Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 35, núm. 1, 2020. Pàg. 23–56. DOI: 10.2436/20.2002.01.92

La compacitat, una noció seminal en l'evolució de la topologia general (1895–1930)

Júlia Moreno, Mònica Blanco i Pere Pascual

Resum: En aquest article es revisa l'evolució de la definició d'espai topològic compacte des de la primera definició de Fréchet el 1904, que va generalitzar la propietat de Bolzano-Weierstrass, passant per la relació amb el teorema de Borel del 1895 per a recobriments numerables de l'interval $[0,1]$, fins a arribar a la definició general a partir de la propietat de Heine-Borel dels recobriments oberts arbitraris l'any 1929. Centrem l'anàlisi en quatre publicacions clau: les tesis de Borel i de Fréchet, el llibre de Hausdorff en el qual s'estableixen les bases de la topologia general, i la memòria d'Alexandroff i Urysohn.

Paraules clau: història de la topologia, espai compacte, propietat de Heine-Borel, Fréchet, Hausdorff.

Classificació MSC2010: 01-02, 54-03.

1 Introducció

Els espais compactes són els espais més importants de la topologia general. La definició de la compacitat mitjançant recobriments oberts pot semblar poc natural i és lícit preguntar-se quin n'és l'origen. En els seus inicis, la topologia general es proposava estendre alguns dels resultats de la topologia de $\mathbb{R}$ a situacions més generals, com ara als espais de funcions, i entre aquests destacava el teorema de Weierstrass, que assegura l'existència d'extrems per a funcions contínues definides en un interval $[a,b]$. Aquest va ser el punt de partida en la definició d'espai compacte, però quina és la propietat d'un interval $[a,b]$ que dona lloc al teorema de Weierstrass? Quin és el context en el qual la podem expressar?

En aquest article analitzem el sorgiment de la noció d'espai compacte i descrivim, succintament, l'aparició de la topologia general com a nova disciplina de les matemàtiques. Ens centrem en treballs posteriors al 1895, que és quan apareix per primer cop la propietat de Heine-Borel dels recobriments oberts de $[a,b]$, propietat que a la fi serà la que definirà els espais compactes. En anys anteriors s'havia aprofundit en la comprensió del continu real i, amb Georg Cantor (1845–1918), havia començat l'anàlisi de la topologia dels conjunts de punts del continu, orientats majoritàriament a problemes derivats de l'anàlisi (vegeu [28, 34, 35]). A finals del segle XIX, les idees en geometria de Bernhard Riemann (1826–1866) i els treballs sobre conjunts de funcions dels matemàtics italians mostraven la conveniència de disposar d'espais abstractes en els quals tingués sentit analitzar la continuïtat de funcions, la qual cosa abocaria a la definició dels espais mètrics per part de Maurice Fréchet (1878–1973) i dels espais topològics per part de Felix Hausdorff (1868–1942). Com veurem a la subsecció 3.1, l'extensió del teorema de Weierstrass als espais mètrics donarà lloc a la primera definició d'espai compacte. Tant per a Fréchet com per a Hausdorff, la compacitat comportava analitzar configuracions numerables. Acabarem l'anàlisi el 1930, quan els treballs de l'escola russa deslliuren la compacitat de la numerabilitat i determinen l'estabilitat de la (bi)compacitat per productes. Més enllà d'aquesta data, van sorgir dues caracteritzacions més de la compacitat: la caracterització mitjançant xarxes (o successions generalitzades) de Moore-Smith i la dels filtres de Cartan, en els quals no entrarem (vegeu-ne un panorama general a [37]).

Ens hem centrat en quatre moments que, creiem, són els més significatius: la introducció de la propietat dels recobriments oberts per part d'Émile Borel (1871–1956), la definició d'espai mètric i d'espai compacte per part de Fréchet, la definició d'espai topològic de Hausdorff i l'anàlisi que fan de la compacitat, i la definició dels espais bicompactes de Pàvel S. Alexandroff (1896–1982) i Pàvel S. Urysohn (1898–1924), així com del teorema d'Andrei N. Tychonoff (1906–1993). Aquests treballs van ser els més influents en el desenvolupament de la topologia i, d'una manera més concreta, en la noció d'espai compacte; tot i que, lògicament, això representa una simplificació de la complexitat del sorgiment de la nova disciplina, la topologia general, amb contribucions de molts altres matemàtics del moment.

Aquest article deriva del treball de final de grau de la primera autora [31]. El format d'article, necessàriament més reduït, aconsella no analitzar totes les demostracions dels resultats que anirem presentant; tanmateix, n'hem seleccionat algunes que permeten copsar com es van desenvolupar les idees analitzades. Hem procurat mantenir-nos fidels a les demostracions originals, tot i que hem adaptat les notacions per tal de facilitar-ne la lectura.

2 La tesi de Borel

Émile Borel va presentar la tesi doctoral «Sur quelques points de la théorie des fonctions» el 14 de juny del 1894 a la Facultat de Ciències de París i la va publicar l'any següent als *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* [6]. El seu director de tesi va ser Gaston Darboux (1842–1917), i els examinadors, Paul Appell (1855–1930) i Henri Poincaré (1854–1912).

La tesi de Borel està dedicada a la teoria de funcions de variable complexa. En una nota al final del treball, s'enuncia i es demostra per primera vegada la propietat d'existència de subrecobriments finits per a recobriments numerables per intervals oberts d'un interval $[a, b]$. Comencem contextualitzant on necessita Borel la propietat dels recobriments oberts.

2.1 El context de la tesi de Borel

En la introducció de [6] Borel demana:

> Étant données deux fonctions d'une variable complexe, définies, l'une lorsque la variable est dans un certain domaine, l'autre lorsque elle est dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que c'est la même fonction?

> [Donades dues funcions d'una variable complexa, l'una definida quan la variable és en un determinat domini, l'altra quan és en un domini diferent, quan es pot dir que és la mateixa funció?]

Hawkins ([23]) assenyala que l'any 1851 Bernhard Riemann havia plantejat la qüestió de si la classe de les funcions analítiques és la mateixa que la classe de funcions de variable complexa definides per les operacions algebraiques bàsiques, aplicades un nombre finit o infinit de vegades; i que Karl Weierstrass (1815–1897) va analitzar la sèrie

$$f(z) = \sum \frac{1}{z^n + z^{-n}},$$

que representa dues funcions analítiques diferents, l'una per a $|z| < 1$ i l'altra per a $|z| > 1$: la sèrie no és fitada a l'entorn de cap punt de la circumferència $|z| = 1$, per la qual cosa no és possible fer una continuació analítica a través de la circumferència unitat.

Diversos autors van presentar altres exemples de sèries complexes amb un comportament similar al descrit per Weierstrass. Possiblement, el més influent per a Borel va ser el publicat per Poincaré l'any 1883 amb el títol «Sur les fonctions à espaces lacunaires» [36], en el qual estudia les funcions de la forma

$$f(z) = \sum_{n>0} \frac{A_n}{z - a_n},$$

tals que la sèrie $\sum A_n$ és absolutament convergent i els punts a_n formen un conjunt dens d'una corba de Jordan C, sobre la qual li cal imposar determinades restriccions (per fixar idees suposarem que C és la circumferència unitat). La sèrie defineix una funció a l'interior del disc unitat i una altra a l'exterior i, per la densitat del conjunt dels a_n, aquestes dues funcions no es poden connectar per continuació analítica.

Borel reprèn l'estudi d'aquestes sèries i proposa un punt de vista nou ([6, p. 10]):

> j'ai montré qu'il est possible, dans certains cas, de donner du prolongement analytique au delà d'une ligne singulière essentielle fermée une définition qui ne soit contradictoire, ni avec elle même, ni avec les notions antérieures.

> [he provat que és possible, en alguns casos, donar una definició de continuació analítica més enllà d'una corba singular tancada essencial que no entra en contradicció, ni amb ella mateixa, ni amb les nocions anteriors.]

Més concretament, Borel demostra que, imposant la condició que la sèrie $\sum |A_n|^{1/2}$ sigui convergent, existeixen camins γ que uneixen un punt P interior del disc amb un punt Q exterior tals que la sèrie que defineix $f(z)$ és absolutament i uniformement convergent al llarg de γ. En conseqüència, defineix una funció contínua en aquest camí que travessa la circumferència de tall entre els dominis de les dues funcions analítiques.

Indiquem breument les idees de la prova de Borel que conduiran al resultat de la propietat per als recobriments de l'interval $[0,1]$. Donats els punts P, Q, Borel considera la mediatriu de PQ i un segment AB sobre aquesta. Per a cada punt O del segment AB, traça l'arc de la circumferència de centre O que passa per P i per Q, arc que denota per C_O. El camí γ buscat serà un d'aquests arcs.

Sigui O_n el punt O tal que l'arc de la circumferència corresponent passa per a_n. S'obté un subconjunt numerable $\{O_n\}$ del segment AB i, com que un interval és no numerable, hi ha una infinitat de punts O que no pertanyen a $\{O_n\}$; o sigui, hi ha una infinitat d'arcs que no passen per cap dels punts a_n. No tots aquests arcs són vàlids per a establir el resultat que es persegueix; s'ha de veure que entre tots ells se'n pot escollir un en el qual la sèrie definida per $f(z)$ sigui absolutament i uniformement convergent.

