

# Diagnosi d'arcs de fàbrica a través de l'estàtica gràfica

Modelatge informàtic i estudi de seguretat en parets històriques de fàbrica de maó

Autor : Manel Paret Espadaler

Treball de Fi de Grau, GArqEtsab, Pla 2014

Línia Tecnologia

Tutor : Francesc Xavier Aldabó Fernàndez

Convocatòria 2a ordinària, Març 2021

Escola Tècnica Superior d'Arquitectura de Barcelona, UPC

## **Resum**

Aquest treball proposa un recorregut sintètic pels fonaments i les idees clau de l'estàtica gràfica aplicada al càlcul d'arcs de fàbrica. Tracta d'aclarir i explicar les bases del funcionament d'aquestes estructures i els termes en que es pot definir la seva seguretat. Una vegada exposades les bases d'aquesta ciència, s'elabora una proposta de programa informàtic que té per objectiu la definició d'uns components flexibles i de fàcil utilització que, dins d'un programa de dibuix paramètric, permetin construir sobre qualsevol cas d'estudi importat una maqueta interactiva de línies de forces en la que l'usuari pugui temptejar i provar diverses situacions d'equilibri per l'estructura. Els algorismes que hi ha darrere d'aquests components s'expliquen a través de diagrames que componen una metodologia, unes receptes per la construcció del model i el seu anàlisi, i impliquen una adaptació i reinterpretació d'alguns processos de càlcul gràfic tradicionals. El treball conclou amb una primera versió d'aquests programes, que es posen a prova en un cas d'estudi real, i que pròximament seran madurades i publicades.

## **Paraules clau**

Arc de fàbrica, línia d'empentes, estàtica gràfica, diagnòsi, seguretat

## **Abstract**

The present dissertation proposes an overview of the foundations and key ideas behind graphic statics applied on the calculus of masonry arches. The aim is to explain and clarify the performance of these structures and to announce the terms in which their security criteria can be defined. Once the basis is exposed, an approach to a computer program is launched with the goal of creating a library of flexible, easy-to-use components that allow to build, inside the canvas of a parametric drafting software, an interactive model over an imported file. The user can attempt different configurations of the lines of thrust, and therefore experiment with various states of equilibrium for the structure. The algorithms behind these components are explained as a diagrammatic methodology to proceed on the construction of a model and its analysis, and they involve the adjustment some principles of traditional graphic calculus. The dissertation concludes with a first version of this library, that is proved on a real case study, and that will be improved and published soon.

## **Key words**

Masonry arch, line of thrust, graphic statics, diagnosis, security

## Prefaci

L'arc és una de les estructures elementals de la construcció antiga de moltes civilitzacions. La necessitat, inherent a les primeres expressions d'arquitectura, de crear espais coberts porta inevitablement cap al desenvolupament de tècniques constructives que permetin cobrir llums cada vegada més grans. En contextos en els que les dimensions o les propietats de la fusta suposen una limitació i el domini dels metalls per la construcció de grans peces queda encara molt lluny, la pedra s'imposa com el material idoni per a aquest propòsit: posseeix unes propietats mecàniques excel·lents per a la construcció i, a més, es coneix com treballar-la, esculpir-la i transportar-la. En essència, la pedra pot suportar molt pes sobre ella si treballa a compressió, però té un comportament pèssim a la flexió, i és per això que cal disposar les pedres d'una manera concreta, que permeti a totes les peces de l'estructura treballar exclusivament a compressió. Si això s'aconsegueix, aquella estructura podrà sostenir sobre seu pesos exuberants, arribar fins alçades colossals, serà invencible.

La forma arquejada de disposar les pedres fa que totes vulguin caure cap avall alhora que totes bloquegin l'intent de descens de les seves veïnes, donant lloc a un conjunt que es comprimeix a sí mateix i es veu beneficiat de l'acció gravitatòria per vèncer la pròpia gravetat. L'arc és, per tant, la forma objectiva elemental que permet mantenir les pedres suspeses en l'aire gairebé per art de màgia. Aquesta estructura perfecta viurà una evolució perpètua que permetrà, en el transcurs de molts segles, la construcció dels edificis i monuments més emblemàtics del món.

La perícia inqüestionable dels mestres constructors posseeix, encara avui i per molta gent, una aura misteriosa; tantes vegades ens hem preguntat quina ciència (o quina bruixeria) hi deu haver darrere d'aquelles estructures formidables que semblen enlairar les pedres fins tocar el cel desafiant tota lògica, mentre miràvem amb incredulitat les grans construccions de l'Imperi Romà, de l'època medieval o del Renaixement. Com bé es coneix, els antics mestres treballaven amb fórmules i regles que apel·laven a les proporcions i relacions geomètriques entre els elements de la construcció. Per exemple, se sabia que el gruix d'un estrep que sostenia un arc havia de ser una fracció determinada de la llum coberta per aquest arc. Del contrari, la resistència de l'estrep a l'empenta de l'arc seria insuficient i el conjunt col·lapsaria. Aquestes regles estan basades en l'experiència i l'observació i es transmeten de mestres a deixebles.

L'arribada de la revolució científica té una particular incisió en matèria de càlcul d'estructures de l'enginyeria i l'arquitectura. Una preferència pel mètode científic i les matemàtiques col·loca en segon pla qualsevol regla anterior a les formulacions de la ciència moderna. L'estudi de les antigues construccions de fàbrica, que no queda exclòs d'aquest impuls, s'afronta en un primer moment des d'una perspectiva geomètrica; així neix l'estàtica gràfica. Aquesta ciència progressa al llarg dels segles XVIII i XIX i resulta útil en varis àmbits de l'enginyeria. Malgrat això, els avenços en el camp de la resistència de materials al segle XIX eclipsen qualsevol altra aproximació, i aviat la teoria general de l'elasticitat es corona com el fonament del càlcul d'estructures per antonomàsia.

Malgrat això no són pocs els autors que han recuperat el càlcul gràfic quan es trobaven amb buits que una aproximació elàstica no era capaç de determinar. L'estàtica gràfica té una bona quantitat d'utilitats i funcions, però especialment per treballar i entendre el comportament dels arcs, resulta tan idònia que sembla que ambdues coses hagin estat fetes a mida l'una per l'altre. La claredat amb que les geometries es van reproduint sobre el mateix dibuix fa un efecte com si de sobte les forces i totes aquelles entitats abstractes cobressin vida i adquirissin un sentit; el càlcul sobre dibuix fa més entenedor el funcionament de les estructures, especialment dels arcs i voltes.

# Sumari

Prefaci . . . . .	4
Introducció . . . . .	8
Per què l'estàtica gràfica ? . . . . .	8
Motivació . . . . .	10
Objectius el treball . . . . .	11
Metodologia . . . . .	11
<b>Part I : Marc teòric . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1. Bases de l'estàtica gràfica . . . . .	12
1.2. Concepte de bolc . . . . .	12
1.3. Línia d'empentes . . . . .	13
1.4. Polígon funicular . . . . .	14
1.5. Línia d'empentes màxima i mínima . . . . .	16
1.6. Estat tensional . . . . .	18
1.7. Esquerdes . . . . .	20
1.8. Estreps . . . . .	22
1.9. Resum de les condicions de seguretat . . . . .	24
<b>Part II . Pràctica . . . . .</b>	<b>26</b>
2.1. Consideracions sobre el cas d'estudi . . . . .	29
2.2. Metodologia per al modelatge i anàlisi . . . . .	30
2.3. Processos que realitza el programa . . . . .	33
2.4. Components . . . . .	36
2.5. Interpretació dels resultats . . . . .	42
<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>Agraïments . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>Referències . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>49</b>

# Introducció

## Per què l'estàtica gràfica ?

En matèria de càlcul d'estructures en arquitectura i enginyeria, estem habituats a resoldre problemes d'estàtica per mitjà de mètodes numèrics. Aquests mètodes tradueixen els diversos elements del problema en números i funcions algebraïques. Tot seguit plantegen una sèrie d'algoritmes que, utilitzant les operacions de l'Aritmètica i l'Àlgebra, combinen i transformen els números i expressions inicials en uns altres que constitueixen els resultats finals. La solució del problema consisteix en interpretar aquests resultats numèrics (normalment per comparació amb altres números) i traduir-los de nou en conceptes físics. Si, per exemple, volem valorar la resistència d'un pilar sotmès a un determinat esforç axial, calculem quina tensió se li està sol·licitant en funció de l'esforç i la secció del pilar. Després, compararem el resultat amb la tensió admissible del material; si la tensió calculada és més petita que l'admissible, concloem que el pilar és segur. Fins i tot podríem establir, dividint els valors d'ambdues tensions, un coeficient en tant per u que ens indiqués quan li falta al pilar per arribar a la tensió de ruptura i deixar de ser segur.

Sovint obviem aquests procediments quan resollem problemes de resistència de materials, però val la pena recordar que aquest mecanisme és una opció d'entre les vàries que existeixen. No pas a causa d'un prestigi immerescut, la teoria general de l'elasticitat constitueix les bases per excel·lència del càlcul d'estructures que ha arribat fins els nostres dies. Però un ús extensiu d'aquest enfoc i la seva aplicació a cegues en l'anàlisi de qualsevol estructura pot fer que passem per alt certes evidències i ens encallem en la recerca de coses que no són les que s'haurien de buscar. Això és el que van experimentar alguns autors que, al llarg dels anys, van emprendre el propòsit de mesurar les tensions de treball de les fàbriques de grans monuments de la humanitat<sup>1</sup>. En fer-ho, s'adonaven sorpresos del baix estat tensional que existia en relació amb els valors admissibles dels materials (un coeficient de seguretat de l'ordre de 10) . Com explica Santiago Huerta a la primera part del seu llibre Arcos, Bóvedas y Cúpulas, sembla que les fàbriques estan innecessàriament sobredimensionades, i seria suficient per resistir la tensió de compressió una secció molt més petita si s'hagués calculat degudament.

Però aquí hi ha una distorsió en l'enfoc del problema: s'està considerant que la resistència a compressió hauria estat un factor rellevant en el projecte de l'estructura,

quan no és així. En la construcció antiga, les regles de projecte no estaven marcades pel criteri de la resistència a trencament, sinó per relacions geomètriques que buscaven assegurar-ne l'estabilitat, la resistència al bolc que podien induir els arcs, voltes i cúpules. Per aquest motiu, els tambors de les cúpules romanes i els contraforts de les catedrals medievals adopten unes dimensions que assegurin l'equilibri de l'estructura i, com a conseqüència d'això però secundàriament, garanteixen de llarg la seguretat davant del col·lapse per sobrecompressió. Des d'una perspectiva purament elàstica, l'anàlisi dels arcs de fàbrica resulta més complicat del que pot ser-ho si s'afronta en els mateixos termes en que els antics constructors ho van fer: en el llenguatge de la geometria. Això no significa que, en els temps actuals, convingui renunciar completament als mètodes numèrics i treballar exclusivament amb estàtica gràfica per l'estudi d'arcs de fàbrica; precisament els avenços més recents en ambdues branques estan demostrant una complementaritat i gairebé una dependència l'un de l'altre.

Advocant en favor de l'estàtica gràfica, remarcarem que al llarg dels segles XIX i principis del XX va donar resposta a interrogants que el model elàstic no era capaç de resoldre en un primer moment. Figures com Culmann, Cremona o Moseley van saber fer un gir en la mentalitat i plantejar els problemes amb una altra mirada, donant lloc a aportacions importants en el càlcul d'encavallades i de ponts de fàbrica per al ferrocarril, entre d'altres. Un altre exemple que ens resulta més proper és el cas de Gaudí; va ser deixeble i col·laborador d'arquitectes que dominaven amb destresa els mètodes gràfics per al càlcul d'arcs<sup>2</sup>, i no només va excel·lir en aquesta matèria sinó que la va portar més enllà. Són prou conegudes les seves maquetes funiculars que, unint en una simbiosi sublim les geometries i les càrregues, ajudaven al projectista a prendre decisions sobre les formes objectives de les estructures.

Robert Hooke havia exposat, cap al 1670, una idea que serà determinant per la comprensió i l'anàlisi del comportament dels arcs. La línia d'empentes, una corba imaginària que passa per dins de la secció de l'arc i té una geometria simètrica a la catenària, corba que adopta una cadena penjada entre dos suports que està sotmesa únicament al seu pes propi. En certa manera, un arc i una cadena penjada són estructures anàlogues, i això motiva els experiments de Gaudí. Les línies d'empentes equivalen als fils de les seves maquetes, que afectats per les càrregues, es reorganitzen constantment per trobar sempre la posició més estable.

<sup>1</sup> Huerta (2004)

<sup>2</sup> Serrallonga (2003)

Al segle XIX es reprèn aquesta línia de recerca amb l'encert de plantejar-la en termes de forces gravitatòries, empentes horitzontals i sumes vectorials. S'està traslladant la resolució de problemes d'estàtica a un altre camp de les matemàtiques: la geometria. En contraposició al càlcul numèric, els mètodes gràfics tradueixen els elements del problema en entitats geomètriques (principalment línies i punts) i els seus algoritmes les combinen mitjançant operacions pròpies de la geometria euclidiana (suma vectorial, intersecció de rectes) per obtenir noves entitats. Finalment, les propietats intrínseques d'aquests components (longitud, inclinació, coordenades) així com les relacions entre ells (distàncies, angles, punts de tall) s'han d'interpretar i traslladar de nou a conceptes físics per obtenir la solució final del problema. Aquests resultats prenen forma de figures geomètriques, per la qual cosa és molt còmode expressar-los gràficament; quan parlem de coeficients de seguretat geomètrics, o de funiculars continguts dins de la secció, estem descrivint la seguretat d'una manera gràfica en forma de polígons, línies i punts sobre el dibuix, enlloc de valorar-la per comparació entre magnituds numèriques. S'està, per tant, transformant un problema físic en un exercici de geometria bàsica.

## Motivació

L'origen d'aquest projecte està directament relacionat amb un interès personal pel comportament de les estructures de fàbrica en edificis històrics. Aquesta curiositat ve des de molt lluny i no podria determinar-ne el naixement amb precisió, però dedueixo que va ser un dels motius que em va animar en el seu moment a iniciar els estudis d'arquitectura, i atendre amb especial atenció els cursos d'estructures. Allà escoltava amb esguard tot el que s'explicava sobre les propietats dels materials i elements de construcció actuals, fórmules i teoremes que feien adoptar per fi una utilitat a les matemàtiques apreses fins llavors. Tot plegat agafava un sentit i em confirmava que el camp de les estructures en l'arquitectura seria el meu lloc.

Llavors algun moment, no sé quan ni per part de qui, vaig sentir a parlar per primera vegada de les tècniques de càlcul que utilitzaven els mestres constructors en l'antiguitat; idees sobre línies imaginàries que passaven per dins dels contraforts, calcular mitjançant el dibuix...! Vaig pensar que s'obria tot un món que valia la pena explorar. Però sempre que en sentia parlar, s'hi feia referència com una ciència que havia quedat superada o que potser era prou misteriosa com perquè ningú, ni tan sols dins de l'escola d'arquitectura, pogués explicar exactament en que consistia. En certes etapes de la carrera vaig introduir-me en la matèria a través de la lectura, però les exigències dels cursos de projectes eren unes altres i la recerca va quedar aparcada en més d'una ocasió.

Arribat al final dels estudis, i amb la sensació d'haver rebut una formació molt valuosa en matèria d'estructures, vaig pensar en culminar el grau amb un TFG que posés a prova aquests coneixements i enfocar-lo en la rehabilitació d'edificis tradicionals. Quan en Cesc Aldabó, el meu tutor, em a suggerir afinar el tema i centrar-lo en el càlcul gràfic d'arcs de fàbrica, no vaig dubtar-ho i vaig decidir, amb molt entusiasme, reprendre l'aprenentatge amb dedicació. Així doncs, aquesta motivació que ve de lluny i ara es veu realçada ha estat l'impuls per emprendre aquesta tasca.

## Objectius del treball

El treball es desenvolupa en dues parts. La primera té l'objectiu d'analitzar i entendre les bases del càlcul gràfic d'arcs a partir dels tractats i publicacions dels grans mestres, així com literatura d'autors més recents que han investigat sobre la matèria i expliquen els seus propis estudis i tesis. Amb tot això es busca tenir una idea del funcionament d'aquestes estructures i també establir uns termes per definir-ne la seguretat.

