

Escales logarítmiques

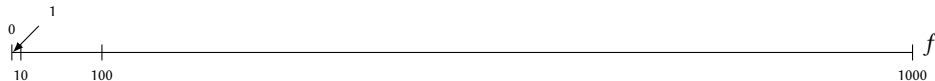
Orestes Mas

Circuits i Sistemes Lineals

13 de febrer de 2023

Escales de freqüència amb espaiat lineal

Exemple: Interval 0 – 1 kHz

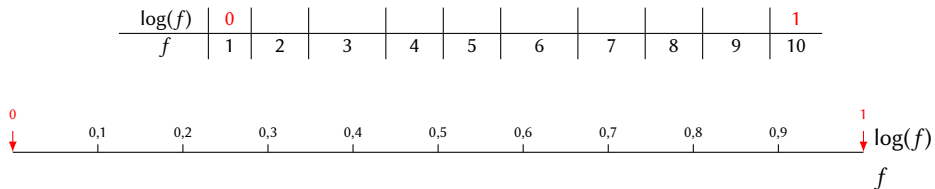


Espaiat lineal de freqüències

- Valors *equidistants* tenen la **mateixa resta**.
- Hi ha la mateixa distància entre 0 i 1 que entre 100 i 101.
- La banda de freqüències baixes queda absolutament comprimida.

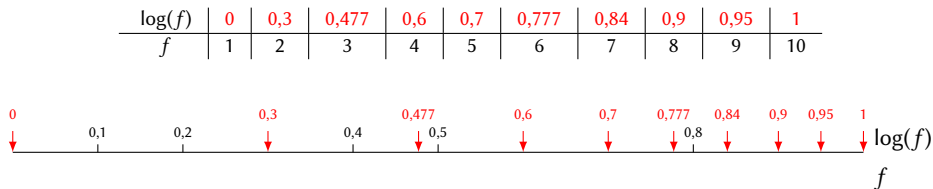
Escales de freqüència amb espaiat logarítmic

Procediment de construcció de l'escala (interval 1 a 10 Hz)



Escales de freqüència amb espaiat logarítmic

Procediment de construcció de l'escala (interval 1 a 10 Hz)

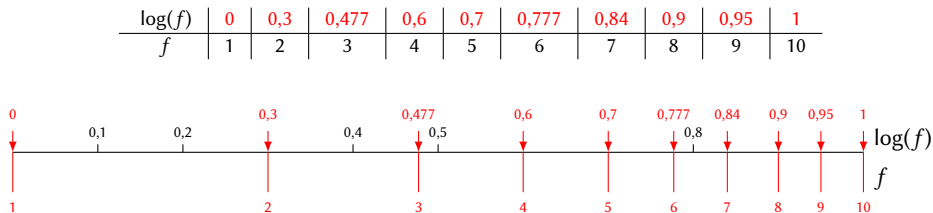


Espaiat logarítmic de freqüències

- Valors *equidistants* tenen el **mateix quocient**.
- Hi ha la mateixa distància entre 1 i 2 , 2 i 4, 4 i 8, 5 i 10.
- Posicionem a $\log(f)$, però per comoditat **etiquetem** amb f

Escales de freqüència amb espaiat logarítmic

Procediment de construcció de l'escala (interval 1 a 10 Hz)



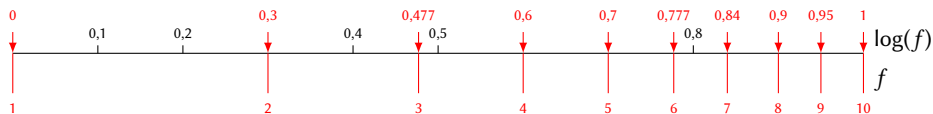
Espaiat logarítmic de freqüències

- Valors *equidistants* tenen el **mateix quocient**.
- Hi ha la mateixa distància entre 1 i 2 , 2 i 4, 4 i 8, 5 i 10.
- Posicionem a $\log(f)$, però per comoditat **etiquetem** amb f

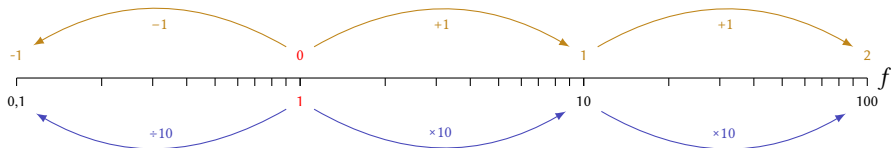
Escales de freqüència amb espaiat logarítmic

