UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

Estadística

3. Elements de probabilitat

José **Rodellar** / Francesc **Pozo**

Escola d'Enginyeria de Barcelona Est (EEBE)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Grau en Enginyeria Biomèdica, Grau en Enginyeria de l'Energia, Grau en Enginyeria de Materials, Grau en Enginyeria Elèctrica, Grau en Enginyeria Mecànica, Grau en Enginyeria Electrònica Industrial i Automàtica, Grau en Enginyeria Química

Probabilitat condicionada (exemple motivador)

boles	blanques	negres	total
caixa 1	3	10	13
caixa 2	5	15	20
total	8	25	33

(1) Si es barregen totes les boles, i se n'extreu una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui de la caixa 1? (Es pot contestar fent servir la taula)

$$\boxed{P(C_1) = \frac{13}{33}}$$

Probabilitat condicionada (exemple motivador)

boles	blanques	negres	total
caixa 1	3	10	13
caixa 2	5	15	20
total	8	25	33

(2) Considerem ara que la bola treta és blanca i això és un fet conegut. Quina és la probabilitat que la bola sigui de la caixa 1? (Es pot contestar fent servir la taula)

$$\boxed{P(C_1|B) = \frac{3}{8} = \frac{3/33}{8/33} = \frac{P(C_1 \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilitat condicionada (exemple motivador)

boles	blanques	negres	total
caixa 1	3	10	13
caixa 2	5	15	20
total	8	25	33

Mentre que la pregunta (1) implica un únic esdeveniment ("caixa 1"), la (2) implica l'esdeveniment "caixa 1" subjecte al fet que ha passat un altre esdeveniment ("bola blanca").

Probabilitat condicionada. Definició formal

Siguin A i B dos esdeveniments, amb $P(B) > 0$. La probabilitat que succeeixi l'esdeveniment A condicionada al fet que hagi succeït l'esdeveniment B es defineix de la manera següent:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Una conseqüència directa és:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

Independència d'esdeveniments

Es diu que dos esdeveniments A i B són independents quan el fet que es produeixi un d'ells no influeix en la probabilitat que ocorri l'altre.

Em conseqüència:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)} \text{ i, anàlogament, } \boxed{P(B|A) = P(B)}$$

Per tant,

A i B són independents si, i només si,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Exemple

Sabent que A i B són esdeveniments independents amb $P(A) = 3/11$ i $P(B) = 3/10$, obteniu el valor de $P(A|B), P(A \cap B)$ o $P(\overline{A}|B)$.

Exemple

Expliqueu la diferència entre que dos successos siguin independents o incompatibles.

Exemple

Raoneu si és certa o falsa l'afirmació: A i B són independents si $P(A) = 0.5, P(B) = 0.2$ i $P(A|B) = 0.45$.

Exemple

Si A i B són esdeveniments independents, demostreu que A i el complementari de B també ho són (problema 2.17 del llibre).

Exemple (problema 2.19 del llibre)

Considereu els esdeveniments A, B i C tals que

- la probabilitat de cadascun d'aquests esdeveniments és p_1;
- la probabilitat de la intersecció de dos esdeveniments qualssevol és p_2;
- la probabilitat de la intersecció dels tres esdeveniments és p_3.

Expresseu el valor de la probabilitat

$$P(A \cup B \cup C)$$

en funció de p_1, p_2 i p_3.

***Ajuda**. Per a fer-ho, seguiu els passos següents:*

(i) *Recordeu la fórmula de la probabilitat de la unió de dos esdeveniments.*

(ii) *Desenvolupeu la probabilitat $P(A \cup B \cup C)$, considerant l'esdeveniment $D = B \cup C$.*

(iii) *Recordeu, finalment, que*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Exemple (problema 2.20 del llibre)

Es llancen dos daus a l'aire. Estudieu la independència dels esdeveniments:

$A =$ "del primer dau s'obté un nombre parell"

$B =$ "del segon dau s'obté un nombre senar"

$C =$ "se n'obtenen dos nombres parells o dos nombres senars"

Exemple (problema 2.26 del llibre)

Es llancen dos daus. Si les cares que apareixen són diferents, trobeu la probabilitat que:

(a) La suma de les cares sigui un nombre parell.

(b) La suma sigui superior a 9.

Exemple (problema 2.30 del llibre)

Es denomina *fiabilitat d'un sistema* la probabilitat que aquest sistema funcioni correctament. Sigui S_1 un sistema elèctric format per 50 bombetes connectades en sèrie. La probabilitat que una bombeta funcioni al cap de 100 hores és 0.99, i suposem que les bombetes s'espatllen independentment.

(a) Quina és la fiabilitat del sistema S_1 després de 100 hores, és a dir, quina és la probabilitat que el circuit funcioni al cap de 100 hores?

(b) Suposem que, per a més seguretat, connectem un altre circuit S_2 en paral·lel amb S_1. El nou sistema funcionarà si S_1 o S_2 funciona. Quina és la fiabilitat d'aquest nou sistema al cap de 100 hores?