En la segona part, tractarem d'adaptar els conceptes d'aquesta metodologia impròpia al llenguatge en que estem acostumats a parlar quan discutim la seguretat de les estructures. Busquem construir un conjunt d'algoritmes que organitzin una manera de procedir per l'avaluació d'arcs de fàbrica. L'objectiu de tot això és obrir la nostra perspectiva i integrar les geometries i els números com una unitat, entenent que certs comportaments estructurals es poden comprendre millor si el càlcul numèric es reforça amb un suport gràfic. Per això plantejarem un programa informàtic que, a través dels conceptes de l'estàtica gràfica, ens permeti visualitzar de manera entenedora les característiques i propietats estructurals de parets de fàbrica amb arcs.

## Metodologia

La primera part es redactarà havent fet una recerca exhaustiva sobre la matèria i després d'entrevistar a professionals que tenen experiència en el càlcul i la rehabilitació. Ens servirà per conèixer la història, l'evolució d'aquesta ciència i els seus conceptes principals.

Per la segona part, desenvoluparem un programa informàtic que reflecteixi els algoritmes que enunciem. De la mà d'un cas d'estudi que ha estat escollit intencionadament per al propòsit, anirem programant els components per tal de verificar i corregir constantment cada nou pas. L'extensió Grasshopper, de Rhinoceros, serà l'eina mitjançant la qual elaborarem un model de càlcul d'arcs de fàbrica dins d'un software de dibuix.

## Part I : Marc teòric

### Bases de l'estàtica gràfica

L'essència de l'estàtica gràfica rau en la geometria euclidiana i les lleis de la mecànica clàssica, i els seus components elementals són els vectors, punts i rectes. Es fonamenta en tres principis de la geometria euclidiana.

- » **Llei del paral·lelogram** : Si dos vectors coplanars comparteixen punt d'aplicació, la diagonal del paral·lelogram que formen, traçada des del punt d'aplicació dels vectors, es correspon en mòdul i direcció al vector resultant de la suma (Fig. 1)
- » **Principi de transmissibilitat** : L'acció d'una força dins d'un sistema de forces no es veu alterada si la força és desplaçada al llarg de la seva línia d'acció (Fig. 2)
- » **Suma de forces coplanars** : És possible determinar la resultant de qualsevol parella de forces coplanars per aplicació de les dues regles anteriors (Fig. 3)

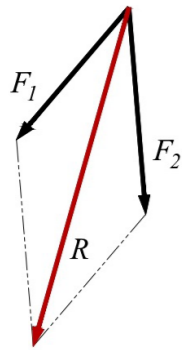


Fig. 1

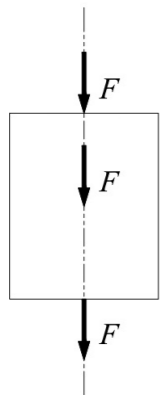


Fig. 2

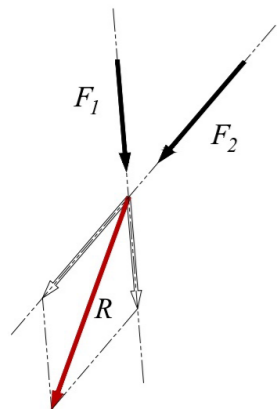


Fig. 3

### Concepte de bolc

Suposem un senzill problema d'estàtica com és calcular l'estabilitat al bolc d'un sòlid rígid recolzat sobre el terra (de pes  $Fy$ ), sobre el qual s'aplica una acció externa horitzontal ( $Fx$ ). Es pot resoldre numèricament aplicant les equacions d'equilibri: en resum (imatge), si el sumatori de moments estabilitzadors i desestabilitzadors és negatiu el sòlid estarà en equilibri, però si és positiu rotarà sobre el punt  $O$  i bolcarà en sentit antihorari.

Aplicant ara les regles fonamentals de l'estàtica gràfica enfocarem el problema dibuixant, sobre el mateix diagrama i a una escala arbitrària, la resultant de totes les forces que actuen sobre el sòlid. Observem que si la línia d'acció de la força resultant surt de la base de contacte del bloc amb el terra, aquest bolca.

Si pensem ara en les dovelles que formen un arc (Fig. 6), podem establir una seguretat al bolc d'aquestes peces -i per tant, al col·lapse de l'arc- en relació amb les trajectòries de les línies d'acció de les forces resultants que actuen sobre cada dovella; si la línia d'acció de la resultant de cada dovella es troba dins de la junta de contacte ( $A-A'$ ) entre aquesta i la següent, les dovelles no bolcaran i l'arc es pot mantenir estable.

### Línia d'empentes

Aquesta idea és la que H. Moseley i E. Méry desenvolupen, de manera independent, els anys 1835 i 1840 respectivament<sup>1</sup>. Els seus textos plantegen una evolució de la teoria de Robert Hooke (circa 1670), que descrivia la relació entre una cadena penjada de dos suports i sotmesa únicament al seu propi pes, i un arc que se suportava a sí mateix. Hooke explica que un arc d'aquestes característiques que tingui com a directriu una determinada corba, quedaria sotmès únicament a esforços interns de compressió (de la mateixa manera que la cadena està sotmesa exclusivament a tracció). Aquesta corba òptima és simètrica a la que adopta la cadena penjada, i s'anomena catenària. Més endavant, el 1697, D. Gregory<sup>3</sup> afegeix que dins de la secció qualsevol arc de la forma que sigui s'hi ha de poder dibuixar una catenària per tal que estigui en equilibri i pugui mantenir-se dret. L'equació d'aquesta corba es descobreix el 1691 i obre les portes d'una línia de recerca analítica sobre cables penjants i línies d'empentes en arcs de fàbrica.

Però la perspectiva que més ens interessa (i la que més exitosament tindrà una utilitat pràctica) és la que adopten Moseley i Méry, que tenen l'habilitat de buscar la línia d'empentes des de la geometria. Evidentment les variables de fons són les mateixes, però enlloc d'utilitzar el càlcul diferencial per integrar variables en un sistema continu i trobar les equacions pures, aproximen la composició vectorial sobre un sistema discret. Moseley planteja que, en un massís de blocs indeformables, les resultants successives de compondre el pes propi de cada peça amb l'empenta que rep de la peça anterior descriuen el recorregut d'aquesta línia imaginària (Fig. 7). Així, la definició de línia d'empentes és el lloc geomètric dels punts d'intersecció entre les línies d'acció de les empentes i els pesos de cada bloc. Amb un nombre infinitament gran de peces infinitament petites, aquests punts formarien una línia contínua.

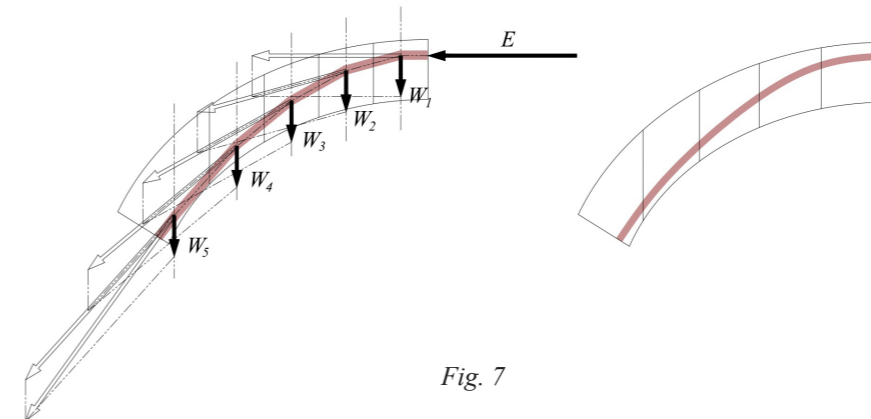
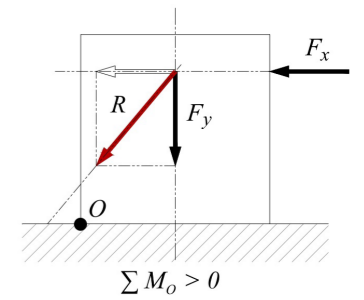


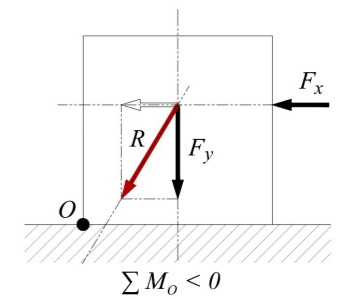
Fig. 7

Moseley afegeix que els punts de tall de les resultants amb les juntes entre peces donen lloc a una altra línia que ell anomena "de resistència"<sup>4</sup> i que no és necessàriament tangent a les resultants. Així, adverteix que depenent del sistema de plans que divideixin el sistema, les propietats internes d'equilibri es poden veure alterades. En Jaume Serrallonga explica en la tercera part de la seva tesi doctoral<sup>2</sup> que la literatura demostra una diferència irrellevant entre aquestes dues línies, que adopten formes molt properes quan es fa la composició successiva de forces en un arc sotmès a càrregues gravitatòries i una empenta horitzontal a la clau. També resulta força irrellevant el sistema de plans escollit, per la qual cosa es solen adoptar junts verticals que faciliten molt el càlcul sense alterar greument els resultats.



$$\sum M_o > 0$$

Fig. 4



$$\sum M_o < 0$$

Fig. 5

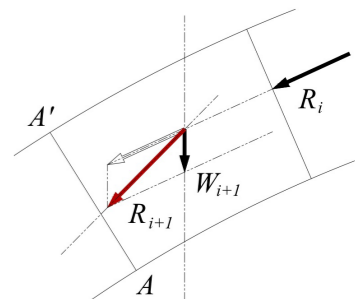


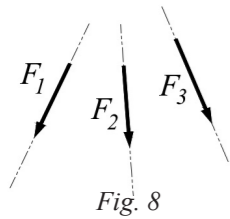
Fig. 6

<sup>1</sup> Huerta (2004)

<sup>2</sup> Serrallonga (2003)

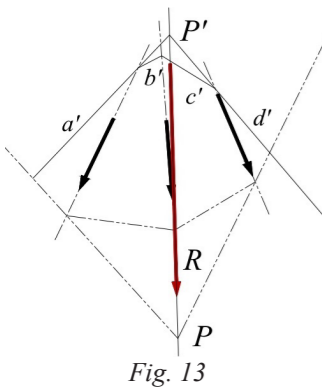
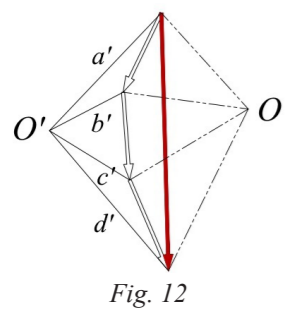
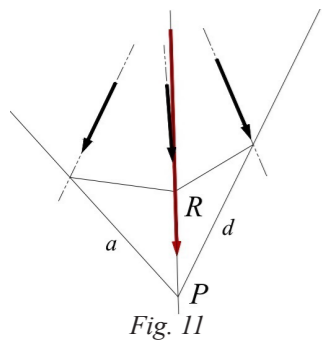
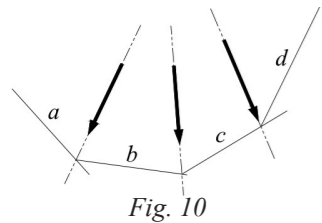
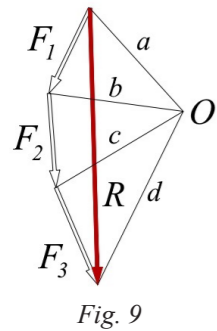
<sup>3</sup> Gregory (1697)

<sup>4</sup> Moseley (1833)



### Polígon funicular

El polígon funicular és, d'alguna manera, una generalització de la llei del paral·lelogram i permet calcular la resultant total així com les resultants parcials d'un sistema de forces coplanars. Ha estat extraordinàriament útil al llarg de la història i és una de les aportacions estel·lars dins dels mètodes d'estàtica gràfica. Serà l'eina que utilitzarem en aquest treball per calcular les reaccions en els suports i dibuixar línies d'empentes.



A continuació expliquem la manera de traçar polígons funiculars que ens serà més útil per treballar després amb els arcs:

- » Donat un sistema de  $n$  forces coplanars (Fig. 8), el primer que farem és dibuixar un polígon de forces qualsevol. Per fer-ho, disposem els vectors ordenats en una composició en la que l'inici de cadascun d'ells es fa coincidir amb el punt final de l'anterior (Fig. 9)
- » Unint els dos punts extrems del primer i l'últim vector obtenim un segment que es correspon, en mòdul i direcció, a la resultant  $R$  de la suma de totes les forces del sistema
- » Seguidament cerquem un punt de pas d'aquesta resultant dins del sistema de forces. Per fer-ho escollim un punt de pla  $O$  arbitrari i tracem totes les línies que uneixen aquest punt amb els inicis i finals dels vectors. Així hem completat el polígon de forces
- » A continuació transportem la primera línia del polígon de forces de manera que talli amb la línia d'acció de la primera força del sistema
- » Repetim el procés de manera que cada línia  $i$  del polígon de forces passi pel punt d'intersecció entre la línia d'acció de la força  $i$  i la línia del polígon anterior  $i-1$ . Així completem un polígon funicular d'aquell sistema de forces (Fig. 10)
- » Finalment, prolongant la primera i última línia del polígon funicular i buscant la seva intersecció, haurem trobat un punt de pas  $P$  de la resultant  $R$ . Com que ja en coneixíem la direcció i el mòdul, podem dibuixar-la sobre el sistema de forces, en qualsevol punt de la seva línia d'acció (Fig. 11)

Notem que hem dibuixat un polígon de forces i un funicular dels infinits que podríem haver dibuixat sobre aquest mateix sistema de forces. Escollint un altre punt  $O'$  (Fig. 12), o traslladant les línies del polígon de forces a localitzacions diferents, les geometries canviarien i el punt de pas de la resultant també seria un altre, però seguiria trobant-se sobre la seva línia d'acció i no alteraria el sistema (Fig. 13).