Procediment de construcció de l'escala (interval 1 a 10 Hz)

$\log(f)$	0	0,3	0,477	0,6	0,7	0,777	0,84	0,9	0,95	1
f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



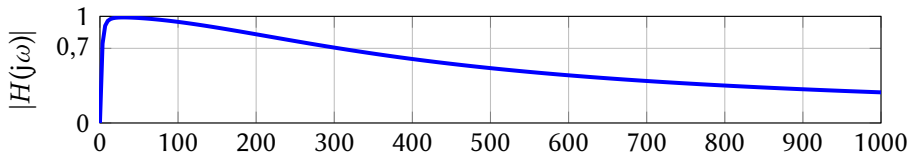
- Per la resta d'interval·ls es repeteix el patró:



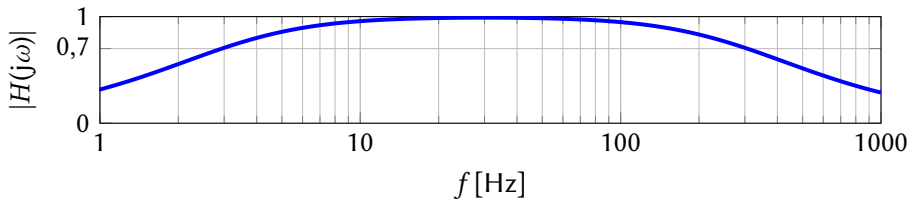
Comparació entre tipus d'escalas

Filtre passa-banda amb $f_{c1} = 3 \text{ Hz}$ i $f_{c2} = 300 \text{ Hz}$

Corba d'amplificació en escala lineal de f



Corba d'amplificació en escala logarítmica de f

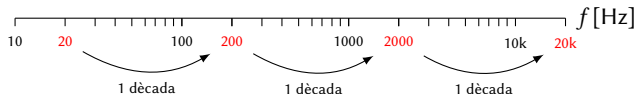


Ús de les escales

Algunes definicions útils

Dècada: Interval entre una freqüència qualsevol f_1 i $10 \cdot f_1$ ($[f_1 \cdots 10f_1]$)

Exemple: Banda de freqüències d'àudio (20 Hz – 20 kHz)

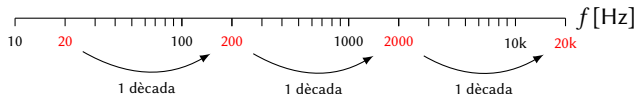


Ús de les escales

Algunes definicions útils

Dècada: Interval entre una freqüència qualsevol f_1 i $10 \cdot f_1$ ($[f_1 \cdots 10f_1]$)

Exemple: Banda de freqüències d'àudio (20 Hz – 20 kHz)



Octava: Interval entre una freqüència qualsevol f_1 i $2 \cdot f_1$.

Exemple: Escales musicals



Matemàtica dels intervals de freqüències

Mesures en **dècades**

Donades 2 freqüències f_1 i f_2 , quantes dècades hi ha entre elles?

- Cas simple: $f_a = 300$ Hz, $f_b = 30$ kHz

$$300 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 10]{1 \text{ dèc.}} 3 \text{ kHz} \xrightarrow[\times 10]{1 \text{ dèc.}} 30 \text{ kHz}$$

$$f_b = 100 \cdot f_a = 10^2 \cdot f_a \rightarrow \text{No. de dècades, } n_{\text{dèc}}$$

- Cas general:

$$f_b = 10^{n_{\text{dèc}}} \cdot f_a \rightarrow n_{\text{dèc}} = \log_{10} \left(\frac{f_b}{f_a} \right)$$

Matemàtica dels intervals de freqüències

Mesures en **dècades**

Donades 2 freqüències f_1 i f_2 , quantes dècades hi ha entre elles?

- Cas simple: $f_a = 300$ Hz, $f_b = 30$ kHz

$$300 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 10]{1 \text{ dèc.}} 3 \text{ kHz} \xrightarrow[\times 10]{1 \text{ dèc.}} 30 \text{ kHz}$$

$$f_b = 100 \cdot f_a = 10^2 \cdot f_a \rightarrow \text{No. de dècades, } n_{\text{dèc}}$$

- Cas general:

$$f_b = 10^{n_{\text{dèc}}} \cdot f_a \rightarrow n_{\text{dèc}} = \log_{10} \left(\frac{f_b}{f_a} \right)$$

Matemàtica dels intervals de freqüències

Mesures en octaves

Donades 2 freqüències f_1 i f_2 , octaves hi ha entre elles?