Per a l'elecció del camí γ, Borel argumenta de la manera següent: de la convergència de $\sum |A_n|^{1/2}$ dedueix l'existència d'una sèrie convergent de termes positius $\sum u_n$ tal que $\sum |A_n|/u_n$ és convergent. Per la convergència de la sèrie de terme u_n, hi ha un nombre N tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n < \frac{1}{2} d(A,B).$$

Per a $n \geq N$, considerem els subintervals I_n de AB de centre O_n i longitud $2u_n$, de manera que se satisfà

$$\sum_{m=N}^{\infty} \operatorname{long}(I_n) = 2 \sum_{n=N}^{\infty} u_n < d(A,B). \tag{1}$$

D'aquesta desigualtat dedueix que hi ha una infinitat no numerable de punts en el conjunt $AB \setminus (\bigcup_n I_n)$. Si O és un d'aquests punts, Borel demostra que l'arc C_O és el camí γ amb les propietats desitjades. Per inferir l'existència del punt O a partir de la desigualtat anterior, Borel remet, per a una demostració rigorosa, a la nota al final de l'article. En aquesta nota, hi enuncia i demostra el teorema que ens ocupa.

El punt clau rau, doncs, en el pas de la desigualtat (1) a l'existència dels punts O que no pertanyen a cap interval I_n. Borel l'expressa de la manera següent ([6, p. 25–26]):

> La somme de tous les segments (en nombre infini), tels que A_iB_i tous situés sur le segment AB ou sur son prolongement, est inférieure à la longeur ℓ de AB; donc il existe sur AB une infinité non dénombrable de points n'appartenant à aucun de ces segments (^{1}).
>
> [La suma de tots els segments (en nombre infinit) tals que A_iB_i estan situats sobre el segment AB o sobre el seu perllongament és inferior a la longitud ℓ

> de AB; per tant, existeix una infinitat no numerable de punts de AB que no pertany a cap d'aquests segments ([1]).]

A més, afegeix una nota a peu de pàgina que remet a l'apèndix del treball per a una demostració rigorosa, que analitzem a continuació.

2.2 L'apèndix: la primera demostració del teorema

Borel comença la nota final de la tesi precisant el resultat que ha utilitzat per a l'elecció dels punts O aptes per a trobar els camins γ del seu teorema de continuació ([6, p. 50–51]):

> Nous nous sommes appuyés (p. 26) sur ce lemme que, si l'on a une infinité d'intervalles partiels donnés sur une droite, dont la somme est inférieure à un intervalle total également donné, il existe au moins un point de l'intervalle total n'appartenant à aucune des intervalles partiels.
>
> [Ens hem basat (p. 26) en el lema segons el qual, si hi ha una infinitat d'intervals parcials sobre una recta tals que la suma és inferior a un interval total igualment donat, existeix almenys un punt de l'interval total que no pertany a cap dels intervals parcials.]

Conscient de la importància d'aquesta propietat de l'interval, uns paràgrafs més avall assenyala ([6, p. 51]):

> On peut considérer ce lemme à peu près évident; néamoins, à cause de son importance je vais en donner une démonstration reposant sur un théorème intéressant par lui même; il en existe d'autres démonstrations plus simples. Voici ce théorème: Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un nombre limité d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propieté (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux).
>
> [Podem considerar aquest lema com més o menys evident; tot i això, a causa de la seva importància, oferiré una demostració basada en un teorema interessant per si mateix; n'hi ha de més senzilles. Aquest és el teorema: Si tenim en una recta una infinitat d'intervals parcials tals que tot punt de la recta és interior a almenys un dels intervals, es pot determinar efectivament un nombre limitat d'intervals triats entre els donats que compleixen la mateixa propietat (que tot punt de la recta és interior a almenys un d'ells).]

Assenyalem que Borel entén per *recta* un interval tancat $[A, B]$ i per *interval parcial*, un interval que no cobreix el segment predeterminat. A més, quan es refereix a l'*infinit* és l'infinit numerable, mentre que per *nombre limitat* entén un nombre finit.

La demostració que proposa Borel ([6, p. 51–52]) és per inducció transfinita i, en un cert pas, es basa en el teorema de Cantor, segons el qual el conjunt dels ordinals numerables és no numerable. Posteriorment, l'any 1898, el mateix Borel proposaria una demostració més elemental basada en el mètode de bipartició de l'interval [7, p. 42].

Prova del teorema de Borel. Sigui $[A, B]$ el segment predeterminat, i $[A_i, B_i]$, $i \in \mathbb{N}$, els intervals del recobriment. Sigui $[A_{i_1}, B_{i_1}]$ un interval del recobriment que conté A. Seguidament, escollim un interval $[A_{i_2}, B_{i_2}]$ que conté B_{i_1}, i iterem el procés; obtenim una successió d'intervals $[A_{i_1}, B_{i_1}], [A_{i_2}, B_{i_2}], \ldots$

La successió de punts $B_1, B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots$, que és creixent i fitada, tindrà un límit B_{i_ω}, on ω designa el primer ordinal infinit de Cantor; si aquest límit assoleix l'altre extrem, B, aleshores el segment $[A, B]$ està inclòs en un nombre finit d'intervals: en efecte, si B és a l'interior de $[A_{i_\omega}, B_{i_\omega}]$, l'extrem A_{i_ω}, que és del segment $[A, B]$, estarà inclòs en un interval $[A_{i_j}, B_{i_j}]$, per a cert j (aquí és fonamental tenir present que els interiors dels intervals $[A_i, B_i]$ cobreixen $[A, B]$), i aleshores els intervals numerats $i_1, \ldots, i_j, i_\omega$ són suficients per a cobrir $[A, B]$.

En cas contrari, $B_\omega < B$ i, atès que el segment $[A, B_\omega]$ pot cobrir-se per un nombre finit d'intervals, podem recomençar la demostració partint del segment $[B_\omega, B]$ i obtenir una successió de punts $B_{i_{\omega+1}}, B_{i_{\omega+2}}, \ldots$ que convergeix cap a un cert punt $B_{i_{2\omega}}$, de manera que amb un nombre finit d'intervals es cobreix $[B_{i_\omega}, B_{i_{2\omega}}]$. Iterem el procediment tantes vegades com faci falta.

Si no atenyéssim B en un nombre finit d'iteracions, en resultaria una successió d'intervals d'extrems superiors

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_\omega}, B_{i_{2\omega}}, \ldots, B_{i_{\omega^2}}, \ldots B_{i_{\omega^\omega}}, \ldots$$

en la qual apareixen entre els índexs tots els nombres de segona classe definits per Cantor, de manera que el resultat seria una bijecció entre els intervals del recobriment inicial (o una part d'ells) i aquests nombres, cosa que entra en contradicció amb el teorema de Cantor assenyalat anteriorment. □

Aquesta demostració ha estat analitzada per diversos autors [29, 4, 20]. L'article de Hildebrandt, [25], recull les diferents proves que es van donar del teorema fins a l'any 1925.

2.3 Impacte del resultat de Borel

La propietat de subrecobriments finits havia estat utilitzada de manera implícita per altres autors en diferents contextos, com ara en un lema demostrat per Pierre Cousin (1867–1933) en la seva tesi que fa referència a un recobriment d'un domini compacte del pla mitjançant discs oberts [29]. El mèrit de Borel seria haver identificat la propietat de subrecobriment finit dels intervals, com assenyalaria més endavant Henri Lebesgue.

El resultat de Borel es produeix en un moment d'intensa activitat al voltant de les emergents teories de conjunts, de la mesura i de la topologia del continu, amb les quals tenia contacte, fet pel qual va suscitar gran interès. El treball de Cousin que hem esmentat, per posar-ne un exemple, mostrava la necessitat d'estendre el resultat a espais de dimensió superior alhora que invitava a generalitzar-lo a conjunts que no fossin necessàriament intervals, a recobriments donats per conjunts generals i als recobriments no numerables. En aquestes extensions hi van contribuir diversos matemàtics d'arreu, que hi van aportar noves demostracions segons la generalització buscada, com el mateix Borel per a la dimensió superior, Henri Lebesgue (1875–1941) i Arthur Schönflies (1853–1928) per a recobriments no necessàriament numerables, Oswald Veblen (1880–1960), qui va assenyalar que la propietat dels subrecobriments finits per a un conjunt de l'espai és equivalent al fet que sigui tancat i fitat i qui va assenyalar, també, la relació del teorema amb la propietat de Bolzano-Weierstrass, o com W. H. Young (1863–1942), que va proposar altres demostracions [46].

Destacarem les contribucions de Schönflies i de Lebesgue. L'any 1899, Schönflies va escriure l'informe *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* sobre la teoria de conjunts de punts per encàrrec de l'Associació Alemanya de Matemàtics, que es publicaria l'any següent, el 1900. En aquest informe Schönflies associa per primera vegada el teorema de la continuïtat uniforme d'una funció contínua sobre un interval $[a, b]$, demostrat per Eduard Heine (1821–1881) en el seu llibre *Die Elemente der Funktionenlehre* (Els elements de la teoria de funcions), publicat el 1872, i la propietat de subrecobriments finits de Borel, propietat que estén prèviament a recobriments no necessàriament numerables:

> [...] Um ein letztes Beispiel zu geben, beweise ich folgenden Satz Borel's, der einen bekannten Satz von Heine erweitert:
>
> V. Giebt es auf einer Geraden eine unendliche Reihe von Intervallen δ, so dass jeder Punkt des Intervalls $a \dots b$ innerer Punkt mindestens eines Intervalles δ ist, so giebt es auch stets eine endliche Teilmenge solcher Intervalle.
>
> [[...] Com a darrer exemple, demostraré el següent teorema de Borel, que estén un conegut teorema de Heine:
>
> V. Si en una línia recta hi ha una successió infinita d'intervals δ tal que cada punt de l'interval $a \dots b$ és un punt interior a almenys un interval δ, llavors també hi ha un subconjunt finit d'aquests intervals.]