Veurem ara que en treballar la composició de forces sobre un arc, el concepte de polígon funicular adquireix tal sentit que el fa idoni per explicar el comportament d'aquesta estructura. Suposem un arc continu simètric, dividit en trams imaginaris, del qual representarem únicament una meitat o semiarc. Sobre aquest semiarc, el sistema de forces que hi actuen està format per (Fig. 14):

- » Forces verticals: només els pesos propis dels diferents trams
- » Forces horitzontals: només una empenta a la clau, que tindrà una reacció simètrica en l'altre semiarc

Aplicant les dues primeres equacions d'equilibri,

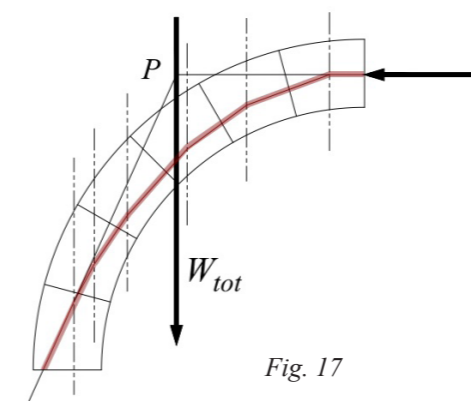
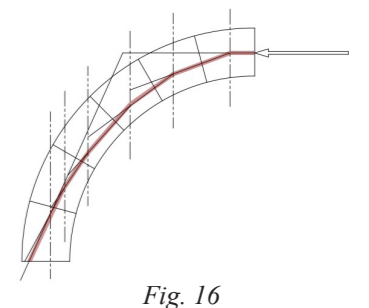
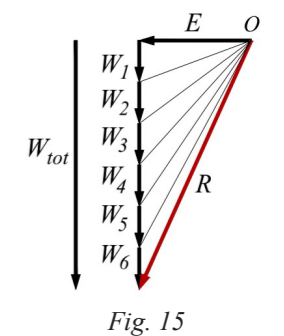
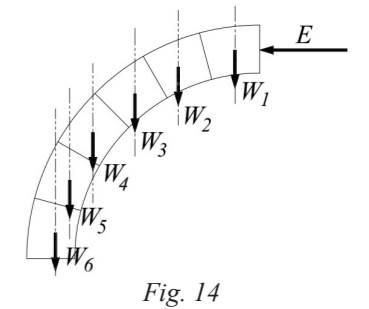
$$(1) \quad \sum F_x = 0$$

$$(2) \quad \sum F_y = 0$$

notem que l'empenta s'ha de correspondre amb la component horitzontal de la reacció en el suport, que és el que volem calcular. També es dedueix fàcilment que la component vertical d'aquesta reacció és la suma dels pesos dels trams, és a dir, el pes total del semiarc. El mòdul i la direcció de la resultant (i de la reacció), doncs, són senzills de trobar. Per conèixer el pas de la seva línia d'acció, dibuixem un polígon funicular seguint els mateixos passos explicats anteriorment:

- » En primer lloc disposem les forces en ordre, de la clau al suport, i dibuixem la resultant. Aquí ja veiem amb claredat que les components vertical i horitzontal d'aquesta resultant coincideixen amb el pes total i l'empenta en la clau
- » Per completar el polígon de forces, adoptem com a punt  $O$  l'inici de l'empenta i tracem les línies que uneixen  $O$  amb tots els altres punts del sistema (Fig. 15). Notem que aquestes línies són les resultants parcials, que es corresponen amb les successives composicions de l'empenta i els pesos acumulats dels trams. Cadascuna d'aquestes línies és la força que es trasllada a pròxim tram i que, en ser sumada al pes propi d'aquest, dona lloc a la resultant següent. L'última d'aquestes línies és, evidentment, la resultant total, composició de l'empenta i tots els pesos dels trams
- » A continuació dibuixem el polígon funicular sobre el semiarc, traslladant les successives resultants parcials sobre els punts d'intersecció de la línia d'acció de cada pes amb la resultant parcial anterior (Fig. 16)
- » Per acabar, cerquem el punt de tall de la primera i última resultants  $P$  que, evidentment, es troba sobre la línia d'acció de la resultant total. A aquest l'anomenem **punt d'equilibri geomètric** i ens serà de gran utilitat per molt processos que explicarem a continuació

El punt d'equilibri geomètric no és només un punt de pas de la resultant total del semiarc; també ho és del pes total. Imaginem ara que el sistema de forces estigués format únicament pels pesos dels trams (sense l'empenta) i que haguéssim dibuixat un polígon de forces a partir del mateix punt  $O$ . El funicular que en resultaria no es veuria alterat en absolut, però la resultant a considerar seria únicament el pes total del semiarc (sense component horitzontal). D'aquí se'n dedueix que l'abscissa del punt d'equilibri geomètric es correspon amb la del **centre de gravetat del semiarc**.





### Línies d'empentes màxima i mínima

El polígon funicular dibuixat sobre l'arc revela la transmissió de la força de compressió que discorre per l'arc des de la clau fins arribar al suport. Es correspon, per tant, amb la línia d'empentes que definien Hooke, Moseley i Méry. Té sentit, doncs, que la seva sortida del gruix de l'arc implica el bolc d'algunes dovelles i conseqüentment el col·lapse de l'estructura. La forma pura d'aquesta línia, en quant a corba diferencial, no és de l'interès d'aquest treball, però destacarem que la catenària de la que parlava Hooke, idèntica a la forma de la cadena penjada, es veu lleugerament alterada si l'estat de càrregues de l'arc no és estrictament anàleg al de la cadena (el seu pes propi únicament). En això hi influeix la pròpia la forma de l'arc, si considerem que l'arc que realment treballa és una fracció específica de l'arc total dins de la qual la línia d'empentes llisca a la perfecció, i la resta de material és un regruix que distorsiona irregularment la distribució homogènia del seu pes propi. Si adicionalment hi ha altres forces que actuen sobre l'arc, la modulació de la catenària s'accentua encara més. Per això, preferim parlar d'una corba ponderada, o simplement d'un polígon o polilínia, ja que si l'anomenem catenària no som rigorosos amb la seva definició matemàtica.

El polígon funicular és un mètode excel·lent per calcular la reacció i dibuixar la línia d'empentes. No hem d'oblidar, però, que l'arc és una estructura **hiperestàtica** i les tres equacions d'equilibri resulten insuficients per resoldre'n l'estabilitat. L'empenta que hem utilitzat en l'exemple del semiarc és una suposició derivada del fet que, a la clau, l'única acció possible és necessàriament horitzontal. Però el mòdul i la posició exacta d'aquesta força en tot el seu cantell són impossibles de determinar si no tenim més informació. Això ens porta a l'afirmació que existeixen **infinites línies d'empentes** que passen per l'interior d'un arc. Escollint localitzacions i valors diferents per l'empenta, podem traçar múltiples polígons funiculars que satisfacin l'equilibri de l'arc. La solució, doncs, es presenta acotada entre dos valors extrems:

- » Quan la línia d'empentes és el més peraltada possible i es troba al límit de sortir del cantell de l'arc. En aquest cas, l'empenta és la **mínima** (Fig. 18 a)
- » Quan la línia d'empentes és el més rebaixada possible i es troba al límit de sortir del cantell de l'arc. En aquest cas l'empenta que actua és la **màxima** possible (Fig. 18 b)

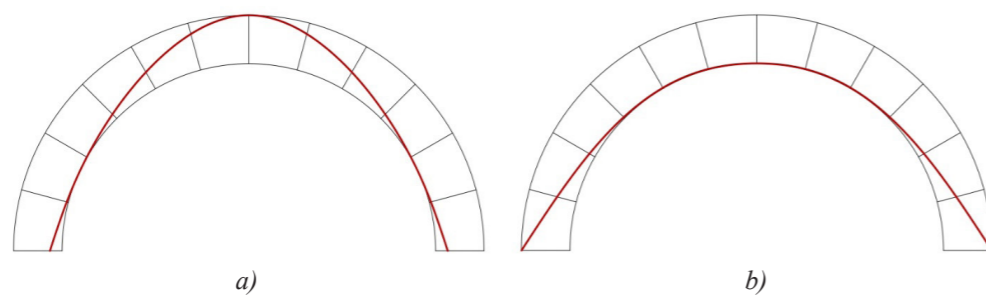


Fig. 18

Notem que el pes total no varia en cap cas i, per tant, el seu centre de gravetat i el **punt d'equilibri geomètric** del sistema tampoc es veuen alterats. Qualsevol estat d'equilibri està regit per aquestes condicions d'equilibri (Fig. 19).

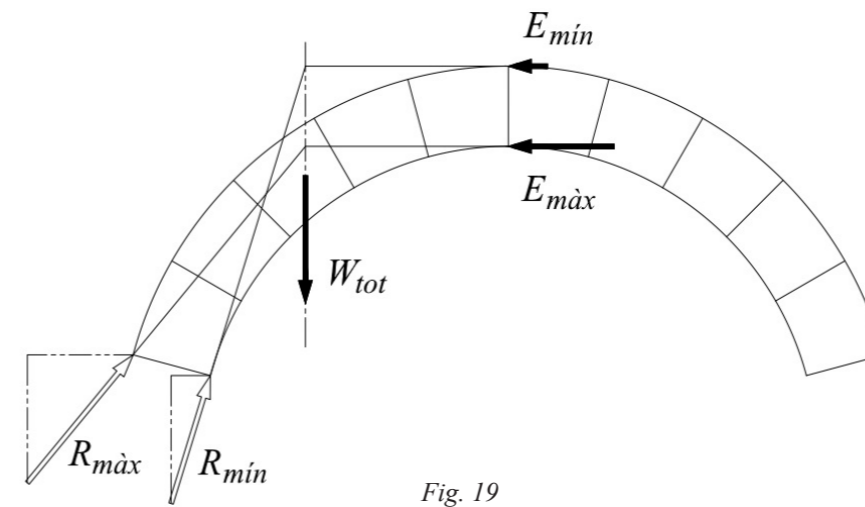


Fig. 19

Aquesta indeterminació s'ha entès com una mancança i al llarg de la història s'han fet múltiples aproximacions per determinar la posició real de la línia d'empentes. Alguns autors van idear mètodes basats en iteracions que reduïen progressivament la secció útil per acotar amb bastanta precisió la línia vertadera<sup>1</sup>. Altres mestres simplement feien la suposició que l'empenta passava pel centre del cantell en la clau i a partir d'aquí construïen el polígon funicular<sup>2</sup>. Moseley enuncia el 'Principi de mínima resistència'<sup>4</sup>, que estableix que la línia d'empentes real és la mínima necessària per mantenir equilibrat el sistema (és a dir la línia d'empenta mínima). La posició autèntica desbloqueja la indeterminació de l'equilibri i permet calcular l'empenta real que genera l'arc per així dimensionar degudament el suport. No obstant, els petits moviments interns de l'estructura comporten alteracions en el pas de la línia original, fent que un mateix arc al llarg del temps adopti diverses configuracions internes d'equilibri en funció de les càrregues variables i les petites deformacions. Pensem que els esforços interns obliguen a les fàbriques a reorganitzar-se segons el sistema de forces modula. Així doncs, tant la precisió amb que es pot conèixer com la utilitat de la vertadera línia d'empentes són relatives, i resulta més útil pensar en un rang de posicions dins del qual oscil·la.

Afegirem que la determinació de la línia d'empenta mínima no sempre és directa, ja que segons la geometria de l'arc, no és possible dibuixar una línia que passi per l'extradós en clau i pe l'intradós en els suports. Per satisfer la condició d'equilibri, la línia resulta ser una corba ponderada (o un polígon) que passa per l'extradós en la clau i és tangent a un punt determinat de l'intradós. Existeixen mètodes molt enginyosos per calcular aquest punt de tangència, com el mètode de Fuller, però al final sempre impliquen fer una aproximació de l'arc en segments rectes. Tot i així, el marge d'error resultant és perfectament admissible.

<sup>1</sup> Huerta (2004)  
<sup>2</sup> Serallonga (2003)  
<sup>4</sup> Moseley (1833)

### Estat tensional

Si bé fins ara hem suposat que la fàbrica dels arcs era un material indeformable que treballava a compressió, cal que considerem amb més precisió les seves propietats mecàniques si ens proposem analitzar versemblantment el comportament d'aquestes estructures. Quan els moviments obliguen al material a acomodar-se de nou, les fàbriques pateixen deformacions que poden sol·licitar, en certs punts, tensions superiors a les admissibles. En realitat un arc treballa anàlogament a una biga recolzada sobre dos suports, a **flexo-compressió**<sup>5</sup>. Si aïllem una llesca qualsevol de la secció d'un arc, trobarem que actuen sobre ella un esforç axial, un tallant i un moment flector. Aquesta realitat difereix una mica de la idea que l'arc treballa a compressió pura i, si bé és cert que l'axial de compressió és qui es manifesta amb més notorietat, el tallant i el flector tenen un efecte que no podem ignorar.

Les teories recents del professor Jaques Heyman<sup>6</sup> postulen els següents **principis per l'anàlisi estructural d'arcs de fàbrica**:

- » La fàbrica no pot resistir traccions
- » La resistència a compressió de la fàbrica es pot considerar infinita
- » El col·lapse per lliscament és impossible

Aquestes assumpcions funcionen sobretot per l'anàlisi d'arcs de dovelles, en el que l'arc es compon de blocs de pedra indeformables amb juntes seques, o d'un morter que no resisteix traccions. Però per l'enfoc del nostre treball respecte a fàbriques històriques de maó ceràmic amb juntes amorteres, hem d'acatar-les amb certa distància. Els arcs del que parlem aquí reben la condició de **concrecionats**, i s'assumeix que el maó i el morter formen un **material homogeni i continu**; una vegada fraguat el morter, les juntes constructives no tenen un impacte significatiu en el seu comportament estructural. Veurem que les esquerdes no tenen perquè formar-se seguint les juntes de morter i mantenint sencers els maons.

Per tant, estudiem la secció de l'arc amb totes les seves components tensionals:

- » **Axial de compressió** : és l'esforç predominant i el podem calcular a partir de la resultant parcial de compondre el pes de cada tram i la resultant anterior. La posició i angle d'inclinació d'aquesta resultant respecte a la secció determinen els altres dos actors
- » **Tallant** : resulta de la inclinació de la resultant parcial que actua sobre la secció
- » **Moment flector** : apareix si l'axial no es troba centrat en el cantell i dona lloc a una excentricitat. Aquesta excentricitat produeix una distribució desigual de la tensió de compressió al llarg de la secció i, com més accentuada és, més concentra la compressió en un dels extrems i pot arribar a generar traccions en l'extrem oposat

Pel que fa a l'axial, sabem que la fàbrica resisteix molt bé la compressió i la comprovació tensional hauria de sortir favorable. Dividint la component normal de la resultant parcial entre l'àrea de la secció, obtenim el valor mitjà de la tensió de compressió i podem comprovar que no superi el valor de trencament del material.

<sup>5</sup> Baquer (2012)  
<sup>6</sup> Heyman (1995)

$$(3) \quad \sigma_m = \frac{N}{A} < \sigma_r$$

On  $\sigma_m$  és la tensió mitjana,  $N$  és l'axial,  $A$  és l'àrea de la secció de l'arc i  $\sigma_r$  la tensió de ruptura de la fàbrica.

Respecte al tallant, caldria comprovar que l'angle entre la resultant i la normal de la secció no supera l'**angle de fregament intern** del material. Com que en el cas de les fàbriques aquesta dada pren un valor elevat (30° - 35°), en la majoria de casos es podrà prescindir de fer la comprovació. El tercer enunciat de Heyman, doncs, el podem adoptar amb seguretat.

Per últim, el moment flector  $M$  el determinem a partir de l'axial i l'excentricitat  $e$ .

$$(4) \quad M = N \cdot e$$

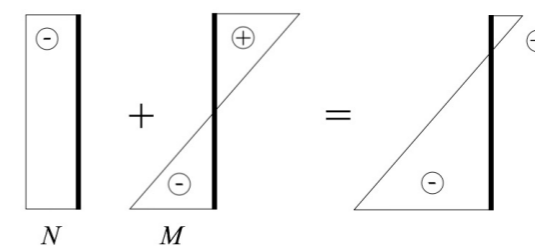


Fig. 20

Amb aquestes dades podem dibuixar el diagrama de tensions de la llesca. Pera una secció rectangular, sabem que el nucli central d'inèrcia és el seu **terç central**. Així doncs, la condició geomètrica per tal que l'arc treballi exclusivament a compressió és que la resultant es trobi continguda dins del terç central de l'arc. El valor de la tensió en els extrems ve determinat per aquestes relacions:

$$(5) \quad R_{ex} = \frac{N}{h} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot e}{h}\right)$$

$$(6) \quad R_{in} = \frac{N}{h} \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot e}{h}\right)$$

Aquesta propietat geomètrica queda millor entesa si es representa gràficament que no pas amb fórmules numèriques. Així, podem parlar d'un coeficient de seguretat geomètric quan ens referim a que la línia d'empentes no surti del nucli central. Gràficament, el que s'està dient és que l'arc útil és una fracció del total, concretament el terç central (coeficient de 3).

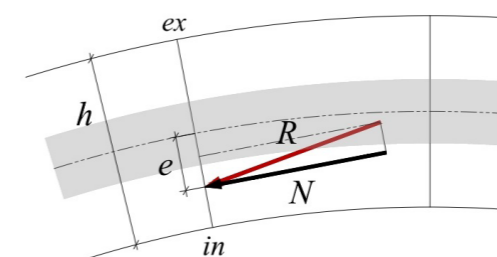


Fig. 21

## Esquerdes

¿Què passa, doncs, si la alguna resultant parcial (o el que és el mateix, la línia d'empentes) surt el terç central en algun punt? Essencialment, apareixeran traccions a l'extrem que quedi més allunyat del pas de la línia d'empentes. I si recordem el primer postulat de Heyman i assumim que la resistència a tracció de la fàbrica és nul·la, la conclusió és directa: s'obre una **esquerda** en aquell punt. Les deformacions i moviments es deuen generalment a desplaçaments dels suports. Ja sigui perquè els pilars sobre els que recolza l'arc se separen per la pròpia empenta de l'arc, o perquè s'apropen degut a altres forces laterals, la variació en la llum obliga al material a deformar-se per adaptar-se a la nova geometria.

