa servir una petita part de tota la música existent. Així, s'han fet servir termes subjectius com "raresa" d'un acord, "millor" escala o "idealitat", sempre en funció de la freqüència amb què s'utilitzen. No obstant, cap d'aquestes classificacions pretén ser una restricció, sinó més aviat al contrari, s'han d'entendre com un ventall d'eines que poden ajudar en el procés creatiu.

Tots els resultats explícits s'han donat pel cas més estès en la música occidental actual, l'escala de $L = 12$ tons equiespaiats. Com a feina posterior a la realització d'aquest treball, es pot aplicar aquest mateix anàlisi per a diversos valors de L, amb l'objectiu de trobar altres objectes musicalment interessants.

En qualsevol cas, amb eines matemàtiques o sense elles, la clau de tota obra musical segueix estant en mans de l'artista. És aquí on rau, en última instància, el valor que les matemàtiques aporten a l'estudi de la música: la possibilitat d'analitzar l'estructura d'una forma artística, proporcionant una nova perspectiva d'allò que ja crèiem conèixer.

Bibliografia

[1] Michael Keith. *From polychords to Pólya.* Vinculum Press, Princeton, 1991.

[2] David J. Benson. *Music: A mathematical offering.* Cambridge University Press, Aberdeen, 2008.

[3] Xavier Gràcia and Tomás Sanz-Perela, "The wave equation for stiff strings and piano tuning", *Reports@SCM* **3** (2017) 1–16. DOI: 10.2436/20.2002.02.11

[4] William A. Sethares. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale.* Springer, Madison, 1999.

[5] Javier Arbonés, Pablo Milrud. *La armonía es numérica.* RBA, Madrid, 2010.

[6] David J. Hunter and Paul T. von Hippel, "How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows", *The American Mathematical Monthly* Vol. 110, No. 2 (Feb., 2003), pp. 124-132

[7] Matias von Bell. "Pólya's enumeration theorem and its applications", University of Helsinki, 2015.