La demostració del teorema de Borel que Schönflies va publicar el 1900 es basa en un raonament de recurrència transfinita similar a l'usat per Borel a la seva tesi estès al cas no numerable. El teorema de la convergència uniforme hauria estat demostrat per P. Lejeune Dirichlet (1805–1859) abans de l'aparició del treball de Heine. A [14] i [29] s'analitzen les proves de Dirichlet i Heine d'aquest resultat, en les quals es raona a partir de la continuïtat local per a obtenir la continuïtat uniforme sobre un interval $[a, b]$; d'aquí ve la citació de Schönflies i l'associació dels noms Heine-Borel per a referir-se a la propietat d'existència de subrecobriments finits, tot i que en els treballs de Dirichlet i Heine no apareixen d'una manera explícita els recobriments.

Henri Lebesgue va estudiar matemàtiques a l'École Normale Supérieure de París entre 1894 i 1897, on va entrar en contacte amb el treball de Borel mentre feia la tesi. Lebesgue va publicar la seva prova de l'extensió a recobriments generals al seu llibre, del 1904, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* [27], i el va enunciar de la manera següent:

> Si l'on a une famille d'intervalles I tels que tout point d'un intervalle (a, b) y compris a et b, soit intérieur à l'un au moins des I, il existe une famille formée d'un nombre fini des intervalles I et qui jouit de la même propieté (tout point (a, b) est intérieur à l'un d'eux).
>
> [Si tenim una família d'intervals I tals que qualsevol punt de l'interval (a, b), incloent-hi a i b, és interior a almenys un dels de I, llavors existeix una família formada per un nombre finit dels intervals de I que tenen la mateixa propietat (tot punt de (a, b) és interior a un d'ells).]

La demostració de Lebesgue es basa en la propietat del suprem dels conjunts fitats. Aquesta és la prova adoptada posteriorment en molts textos docents, com per exemple a [32].

Arran de la generalització de Lebesgue, es va popularitzar el nom de *teorema de Borel-Lebesgue* entre els matemàtics francesos, mentre que, mitjançant els treballs de Schönflies i Young, es va adoptar el nom de *teorema de Heine-Borel* entre la comunitat anglosaxona per a referir-se al mateix resultat. Tot plegat va produir certa polèmica, no només pel nom, sinó també sobre l'autoria del teorema generalitzat. Pierre Dugac ([14]) ha analitzat aquesta polèmica a través, sobretot, de l'anàlisi de l'arxiu de Borel i, en especial, de les cartes de Lebesgue a Borel (Lebesgue no va conservar les cartes de Borel, per la qual cosa la informació és parcial). En una d'aquestes cartes, d'agost del 1904, Lebesgue assenyala com va arribar a l'extensió del teorema de Borel ([14, p. 102]):

> Pour ma part je n'ai compris qu'il y avait là matière à énoncer qu'après avoir vu, dans la suite, votre thèse. Alors naturellement j'ai remplacé votre démonstration par la mienne, sans m'apercevoir qu'il y avait changement de l'énoncé. Par la suite je n'ai plus jamais repensé à votre énoncé et à votre démonstration de sorte que, quand j'ai appliqué le théorème, je n'ai pas été arrêté par les difficultés qui proviendraient du dénombrable. C'est Montel [...] qui m'a indiqué la différence entre les énoncés, laquelle m'avait tout à fait échappé bien qu'elle soit fondamentale en un certain sens.
>
> [Per la meva part, no vaig entendre que hi hagués res a enunciar fins que, més endavant, vaig llegir la vostra tesi. De forma natural vaig reemplaçar la vostra demostració per la meva, sense adonar-me que hi havia un canvi d'enunciat. En endavant no vaig tornar a pensar més ni en la vostra demostració ni en el vostre resultat, de manera que, quan vaig aplicar el teorema, no vaig trobar que les dificultats que poguessin provenir de la numerabilitat fossin un impediment. Va ser Montel [...] qui em va assenyalar la diferència entre els enunciats, la qual m'havia passat desapercebuda tot i ser fonamental en cert sentit.]

En una altra carta, de gener del 1907 ([14, p. 104]), assenyala respecte a les reivindicacions de Schönflies ([38]) que és just atorgar-li un paper rellevant en l'extensió no numerable:

> La réclamation de Schönflies est bien fondée. D'après vos démonstrations, il n'était prouvé que pour le dénombrable, explicitement du moins, et les seules applications que vous en avez faites sont relatives au fond à ceci: démontrer que certains points existent. C'est a Schönflies que revient le mérite d'avoir

> montré tout le parti que l'on pouvait tirer dans la théorie des fonctions de vôtre théorème, étendu au non dénombrable, en mettant, à l'ocassion de la démonstration de Heine, ce fait en évidance qu'il permet d'étendre à un intervalle (et aussi bien évidemment à un ensemble fermé) des proprietés vrais autour des points de cet intervalle.
>
> [La reclamació de Schönflies està ben fonamentada. Segons les vostres demostracions, només estava provat el cas numerable, si més no explícitament, i les úniques aplicacions que n'havíeu fet es redueixen a aquest cas: demostrar l'existència de certs punts. És a Schönflies que hem de donar el mèrit d'haver mostrat l'avantatge que es pot treure en la teoria de funcions del vostre teorema, estès al cas no numerable, posant en evidència, amb motiu de la demostració de Heine, el fet que permet estendre a un interval (i també evidentment a un conjunt tancat) propietats vàlides entorn dels punts d'aquest interval.]

Segons cita Dugac, Lebesgue considerava que no es podia atribuir cap tipus de mèrit a Heine respecte del teorema de Borel, ja que Heine no tenia la noció de recobriment i no treballava ni amb conjunts ni amb col·leccions infinites de punts. El mèrit principal de Borel seria haver enunciat el teorema aïllant la noció de recobriment i la importància d'extreure'n un subrecobriment finit, i haver aplicat després aquest fet per a desenvolupar una teoria de la mesura.

Més enllà del nom que li atorguem, el que cal destacar és el paper fonamental que va anar adquirint el teorema tant en les seves aplicacions com en el desenvolupament de la noció de compacitat en situacions abstractes.

3 Els espais abstractes de Fréchet

Pel tombant del segle XX, la definició de funció y de variable x quan a tot valor numèric de x li correspon un valor determinat de y estava ben establerta, així com l'anàlisi de les propietats de continuïtat i derivabilitat d'aquestes funcions. Els treballs pioners dels anys 1880 de Vito Volterra (1860–1940), Giulio Ascoli (1843–1896) i Cesare Arzelà (1847–1912) analitzaven funcions que depenien d'una corba variable, la gràfica d'una funció, i suggerien l'estudi més sistemàtic de les propietats d'aquestes *funcions de funcions*, com va assenyalar J. Hadamard (1865–1963) en la intervenció al Primer Congrés Internacional de Matemàtics del 1897 [19]:

> Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de fonctions.
>
> [No em sembla pas inútil assenyalar l'interès que hi hauria a estudiar els conjunts compostos de funcions.]

Hadamard remarca la importància que tindria aquest estudi en la teoria d'equacions en derivades parcials, ja que permetria donar arguments sòlids als raonaments coneguts a l'època segons els quals la definició d'*integral* d'aquestes equacions es reduïa a qüestions de mínims. Aquestes qüestions estan relacionades amb la natura del domini, així com de la funció que s'analitza.

Maurice Fréchet es va proposar establir una teoria abstracta que permetés l'anàlisi de la continuïtat en situacions generals i que contingués els casos estudiats pels autors italians. Hadamard havia estat mentor de Fréchet des que aquest era jove i va dirigir la seva tesi, per la qual cosa és raonable pensar que l'origen dels treballs de Fréchet deriva de la influència del seu mentor, alhora que el focus inicial del seu treball és la caracterització d'espais generals sobre els quals les funcions contínues atenyen un valor màxim.

El treball més rellevant de Fréchet és la seva tesi doctoral, «Sur quelques points du calcul fonctionnel» («Sobre alguns aspectes del càlcul funcional»), publicada l'any 1906 [16]. Abans, però, publica algunes notes que contenen la gènesi de les idees que desenvoluparà a la seva tesi. En particular, ens referim a l'article titulat «Généralisation d'un théorème de Weierstrass» («Generalització d'un teorema de Weierstrass»), publicada el 1904 a *Comptes Rendus* [15], on apareix per primera vegada la noció de compacte.

3.1 Generalització del teorema de Weierstrass

Al primer paràgraf de [15], Fréchet escriu:

> On sait l'importance qu'il y aurait, dans un grand nombre de problèmes, à savoir si une quantité U dépendant de certains éléments (points, fonctions, etc.) atteint effectivement un minimum dans le champ consideré. Le principe de Dirichlet offre des justifications les plus frappantes de cette remarque.
>
> [Sabem la importància que tindria, en un gran nombre de problemes, saber si una quantitat U que depèn de certs elements (punts, funcions, etc.) assoleix efectivament un mínim en el camp considerat. El principi de Dirichlet ofereix les justificacions més impressionants d'aquesta observació.]