L'aparició d'esquerdes en arcs té algunes implicacions en el seu càlcul, i val la pena que fem algunes observacions:

Primerament, revelen que la **línia de forces ha sortit del terç central** en certs punts. Si es coneixen els patrons de formació d'esquerdes per diferents geometries d'arcs, es pot establir una correspondència entre les esquerdes teòriques i les reals i deduir quina ha estat la causa de la distorsió de la línia d'empentes. En general, si l'arc està sotmès a un sistema d'accions gravitatòries i empentes laterals, les primeres fissures es produeixen a la clau i als ronyons:

- » Quan la línia d'empentes és la mínima, o propera a aquesta, els primers punts on surt del terç central són l'extradós de la clau i l'intradós dels ronyons. És en aquests llocs on apareixen les primeres traccions i esquerdes (Fig. 22 a)
- » Quan la línia d'empentes és la màxima, o propera a aquesta, els primers punts on surt del terç central són l'intradós de la clau i l'extradós dels ronyons. És en aquests llocs on apareixen les primeres traccions i esquerdes (Fig. 22 b)

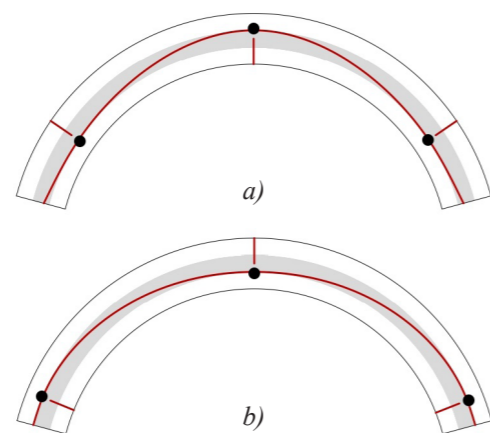


Fig. 22

Aquests patrons de generació de fissures varien depenent de la geometria de l'arc i del seu estat de càrregues, per tant caldria comprovar en cada cas sobre un model els punts teòrics de formació de les primeres esquerdes. Si succeeix que les esquerdes observades no es corresponen amb les que preveu el model teòric, voldrà dir que hi ha alguna altra acció externa que afecta al sistema de forces i altera el pas de la línia d'empentes de manera diferent. Caldria considerar llavors altres variables, com ara càrregues puntuals significatives o accions horitzontals.

En qualsevol cas, les esquerdes ajuden a **acotar la posició real de la línia d'empentes**; en certa manera suprimeixen alguns graus de llibertat i afinen la informació sobre el comportament real de l'estructura. Si de tant limitar el rang poguéssim determinar un mínim de dos punts exactes pels quals passa la línia d'empentes, podríem calcular l'empenta real i traçar un polígon funicular que passés per aquells punts:

Suposem que el tram d'arc que estudiem se sosté sobre els dos punts pels quals sabem amb seguretat que passa la línia d'empentes (Fig. 23). Coneixent-ne el pes propi i per la condició d'equilibri geomètric, podem determinar tant la component vertical (pes propi del tram) com la horitzontal (empenta) de la reacció en el suport (alternativament podríem calcular l'empenta per equilibri de moments sobre el punt *O*). El polígon funicular que tracem amb aquesta empenta (que era la nostra incògnita) passarà per aquests punts.

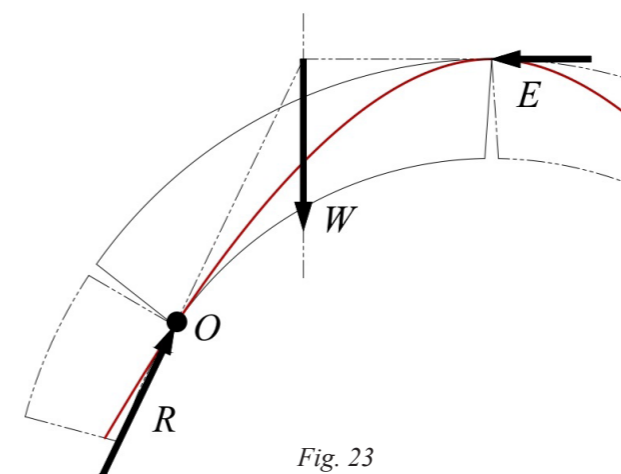


Fig. 23

Per altra banda, les esquerdes **redueixen la secció útil** de l'arc en certs punts i rebaixen la seguretat al trencament per sobrecompressió. Tot i que les tensions admissibles de les fàbriques són elevades, és necessari comprovar novament l'estat tensional de les seccions afeblides.

Si la línia arribés al límit de la secció es formaria una articulació. Estudis d'autors com Jacques Heyman, Santiago Huerta i Gema López<sup>7</sup> demostren que, per arcs de dovelles de pedra, un model deformat amb articulacions funciona i proveeix resultats adequats. La línia d'empentes passa pel punt de l'articulació i aquestes assumpcions faciliten el càlcul de deformacions límit, ja que les relacions geomètriques entre peces prismàtiques que no es deformen i només poden rotar sobre un punt són directes. En el cas dels arcs concrecionats aquesta idea no és convincent; fer una aproximació d'aquestes característiques implica assumir una superfície de contacte nul·la i, conseqüentment, una tensió de compressió infinita en aquell punt. Així doncs, el segon enunciat de Heyman (la resistència a compressió de la fàbrica es pot considerar infinita) no el tindrem en consideració per al nostre estudi. Probablement resulti útil pel cas de la pedra, però si tractem amb fàbrica històrica de maó (o maçoneria) amb juntes de morter, hem de tenir en compte que el deteriorament dels materials pot haver minvat considerablement la capacitat de la fàbrica, especialment el morter de calç. Seria imprudent i incorrecte no fer aquesta comprovació en una valoració de seguretat.

<sup>7</sup> Huerta, López (1996)

## Estreps

Fins ara hem parlat quasi exclusivament dels arcs i hem deixat de banda altres elements de les estructures de fàbrica que són tan importants per la seva estabilitat que es podria dir que formen un conjunt inseparable. Es tracta precisament dels estreps, que en el cas d'arquitectura tradicional equivaldrien a aquells murs, pilars i pilastres sobre els quals els arcs transmeten els seus pesos i empentes. Aquests massissos de fàbrica tenen la funció de conduir les forces rebudes fins a terra, i no quedem curts si diem que la majoria de complicacions (algunes acabades en col·lapse) que presenten les estructures amb arcs de fàbrica es deuen a que cedeixen els estreps, d'una manera o altra. Des de voltes de canó caigudes en esglésies medievals fins a façanes esquerdades en cases rurals, la causa moltes vegades recau en que aquests elements estan mal dimensionats o poc carregats. Es podria dir que, per molt que el traçat del polígon funicular dins d'un arc sigui favorable, no podem estar tranquils del tot fins que la càrrega arribi a terra, fins que assegurem també la seguretat de l'estrep.

La funció principal de l'estrep és contenir la inèrcia al bolc que les empentes horitzontals dels arcs indueixen. Han de ser suficientment amples per garantir l'estabilitat. De manera similar a l'exemple senzill que explicàvem al principi d'aquest treball, la resultant del sistema de forces (inclòs el pes propi de l'estrep) ha d'estar continguda dins de la base de contacte d'aquest massís amb el terra. Igual que hem fet amb l'arc, podem trobar també la línia d'empentes que discorre per l'estrep construint un polígon funicular. Una condició per la seguretat, en aquest cas a equilibri, serà que la línia d'empentes quedi continguda dins de l'estrep.

Però igual que passa amb els arcs, els estreps de fàbrica presenten un comportament tensional intern que no podem deixar de banda. Estarem d'acord en que la condició de cedència del material és també que l'axial estigui en tot moment **dins del terç central** per tal que no apareguin traccions. Heyman parla de les esquerdes que apareixen en estreps a partir del punt en que la línia d'empentes surt del nucli central (Fig. 24)<sup>1</sup>. Alguns autors han comprovat que certs edificis monumentals de l'antiguitat utilitzen coeficients geomètrics superiors a 3. La sortida de la línia d'empentes d'aquesta regió implica la fissuració de l'estrep i un minvament considerable de la seva capacitat portant. Igualment, per assegurar el col·lapse per lliscament s'ha de complir que l'angle d'incidència de la resultant parcial **no superi l'angle de fregament intern** del material. Aquí convé que fem algunes matisacions:

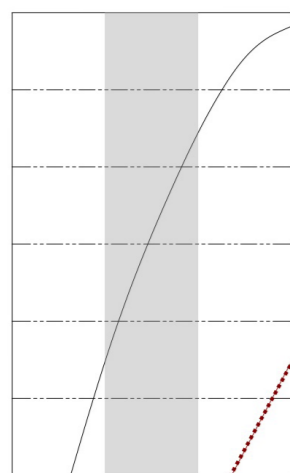


Fig. 24

En traçar un polígon funicular en un estrep, el sistema de plans de tall que escollim serà molt més determinant que en el cas d'un arc. Això es deu essencialment a les diferències en les geometries d'ambdues figures. Si dividim un estrep en trams verticals i calculem el pes dels segments en tota la seva alçada, obtenim una línia d'empentes irreal, ja que les forces gravitatòries que condueixen l'empenta cap avall estan clarament sobredimensionades. En el cas d'un arc el cantell és de l'ordre de desenes de centímetres i la divisió en segments verticals pot admetre el comportament d'aquests trams com a monolítics. Però en un estrep de varis metres d'alçada és prou clar que les pedres de baix de tot en el segment 1 de la Fig. 25 a) no tenen cap efecte en la línia d'empentes a dalt de tot. Al calcular-ho així, estem

<sup>1</sup> Huerta (2004)

considerant que tota la paret "estira" des de baix la línia d'empentes, quan seria més apropiat pensar que la fàbrica el que fa és "empènyer" des de dalt cap a baix amb l'acció del seu pes.

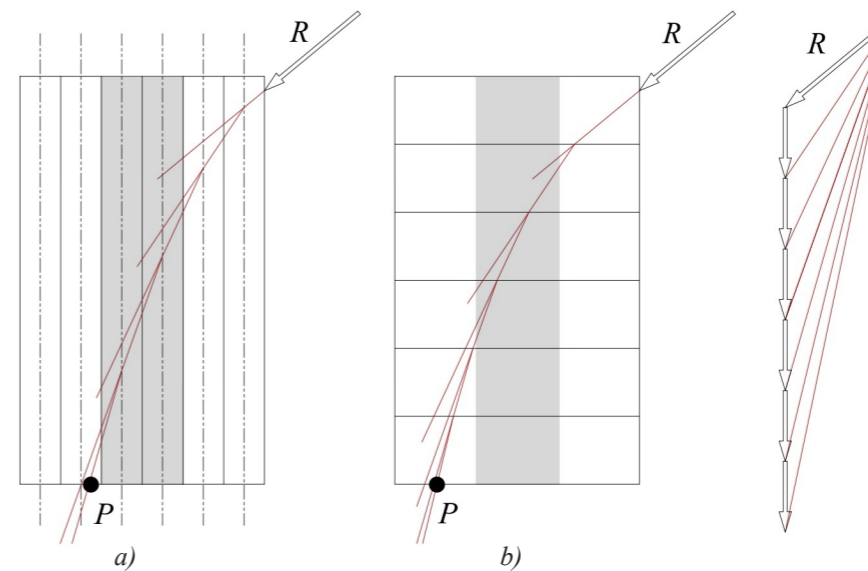


Fig. 25

La divisió en segments horitzontals (Fig. 25 b) és més acurada en aquest sentit i porta a un resultat més restrictiu, tot i que presenta una complicació; si els trams són amples, la força resultant pot no arribar a tallar mai amb la línia d'acció d'aquests, i cal establir un conveni per compondre les successives forces del polígon. El més adequat és situar les línies d'intersecció en les juntes horitzontals. Però d'aquí se'n deriva un altre problema, que és l'angle d'incidència de la resultant parcial respecte la junta. Si parlem d'estructures de blocs de pedra (especialment contraforts d'esglésies) caldrà considerar aquest factor del lliscament, i s'obrirà una dissertació sobre la qual alguns autors han pogut concloure que un sistema de juntes inclinades és el més apropiat<sup>1</sup>. Al llarg dels anys ha quedat demostrat que en un massís de pedra amb juntes horitzontals, els blocs es poden veure literalment desplaçats horitzontalment i provocar el col·lapse de tot l'edifici. Per al nostre cas de fàbriques concrecionades, aquestes és un sistema de plans virtuals que simplement ens són útils per calcular els pesos parcials de l'estructura. Per, tant, podem fer la vista grossa en aquest aspecte si algunes reaccions arriben amb massa inclinació sobre les juntes de l'estrep. A més, els punts on això succeeix es troben tan a prop de l'arc que es fa difícil, per a un material continu, distingir on acaba exactament l'arc i on comença l'estrep, de manera que l'angle real entre les forces i les direccions internes de màxim estrès no estan clares del tot en aquestes zones.

Passa el mateix amb la definició del terç central de l'estrep. En la trobada de l'arc amb aquest, resulta arriscat limitar en una zona clarament acotada el nucli central d'inèrcia. Ens hem d'imaginar una geometria irregular per aquesta regió en la qual, sense pertànyer estrictament al terç central de l'arc ni de l'estrep, les propietats del nucli d'inèrcia i l'angle de fregament intern tenen validesa. Per estàtica gràfica no es pot resoldre aquesta indeterminació, però a la pràctica es verifica aquest comportament i els marges d'error dins dels quals ens movem permeten admetre certes simplificacions.

<sup>1</sup> Huerta (2004)

## Resum de les condicions de seguretat

Vistes les característiques mecàniques dels arcs i estreps de fàbrica, i com l'estàtica gràfica ens proveeix una explicació entenedora del seu comportament, farem una síntesi de les idees clau i la seva rellevància en la determinació de la seguretat d'aquestes estructures.

- » La condició d'equilibri per un arc o estrep és que línia d'empentes no surti de la secció
- » Per un arc o estrep estable i que no presenta deformacions, la línia d'empentes no és única i oscil·la dins d'un cert rang, delimitat per una línia d'empenta mínima i una de màxima
- » D'aquestes dues afirmacions se'n dedueix que, si és possible trobar una sola línia d'empentes que estigui totalment continguda en la secció, el seu equilibri està garantit
- » Per la mateixa raó, si donat un estat de càrregues no és possible traçar cap línia d'empentes que quedi continguda dins de la secció, aquell estat de càrregues no és compatible amb l'estabilitat de l'estructura
- » La resistència a tracció de la fàbrica és nul·la
- » La condició per tal que no apareguin traccions en cap part de la secció d'un arc o estrep és que la línia d'empentes no surti del nucli central d'inèrcia, el terç central
- » El lliscament és pràcticament impossible degut a l'elevat angle de fregament intern de la fàbrica
- » Quan la línia surt en algun punt de la secció apareixen traccions i s'obren esquerdes que redueixen la superfície útil de transmissió de forces
- » La resistència a compressió de la fàbrica és elevada, però no infinita, i es pot veure minvada pel deteriorament dels materials amb el pas dels anys
- » Les esquerdes en els arcs i estreps acoten la posició vertadera de la línia d'empentes
- » En cas de presentar esquerdes, la condició de seguretat que podria esdevenir més restrictiva de totes és la tensió admissible del material en les superfícies de contacte més crítiques

## Part II : Pràctica

Una vegada hem estudiat els fonaments teòrics del càlcul per mitjà de l'estàtica gràfica, veurem com s'apliquen a la pràctica per avaluar l'equilibri i la seguretat d'alguns casos d'estudi reals. Això implicarà ajustar i adaptar alguns dels conceptes teòrics i, sens dubte, ens ajudarà a adquirir una major comprensió global d'aquesta ciència. La segona part d'aquest treball es desenvoluparà mitjançant la construcció d'un model interactiu que ens permeti estudiar i provar diferents disposicions de línies d'empentes sobre un edifici que vulguem estudiar. Aquest sistema tindrà l'efecte d'una maqueta funicular de fils i pesos; desplaçant els punts de pas de les línies i modulant les càrregues aplicades, els altres elements del conjunt que es vegin afectats pels canvis es reorganitzaran a l'instant. Serà, per tant, un model sobre el qual podrem temptejar diferents estats d'equilibri i, a més, ens serà útil per la diagnosi de lesions quan tinguem esquerdes causades per efecte dels arcs. Permetrà treballar sobre dos tipus de casos d'estudi:

**Sense esquerdes** : com hem vist, no existeix una única disposició de línies d'empentes que satisfaci les condicions d'equilibri d'un arc o sistema d'arcs, i d'aquí es deriva que és suficient trobar una sola disposició vàlida per garantir que el sistema està equilibrat. En aquest cas, un model interactiu ens pot servir per trobar algunes d'aquestes configuracions d'equilibri i demostrar que una estructura existent (si estem fent una diagnosi) o que estem inventant (si estem en fase de projecte) és segura.