- Exemple: $f_a = 440$ Hz, $f_b = 3520$ kHz

$$440 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 2]{1 \text{ oct.}} 880 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 2]{1 \text{ oct.}} 1760 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 2]{1 \text{ oct.}} 3520 \text{ Hz}$$

$$f_b = 8 \cdot f_a = 2^3 \cdot f_a$$

No. d'octaves, n_{oct}

- Cas general:

$$f_b = 2^{n_{\text{oct}}} \cdot f_a$$

→

$$n_{\text{oct}} = \frac{\log_{10} \left(\frac{f_b}{f_a} \right)}{\log_{10}(2)}$$

→

$$n_{\text{oct}} = \frac{n_{\text{dèc}}}{\log_{10}(2)}$$

Matemàtica dels intervals de freqüències

Mesures en octaves

Donades 2 freqüències f_1 i f_2 , octaves hi ha entre elles?

- Exemple: $f_a = 440$ Hz, $f_b = 3520$ kHz

$$440 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 2]{1 \text{ oct.}} 880 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 2]{1 \text{ oct.}} 1760 \text{ Hz} \xrightarrow[\times 2]{1 \text{ oct.}} 3520 \text{ Hz}$$

$$f_b = 8 \cdot f_a = 2^3 \cdot f_a$$

No. d'octaves, n_{oct}

- Cas general:

$$f_b = 2^{n_{\text{oct}}} \cdot f_a \quad \rightarrow \quad n_{\text{oct}} = \frac{\log_{10} \left(\frac{f_b}{f_a} \right)}{\log_{10}(2)}$$

\rightarrow

$$n_{\text{oct}} = \frac{n_{\text{dèc}}}{\log_{10}(2)}$$

Propietats principals de les escales logarítmiques

Aplicades a la representació d'interval de freqüències

- Comprimeixen els valors elevats i expandeixen els valors petits
- Útils quan l'interval de valors a representar abasta diversos ordres de magnitud
- El **zero** no es pot representar
- L'origen de coordenades l'agafem a un punt arbitrari
- Els **interval**s de freqüències es mesuren en *dècades* o *octaves*
- Les amplificacions les mesurarem en *decibels* (dB) → **Guany**
- La família de funcions $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$ es mostren com a **rectes** en una escala doble-logarítmica!

Propietats principals de les escales logarítmiques

Aplicades a la representació d'interval de freqüències

- Comprimeixen els valors elevats i expandeixen els valors petits
- Útils quan l'interval de valors a representar abasta diversos ordres de magnitud
- El **zero** no es pot representar
- L'origen de coordenades l'agafem a un punt arbitrari
- Els **interval**s de freqüències es mesuren en *dècades* o *octaves*
- Les amplificacions les mesurarem en *decibels* (dB) → **Guany**
- La família de funcions $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$ es mostren com a **rectes** en una escala doble-logarítmica!

Propietats principals de les escales logarítmiques

Aplicades a la representació d'interval de freqüències

- Comprimeixen els valors elevats i expandeixen els valors petits
- Útils quan l'interval de valors a representar abasta diversos ordres de magnitud
- El **zero** no es pot representar
- L'origen de coordenades l'agafem a un punt arbitrari
- Els **interval**s de freqüències es mesuren en *dècades* o *octaves*
- Les amplificacions les mesurarem en *decibels* (dB) → **Guany**
- La família de funcions $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$ es mostren com a **rectes** en una escala doble-logarítmica!

Propietats principals de les escales logarítmiques

Aplicades a la representació d'interval de freqüències

- Comprimeixen els valors elevats i expandeixen els valors petits
- Útils quan l'interval de valors a representar abasta diversos ordres de magnitud
- El **zero** no es pot representar
- L'origen de coordenades l'agafem a un punt arbitrari
- Els **interval**s de freqüències es mesuren en *dècades* o *octaves*
- Les amplificacions les mesurarem en *decibels* (dB) → **Guany**
- La família de funcions $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$ es mostren com a **rectes** en una escala doble-logarítmica!