Fréchet es planteja donar una versió general del teorema de Weierstrass, segons el qual les funcions contínues en un interval $[a, b]$ tenen màxim i mínim sobre aquest interval, de manera que sigui aplicable a conjunts de punts «de naturalesa qualsevol» (nombres, superfícies, etc.). El concepte sobre el qual basarà la continuïtat d'una funció serà el de límit d'una successió. En lloc d'analitzar conjunts amb una definició de límit ben determinada, com seria el cas de la convergència puntual o de la convergència uniforme en espais de funcions, Fréchet proposa una teoria abstracta buscant les condicions comunes de les definicions particulars de límit, en la línia del que havien fet recentment De Séguier per a la definició de grup abstracte o Borel en la definició d'una teoria de la mesura general [16]. La nota, de només dues pàgines, no conté demostracions, que apareixerien poc després a la seva tesi.

Fréchet introdueix la *classe* ($\mathcal{L}$) de conjunts en els quals imposa que es pugui determinar quan dos elements són diferents i on hi ha una noció, no especificada, de límit: donada una successió $A_1, A_2, \dots$ és possible determinar si existeix o no un límit B, que satisfaci les dues condicions següents:

(1) Si la successió $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ té un límit A, tota subsuccessió $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_n}, \ldots$ té el mateix límit A.
(2) Si la successió $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ és constant de valor A, aleshores té com a límit A.

Seguint Cantor, Fréchet defineix el *conjunt derivat* d'un subconjunt E d'una classe $(\mathcal{L})$ com el conjunt dels seus punts límit, i defineix *conjunt tancat* com aquell que conté el seu derivat. És clar, llavors, com cal definir la continuïtat d'una funció (*operació funcional*, en la terminologia de Fréchet) sobre un conjunt tancat.

Fréchet defineix *conjunt compacte* extrapolant la propietat dels conjunts fitats de la recta real que li permetrà enunciar l'extensió del teorema de Weierstrass:

> Enfin nous appellerons ensemble compact tout ensemble E tel qu'il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ contenus dans E, lorsque ceux ci (possédant au moins un élément chacun) sont fermés et chacun contenu dans le précédent.
>
> [Finalment, anomenarem *conjunt compacte* tot conjunt E tal que existeix sempre un element en comú en qualsevol successió infinita de conjunts $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ continguts en E tals que (tenint almenys un element cadascun) són tancats i cadascun d'ells està contingut en l'anterior.]

Observem que els conjunts compactes així definits no són necessàriament tancats; els punts de la intersecció no cal que pertanyin a E. Fréchet entenia aquesta definició com una generalització dels conjunts fitats de la recta real. Finalment, enuncia la generalització del teorema de Weierstrass ([15, p. 849]):

> THÉORÈME. *Toute opération fonctionelle U_A uniforme et continue dans un ensemble compact et fermé E: 1. Est bornée dans E; 2. Atteint au moins une fois sa limite supérieure.*
>
> [TEOREMA. *Qualsevol operació funcional U_A uniforme i contínua en un conjunt compacte i tancat E: 1. Està fitada en E; 2. Assoleix almenys una vegada el seu límit superior.*]

De fet, Fréchet anomena *extremal* tot conjunt compacte i tancat. La nota també inclou la caracterització de la compacitat per la propietat que avui en diem de Bolzano-Weierstrass:

> La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit compact est que tout ensemble E_1 formé d'une infinité d'éléments distincts contenus dans E donne lieu à un élément-limite au moins.
>
> [La condició necessària i suficient perquè un conjunt E sigui compacte és que tot conjunt E_1 format per una infinitat d'elements diferents continguts en E doni lloc a almenys un element límit.]

que, en la tesi, que comentarem tot seguit, va adoptar com a definició de *conjunt compacte*.

3.2 La tesi de Fréchet

La tesi de Fréchet ([16]) és el seu treball més rellevant en el context de la naixent topologia d'espais generals. Consta de dues parts: la primera està dedicada a la teoria general, en la qual amplia l'estudi de les classes ($\mathcal{L}$) amb noves classes ($\mathcal{V}$) i ($\mathcal{E}$) i demostra l'extensió del teorema de Weierstrass per a aplicacions contínues en compactes tancats entre d'altres resultats; i la segona està dedicada a l'aplicació de la teoria desenvolupada a diversos exemples, com ara la compacitat en espais de funcions contínues o a l'espai de dimensió infinita numerable, introduït aquí per primer cop. En aquesta anàlisi de la tesi de Fréchet, ens centrarem en la relació que estableix entre la compacitat i la propietat de recobriments de Borel.

Després de presentar la categoria ($\mathcal{L}$) i analitzar algunes de les seves propietats, Fréchet observa, al capítol II, que el conjunt derivat d'un conjunt no és necessàriament tancat, propietat que apareix en molts dels exemples que havia analitzat. Fréchet dona un exemple de successió de funcions reals $f_n(x)$ convergent a una funció $f(x)$ i que al seu torn són límit de successions $\lim_p f_n^{(p)}(x) = f_n(x)$, de manera que no existeixen subsuccessions p_i, n_i amb $\lim_i f_{n_i}^{(p_i)}(x) = f(x)$ per a tot x. Taylor ([39, p. 247]) esmenta una carta de Hadamard a Fréchet en la qual comenta aquest exemple:

> On pourra prendre f_n aussi voisin qu'on voudra de f, puis $f_n^{(p)}$ aussi voissin qu'on voudra de f_n, etc. Le raisonnement s'étendra, quell que soit la signification des $f_n^{(p)}$, du moment que la notion de voisinage peut être définie, puisque cette notion est la seule sur laquelle il repose.

> [Es pot prendre f_n tan a prop com es vulgui de f, després $f_n^{(p)}$ tan a prop com es vulgui de f_n, etc. El raonament s'estendrà, independentment del significat de les $f_n^{(p)}$, sempre que la noció d'entorn pugui definir-se, perquè aquesta noció és l'única sobre la qual reposa.]

Al capítol II [16, p. 18], Fréchet proposa una caracterització d'*entorn* que li permetrà seguir el raonament de Hadamard i aconseguir que els conjunts derivats siguin tancats introduint la classe ($\mathcal{V}$), de *voisinage* en francès:

> Considérons une classe ($\mathcal{V}$) d'éléments de nature quelconque [...] et tels que, de plus, qu'à deux quelconques d'entre eux A, B, on puisse faire correspondre un nombre $(A, B) = (B, A) \geq 0$ qui jouit des deux propriétés suivantes: 1. La condition nécessaire et suffisante pour que (A, B) soit nul est que A et B soient identiques. 2. Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que les inégalités $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C.

> [Considerem una classe ($\mathcal{V}$) d'elements de naturalesa arbitrària [...] i tals que, a més, a qualsevol parell A, B, se li pugui assignar un nombre $(A, B) = (B, A) \geq 0$ que satisfà les propietats següents: 1. La condició necessària i suficient perquè (A, B) sigui nul és que A i B siguin idèntics. 2. Existeix una funció positiva ben determinada $f(\varepsilon)$ que tendeix a zero amb ε tal que les desigualtats $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ impliquen que $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, per a qualssevol A, B, C.]

Donada una successió $A_1, A_2, \ldots$ en una classe $(\mathcal{V})$, defineix el *límit* com aquell element A de la classe tal que (A_n, A) tendeix a zero com $1/n$. És clar que tota classe $(\mathcal{V})$ és una classe $(\mathcal{L})$, amb l'avantatge ara que els límits són únics i que el conjunt derivat d'un conjunt és un tancat. Fréchet estén el teorema de Borel als espais de classe $(\mathcal{V})$ ([16, p. 22]):

36. THÉORÈME. *Soit E un ensemble extrémal formé d'éléments d'une classe $(\mathcal{V})$. S'il existe une suite indéfinie G d'ensembles $I_1, I_2, \ldots$ telle que tout élément de E soit intérieur au sens étroit à l'un au moins de ces ensembles I_n, on peut extraire de G un nombre fini des ces ensembles formant une famille H jouissant de la même propriété que G.*

[36. TEOREMA. *Sigui E un conjunt extremal format per elements d'una classe $(\mathcal{V})$. Si existeix una successió infinita G de conjunts $I_1, I_2, \ldots$ tal que tot element de E és interior a almenys un d'aquests conjunts I_n, es pot extreure de G un nombre finit d'aquests conjunts que formen una família H que satisfà la mateixa propietat que G.*]

PROVA. Si suposem que el resultat no és cert, aleshores existeix $A_1 \in E$ que no és interior a I_1. Sigui I_{q_1} el primer conjunt de la successió G que conté A_1 $(q_1 > 1)$. Existeix $A_2 \in E$ tal que $A_2 \notin I_1 \cup \cdots \cup I_{q_1}$; sigui I_{q_2} el primer conjunt de G amb $A_2 \in I_{q_2}$. Es forma així una successió d'elements de E, diferents entre ells,

$$A_1, A_2, \ldots, A_r \notin \operatorname{Int}(I_1 \cup \cdots \cup I_{q_r}).$$

Com que E és extremal, aquesta successió té un element límit, $A = \lim A_{n_p} \in E$, que serà interior a un dels conjunts de G, I_k. Se segueix la impossibilitat que existeixi una successió parcial de punts de $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ que no siguin a l'interior de I_k: si existís una parcial $A'_{n_1}, A'_{n_2}, \ldots$ amb els $A'_{n_p} \notin \operatorname{Int}(I_k)$, aleshores podríem definir una successió $B_1, B_2, \ldots$ amb

$$B_p = \begin{cases} A'_{n_p} & \text{si } A_{n_p} \notin I_k, \\ \widetilde{B_p} & \text{altrament,} \end{cases}$$

on $\widetilde{B_p}$ és un punt qualsevol de $E \setminus I_k$ tal que $(\widetilde{B_p}, A_{n_p}) < \frac{1}{p}$; en canvi, A seria un punt límit, la qual cosa és impossible.