**Amb esquerdes** : en els casos en que un arc o sistema d'arcs presenta esquerdes degudes a la distorsió de les línies d'empentes, alguns dels seus punts de pas queden acotats i el model es traçarà tenint en compte aquestes condicions. Com més esquerdes hi hagi, més punts estaran prefixats i menys graus de llibertat tindrem, però en alguns casos encara podria ser necessari ajustar alguns paràmetres per tempteig.

Una vegada dibuixades les línies d'empentes vertaderes, caldrà que el programa verifiqui de nou la seguretat. D'entrada podrem dir que, si ha estat possible traçar un estat d'equilibri en el qual les línies no surten de la fàbrica, el sistema és compatible en termes d'estabilitat (de fet, si l'edifici existent s'aguanta és perquè és així). Però com que el pas d'aquestes línies (distorsionat respecte l'estat original), s'haurà desplaçat desfavorablement, hauré de comprovar de nou si les resultants es mantenen dins dels coeficients geomètrics de seguretat. Per exemple, si hi ha esquerdes a l'intradós

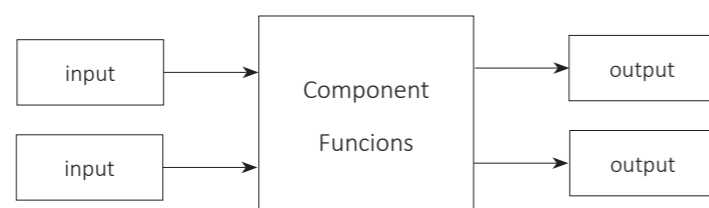
i extradós d'un arc és perquè la línia ha sortit del terç central i el nou arc treballa a un coeficient de seguretat necessàriament inferior. Addicionalment, l'aparició d'esquerdes redueix les seccions útils de contacte entre peces i, especialment en aquests punts dèbils, serà molt important calcular si la tensió de treball segueix sent segura o si s'apropa perillosament a la tensió de ruptura de la fàbrica. També tindrem la possibilitat d'afegir sobrecàrregues i comprovar la seguretat del sistema envers l'acció d'aquests nous agents. Això en indica la seguretat en termes de quanta càrrega més pot suportar fins que trenqui pel punt més feble.

Aquests càlculs poden ser l'argument per decidir si es va a una rehabilitació o a una fase més acurada de diagnosi per altres mètodes, o bé si l'estructura es troba dins dels marges de seguretat malgrat les lesions.

El nostre model se centra en l'anàlisi d'estructures de fàbrica històriques. Les fàbriques han de ser de **maó ceràmic amb juntes de morter** i/o obra de **maçoneria unida amb morter**, sistemes constructius que presenten un comportament continu pel que fa a la formació d'esquerdes i reben el tractament de **concrecionats**; a diferència del que passaria amb arcs de dovelles de pedra, aquí la fàbrica i el morter treballen com un únic material homogeni. Concretament, el programa està pensat per avaluar **parets de càrrega** que continguin arcs, trams de mur i pilars, forjats unidireccionals o coberta que carreguin sobre la paret i possibles sobrecàrregues. Aquestes estructures han d'estar afectades únicament pels seus pesos i càrregues, i les empentes que els arcs generin. Les úniques accions que podem introduir-li són càrregues gravitatòries verticals en sentit negatiu de l'eix d'ordenades (pesos propis, càrregues permanents i sobrecàrregues). **No admet altres accions** verticals (originades, per exemple, per assentaments) ni càrregues horitzontals com la de vent. D'acord amb això hi ha certes condicions que el faran exclusiu per a aquest ús. No és convenient utilitzar-lo per l'anàlisi d'un pont de fàbrica, una volta o una cúpula, ja que no ha estat concebut amb les consideracions encarades a aquest tipus d'estructures i s'estima que donaria resultats distorsionats. Tot i que els fonaments de l'estàtica gràfica són els mateixos per qualsevol estructura amb arcs, caldria adaptar els algorismes si es volgués utilitzar per altres construccions.

Aquest model es desenvoluparà amb l'extensió **Grasshopper** del software de dibuix vectorial **Rhinoceros**. Es tracta d'un editor paramètric que permet treballar amb les geometries de Rhinoceros com a funcions que depenen d'unes variables que podem regular. La creació d'aquests models interactius té la seva inspiració en les aportacions d'en Josep Maria Genescà. Ell ha construït, mitjançant el software GeoGebra, múltiples models basats en l'estàtica gràfica per calcular, entre moltes altres, línies d'empentes, reaccions i tensions en arcs, voltes i cúpules. La decisió d'utilitzar Grasshopper es deu a la comoditat de l'espai de treball, la capacitat de gestió de gran quantitat de dades en models complexos i la compatibilitat d'exportar i importar arxius vectorials entre Rhinoceros i CAD. També permet generar automàticament arxius PDFs amb els dibuixos i exportar dades numèriques en fulls de càlcul d'Excel. Grasshopper està programat en llenguatge Python i incorpora la possibilitat de programar nous components amb aquest mateix codi; si se'n tenen algunes nocions bàsiques, resulta molt útil programar funcions personalitzades que en els components que venen per defecte amb el software presenten limitacions.

Grasshopper funciona com un trencaclosques de petites unitats o components que es poden connectar entre ells. Cada component té uns **inputs**, uns **outputs** i una sèrie de **funcions** que transformen els inputs d'una determinada manera per obtenir els outputs. Per exemple, una de les primeres funcions que fa el nostre programa és dibuixar un arc a partir de l'intradós i el cantell. Aquí, els inputs són l'intradós (una corba dibuixada en l'aixecament) i el cantell (un nombre real positiu). L'output serà una superfície plana acotada per l'intradós, l'extradós i les juntes de l'arc en els suports. La funció a definir per obtenir aquesta superfície a partir dels inputs, doncs, serà que traci una corba paral·lela a l'intradós a una distància igual al cantell, i tot seguit uneixi els punts finals d'ambdues corbes per obtenir les juntes rectes que acaben de delimitar la superfície.



Amb aquests termes podem definir i explicar qualsevol procés que el programa realitzi per complex que sigui. A més, es tracta d'algoritmes lògics que fàcilment es poden traduir al llenguatge d'altres programes de dibuix o fins i tot seguir-los, com si es tractés d'una recepta, per dibuixar les geometries amb escaire i cartabó. És per això que explicarem els passos mitjançant diagrames de flux, que en paral·lel programarem en Grasshopper sobre un cas d'estudi per verificar els resultats contínuament. Argumentarem les decisions que s'han pres i l'elecció de certs camins envers alguns altres. Elaborarem una impressió pròpia dels conceptes que hem estudiat i els posarem a prova.

L'objectiu final d'aquesta empresa és tenir una **biblioteca de components** de Grasshopper que siguin fàcils d'utilitzar i flexibles per cobrir qualsevol cas d'estudi, sempre que tinguin les característiques esmentades anteriorment. En aquest sentit, el projecte es troba en un estat inicial i, tot i que funciona perfectament en matèria de càlculs, hi ha certs processos que resulten farragosos per l'usuari ja que requereixen crear moltes connexions entre inputs i outputs. Amb plena consciència d'aquest obstacle, el propòsit final de completar la biblioteca i publicar-la s'entén com un objectiu futur. No obstant això, els algoritmes estan totalment descrits i programats i constitueixen sens dubte una primera fase d'aquesta biblioteca a la qual falta encara una mica de maduració per tal que sigui còmodament manejable per qualsevol usuari.

A continuació explicarem el funcionament del programa pas per pas, descriurem una metodologia per a la construcció d'un sistema interactiu de càlcul gràfic dins d'un software de dibuix. Ho farem sobre els dibuixos i dades d'un cas d'estudi en particular, però el programa funciona amb qualsevol edifici que compleixi les condicions inicials.

## Consideracions sobre el cas d'estudi

Treballarem sobre la façana portant d'una casa de pagès que, segons referències cadastrals, compta amb un segle i mig d'història. Els arcs i pilars de la façana són de maó ceràmic amb juntes de morter i els trams de mur de maçoneria amorterada. Aquestes observacions s'han pogut fer gràcies a parts del revestiment deteriorades que han caigut. A més, observacions realitzades a la planta de les golfes i al soterrani, on l'estructura és totalment vista, ajuden a tenir més informació sobre el sistema constructiu que pot quedar oculta en altres parts de l'edifici. S'ha pogut comprovar que el morter està lleugerament debilitat fent una apreciació organolèptica amb un instrument metàl·lic<sup>8</sup>. Aquesta façana presenta esquerdes als arcs de les dues plantes superiors i algunes a les parets laterals. Modelarem els arcs, pilars i parets laterals de les dues plantes superiors, ja que el nostre objectiu aquí serà determinar el pas de les línies d'empentes forçat per les esquerdes i les tensions a les seccions debilitades. Algunes de les dades no s'han pogut calcular degut a la inaccessibilitat de certs recursos i instruments. S'utilitzen en el seu lloc algunes dades extretes de taules de referència<sup>8</sup>.

Tot el que expliquem d'ara en endavant s'exemplifica i s'il·lustra sobre el cas d'estudi, però és absolutament vàlid per a qualsevol altra paret de fàbrica que compleixi les condicions que hem enunciat al anteriorment.



Fig. 26

<sup>8</sup> Genescà, Rosell (1997)

## Metdologia per al modelatge i anàlisi

### 1. Inspecció visual

El primer que cal fer és un reconeixement exhaustiu de l'edifici i un registre gràfic de lesions. Es tracta de recopilar el màxim d'informació possible sobre els sistemes constructius, l'estat dels materials i el comportament estructural del conjunt. En principi, dibuixant l'aixecament de l'estat actual i observant els detalls ja podem fer una primera hipòtesi de les causes de les esquerdes i desplaçaments. És important fer-se aquesta idea inicial per anar-la contrastant amb els resultats a mesura que els obtenim. Si en algun punt ens trobem amb incoherències, caldrà valorar la possibilitat que la hipòtesi fos incorrecta o revisar si ens estem equivocant en algun procediment de càlcul.

En el nostre cas d'estudi, veiem que les regions més esquerdades es troben en els arcs de les dues plantes superiors, la qual cosa no ens ha de sorprendre tenint en compte que els arcs i sobretot, els pilars i parets laterals, estan menys carregats en aquella zona. Aquesta insuficiència de pes ha pogut ser la causa de que les empentes dels arcs hagi forçat la separació de suports. Amb les eines que teníem a l'abast, hem pogut comprovar un lleuger desplom dels pilars cap enfora respecte de l'eix vertical central de la façana. Sense voler extreure conclusions precipitades, simplement tindrem en compte aquestes dades però estant subjectes a ser posades en dubte si s'escau.

Pel que fa a les esquerdes dels arcs i el mur immediatament superior, podem apreciar que es corresponen amb una situació d'empenta mínima. A la planta de dalt de tot, els arcs estan notòriament deformats, havent-se desplaçat la clau cap avall uns pocs centímetres. Tot apunta a que els suports han cedit i les llums han incrementat; per adaptar-se a la nova geometria, els arcs s'han acomodat i la redistribució dels esforços interns ha donat lloc a l'aparició d'esquerdes.

A la paret lateral que té finestres s'hi han format esquerdes que no guarden una relació aparent amb la cedència dels estreps. La seva causa podria ser un assentament local o un a compressió del mur degut a una càrrega irregular, però resta pendent de comprovar el pas de les línies d'empentes que obtindrem amb el model informàtic.

Fig. 27.

- a) Disposició i mida dels maons i les juntes
- b) Mesurant la inclinació d'un pilar amb una plomada improvisada
- c) Mesurant la nova esquerda a la clau d'un arc que ja havia estat tapada amb guix



Fig. 27

### 2. Aixecament

L'aixecament de la paret que es vol estudiar ha d'estar dibuixat en un arxiu de Rhinoceros o CAD (fàcilment exportable a Rhino). Ha de mostrar un alçat de la paret (o més ben dit una secció per la pròpia paret, si considerem que estudiarem el comportament intern de la fàbrica). Aquest dibuix ha de ser el més senzill possible i ometre qualsevol element que no formi part estrictament de l'estructura. Hi ha de constar:

- » Límits de la **paret i obertures** en la paret de càrrega. Qualsevol finestra, barana o paret de tancament que no sigui estructural s'ha d'ometre del dibuix; a efectes de càlcul només ens interessa el seu pes, que s'afegirà posteriorment com a càrrega lineal sobre les obertures.
- » **Bigues i/o biguetes** que carreguin directament sobre la paret. Aquests objectes seran polilínies tancades i tindran el perfil que tinguin les bigues existents (per poder-ne calcular el pes propi, si s'escau)
- » **Esquerdes**, dibuixades com a polilínies calcades de les esquerdes reals

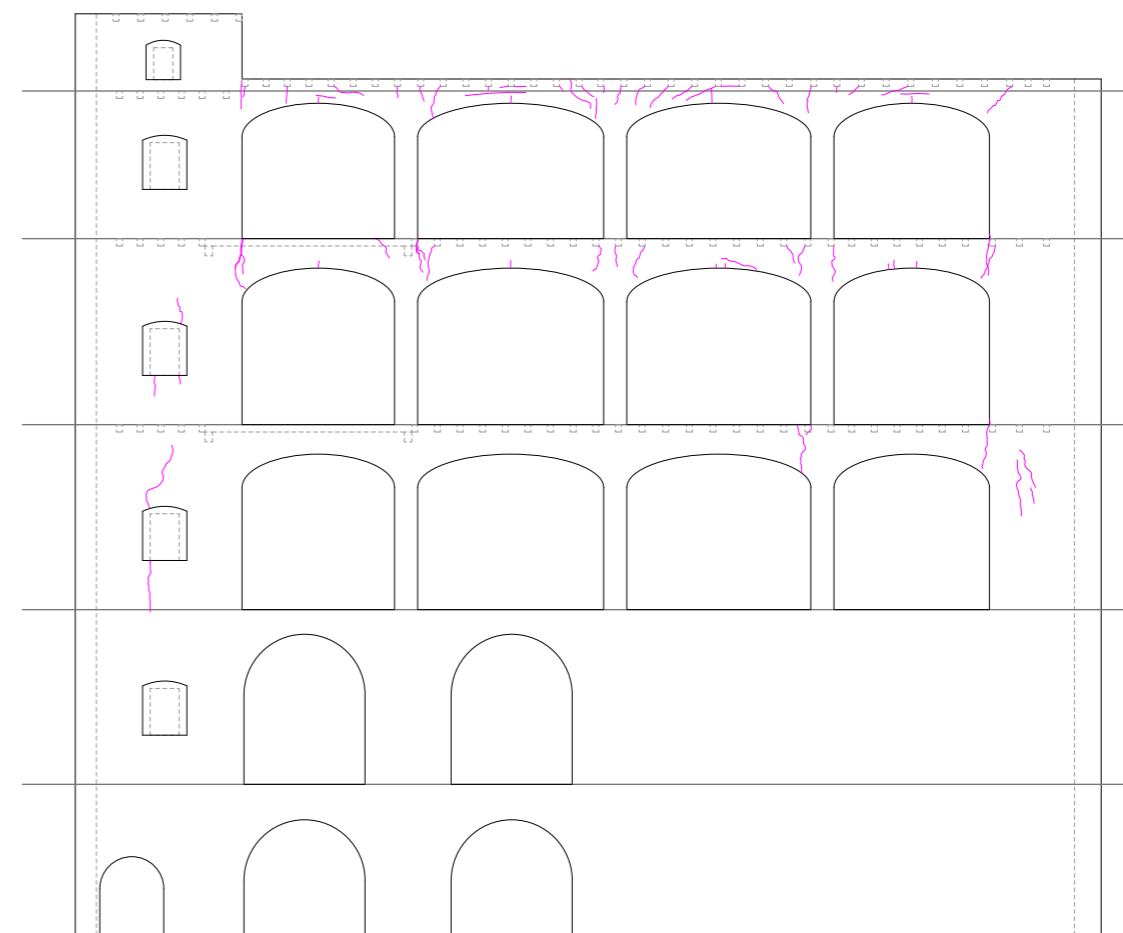


Fig. 28



### 3. Dades numèriques

A més del dibuix a línia de la façana, cal prendre algunes dades més que haurem de mesurar i introduir-les numèricament per tal que el programa pugui completar tots els càlculs. Aquestes dades són:

- » **Cantell dels arcs.** Cada arc es construeix de manera independent, per tant és possible introduir diferents valors per al cantell si aquests varien en alguns arcs
- » **Gruix de la paret.** Tant els arcs com els pilars i estreps es construeixen independentment, permetent introduir diferents valors en cas que el gruix variï en plantes diferents de l'edifici
- » **Pesos específics de les fàbriques.** En el nostre cas d'estudi, els pesos específics del maó amb juntes de morter i la maçoneria amb morter
- » **Tensió de trencament** per compressió de les fàbriques. Es poden determinar amb l'extracció de provetes i el seu trencament en laboratori
- » **Llum** que cobreixen les bigues o biguetes que recolzen sobre la paret
- » **Pesos específics dels forjats** (i les bigues, si no van inclosos dins del pes del forjat)
- » **Càrregues superficials** permanents, les que es reparteixen sobre els forjats
- » **Sobrecàrregues superficials**
- » **Càrregues lineals**, que actuen directament sobre trams de paret

### 4. Altres valors recomanats

Per últim, recomanem valors per a algunes dades que el programa ens demanarà d'incloure:

- » **Nucli central** dels arcs, pilars i estreps. El terç central, per tant, un coeficient geomètric de 3
- » **Escala de forces** (de treball). Per tal que el programa dibuixi les longituds dels vectors amb els que treballa a una certa proporció. Un valor de l'ordre de 0,05 hauria de ser suficient. Si l'escala és massa petita i els vectors massa curts, pot ser que algunes interseccions de rectes no es produeixin i els càlculs no es puguin completar
- » Divisió de l'arc en **segments**. Com més segments tinguem més suau serà la línia d'empentes, però nombres massa grans generen llistes de dades innecessàriament feixugues i tot plegat resta rendiment al programa. Per un arc d'uns 4 m de llum, 15 segments és més que suficient.
- » **Coefficients de seguretat** per les càrregues. Depèn de l'objectiu que busquem; en fase de projecte utilitzarem en principi els coeficients de majoració que marca el codi tècnic (1,35 per les permanents i 1,5 per les variables). Si estem avaluant i volem un model que es comporti el màxim d'acurat possible d'acord amb l'estat de càrregues actual, el millor és no majorar les permanents ( $\gamma = 1$ ) i, per suposat, no afegir sobrecàrregues.

## Processos que realitza el programa

### 1. Modelatge dels elements constructius

Distingim entre aquests tres: **arcs**, **pilars** i **parets laterals**. En principi, qualsevol paret de càrrega s'ha de poder modelar amb combinacions dels tres. L'ordre amb que els introduïm es indiferent. Funcionen de manera **independent**, per la qual cosa no és necessari modelar la paret sencera si només se'n vol estudiar una regió aïllada. Els arcs es divideixen en dos **semiarcs per al càlcul**. Els pilars i parets laterals es consideren de l'alçada d'una planta i posteriorment es van encadenant per a la representació de les línies d'empentes en tota l'alçada que es vulgui

### 2. Definició de càrregues

Considerem que les úniques càrregues aplicades sobre els arcs són accions verticals provinents dels pesos propis de l'estructura i de possibles sobrecàrregues.

- » **Pesos propis dels arcs i del mur superior** : El semiarc i del tram de semimur que queda directament sobre ell es **divideixen en un nombre de segments** horitzontalment iguals i es calculen les àrees i els centres de masses de cadascun d'ells. Amb els pesos específics de les fàbriques de l'arc i el mur, així com el gruix de la paret, calculem els seus pesos propis. Les resultants dels pesos s'apliquen sobre les línies d'acció verticals que es dibuixen des dels centres de massa de cadascun dels segments d'arc+mur.
- » **Càrregues superficials** : Tota càrrega superficial aplicada sobre el tram de forjat (o coberta) que recolzi directament sobre la paret estudiada es trasllada sobre els arcs, pilars i murs **a través de les bigues i biguetes**, en forma de **càrregues puntuals**. Considerem que el fragment de mur que queda entre la bigueta i la rosca de l'arc no distribueix aquesta càrrega, que es trasllada directament cap a l'arc sobre una línia d'acció vertical que passa pel centre de la bigueta. Les biguetes han d'estar dibuixades en l'aixecament, i els trams de forjat o coberta s'introdueixen com a càrregues superficials en kN/m<sup>2</sup> (i coeficient de majoració, si es creu precís). Hem d'introduir, per tant, la llum de la crugia immediatament posterior a la façana, i multiplicar la meitat d'aquesta longitud pel valor de la càrrega superficial majorada per obtenir la càrrega lineal equivalent que posteriorment es reparteix en càrregues puntuals segons l'entrebicat de l'estructura.
- » **Càrregues Lineals** : Són aquelles que actuen directament sobre la paret. Només poden existir en les obertures de la façana (barana) o a dalt de tot d'aquesta (cornisa o parapet) i el seu valor s'introdueix directament com a càrrega en kN/m (i coeficient de majoració, si es creu precís). El valor d'aquesta càrrega computa sobre les línies d'acció dels segments en que hem dividit el semiarc i semimur.
- » **Sobrecàrregues** : S'apliquen sobre el forjat o coberta en forma de càrregues superficials. S'introdueixen, doncs, com a tals i computen sobre les línies d'acció de les biguetes.

### 3. Càlcul de línies d'empentes

Les primeres línies que hem de dibuixar són les de cadascun dels semiarcs. Aquestes es transmetran als pilars i murs laterals, on es dibuixaran els funiculars corresponents partir de les resultants dels semiarcs i traçaran la continuació de les línies d'empentes. Podem dibuixar les línies en els arcs segons varis criteris:

- » Una **línia qualsevol** en funció d'una empenta que podem anar variant : ens servirà per temptejar combinacions d'equilibri.
- » Si l'arc presenta **esquerdes** : en aquest cas la línia d'empentes es veu obligada a **passar per les seccions reduïdes** que resten sense esquerdar. Podem fer l'assumpció que, si les esquerdes no són més profundes, és perquè la línia vertadera es troba dins del terç central del nou semiarc útil. Si les seccions es veuen considerablement reduïdes, admitem com a correcte fixar els punts de pas de la línia d'empentes pels centres d'aquestes seccions.
- » **Línia d'empenta mínima**: es tracta de la línia més peraltada possible continguda dins del semiarc estudiat. Com hem explicat anteriorment, la seva determinació no sempre és directa en funció de la geometria de l'arc. Establim un mètode basat en iteracions que explicarem en l'apartat pertinent. Aquesta línia ens pot ser molt útil a l'hora de comprovar la naturalesa de les esquerdes; calcularem la línia d'empenta mínima **continguda en el terç central** (no en tot el cantell del semiarc) i d'aquesta manera tindrem la posició de la línia **just en l'instant abans que apareguin les primeres esquerdes**. Les esquerdes reals haurien de coincidir amb els punts de tangència, i si això no succeeix voldrà dir que algun altre agent que no hem considerat està afectant el semiarc.

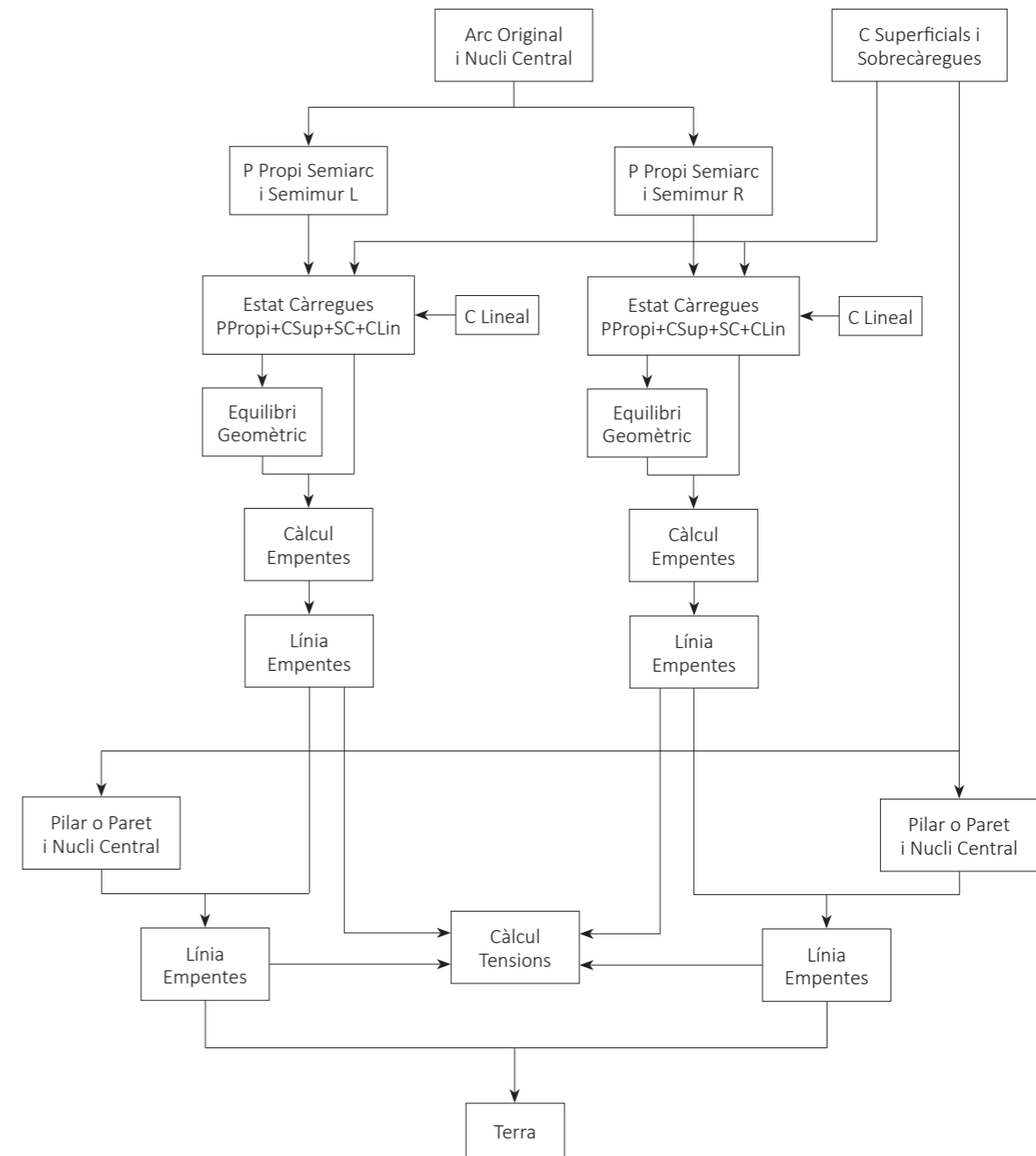
Al ser calculats per separat, la distribució desigual de biguetes sobre els arcs pot fer que els dos semiarcs que el componen tinguin empentes mínimes diferents. Agafarem el valor de la **major empenta dels dos** i l'aplicarem a tots dos, ja que no seria possible que cada meitat estigués sotmès a una empenta diferent.

Pel que fa als **estreps** (pilars i murs), les línies d'empentes es dibuixen a partir de les reaccions que arriben dels arcs i/o estreps superiors, combinats amb els pesos parcials que resulten de la divisió de l'estrep en **trams horitzontals**.

### 4. Càlcul de tensions

Una vegada es línies de forces estan representades, s'estableix un **sistema de plans normals** a la secció i es calcula el valor de l'axial en cadascun d'ells. Amb l'axial i l'excentricitat podem determinar el **diagrama de tensions** en cada secció i tenir un testimoni numèric de si la línia surt o no del nucli central. Quan hi ha esquerdes es calculen les tensions en les seccions útils

Aquest és l'esquema general del funcionament del programa i en les pàgines següents presentem els diagrames de flux dels principals components.

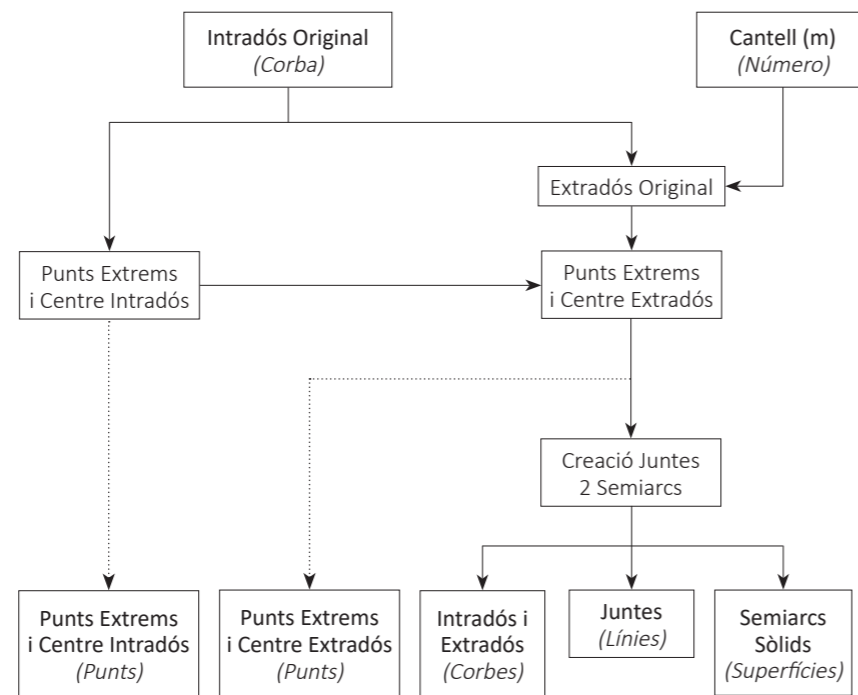


### Definició de l'Arc original i Nucli central

A partir de l'intradós i el cantell o rosca de l'arc, el component dibuixa un arc acotat lateralment per la prolongació vertical dels pilars o els estreps sobre els quals es recolza. La literatura consultada ens diu que la suposició de juntes verticals és acurada, per tant totes les juntes que utilitzarem seran així. L'arc es divideix en dos semiarcs simètrics, que seran la nostra unitat mínima de càlcul d'empentes en tot moment. Això farà que els polígons de forces i els funiculars corresponents siguin més senzills de dibuixar i facilitarà molt el càlcul de les empentes mínimes.

**Inputs:**

Intradós Original  
Cantell



**Outputs:**

Punts Extrems i Centres  
Intradós i Extradós Originals  
Juntes Extrems i Central  
Semiarc Sòlids

La definició del nucli central segueix uns passos molt similars i no l'explicarem en un diagrama diferent.

