UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

Estadística

5. Models continus de probabilitat

José **Rodellar** / Francesc **Pozo**

Escola d'Enginyeria de Barcelona Est (EEBE)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Grau en Enginyeria Biomèdica, Grau en Enginyeria de l'Energia, Grau en Enginyeria de Materials, Grau en Enginyeria Elèctrica, Grau en Enginyeria Mecànica, Grau en Enginyeria Electrònica Industrial i Automàtica, Grau en Enginyeria Química

Distribució uniforme contínua

Una variable aleatòria X segueix una distribució uniforme contínua de paràmetres a i b ($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$) si la seva funció de densitat és

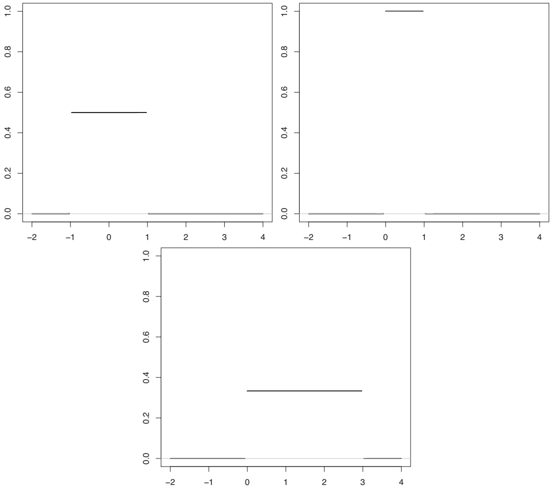
$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}}$$

Ho expressarem abreujadament de la manera següent: $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a, b)$.

Les seves característiques principals són

$$E(X) = \frac{b+a}{2},$$
$$VAR(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribució uniforme contínua (gràfiques, $a = -1, b = 1;\ a = 0, b = 1;\ a = 0, b = 3$)



Distribució uniforme contínua (funció de distribució)

Recordeu que $F(x) = P(X \leq x)$. Aleshores,

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}}$$

Recordeu també que:

$$\boxed{P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)}$$

Distribució exponencial negativa

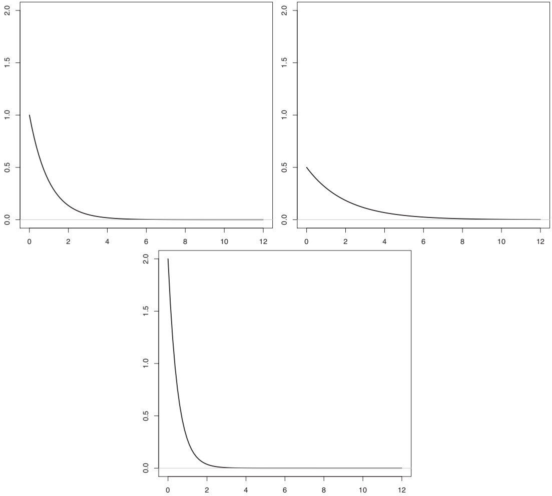
Una variable aleatòria X segueix una distribució *exponencial negativa* de paràmetre λ ($\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$) si la seva funció de densitat és

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}}$$

Ho representem amb la notació abreujada $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
Les seves característiques principals són

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},$$
$$VAR(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Distribució exponencial negativa (gràfiques, $\lambda = 1, \lambda = 0.5, \lambda = 2$)



Distribució exponencial negativa (funció de distribució)

Recordeu que $F(x) = P(X \leq x)$. Aleshores,

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}}$$

Recordeu també que:

$$\boxed{P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)}$$

Exemple (funció de densitat i càlcul de probabilitat)

Considereu $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Calculeu $P(1 < X < 3)$ fent servir la funció de densitat. Tingueu present que

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

Estadística

2020-10-22

5.2. Models Continus de Probabilitat

Exemple (funció de densitat i càlcul de probabilitat)

Considereu $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Calculeu $P(1 < X < 3)$ fent servir la funció de densitat. Tingueu present que

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(1 < X < 3) &= \int_1^3 f_X(x)dx = \int_1^3 2e^{-2x}dx \\ &= \left[-e^{-2x}\right]_{x=1}^{x=3} = -e^{-6} + e^{-2} \\ &\approx -0.0025 + 0.1353 \\ &= 0.1328 \end{aligned}$$

Exemple (funció de densitat i càlcul de probabilitat)

Considereu $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Calculeu $P(1 < X < 3)$ fent servir la funció de distribució. Tingueu present que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

5.2. Models Continus de Probabilitat

Exemple (funció de densitat i càlcul de probabilitat)

Considereu $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Calculeu $P(1 < X < 3)$ fent servir la funció de distribució. Tingueu present que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(1 < X < 3) &= F(3) - F(1) = (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-2}) \\ &= -e^{-6} + e^{-2} \\ &\approx -0.0025 + 0.1353 \\ &= 0.1328 \end{aligned}$$

Distribució normal

Es diu que una variable aleatòria té una distribució **normal** si la seva funció de densitat és

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.}$$

La funció depèn de dos paràmetres μ i σ, i s'expressa com $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$.