En definitiva, els elements de la successió $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ són tots interiors a I_k a partir d'un cert rang, fet que es contradiu amb l'elecció de la successió $A_1, A_2, \ldots$ □

En una nota a peu de la pàgina 22, Fréchet remarca que més endavant estendrà el resultat per a recobriments no necessàriament numerables. Per fer-ho, Fréchet introdueix dues propietats que haurà d'imposar als espais que considera: que satisfacin les condicions de Cauchy (és a dir, que siguin complets, en la terminologia que després introduiria Hausdorff) i que siguin separables (és a dir, que continguin un conjunt numerable dens). A una classe $(\mathcal{V})$ que satisfà aquestes dues propietats l'anomena *normal*.

Finalment, Fréchet enuncia i demostra l'equivalència entra la noció de conjunt extremal i la propietat de Heine-Borel general:

THÉORÈME. *Soit* E *un ensemble d'éléments d'une classe normale* $(\mathcal{V})$. *Pour que de toute famille* H dénombrable ou non *d'ensembles* I *tels que tout élément de* E *soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux, on puisse extraire un nombre fini d'ensembles* $I\cdot$ *formant une famille* G *jouissant de la même propriété que* H, *il faut et il suffit que* E *soit extrémal.*

[TEOREMA. *Sigui* E *un conjunt d'elements d'una classe normal* $(\mathcal{V})$. *Per tal que de tota família* H numerable o no *de conjunts* I *tals que tot element de* E *és interior almenys a un d'ells, es pugui extraure un nombre finit de conjunts* $I\cdot$ *que formin una família* G *la qual satisfaci la mateixa propietat que* H, *és necessari i suficient que* E *sigui extremal.*]

Fréchet acaba la primera part de la tesi introduint una nova classe, la classe $(\mathcal{E})$, la qual més endavant Hausdorff anomenaria d'*espais mètrics*. La lletra $\mathcal{E}$ per a designar aquesta classe prové de la paraula francesa *écart*, 'distància', que havia emprat Camille Jordan al seu *Cours d'analyse*, publicat el 1893.

Una classe $(\mathcal{E})$ és un cas particular de classe d'entorn $(\mathcal{V})$ en el qual $f(\varepsilon) = 2\varepsilon$ i, per tant, la darrera condició esdevé la desigualtat triangular:

1. $(A, B) = (B, A) > 0$ si A és diferent de B.
2. $(A, B) = (B, A) = 0$ si, i només si, $A = B$.
3. Donats tres elements A, B i C, sempre es compleix $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$.

Fréchet necessita restringir-se a aquesta classe per a obtenir el resultat que justifica la denominació *extremal* per als conjunts que són compactes i tancats i que culmina la primera part de la tesi ([16, p. 31]):

51. THÉORÈME. *La condition necéssaire et suffisante pour que toute opération continue dans un ensemble* E *d'éléments d'une classe* $(\mathcal{E})$, 1° *soit bornée dans cet ensemble,* 2° *y atteigne sa limite supérieure, est que cet ensemble soit extrémal.*

[51. TEOREMA. *La condició necessària i suficient perquè tota operació contínua en un conjunt* E *d'elements d'una classe* $(\mathcal{E})$, *1r sigui fitada en aquest conjunt, i 2n atenyi el límit superior, és que aquest conjunt sigui extremal.*]

Fréchet va conjecturar que el resultat anterior era cert, més generalment, per a la classe $(\mathcal{V})$. Comenta al llibre *Les espaces abstraits*, escrit i publicat anys més tard, el 1928 ([17, p. 219]):

[...] l'auteur était peu à peu amené [...] qu'au point de vue topologique, il ne devait y avoir aucune différence essentielle entre les espaces $(\mathcal{D})$ et ceux qu'il avait alors appelés espaces $(\mathcal{V})$.

[[...] l'autor es va convèncer a poc a poc [...] que, des del punt de vista topològic, no hi havia d'haver cap diferència essencial entre els *espais* $(\mathcal{D})$ i els que havia anomenat *espais* $(\mathcal{V})$.]

En aquesta citació denota amb $(\mathcal{D})$ el que anteriorment havia denotat amb $(\mathcal{E})$, és a dir, els espais mètrics. E. W. Chittenden (1896–1977) va provar, en un article publicat l'any 1917, que sobre un espai $(\mathcal{V})$ es pot definir una distància que el converteix en un espai $(\mathcal{E})$ que, en la terminologia actual, defineix la mateixa topologia.

3.3 Altres comentaris al voltant del treball de Fréchet

Després de la tesi, Fréchet va seguir treballant en diferents aspectes de la teoria d'espais abstractes [17]. La tesi de Fréchet va obrir un camp nou que seguirien treballs de diversos matemàtics d'arreu, ja sigui fent noves propostes de definició d'espais abstractes, com ara la duta a terme per F. Riesz (1880–1956) que prenia com a noció bàsica la de punt de condensació, o profunditzant en l'anàlisi de les propietats dels espais $(\mathcal{V})$. Això canviaria substancialment amb l'aparició de l'obra de Hausdorff que comentarem a la propera secció, tot i que durant uns quants anys van conviure ambdues propostes.

Segons explica Taylor [39, p. 287], la filla de Fréchet li hauria comentat que aquest considerava que el grup Bourbaki no li havia reconegut adequadament el seu paper en el desenvolupament de la topologia. En l'apunt històric adjunt al capítol de topologia, Bourbaki es refereix a Fréchet de la manera següent ([8, p. I–125–126]):

> Les premières tentatives pour dégager ce qu'il y a de commun aux propriétés des ensembles de points et des fonctions (sans intervention d'une notion de «distance») furent faites par Fréchet et Riesz; mais le premier partant de la notion de limite dénombrable, ne réussit pas à construire, pour les espaces non métrisables, un système d'axiomes commode et fécond; du moins reconnuit-il la parenté entre le principe de Bolzano-Weierstrass et le théorème de Borel-Lebesgue; c'est à ce propos qu'il introduisit le mot «compact», bien que dans un sense quelque peu différent de celui qu'on lui donne dans ce traité.

> [Els primers intents per extreure allò que tenen en comú les propietats dels conjunts de punts i de funcions (sense la intervenció d'una noció de distància) van ser fets per Fréchet i Riesz; però el primer, que partia de la noció de límit numerable, no va reexir a construir, per als espais no metritzables, un sistema d'axiomes còmode i fecund; almenys va reconèixer el parentiu entre el principi de Bolzano-Weierstrass i el teorema de Borel-Lebesgue; va ser en relació amb això que va introduir la paraula *compacte*, tot i que usant-la en un sentit lleugerament diferent del que se li dona en aquest tractat.]

Anys més tard, J. Dieudonné (1906–1992), destacat membre del grup Bourbaki, faria en el llibre *History of Functional Analysis* [13, p. 117], un comentari més elogiós de les aportacions de Fréchet relatives a les aplicacions a l'anàlisi funcional:

> The greatest merit of Fréchet lies in the emphasis he put on three notions which were to play a fundamental part in all later developments of Functional Analysis: compactness, completeness and separability.

> [El mèrit més important de Fréchet rau en l'èmfasi que va donar a tres nocions que van tenir un paper fonamental en tots els desenvolupaments posteriors de l'anàlisi funcional: compacitat, completesa i separabilitat.]

En la propera secció estudiarem les aportacions de Hausdorff a l'anàlisi d'espais més generals, referint-nos especialment als conjunts compactes i comparant-los amb els resultats de Fréchet.

4 Els compactes als *Grundzüge der Mengenlehre* de Hausdorff

L'any 1914 Felix Hausdorff va publicar el llibre *Grundzüge der Mengenlehre* (Fonaments de la teoria de conjunts). Aquest text va esdevenir una obra emblemàtica de les matemàtiques del segle XX, tant per les seves aportacions originals com per l'organització i desenvolupament de les nocions i teoremes que presentava. Hausdorff va publicar els *Grundzüge* mentre era professor a la Universitat de Greifswald i, com assenyala a la introducció, el va dissenyar com a manual per als estudiants de matemàtiques avançades.

El llibre està dividit en deu capítols. Als sis primers Hausdorff presenta la teoria de conjunts de Cantor de forma sistemàtica, incloent-hi els resultats de les seves investigacions. Els capítols 7–9 versen sobre la teoria de conjunts de punts, el que avui anomenem *topologia general*, mentre que el desè i últim tracta qüestions relacionades amb els treballs de Borel i Lebesgue sobre els conjunts mesurables. Abans d'analitzar l'aparició dels espais compactes a l'obra de Hausdorff, assenyalem que anys més tard, el 1927, Hausdorff va publicar una nova edició dels *Grundzüge* en què reescrigué completament algunes parts del text original, abandonant, en part, la teoria general d'espais topològics i centrant-se en els espais mètrics. Nosaltres analitzarem l'edició original del 1914, tot i que destaquem que la segona edició és un text de fàcil lectura i una mostra del mestratge de Hausdorff en l'exposició de la teoria de conjunts i la topologia (la versió anglesa, basada en la tercera edició, va ser publicada per Chelsea [22]).