### Definició de Càrregues superficials i Sobrecàrregues

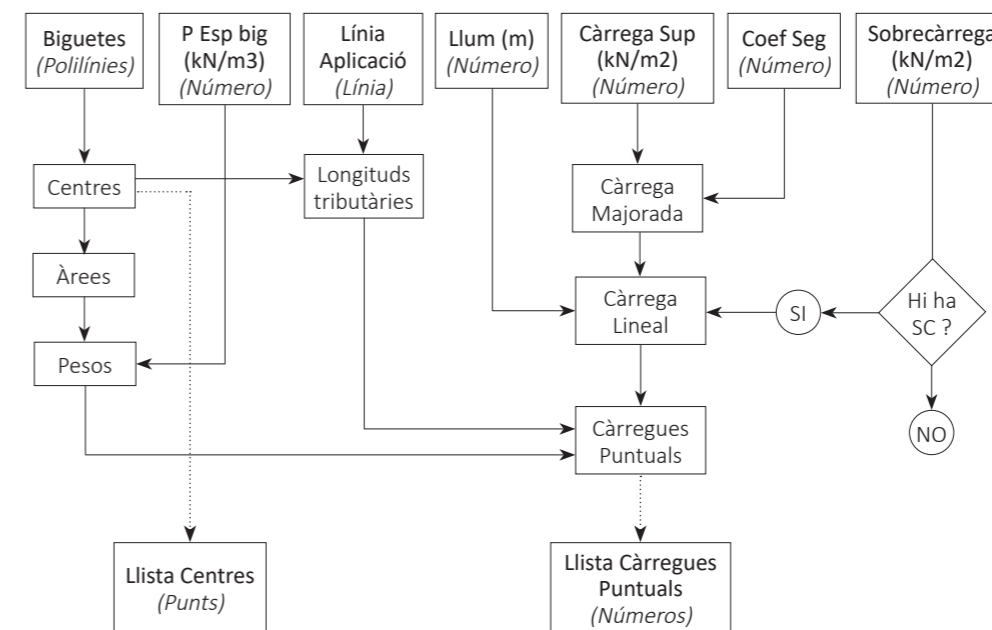
Les càrregues superficials s'introdueixen sobre els trams de bigues. Amb la llum que cobreixen les biguetes el programa calcula la càrrega lineal equivalent, i amb l'entrebegat ho transforma en càrregues puntuals, que s'apliquen sobre línies d'acció que passen pels centres de les biguetes. Si a un costat i altre de la hi ha forjats amb biguetes no coincidents, es poden introduir sense problema com a trams independents. En el dibuix es veuran superposats, però cal assegurar-se que es seleccionen les biguetes correctes per l'un i per l'altre. Així com els arcs es modelen acotats entre pilars, i els pilars acotats entre arcs, els forjats són elements independents que es poden introduir en tota la seva longitud. Després el programa calcula quines biguetes del total d'un tram afecten a cada arc i quines no hi tenen efecte.

Un canvi de tram es produeix quan:

- » El forjat canvia de nivell
- » Dins del mateix forjat la direcció de l'estructura principal canvia entre perpendicular i paral·lela
- » Dins del mateix forjat la llum de les bigues o biguetes canvia

Els pesos propis dels forjats s'han d'introduir com a càrregues superficials.

De les es sobrecàrregues se n'introdueix el valor i el coeficient de majoració, i el programa les reparteix sobre les biguetes.



**Inputs:**

Biguetes  
Pes específic biguetes  
Línia d'Aplicació  
Llum  
Càrrega Superficial  
Coeficient de Seguretat  
Sobrecàrrega Superficial

**Outputs:**

Llista Centres Biguetes  
Llista Càrregues Puntuals

### Estat de Càrregues

Aquest component reuneix totes les càrregues aplicades i les ordena per al pròxim càlcul d'empentes. Es desenvolupa **sobre cada semiarc**, i el divideix en un nombre donat de **segments** per calcular-ne els **pesos propis**. A continuació, incorpora sobre les línies d'acció dels mateixos segments la **càrrega lineal** si n'hi ha. Finalment calcula quines **biguetes** i de quins trams afecten a aquell semiarc i superposa les seves línies d'acció amb les dels segments. D'aquesta manera, si la càrrega del forjat és molt més elevada que el pes propi de l'arc i el mur, la línia d'empentes quedarà més accentuada en els punts on s'hi apliquin les forces de les biguetes, aportant un resultat més proper a la realitat.

S'acaba col·locant en llistes totes les línies d'acció i les forces que afecten el semiarc, **ordenades** d'esquerra a dreta o viceversa segons un input **L/R**, que ens diu si el semiarc que tractem és la meitat esquerra o dreta de l'arc original i, per tant, si els càlculs dels polígons funicular s'han de fer amb empentes positives o negatives en l'eix d'abscisses i en quin ordre s'han de compondre les forces verticals.

**Inputs:**

- L / R
- Intradós
- Extradós
- Línia Límit Superior Semimur
- Nombre de Segments
- Semiarc
- Pes específic de la fàbrica
- Càrrega Lineal
- Sobrecàrrega

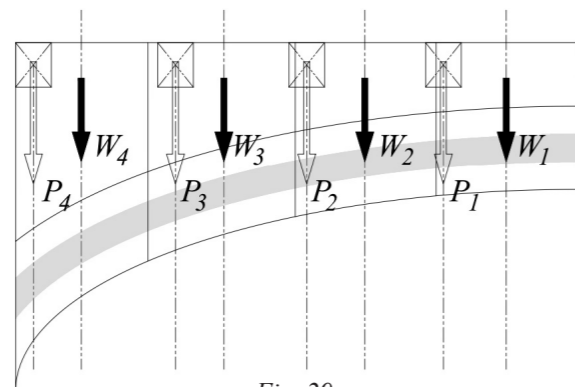
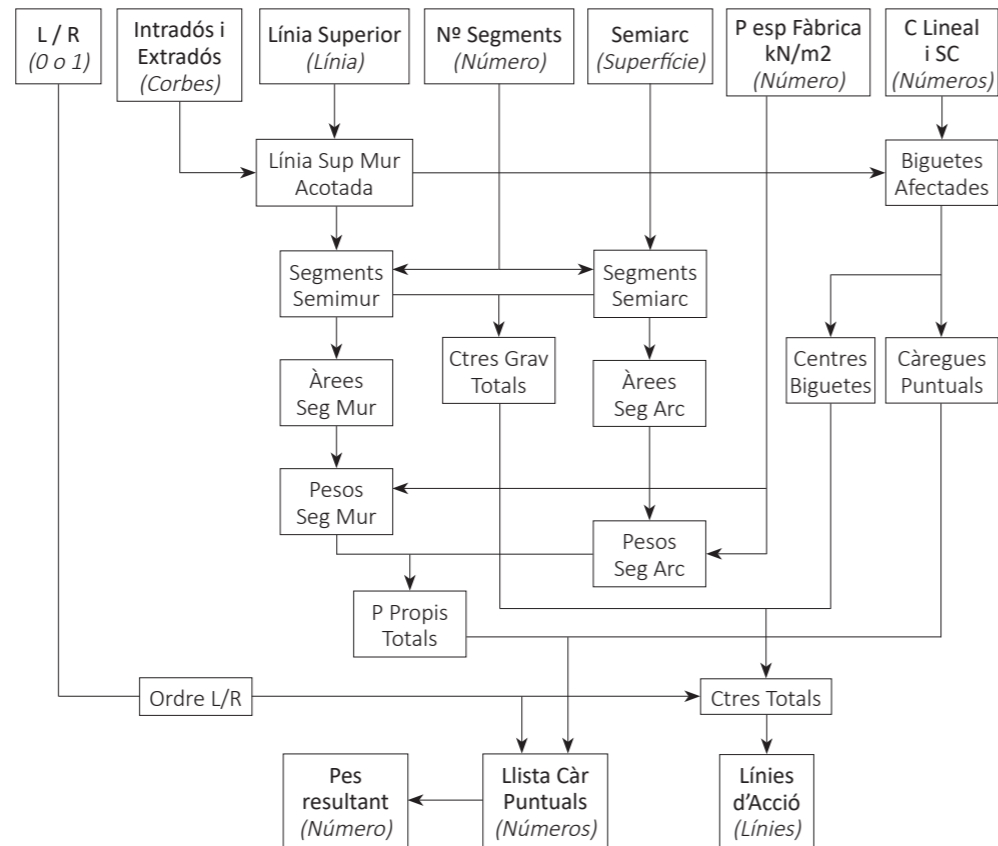
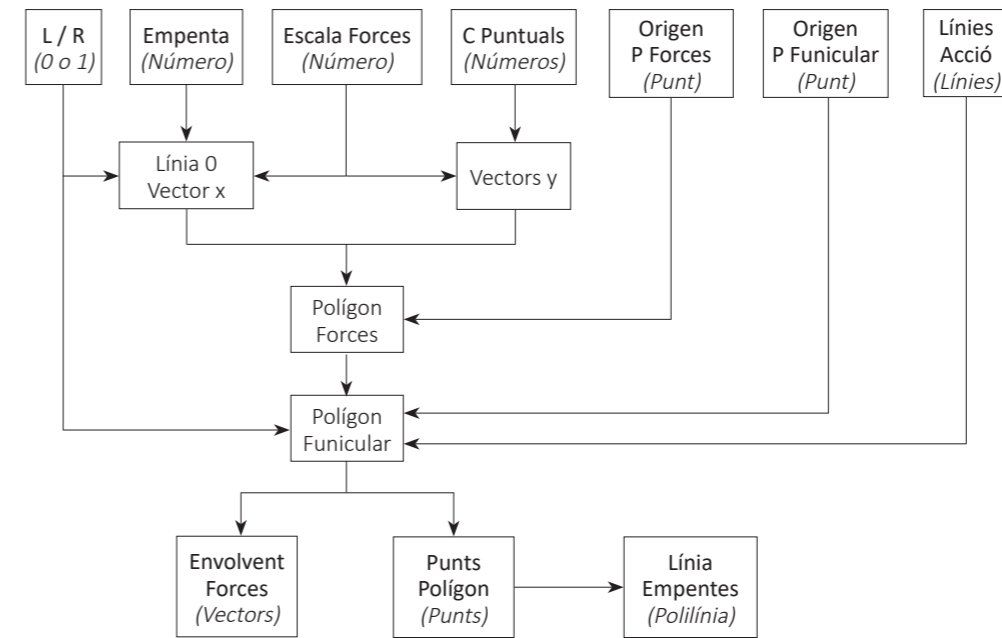


Fig. 29

### Línia d'Empentes

Aquest component el trobarem dins d'altres components. En essència, el que fa és dibuixar un polígon funicular a partir d'un punt d'origen, una llista ordenada de forces verticals i les seves línies d'acció, i una empenta horitzontal (positiva o negativa).



**Inputs:**

- L / R
- Empenta
- Escala de Forces
- Càrregues puntuals ordenades
- Línies d'acció ordenades
- Punt origen P Funicular
- Punt origen P Forces

**Outputs:**

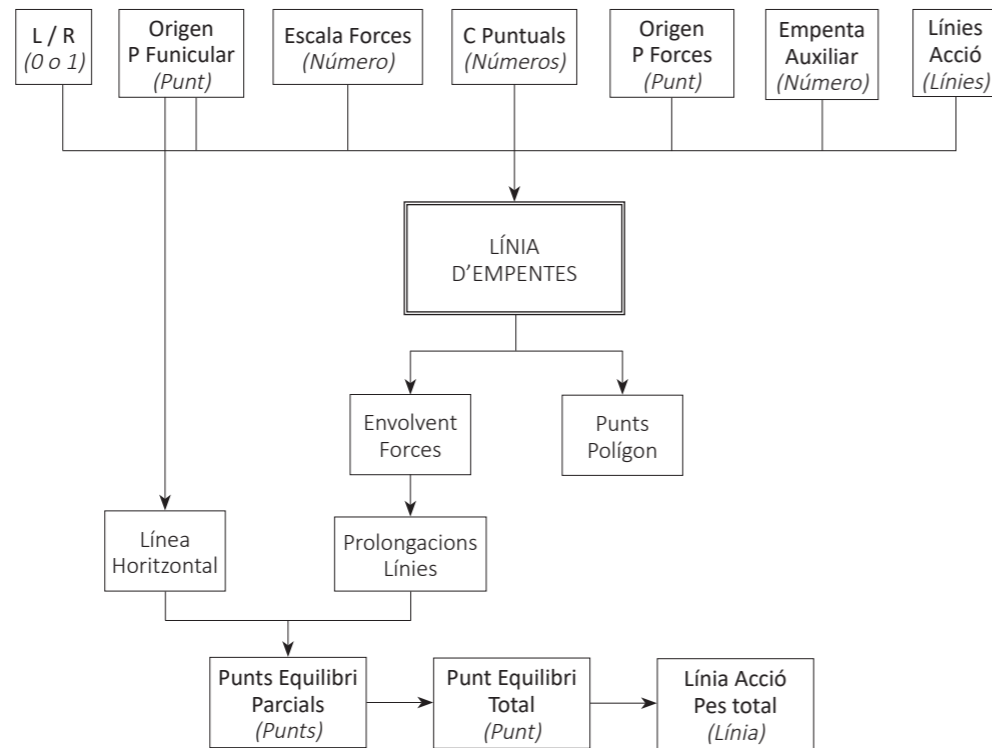
- Envolvent forces del funicular
- Punts polígon funicular
- Línia d'empentes

### Equilibri Geomètric

A partir d'un polígon funicular auxiliar dibuixat amb el component explicat anteriorment (Línia d'Empentes) troba el punt d'equilibri geomètric, o punt de pas de la resultant del semiarc. A més, li fem calcular, per el mateix sistema, els punts d'equilibri geomètric parcials, que resulten de compondre l'empenta amb la primera força vertical, l'empenta més la primera i la segona forces, etcètera. Notem que el punt d'equilibri total és l'últim d'aquesta llista, i es correspon a la composició de l'empenta i la totalitat de forces que actuen sobre el semiarc. Aquests punts ens seran útils per al càlcul de l'empenta mínima.

**Inputs:**

- L / R
- Empenta auxiliar
- Escala de Forces
- Càrregues puntuals ordenades
- Línies d'acció ordenades (1)
- Punt origen P Funicular (2)
- Punt origen P Forces



**Outputs:**

- Punts equilibri parcials (3)
- Punt d'equilibri total (4)
- Línea d'acció del Pes total (5)

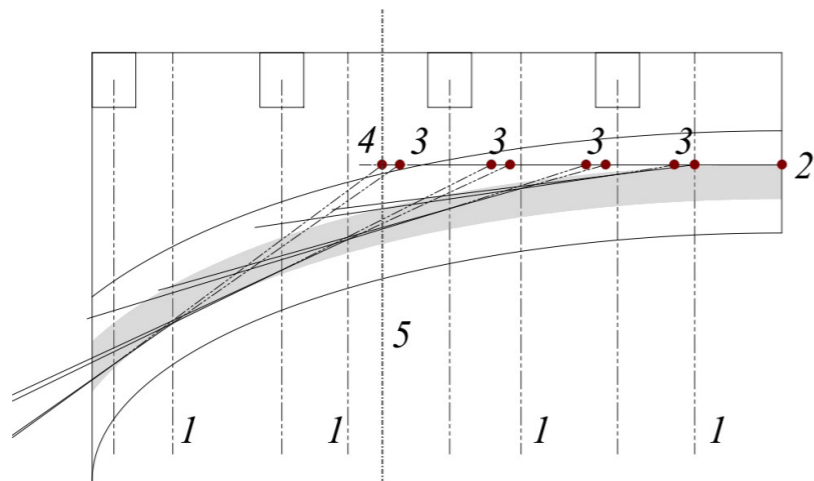
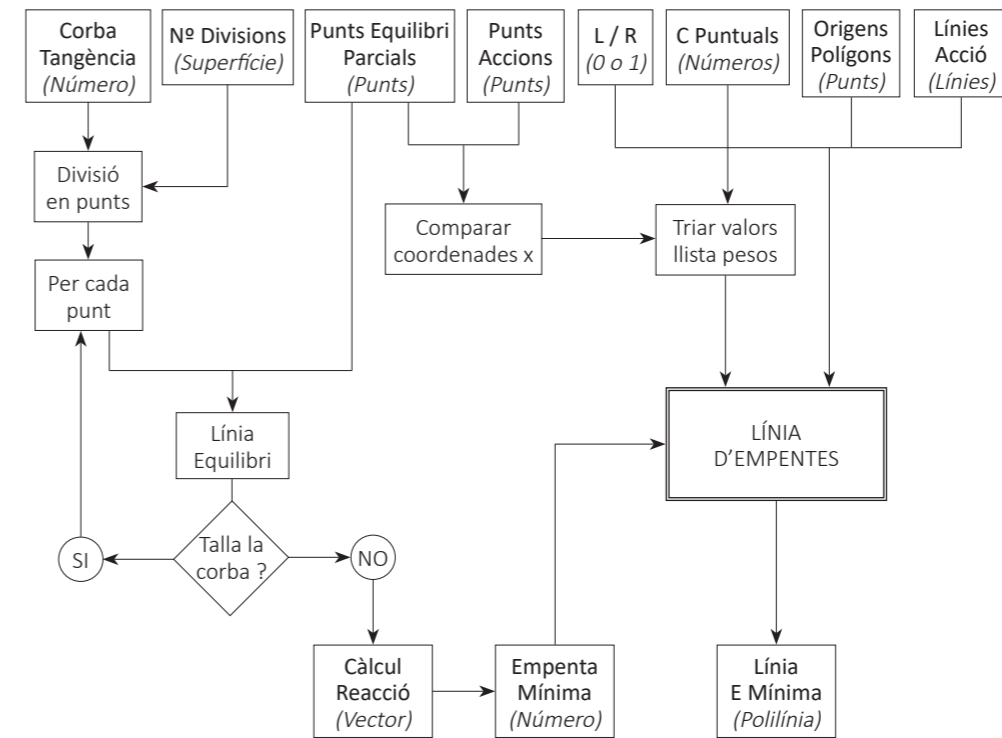