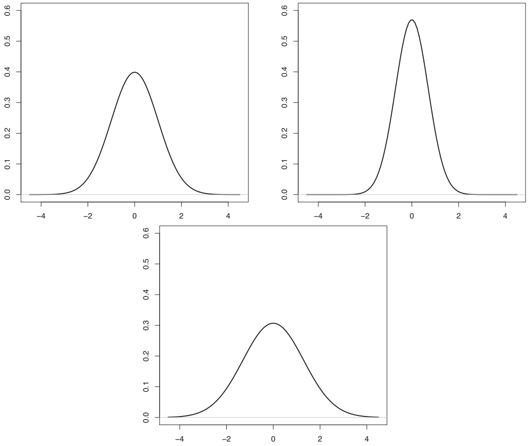
Si una variable aleatòria X és $N(\mu, \sigma)$, aleshores la seva esperança matemàtica és

$$E(X) = \mu$$

i la seva variància és

$$VAR(X) = \sigma^2.$$

Distribució normal (gràfiques, $\mu = 0, \sigma = 1$; $\mu = 0, \sigma = 0.7$; $\mu = 0, \sigma = 1.3$)



Distribució normal. Propietats

(i) $f_X(x)$ és simètrica respecte de la recta $x = \mu$.

(ii) L'eix x (la recta $y = 0$) és una asímptota a la corba.

(iii) $f_X(x)$ té un màxim de valor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ per a $x = \mu$.

(iv) Té dos punts d'inflexió, a $x = \mu - \sigma$ i a $x = \mu + \sigma$.

(v) La moda i la mediana valen μ.

Distribució normal. Funció de distribució

La funció de distribució de la llei normal és

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt,}$$

que no té una expressió explícita. Per què?

Distribució normal tipificada

Si la mitjana μ val 0 i σ val 1, la llei normal corresponent es denomina *llei normal tipificada* i podem escriure $X \hookrightarrow N(0,1)$.

La seva funció de densitat és

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i les seves característiques són $E(X) = 0,\ VAR(X) = 1.$

Els valors de l'àrea sota la corba normal tipificada, és a dir, els valors de

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad \int_{0}^{x} f(t)dt$$

estan tabulats per als diferents valors de x.

Distribució normal tipificada

Si hem de calcular la llei normal per a un valor μ diferent de 0, i σ diferent de 1, fent el canvi de variable

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

s'obté la llei normal tipificada.

Per tant, per fer els càlculs utilitzant les taules, passarem a la llei normal tipificada i després tornarem a la llei d'origen.
És a dir,

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(z_1 \leq Z \leq z_2),$$

on $z_i = \frac{x_i - \mu_X}{\sigma_X}$.

Exemple (R per al càlcul de probabilitats)

Sigui Z una variable aleatòria normal tipificada. Calculeu:

- $P(Z \leq 0.75)$

```
> pnorm(0.75, mean=0, sd=1)
[1] 0.7733726
```

- $P(1.05 \leq Z \leq 2.13)$

```
> pnorm(2.13)-pnorm(1.05)
[1] 0.1302732
```

- $P(Z \geq 2.13)$

```
> 1-pnorm(2.13)
[1] 0.01658581
```

- k sabent que $P(Z \leq k) = 0.73$

```
> qnorm(0.73)
[1] 0.612813
```

Exemple (R per al càlcul de probabilitats)

Sigui Z una variable aleatòria normal tipificada. Calculeu:

- $P(Z \leq -0.75)$
```
> pnorm(-0.75)
[1] 0.2266274
```
- $P(-0.75 \leq Z \leq 0.75)$
```
> pnorm(0.75)-pnorm(-0.75)
[1] 0.5467453
```
- k sabent que $P(Z \leq k) = 0.43$
```
> qnorm(0.43)
[1] -0.1763742
```
- z sabent que $P(-z < Z < z) = 0.95$
```
> qnorm(0.95+(1-0.95)/2)
[1] 1.959964
```