4.1 Els espais topològics als *Grundzüge*

En els capítols intermedis 7–9 de la seva obra, Hausdorff defineix el concepte d'espai topològic i n'analitza algunes de les propietats; aquests capítols serien, segurament, els de més impacte dels *Grundzüge* en el desenvolupament de la matemàtica del segle XX. Hausdorff proposa una definició d'*espai topològic* a partir de la noció d'entorn, uns entorns donats axiomàticament i que difereixen de (de fet, generalitzen) la idea d'espais $(\mathcal{V})$ de Fréchet. Diversos autors han assenyalat que Hausdorff s'inspira en les idees de Riemann, de David Hilbert (1862–1943) i de Hermann Weyl (1885–1955). Arboleda ([5]) cita l'article de Hilbert [24] en el qual proposa considerar el pla com un espai abstracte constituït per punts en què a cada punt s'associa una família d'entorns amb la intenció de caracteritzar la continuïtat com una propietat local del pla. Weyl fa un pas més per remarcar la rellevància dels entorns en el seu llibre sobre les superfícies de Riemann [44]. A la pàgina 14 es llegeix:

> Der Begriff der «zweidimensionalen Mannigfaltigkeit» oder der «Fläche» soll fur uns also nicht an die Idee des Raumpunktes geknüpft sein, sondern eine viel allgemeinere abstrakte Bedeutung erhalten. Wenn überhaupt irgendeine Gesamtheit von Dingen (die die Rolle der «Punkte» übernehmen werden) gegeben ist und definitionsgemäss zwischen ihnen ein ähnlicher kontinuierlicher Zusammenhang besteht wie zwischen den Punkten einer Ebene, so sprechen wir von einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Da sich aber alle Kontinuitätsbegriffe auf den einen der Umbegung zurückführen lessen, so gehört zur Erklärung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit zweierlei:
>
> 1. Angabe derjenigen Dinge, welche als «Punkte» der Mannigfaltigkeit gelten sollen;
> 2. eine Erklärung des Begriffes der «Umgebung».
>
> [Per a nosaltres, el concepte de varietat de dimensió dos o superfície no hauria d'anar lligat a la idea de punt de l'espai sino que hauria de tenir un significat abstracte més general. Si hi ha algun conjunt de coses (que prenen el paper de «punts») i, com a resultat de les definicions que les determinen, hi ha una connexió contínua entre elles similar a la que hi ha entre els punts d'un pla, parlem de varietat bidimensional. Tots els conceptes relatius a la continuïtat poden reduir-se al d'entorn; per això, la descripció d'una varietat de dimensió dos requereix:
>
> 1. L'especificació dels objectes, que seran considerats com a punts de la varietat;
> 2. una explicació del concepte d'entorn.]

Weyl se centra en aquelles varietats amb entorns homeomorfs a un disc del pla euclidià, per fixar les bases per a l'actual definició de *varietat topològica* o *diferencial*. Arboleda ([5]) remarca que en unes notes manuscrites no publicades de l'any 1912, Hausdorff havia analitzat les propietats dels entorns esfèrics dels espais mètrics (de les *boles*, en diríem ara), anàlisi que anticiparia la definició dos anys més tard d'*espai topològic* ([21, p. 213]):

> Unter einem topologischen Raum verstehen wir eine Menge E, worin den Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen, und zwar nach Massgabe der folgenden Umgebungsaxiome:
>
> (a) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x.
>
> (b) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung W_x die Teilmenge von beiden ist.
>
> (c) Liegt der Punkt y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist.
>
> (d) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt.

[Per *espai topològic* ens referim a un conjunt E, en el qual als seus elements (que són punts) x se'ls assigna determinats subconjunts U_x, que reben el nom d'*entorns* de x i que han de complir:

(a) A cada punt x li correspon almenys un entorn U_x; tot entorn U_x conté el punt x.

(b) Si U_x i V_x són dos entorns del mateix punt x, llavors hi ha un entorn W_x que és un subconjunt dels dos.

(c) Si el punt y està a U_x, llavors existeix un entorn U_y, que és un subconjunt de U_x.

(d) Per a dos punts diferents x i y hi ha dos entorns U_x i U_y amb intersecció buida.]

Aquesta definició no es correspon exactament amb la definició d'*espai topològic* que presentem a les facultats. Hi ha dues diferències que cal tenir presents: la primera és que, segons l'axioma (c), els entorns són oberts. Això fa que, per exemple, si E és un conjunt amb més d'un punt i, per a qualsevol $x \in E$, només hi ha un únic entorn $U_x = \{x\}$ que conté x, s'obté una família de subconjunts de E que satisfà tots els axiomes i, per tant, defineixen una topologia, mentre que el mateix E no és entorn de cap dels seus punts. Hausdorff està definint, de fet, una *base d'entorns*. La segona diferència correspon a l'axioma (d), que no s'imposa en general i que ha donat nom als *espais de Hausdorff* com aquells que el satisfan.

A partir d'aquesta definició d'*espai topològic*, Hausdorff va desenvolupar conceptes bàsics, com ara el de punt interior, el de punt frontera i el d'obert de l'espai, i va demostrar que la unió arbitrària d'oberts és un obert i la intersecció finita d'oberts és un obert. Hausdorff defineix els punts d'acumulació (els anomena *punts* β) d'un subconjunt A com aquells punts tals que qualsevol dels seus entorns conté infinits punts de A, definició que coincideix amb la de *punt límit* donada per Cantor per als conjunts de punts del continu real, i demostra que un conjunt és tancat si conté tots els seus punts d'acumulació, així com les propietats d'unió i intersecció dels tancats. En la secció 5 del capítol 7, Hausdorff hi introdueix els espais compactes que comentarem a continuació. Abans, però, esmentem que Hausdorff també estudia molts altres aspectes de forma original, com ara la *connexió*, o que al capítol 8 analitza diferents espais topològics, on introdueix els axiomes de numerabilitat i els espais mètrics, i on estudia la topologia de l'espai euclidià ordinari, mentre que el capítol 9 està dedicat a la continuïtat.

4.2 Els espais compactes als *Grundzüge*

Hausdorff va adoptar la definició de *conjunt compacte* de Fréchet. Si A és un conjunt d'un espai topològic X i $x \in X$, anomena x *β-punt d'acumulació* de A si, per a tot entorn U de x, la intersecció $U \cap A$ conté infinits punts, i diu que A és *divergent* si no té punts d'acumulació ([21, p. 230]). Per comoditat, ens referirem als β-punts d'acumulació simplement com a *punts d'acumulació*, cosa que és consistent amb la definició usual si tenim present que en els espais de Hausdorff els punts d'acumulació en el sentit actual són β-punts d'acumulació ([21, teorema 17.9]). Amb aquestes premisses, Hausdorff defineix *conjunt compacte*:

> Eine Menge ohne divergente Teilmenge nennen wir (nach M. Fréchet) kompakt; dazu rechnen wir natürlich auch die endlichen Mengen inkl der Nullmenge. Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge A hat also mindestens einen (nicht notwendig zu A gehörigen) Häufungspunkt.
>
> [Anomenarem compacte (segons Fréchet) un conjunt sense cap subconjunt divergent; no cal dir que també comptem les quantitats finites incloent-hi el conjunt buit. Cada subconjunt infinit d'un conjunt compacte A té, per tant, almenys un punt d'acumulació (que no necessàriament pertany a A).]

Com Fréchet, Hausdorff tampoc suposa que un conjunt compacte sigui tancat; comenta, a peu de pàgina, que Fréchet anomena *extremals* els conjunts compactes i tancats perquè les funcions contínues definides sobre ells són fitades i assoleixen els seus extrems, cosa que demostrarà al capítol IX, dedicat a la continuïtat, en el context dels espais topològics.

En aquesta secció Hausdorff demostra quatre teoremes, dels quals comentem els tres primers i les demostracions que en va fer. En el quart, caracteritza els compactes a partir de les dues nocions de punt d'acumulació a què ens hem referit més amunt, ja sigui com a β-punt d'acumulació o en el sentit del terme en l'actualitat.

> I. (Durchschnittssatz von Cantor). Eine absteigende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ kompakter, abgeschlossener, von Null verschiedener Mengen hat einen von Null verschiedenen Durchschnitt.
>
> [I. (Teorema de la intersecció de Cantor). Una successió descendent de conjunts $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ compactes, tancats i no buits té intersecció no buida.]

Prova. Escollim un punt a_n de cada conjunt A_n; denotem amb $B_n \subseteq A_n$ el conjunt format pels punts $a_n, a_{n+1}, \ldots$

Si B_1 és finit, hi haurà un punt a tal que $a_n = a$ per a infinits índexs. Així, $a \in A_n$ per a tot $n \geq 0$ i, en conseqüència, $D = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \neq \emptyset$.