Propietats principals de les escales logarítmiques

Aplicades a la representació d'interval de freqüències

- Comprimeixen els valors elevats i expandeixen els valors petits
- Útils quan l'interval de valors a representar abasta diversos ordres de magnitud
- El **zero** no es pot representar
- L'origen de coordenades l'agafem a un punt arbitrari
- Els **interval**s de freqüències es mesuren en *dècades* o *octaves*
- Les amplificacions les mesurarem en *decibels* (dB) → **Guany**

- La família de funcions $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$ es mostren com a **rectes** en una escala doble-logarítmica!

Propietats principals de les escales logarítmiques

Aplicades a la representació d'interval de freqüències

- Comprimeixen els valors elevats i expandeixen els valors petits
- Útils quan l'interval de valors a representar abasta diversos ordres de magnitud
- El **zero** no es pot representar
- L'origen de coordenades l'agafem a un punt arbitrari
- Els **interval**s de freqüències es mesuren en *dècades* o *octaves*
- Les amplificacions les mesurarem en *decibels* (dB) → **Guany**

- La família de funcions $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$ es mostren com a **rectes** en una escala doble-logarítmica!

Propietats principals de les escales logarítmiques

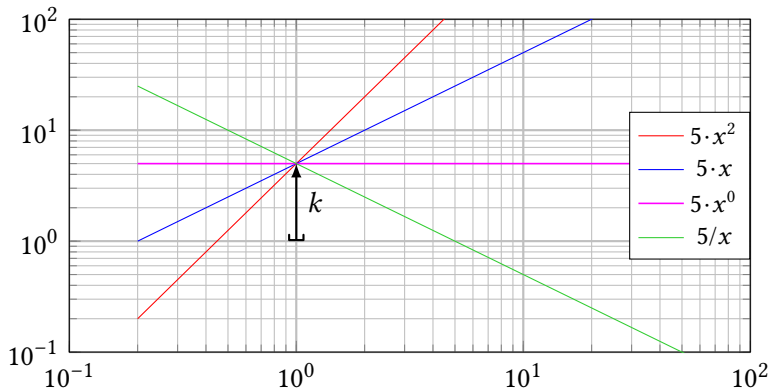
Aplicades a la representació d'interval de freqüències

- Comprimeixen els valors elevats i expandeixen els valors petits
- Útils quan l'interval de valors a representar abasta diversos ordres de magnitud
- El **zero** no es pot representar
- L'origen de coordenades l'agafem a un punt arbitrari
- Els **interval**s de freqüències es mesuren en *dècades* o *octaves*
- Les amplificacions les mesurarem en *decibels* (dB) → **Guany**

- La família de funcions $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$ es mostren com a **rectes** en una escala doble-logarítmica!

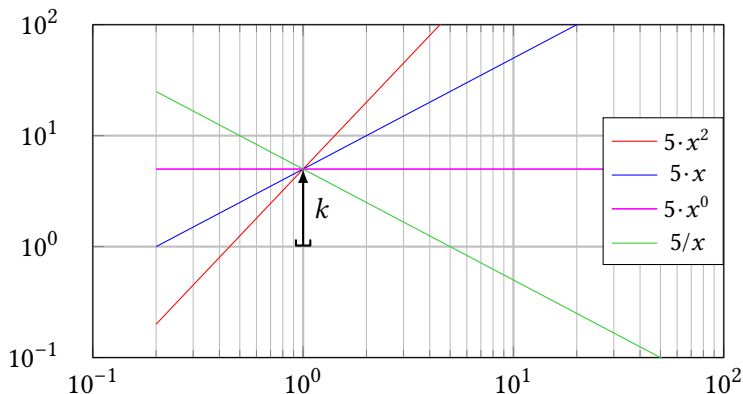
Gràfiques de funcions potencials en escales logarítmiques

Sia $f(x) = k \cdot x^{(\pm n)}$. Aleshores $\log(f(x)) = \log(k) \pm n \cdot \log(x)$:



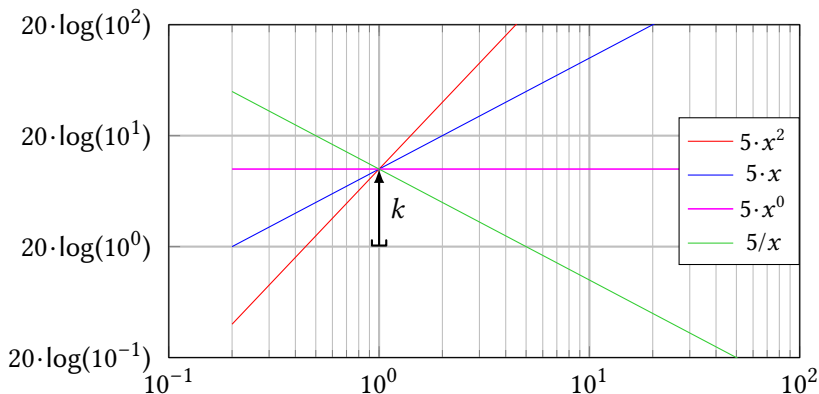
Gràfiques de funcions potencials en escales logarítmiques

Per l'eix d'ordenades és usual d'aplicar una recepta un xic diferent: **decibels!**



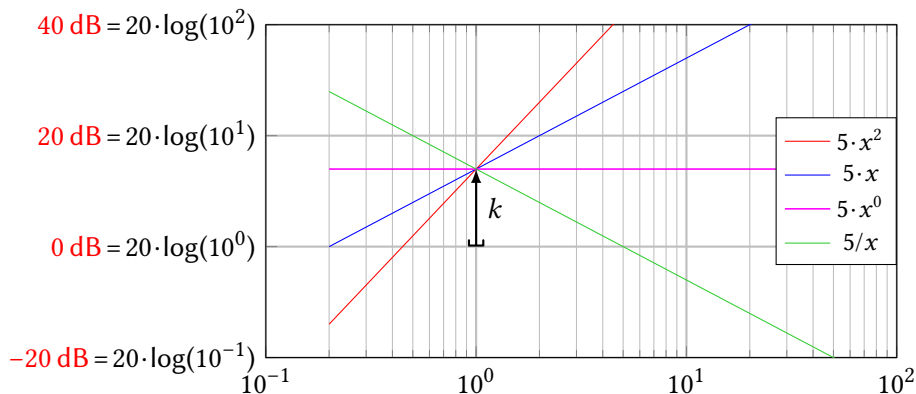
Gràfiques de funcions potencials en escales logarítmiques

Per l'eix d'ordenades és usual d'aplicar una recepta un xic diferent: **decibels!**



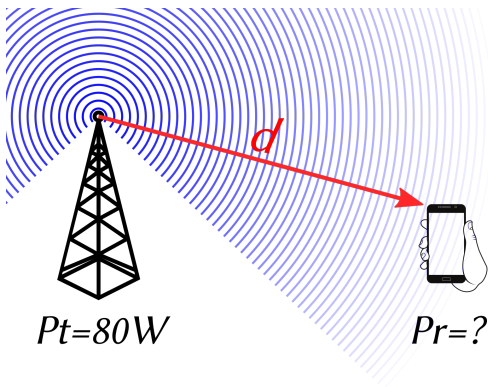
Gràfiques de funcions potencials en escales logarítmiques

Per l'eix d'ordenades és usual d'aplicar una recepta un xic diferent: **decibels!**



Els decibels (dB) - I

Una manera diferent de *comparar* magnituds



- Suposem radiació isotròpica
- La potència transmesa es reparteix uniformement en una superfície esfèrica de radi d
- L'antena receptora capta una (petita) fracció d'aquesta potència:

$$P_r = P_t \cdot \frac{\text{Àrea antena receptora } (A_{\text{ef}})}{\text{Superfície total esfera}} = P_t \cdot \frac{A_{\text{ef}}}{4\pi d^2}$$

- Suposem: $A_{\text{ef}} = 7 \text{ cm}^2$, $d = 1,5 \text{ km}$

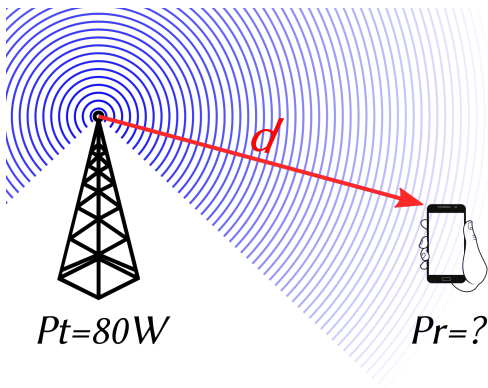
$$P_r = 80 \text{ W} \cdot \frac{7 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 1500^2} \approx 0,000.000.002 \text{ W}$$