Fig. 30

### Empenta Mínima

Aquest component és útil per trobar l'empenta mínima en qualsevol arc en que la línia no passi exactament pel suport i sigui tangent en algun punt de l'intradós en els ronyons. Per determinar aquest punt, el primer que es fa és aproximar l'intradós en qüestió a una successió de punts; com més punts, més precisa serà la posició del punt de tangència. A continuació se situa el primer punt, començant pel suport, i traça una recta des d'allà fins el punt d'equilibri geomètric; si la recta talla l'intradós en algun altre punt, vol dir que també ho farà la línia d'empentes, i per tant el punt analitzat no és el que busquem. Va fent iteracions amb els pròxims punts fins trobar una recta que talla l'intradós només en aquell punt, la qual cosa vol dir que és el punt de tangència. Està programat per detectar la posició del punt estudiat respecte de les línies d'acció, de manera que, si algunes d'aquestes línies queden més cap al suport (i no intervenen en el càlcul), es treballa amb el punt d'equilibri parcial corresponent. Al final, quan s'ha trobat el punt de tangència, es calcula l'empenta (mínima) per equilibri geomètric. Amb aquesta empenta es traça un funicular sencer amb totes les forces, que es correspon amb la línia d'empenta mínima.



**Inputs:**

- L / R
- Escala de Forces
- Càrregues puntuals ordenades
- Línies d'acció ordenades (1)
- Punt origen P Funicular (2)
- Punt origen P Forces

- Corba tangència, intradós (3)
- Nombre punts divisió
- Punts d'equilibri parcials (4)
- Punts càrregues puntuals (5)

**Outputs:**

- Reacció en el suport (6)
- Empenta mínima (7)
- Línea d'empenta mínima (8)

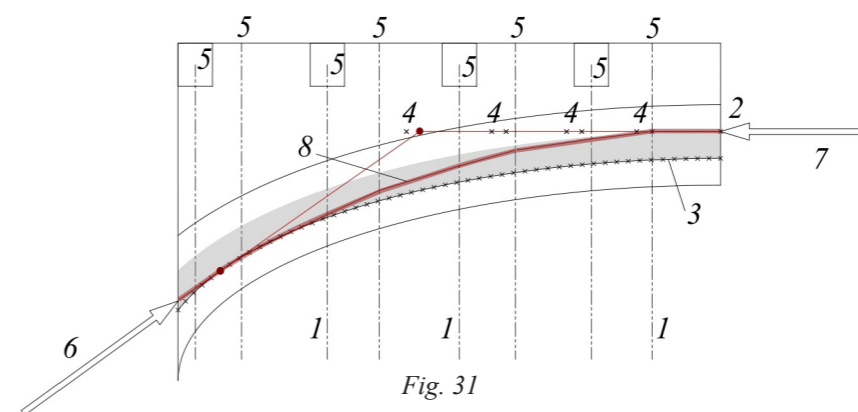


Fig. 31

La resta de components calculen anàlogament les càrregues i línies d'empentes en els pilars i murs laterals, per la qual cosa no els explicarem amb més detall. D'igual manera, el càlcul de tensions no té altre misteri que trobar l'axial en cada secció estudiada i dividir-lo entre la superfície, mesurar l'excentricitat i calcular els valors en els extrems per traçar els diagrames.

A l'enllaç de la pàgina que s'ha obert per la pròxima publicació de la biblioteca,

<https://sites.google.com/view/graphic-statics/home>

s'hi pot trobar un vídeo en el que s'explica com es va muntant un model funicular sobre un altre cas d'estudi. Allà queda demostrat que en pocs minuts es pot construir la maqueta sobre qualsevol paret. Aquest material no forma part de la memòria del treball estrictament, però es recomana veure el vídeo per a una millor comprensió del funcionament i l'aspecte del programa.

### Interpretació dels resultats

Finalment, queda analitzar i valorar els resultats que el programa ens dona. La majoria són molt directes i, gràcies als mètodes gràfics, es veuen simplement impresos sobre el dibuix. La visió global de tot un sistema de polígons en equilibri és l'essència d'aquest document i del programa.

A la pàgina següent es pot veure el dibuix final que s'obté. En els arcs que tenien esquerdes, les línies s'han pogut acotar i calcular les noves tensions útils. En els que no, s'han hagut d'ajustar les empentes a partir de les reaccions que arribaven des dels arcs contigus per tal de trobar una situació que complís amb les condicions d'equilibri. S'ha vist que les tensions útils no són perilloses i encara es podria ajustar més la seguretat introduint, per exemple, sobrecàrregues elevades que posin a prova de nou el rendiment de l'estructura. Hem obtingut, doncs, un document vàlid i directe que reflecteix la nostra maqueta traçada en un programa exclusivament de dibuix. El document es pot exportar i maquetar entre altres formats vectorials (per exemple CAD).



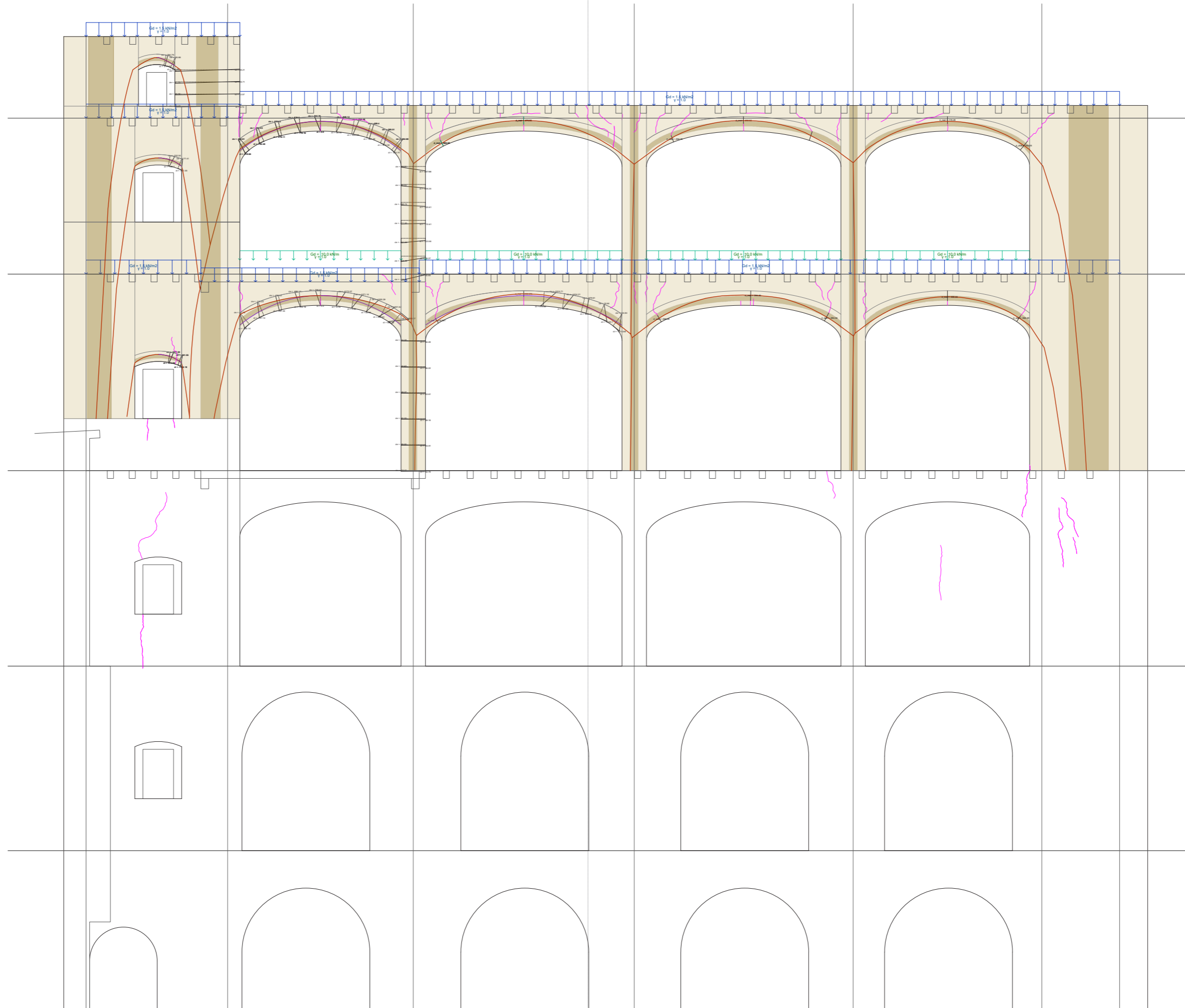
Fig. 32



Fig. 33



Fig. 34



## Conclusions

Al llarg d'aquest treball he recordat passatges en el transcurs de les classes d'estructures en que els diagrames i les representacions vectorials eren decisius per alguns càlculs. La comprovació del pas e la resultant pel nucli central de la sabata, en un mur de contenció, o la distribució de l'armat en una biga de formigó segons les ordenades del diagrames de tallant i flectors. Aquests procediments m'havien quedat a la memòria segurament per la claredat i la comoditat que oferien; de sobte, després d'un munt de fórmules i números entre els que no costava perdre's, apareixien uns gràfics que posaven sobre dibuix tots els actors del càlcul i donaven una visió global del que s'estava tractant. En els mateixos termes, he experimentat quan feia aquest treball que quan deixem de parlar d'entitats intangibles i dibuixem les coses, quan substituïm un grapat de dades numèriques per un dibuix, de sobte molts dels conceptes prenen sentit. Això em porta inevitablement a pensar que els números i la geometria formen una unitat inseparable.

Percebo en el model que se m'ha ensenyat sobre el càlcul d'estructures, la sensació d'un cert temor a calcular per mitjà d'eines gràfiques per por a que els resultats no siguin suficient precisos. El gruix de la punta del llapis, la imperfecció de les subdivisions del regle, sempre ens poden trair i donar resultats imprecisos, cosa que no passa si trobem es valors analíticament. Però avui en dia disposem d'eines informàtiques que dibuixen amb gran precisió. En realitat, aquesta precisió es deu a que treballen amb dades analítiques, i el que veiem a la pantalla és la seva traducció gràfica, però això fa que els softwares de dibuix treballin la geometria amb un pols impecable. Són eines fetes per gestionar amb agilitat la part complicada i ferregosa dels processos, i deixen als humans que ens ocupem d'interpretar els seus resultats. Un ús profitós d'aquests instruments és el que ens facilita el camí però alhora ens exigeix el factor humà per racionalitzar el que s'està processant. Sovint he notat una inseparabilitat forçada entre la complexitat dels programes i la dificultat per entendre'n els resultats, quan crec que hauríem d'utilitzar les màquines precisament per estimular el factor humà i desvincular-lo del pensament algorítmic dels ordinadors.

L'objectiu de futur de la biblioteca que he creat és precisament que qualsevol usuari pugui construir un model intuïtiu i manejable a partir d'uns passos senzills, i que els resultats que s'obtinguin no deixin d'exigir una mínima comprensió sobre la matèria per poder ser interpretats i rectificats. La maqueta vol ser com un joc, en el qual les fitxes són fàcils de moure, però la destresa del jugador no es mesura en aquests

termes, sinó en l'art d'interpretar degudament el comportament de les estructures i el tacte per fer els moviments adequats. Especialment tractant-se d'arcs, estructures hiperestàtiques que porten intrínseca la indeterminació, aquest propòsit agafa sentit en els termes en que es planteja el projecte, i penso que qualsevol intent de programar algorismes que busquin resultats exactes amb un sol clic seria erroni.

Seguint la línia d'en Josep Maria Genescà, aquesta biblioteca serà publicada, ampliada i constantment millorada per tal de fer accessible unes eines que crec que poden ser útils per a un públic de projectistes curiosos. Redescobrir el càlcul gràfic d'arcs m'ha obert un nou horitzó i m'ha brindat noves amistats, i ha fet que posi el punt i final als meus estudis de grau amb una emoció i un orgull especials. El que vingui a partir d'ara està per escriure, però segur que ho afrontaré amb la mateixa passió i compromís que m'han acompanyat al llarg d'aquests anys d'estudis.

## Agraïments

Aquest treball ha estat possible gràcies a la col·laboració d'algunes persones a qui vull dirigir un sincer agraïment:

- » A en Cesc Aldabó, tutor del treball i professor del Departament d'Estructures de l'ETSAB, que m'ha orientat des de l'inici i ajudat a que el treball s'encaminés beneficiosament
- » A l'Albert Casals, Doctor Arquitecte i amb una reconeguda trajectòria en la intervenció en arquitectura patrimonial, per l'ajuda en la interpretació de l'estat actual del cas d'estudi
- » Molt especialment, a en Josep Maria Genescà, consultor d'estructures i autor de múltiples applets de càlcul gràfic, que amb una enorme generositat m'ha atès i ha compartit amb mi la seva passió per l'estàtica gràfica



## Referències

1. Huerta, Santiago. Arcos, bóvedas y cúpulas. Madrid: Instituto Juan de Herrera, UPM, 2004
2. Serrallonga, Jaume. Geometria i mecànica en els models de Gaudí. Tesi doctoral, ETSAV UPC, 2003
3. Gregory, David. Catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 1697
4. Moseley, Henry. On a new principle in statics, called the principle of least pressure. *Philosophical Magazine*. London: 1833
5. Baquer, Josep. Escales amb volta a la catalana. *L'informatiu del CAATEEB*. 2012
6. Heyman, Jacques. The Stone Skeleton. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
7. Huerta, Santiago. López, Gema. Informe sobre la estabilidad de la iglesia de Guimarei. Madrid: Departamento de Estructuras de Edificación, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, UPM, 1996
8. Genescà, Josep M. Rosell, Joan Ramon. Recomanacions per al reconeixement, la diagnosi i la teràpia d'estructures de fàbrica de maó. Barcelona: ITEC, 1997

## Bibliografia

- » Gerhardt, R. Kurrer, K. Pichler, G. The methods of graphical statics and their relation to the structural form. *Proceedings of the First International Congress on Construction History*, Madrid, 2003
- » Huerta, Santiago. El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí. *Ingenieria Civil*, 129/2003
- » Magdalena, F. El problema del rozamiento en el análisis de estructuras de fábrica mediante modelos de sólidos rígidos. Tesi doctoral, ETSAM, 2013
- » Ochsendorf, J.A. Collapse of Masonry Structures. Tesi doctoral, University of Cambridge, 2002
- » Rankine, J. A manual of applied mechanics. London, 1904
- » Sanz, J. Configuración constructiva y comportamiento mecánico de las cúpulas modernistas de la iglesia de Sant Romà de Lloret de Mar (Girona). 2007
- » Vallejo, J.M, Compendio de matemáticas puras y mistas. Tomo II. Madrid, 1840
- » Varis autors. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Network Journal*- Vol. 8, Cambridge, 2006
- » Varis autors. Mecánica vectorial para ingenieros. Estática. McGraw Hill, 2010