Si B_1 és infinit, B_1 admet un punt d'acumulació a, ja que A_1 és compacte; a també és punt d'acumulació de B_n, per a tot n, i, per tant, també de A_n. Com que els A_n són tancats, a pertany a A_n i també a D. □

> II. (Satz von Borel). Ist eine kompakte abgeschlossene Menge in der Summe einer Folge von Gebieten enthalten, so ist sie bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieser Folge enthalten.
>
> [II. (Teorema de Borel). Un conjunt compacte i tancat que està contingut en la unió d'una successió de conjunts oberts, també ho estarà en una subfamília finita d'aquest mateix conjunt d'oberts.]

PROVA. Sigui A un compacte de l'espai topològic E i $G_1, G_2, \dots$ un recobriment obert de A,

$$A \subseteq S = (G_1 \cup G_2 \cup \cdots).$$

Volem demostrar que existeix un n a partir del qual es compleix $A \subseteq S_n = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$. Posem que $B_n = A \cap S_n$ i $A_n = A \setminus B_n$, de manera que es tenen les inclusions

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \quad B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \qquad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

A més, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots = G_1 \cup G_2 \cup \cdots = S$ i, per tant, si fem la intersecció amb A, en resulten les igualtats

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots = A \cap S = A,$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = A \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots) = \emptyset.$$

Com que els G_n i els S_n són oberts, $E \setminus S_n$ és tancat i $A_n = A \cap (E \setminus S_n)$ és compacte i tancat. Si $A_n \neq \emptyset$ per a tot n, pel teorema anterior la seva intersecció seria no buida. Per tant, hi ha un n tal que $A_n = \emptyset$; és a dir, $A = B_n$ i $A = A \cap S_n$, és a dir, $A \subseteq S_n$. □

III. (Umkehrung des Borelschen Satzes). Wenn für jedes System von Gebieten, in deren Summe die Menge A enthalten ist, A bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieses Systems enthalten ist, so ist A kompakt und abgeschlossen.

[III. (Recíproc del teorema de Borel). Si per a cada sistema de conjunts oberts, en la unió dels quals està contingut el conjunt A, A ja està contingut en la unió finita d'alguns oberts d'aquest sistema, llavors A és compacte i tancat.]

PROVA. Considerem que A no és compacte i sigui B un subconjunt divergent. Per a cada punt a de A existeix un entorn U_a tal que la intersecció $B \cap U_a$ és finita (o buida). Els oberts U_a formen un recobriment de A i, per hipòtesi, en podem extreure un subrecobriment finit. Però, aleshores, B és un conjunt finit, i arribem a una contradicció.

Suposem ara que A no és tancat. Sigui x un punt d'acumulació. Per l'axioma de separació de Hausdorff, per a tot a que pertany a A, existeixen entorns U_a de a i V_a de x tals que $U_a \cap V_a = \emptyset$ i, per tant, x no és de l'adherència de U_a. Els oberts U_a formen un recobriment de A i, per hipòtesi, existeix un subrecobriment finit, $A \subset U_{a_1} \cup \cdots U_{a_m}$. Com que l'adherència d'una unió finita de conjunts és la unió de les adherències, en resulta

$$x \notin \overline{U}_{a_1} \cup \cdots \cup \overline{U}_{a_m} = \overline{U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}},$$

i, per tant, $x \notin \overline{A}$, que és una contradicció amb l'elecció del punt x. □

Veiem que el teorema de Borel i el recíproc del teorema de Borel es refereixen a recobriments oberts de tipus diferent. Per al teorema de Borel, Hausdorff es redueix als recobriments numerables, mentre que per al recíproc ha d'usar recobriments generals. Al capítol següent, Hausdorff introdueix el primer i segon axiomes de numerabilitat i, entre altres aspectes, realitza una anàlisi de la cardinalitat del conjunt d'oberts i tancats d'un espai topològic que satisfà el segon axioma de numerabilitat, cosa que li permet establir que d'un recobriment obert qualsevol és possible extreure'n un subrecobriment numerable ([21, teorema V, p. 272]). En particular, per a aquests espais, l'enunciat del recíproc del teorema de Borel es pot reduir a recobriments numerables o, d'una manera alternativa, el del teorema de Borel, a recobriments generals.

Els resultats establerts per Hausdorff sobre la compacitat en espais topològics són aproximadament els equivalents als demostrats per Fréchet en el context de les classes $(\mathcal{V})$: obté el teorema de Borel per a recobriments numerables, que seria l'anàleg del teorema 36 de Fréchet, i l'equivalència de la compacitat amb la propietat de Heine-Borel general per a espais que satisfan el segon axioma de numerabilitat, que seria l'anàleg del teorema 42 de Fréchet, enunciat per als espais normals que, recordem, són separables (propietat similar al segon axioma de numerabilitat) i complets (propietat que és innecessària *a posteriori*).

4.3 L'establiment de la definició d'espai topològic

Els *Grundzüge* suposen l'inici del veritable desenvolupament de la teoria general dels espais topològics, que va prendre com a punt de partida els axiomes formulats per Hausdorff. Va ésser una obra pionera en la branca de la topologia i que va contribuir al desenvolupament de l'estructura de les matemàtiques modernes.

Al primer quart del segle XX figures importants com Kazimierz Kuratowski (1896–1980), Heinrich Tietze (1880–1964), Pàvel S. Alexandroff (1896–1982) o Wacław Sierpiński (1882–1969) van proposar sistemes d'axiomes alternatius per definir els espais topològics, alguns basats en la idea de punts d'acumulació o adherents (com ara Sierpiński i Kuratowski) i d'altres que proposaven una primera axiomàtica a través dels oberts, com va fer Alexandroff [1]. No seria fins a l'aparició de la *Topologie* del grup Bourbaki, el 1940, que es fixaria la definició actual mitançant els oberts.

André Weil (1906–1998) assenyala a [43, p. 37] el panorama dispers del moment:

> Les mathématiciens qui, depuis une trentaine d'annés, se sont occupés de topologie générale, ont introduit dans cette branche des mathématiques un ensemble complètement désordonné de notions et d'axiomes [...].
>
> [Els matemàtics que, els darrers trenta anys, s'han ocupat de la topologia general, han introduït en aquesta branca de les matemàtiques un conjunt completament desordenat de nocions i axiomes [...].]

A continuació, afegeix que els únics espais que és útil considerar són els que, en aquell moment (1937), ell anomena *espais topològics*, els que satisfan que tota reunió de conjunts oberts és un conjunt obert. Per a aquesta definició, Weil segueix l'exposició d'un altre membre fundador del grup Bourbaki, R. de Possel, en el *Séminaire de M. (Julia)* (1935–1936) [11], qui parteix de la propietat de la reunió d'oberts i va imposant més condicions, com la d'intersecció finita, segons els resultats que es vulguin establir.

Moore ([30]) cita la tesi no publicada de Liliane Beaulieu, arxivera del llegat Bourbaki, presentada el 1989, per explicar la decisió del grup de fundar la noció d'espai topològic en els oberts. Segons aquesta citació, Weil hauria proposat començar pels espais mètrics i després arribar als espais més generals formulats a partir de la funció clausura definida per Kuratowski, mentre que Claude Chevalley (1909–1984) considerava que era necessari crear les bases dels espais topològics generals abans que les dels espais mètrics i va decantar la decisió cap a la presentació per oberts, que és de la manera que apareixerien en l'edició del 1940.

Bourbaki va fer un reconeixement elogiós de l'obra de Hausdorff a les notes històriques referents a la topologia general ([8, p. I–126]):

> Avec Hausdorff commence la topologie générale telle qu'on l'entend aujourd'hui. Reprenant la notion de voisinage, il sut choisir, parmi les axiomes de Hilbert sur les voisinages dans le plan, ceux qui pouvaient donner à sa théorie à la fois toute précision et toute la généralité désirables. [...] Le chapitre où il en développe les conséquences est resté un modèle de théorie axiomatique, abstrait mais d'avance adaptée aux applications. Ce fut là, tout naturellement, le point de départ des recherches ultérieures sur la topologie générale, et principalement des travaux de l'école de Moscou, orienté, en gran partie vers le problème de métrisation.
>
> [Amb Hausdorff comença la topologia general tal com se l'entén avui en dia. Reprenent la noció d'entorn, va saber escollir entre els axiomes de Hilbert per als entorns del pla, aquells que podien donar simultàniament a la seva teoria tota la precisió i tota la generalitat desitjable. [...] El capítol en el qual en desenvolupa les conseqüències ha romàs un model de teoria axiomàtica, abstracta però per endavant adaptada a les aplicacions. Aquest va ser, naturalment, el punt de partida dels treballs posteriors sobre la topologia general, i sobretot dels treballs de l'escola de Moscou, en gran part orientada cap al problema de la metrització.]

En la propera secció analitzarem la contribució de l'escola de Moscou a l'establiment de la noció de compacitat.

5 L'escola russa

A [9], Cameron assenyala que durant la darrera dècada del segle XIX es va produir un canvi radical en l'ensenyament de les matemàtiques a la Universitat de Moscou; es van abolir els cursos obligatoris i es deixà llibertat als professors per a la selecció dels continguts, fet que acabaria beneficiant la creativitat científica. En aquest context, destaquen les figures de Dmitri Fiódorovitx Egorov (1869–1931) i Nikolai Nikolàievitx Luzin (1883–1950), que van transformar per complet l'ensenyament de les matemàtiques, passant d'una formació «esclerotitzada» a una visió que despertava la curiositat dels estudiants i els dirigia cap a la recerca en matemàtiques. La joventut dels estudiants, el seu entusiasme i el sentiment de pertinença al grup farien que els membres del seminari de Luzin anomenessin *Lusitania* el col·lectiu. Alguns dels participants a *Lusitania* esdevindrien matemàtics de primer nivell, com M. Y. Suslin, A. Y. Kinchin, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev, o L. A. Lusternik [9]. En el llibre de Graham i Kantor, [18], es pot llegir una descripció interessant d'aquest grup, en contrast amb l'escola francesa liderada per Borel, Lebesgue i Baire.