- La relació (amplificació) entre P_r i P_t és:

$$k = \frac{P_r}{P_t} = 2,5 \cdot 10^{-11}$$

Els decibels (dB) - I

Una manera diferent de *comparar* magnituds



- Suposem radiació isotròpica
- La potència transmesa es reparteix uniformement en una superfície esfèrica de radi d
- L'antena receptora capta una (petita) fracció d'aquesta potència:

$$P_r = P_t \cdot \frac{\text{Àrea antena receptora } (A_{\text{ef}})}{\text{Superfície total esfera}} = P_t \cdot \frac{A_{\text{ef}}}{4\pi d^2}$$

- Suposem: $A_{\text{ef}} = 7 \text{ cm}^2$, $d = 1,5 \text{ km}$

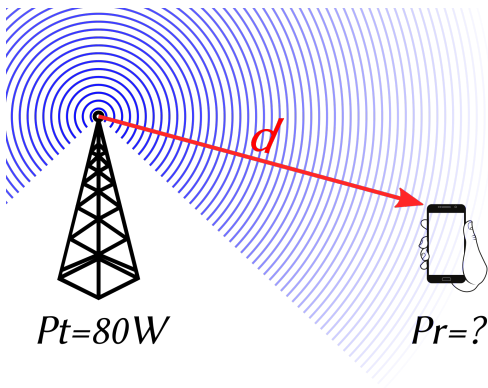
$$P_r = 80 \text{ W} \cdot \frac{7 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 1500^2} \approx 0,000.000.002 \text{ W}$$

- La relació (amplificació) entre P_t i P_r és:

$$k = \frac{P_r}{P_t} = 2,5 \cdot 10^{-11}!$$

Els decibels (dB) - I

Una manera diferent de *comparar* magnituds



- Suposem radiació isotròpica
- La potència transmesa es reparteix uniformement en una superfície esfèrica de radi d
- L'antena receptora capta una (petita) fracció d'aquesta potència:

$$P_r = P_t \cdot \frac{\text{Àrea antena receptora } (A_{\text{ef}})}{\text{Superfície total esfera}} = P_t \cdot \frac{A_{\text{ef}}}{4\pi d^2}$$

- Suposem: $A_{\text{ef}} = 7\text{ cm}^2$, $d = 1,5\text{ km}$

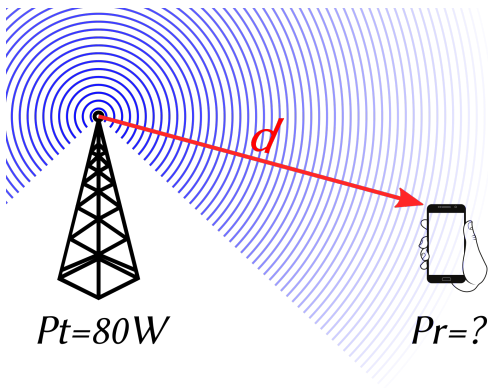
$$P_r = 80\text{ W} \cdot \frac{7 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 1500^2} \approx 0,000.000.002\text{ W}$$

- La relació (amplificació) entre P_t i P_r és:

$$k = \frac{P_r}{P_t} = 2,5 \cdot 10^{-11}!$$

Els decibels (dB) - I

Una manera diferent de *comparar* magnituds



- Suposem radiació isotròpica
- La potència transmesa es reparteix uniformement en una superfície esfèrica de radi d
- L'antena receptora capta una (petita) fracció d'aquesta potència:

$$P_r = P_t \cdot \frac{\text{Àrea antena receptora } (A_{\text{ef}})}{\text{Superfície total esfera}} = P_t \cdot \frac{A_{\text{ef}}}{4\pi d^2}$$

- Suposem: $A_{\text{ef}} = 7 \text{ cm}^2$, $d = 1,5 \text{ km}$

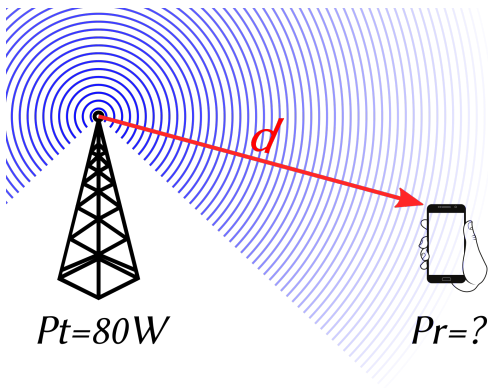
$$P_r = 80 \text{ W} \cdot \frac{7 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 1500^2} \approx 0,000.000.002 \text{ W}$$