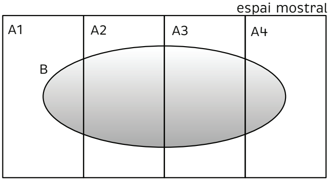
Teorema de la probabilitat total

Si $A_1, \ldots, A_n$ és una partició de Ω, és a dir,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j;$$

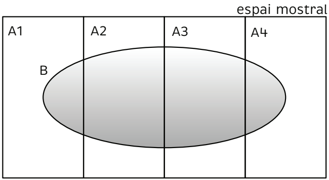
aleshores, si B és un esdeveniment qualsevol,

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i).}$$



Teorema de la probabilitat total

El teorema de la probabilitat total descompon el càlcul de la probabilitat (total) d'un esdeveniment en elements parcials que depenen de les probabilitats condicionades en cada part de l'espai mostral



Teorema de Bayes (motivació)

- Amb el teorema de la probabilitat total, el que es coneix és $P(A_i)$ i $P(B|A_i)$ i el que es vol calcular és $P(B)$.
- Ara, volem resoldre el problema invers. Sabent que ha ocorregut un esdeveniment B, determinar la probabilitat que hagi passat un determinat esdeveniment A_i. És a dir, suposem conegut $P(B)$ i $P(B|A_i)$ i volem determinar

$$\boxed{P(A_i|B)}$$

Definicions

- $P(A_i)$ rep el nom de probabilitat a priori.
- $P(A_i|B)$ rep el nom de probabilitat a posteriori.

Teorema de Bayes (resolució del problema)

Fent servir les probabilitats dels esdeveniments A_i i B, podem esciure:

$$P(A_i \cap B) = \boxed{P(A_i|B)P(B) = P(B|A_i)P(A_i)} = P(B \cap A_i)$$

Si ha ocorregut l'esdeveniment B i coneixem les probabilitats a priori ($P(A_i)$), podem aïllar $P(A_i|B)$:

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}}$$

Exemple

En el cas de les boles i les caixes de la primera transparència

(1) Calculeu $P(N|C_1)$ i $P(B|C_2)$.

(2) Calculeu $P(C_1|N)$ i $P(C_2|B)$.

(3) Observeu que $P(N|C_1) + P(B|C_1) = 1$ i doneu una interpretació del resultat.

(4) Ara ajuntem totes les boles en una mateixa caixa i extraiem 3 boles a l'atzar sense reemplaçament. Calculeu la probabilitat que la tercera bola sigui blanca.

Exemple

Una empresa d'autobusos en una ciutat té 3 línies i se sap la seva distribució a cada línia: $L_1 : 45\%; L_2 : 25\%; L_3 : 30\%$.

Es vol estudiar la probabilitat que, en el període d'un dia, un autobús tingui una avaria. S'ha realitzat un estudi per separat per a cada línia i s'ha conclòs que les probabilitats d'avaria d'un autobús per línia són: 2% per a la L_1; 3% per a la L_2; i 1% per a la L_3.

(1) Calculeu la probabilitat que un autobús tingui una avaria.

(2) Sabent que s'ha avariat un autobús, calculeu la probabilitat que sigui de la línia 1.

(3) Calculeu la probabilitat que no sigui de la línia 2.

Exemple

En una avinguda hi ha un sistema de 3 semàfors successius. La probabilitat de trobar el primer semàfor en vermell és 0.6. En els següents, es coneixen les probabilitats $P(R_{j+1}|R_j) = 0.15$; $P(R_{j+1}|\overline{R_j}) = 0.25,\ j = 1, 2$ on R_j representa l'esdevenimnet "trobem el semàfor j-èssim en vermell".

Acceptant que la probabilitat de trobar un semàfor en vermell depèn únicament de l'estat del semàfor anterior, calculeu la probabilitat que, en circular pel sistema de tres semàfors, passin els següents esdeveniments:

(1) Hi trobem tots els semàfors en vermell

(2) Trobem algun semàfor en vermell.

(3) Trobem exactament un en vermell.

(4) Trobem el segon semàfor en vermell.

(5) Trobem el tercer semàfor en vermell.

Exemple (problema 2.27 del llibre)

Tenim dues capses, una és de la Maria i l'altra, de la Irene. La capsa de la Maria té 5 discos de Paulina Rubio, 3 de Luis Miguel i 8 de Raphael; la capsa de la Irene té 3 discos de Paulina Rubio i 5 de Luis Miguel. Llancem un dau; si surt 3 o 6, escollim un disc a l'atzar de la capsa de la Maria; si surt qualsevol altre número, escollim un disc de la capsa de la Irene. Trobeu la probabilitat que el disc sigui de:

(a) Paulina Rubio

(b) Luis Miguel

(c) Raphael

Exemple (problema 2.29 del llibre)

Per estudis anteriors, sabem que la probabilitat que un adult, major de 40 anys, que arriba a un hospital especialitzat en la lluita contra el càncer tingui aquesta malaltia és del 0.02. Una prova determinada diagnostica correctament una persona que té càncer el 78% dels cops i s'equivoca, amb persones que no tenen càncer, el 6%. Per a un adult de més de 40 anys,

(a) Quina és la probabilitat que li diagnostiquin càncer?

(b) Quina és la probabilitat que, si li han diagnosticat càncer, veritablement tingui la malaltia?

Exemple (problema 2.29 del llibre)

Una joieria té un sistema d'alarma connectat. La probabilitat que hi hagi un robatori és de 0.1. Si hi ha un robatori, la probabilitat que l'alarma funcioni (soni) és de 0.95. Si no hi ha cap robatori, la probabilitat que funcioni (soni) és de 0.03. Calculeu la probabilitat que:

(a) s'activi l'alarma;

(b) havent funcionat l'alarma, no hi hagi hagut cap robatori;

(c) hi hagi un robatori i l'alarma no funcioni;

(d) no havent funcionat l'alarma, hi hagi hagut un robatori.