- La relació (amplificació) entre P_t i P_r és:

$$k = \frac{P_r}{P_t} = 2,5 \cdot 10^{-11}!$$

Els decibels (dB) - I

Una manera diferent de *comparar* magnituds



- Suposem radiació isotròpica
- La potència transmesa es reparteix uniformement en una superfície esfèrica de radi d
- L'antena receptora capta una (petita) fracció d'aquesta potència:

$$P_r = P_t \cdot \frac{\text{Àrea antena receptora } (A_{\text{ef}})}{\text{Superfície total esfera}} = P_t \cdot \frac{A_{\text{ef}}}{4\pi d^2}$$

- Suposem: $A_{\text{ef}} = 7 \text{ cm}^2$, $d = 1,5 \text{ km}$

$$P_r = 80 \text{ W} \cdot \frac{7 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 1500^2} \approx 0,000.000.002 \text{ W}$$

- La relació (amplificació) entre P_t i P_r és:

$$k = \frac{P_r}{P_t} = 2,5 \cdot 10^{-11}!$$

Els decibels (dB) - II

- Valors tan diferents fan de molt mal comparar o dibuixar conjuntament
- Els laboratoris Bell van proposar (~1930) de comparar via *logaritmes*, tot definint el **bel**:

$$G(\text{B}) = \log_{10} \left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \right)$$

- Com que el bel resultava massa gran, la unitat que es popularitzà fou la seva dècima part, el **decibel** o dB (1 bel = 10 dB).

$$G(\text{dB}) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \right)$$

Els decibels (dB) - III

- Si en lloc de comparar potències volem comparar *tensions* (o *corrents*) que les generen (sobre la mateixa R):

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{v_{\text{out}}^2/R}{v_{\text{in}}^2/R} = \left(\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} \right)^2 = (H)^2$$

$$G(\text{dB}) = 20 \cdot \log_{10}(H)$$

Algunes correspondències útils:

$ H(j\omega) $	$G(\text{dB})$	$ H(j\omega) $	$G(\text{dB})$
1	0 dB		
$\sqrt{2}$	+3 dB	$1/\sqrt{2}$	-3 dB
2	+6 dB	1/2	-6 dB
5	+14 dB	1/5	-14 dB
10	+20 dB	1/10	-20 dB
30	+30 dB	1/30	-30 dB
100	+40 dB	1/100	-40 dB
1000	+60 dB	1/1000	-60 dB
		0	$-\infty$ dB

Els decibels (dB) - III

- Si en lloc de comparar potències volem comparar *tensions* (o *corrents*) que les generen (sobre la mateixa R):

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{v_{\text{out}}^2/R}{v_{\text{in}}^2/R} = \left(\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} \right)^2 = (H)^2$$

$$G(\text{dB}) = 20 \cdot \log_{10}(H)$$

Algunes correspondències útils:

$ H(j\omega) $	$G(\text{dB})$	$ H(j\omega) $	$G(\text{dB})$
k	$K_{\text{dB}} \text{ dB}$		
$\sqrt{2} \cdot k$	$K_{\text{dB}} + 3 \text{ dB}$	$k/\sqrt{2}$	$K_{\text{dB}} - 3 \text{ dB}$
$2 \cdot k$	$K_{\text{dB}} + 6 \text{ dB}$	$k/2$	$K_{\text{dB}} - 6 \text{ dB}$
$5 \cdot k$	$K_{\text{dB}} + 14 \text{ dB}$	$k/5$	$K_{\text{dB}} - 14 \text{ dB}$
$10 \cdot k$	$K_{\text{dB}} + 20 \text{ dB}$	$k/10$	$K_{\text{dB}} - 20 \text{ dB}$
$30 \cdot k$	$K_{\text{dB}} + 30 \text{ dB}$	$k/30$	$K_{\text{dB}} - 30 \text{ dB}$
$100 \cdot k$	$K_{\text{dB}} + 40 \text{ dB}$	$k/100$	$K_{\text{dB}} - 40 \text{ dB}$
$1000 \cdot k$	$K_{\text{dB}} + 60 \text{ dB}$	$k/1000$	$K_{\text{dB}} - 60 \text{ dB}$
		0	$-\infty \text{ dB}$