Entre els membres de *Lusitania* hi havia Pàvel Serguéievitx Alexandroff (1896–1982) i Pàvel Samuílovitx Urysohn (1898–1924). Es van interessar, sobretot, en les noves idees introduïdes per Hausdorff als *Grundzüge* i van fundar el Seminari de Topologia de la Universitat de Moscou.

Els treballs d'Alexandroff i Urysohn, ja siguin conjunts o individualment, recorren un ampli espectre de la topologia del moment. Pel que fa als compactes, l'any 1929 van publicar la «Mémoire sur les espaces topologiques compacts» [3], que suposava el primer estudi sistemàtic de la compacitat deslliurant-la dels problemes associats a la numerabilitat subjacent en els treballs de Fréchet i Hausdorff. En aquesta memòria es tracten aspectes que van més enllà de la definició d'*espai compacte*, aspectes que no tractarem aquí. Des del punt de vista desenvolupat posteriorment pel grup Bourbaki, el de la teoria d'estructures, hi havia un aspecte que no s'havia tractat a la memòria, l'anàlisi de l'estabilitat de la compacitat per productes. Tychonoff, deixeble d'Alexandroff, va introduir la topologia producte i va demostrar que la compacitat es conservava per a un producte d'espais compactes.

5.1 La memòria d'Alexandroff i Urysohn

Durant l'estiu del 1922, Alexandroff i Urysohn van llogar una casa de camp i van començar la seva col·laboració en l'estudi de la topologia general. El primer manuscrit de la «Mémoire sur les espaces topologiques compacts» és fruit d'aquella trobada, tot i que la seva publicació es va endarrerir uns quants anys. Al gener del 1923 el manuscrit estava preparat per a ser publicat i el van enviar a la revista *Fundamenta Mathematicae*, on el van acceptar. Aquesta revista acabava de rebre l'extens article d'Urysohn titulat «Mémoire sur les multiplicités cantoriennes», que es va publicar en dos volums, per la qual cosa l'editor del *Fundamenta* va considerar que no podia publicar l'article que li havien enviat, també extens, en un futur immediat. Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966) va suggerir la revista *Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* per accelerar la publicació de la memòria, on finalment es publicaria. La necessitat d'enviar els documents i les proves corresponents entre Moscou i Amsterdam, amb les dificultats que això suposava en aquell moment, va endarrerir la publicació fins l'any 1929. Entre el 1922 i el 1929, Alexandroff i Urysohn van fer diversos viatges per Europa, a Alemanya per visitar Hausdorff o a Holanda per visitar Brouwer, per exemple, en els quals van divulgar les idees contingudes a la memòria i van fer diverses publicacions parcials en què anunciaven alguns dels resultats que hi apareixen ([2], pel que fa a la compacitat). Així, tot i el retard en la publicació del treball i les dificultats de comunicació entre la comunitat matemàtica del moment, les idees i resultats d'Alexandroff i Urysohn van disseminar-se al llarg de la dècada dels vint.

La memòria ha estat reeditada en rus en diverses ocasions, en les quals hi han estat afegits apèndixs i comentaris pel mateix Alexandroff. Tot i que no hem tingut accés directe a les edicions russes, Cameron ([9]) recull alguns comentaris de la introducció d'Alexandroff a la tercera edició, publicada l'any 1971. Consideraven Fréchet i Hausdorff els fundadors de la topologia general; mentre que atorgaven a Fréchet el mèrit de la introducció d'alguns conceptes fonamentals (en un entorn proper a l'anàlisi), com la compacitat i la completesa; consideraven que Hausdorff havia establert les bases de la teoria de conjunts en els *Grundzüge*. A [9, p. 360], Cameron cita el següent paràgraf dels comentaris d'Alexandroff:

> In this Memoir, P. S. Urysohn an I stood entirely on the basis of Hausdorff «theory of sets», but the distinction from Hausdorff was that we were interested not in questions of the logical analysis of classical theory, but within the newly discovered topological spaces, we saw fascinating new topics of mathematical investigation, and we decided actually to undertake the investigation with all possible systematicness, beginning with that end which seemed to us the most promising — the concept of compactness.
>
> [En aquesta Memòria, P. S. Urysohn i jo ens manteníem en el context de la teoria de conjunts de Hausdorff, però a diferència de Hausdorff no estàvem interessats en qüestions de l'anàlisi lògica de la teoria clàssica, sinó que, en els recentment descoberts espais topològics, vam veure nous temes d'investigació matemàtica fascinants, i vam decidir emprendre la investigació de la manera més sistemàtica possible, començant per aquest propòsit que ens semblava el més prometedor —el concepte de compacitat.]

La memòria d'Alexandroff i Urysohn és el primer estudi sistemàtic dels espais compactes. A més dels resultats que s'hi presenten, construeixen diversos exemples que han esdevingut paradigmàtics de les propietats que representen, com ara el quadrat amb l'ordre lexicogràfic, la doble circumferència, etc. Com veurem més endavant, l'aproximació a la compacitat és mitjançant punts d'acumulació completa, cosa que va donar lloc a una interacció profunda entre els espais compactes i algunes tècniques i mètodes de la teoria de conjunts. Van introduir i estudiar els espais absolutament tancats, els espais normals, els espais regulars i els espais localment compactes; en particular, per exemple, van provar que un espai compacte Hausdorff és normal. Del teorema de metritzabilitat d'Urysohn ([32]), se'n deduïa que els espais normals (que satisfan el segon axioma de numerabilitat) admetien un submergiment en un espai compacte Hausdorff i plantejava la qüestió de caracteritzar els espais que tenen aquesta propietat, qüestió que estarà al centre de l'anàlisi de la compacitat d'un producte. A continuació, ens centrem en les pàgines 7–11 de la memòria, on es defineixen els espais *bicompactes*.

En la pàgina 7 de la memòria es refereixen a la definició de *compacitat* i adopten la noció establerta per Fréchet i Hausdorff segons la qual un espai topològic R és compacte si tot conjunt infinit contingut en R té almenys un punt d'acumulació. Seguidament es troba la definició d'una nova noció, la de *punt d'acumulació completa*:

> Un point ξ est dit point d'accumulation complète de l'ensemble A, si quel-que soit le voisinage $V(\xi)$, la puissance de $A \cap V(\xi)$ est égale à celle de A tout entier.
>
> [Un punt ξ s'anomena punt d'acumulació completa del conjunt A si, per a qualsevol entorn $V(\xi)$, el cardinal de $A \cap V(\xi)$ és el mateix que el cardinal de A.]

Utilitzen aquest concepte per a establir un resultat que resumeix i completa els continguts als *Grundzüge* sobre els espais compactes que hem comentat a la subsecció 4.2:

> 1. Chacune des propiétés ci-dessous est nécessaire et suffisante pour la compacité de l'espace topologique R:
>
> (a) Tout ensemble dénombrable situé dans R possède au moins un point d'accumulation complète.
>
> (b) (Théorème de Cantor): toute suite décroissante dénombrable d'ensembles fermés $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ non vides situés dans R, possède au moins un point appartenant à tous les ensembles F_n.
>
> (c) (Théorème de Heine-Borel): de toute infinité dénombrable de domaines recouvrant l'espace R de façon que tout $\xi \subset R$ est intérieur à un (ou plusieurs) de ces domaines, on peut extraire un nombre fini jouissant de la même propieté.
>
> [1. Cadascuna de les propietats següents és necessària i suficient per a la compacitat de l'espai topològic R:
>
> (a) Tot conjunt numerable dins de R té almenys un punt d'acumulació completa.
>
> (b) (Teorema de Cantor): tota successió decreixent numerable de conjunts tancats $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ no buits i situats dins de R, té almenys un punt pertanyent a tots els conjunts F_n.
>
> (c) (Teorema de Heine-Borel): de tota infinitat numerable de conjunts que recobreixen l'espai R de manera que tot punt $\xi \subset R$ és interior a un (o més) dels conjunts, se'n pot extreure un nombre finit que compleixen la mateixa propietat.]

Els autors remarquen que la necessitat d'aquestes propietats, així com la suficiència de la condició (c), apareixen al llibre de Hausdorff, i que la implicació $(b) \Rightarrow (a)$ és immediata, raonant per reducció a l'absurd. La possibilitat de limitar-se als conjunts numerables en la condició (a) no havia aparegut en la literatura científica degut al fet que les nocions de punt d'acumulació i punt d'acumulació completa es confonen per als conjunts numerables.

En aquest punt, Alexandroff i Urysohn conclouen que la propietat d'un espai topològic de ser compacte es pot reduir a propietats de «formacions numerables», cosa que no comprèn la idea intuïtiva de compacitat, aquella de posseir un caràcter de tancament absolut [3, p. 8]. El teorema següent permet alliberar-se de la numerabilitat:

I. Les trois propriétés suivantes d'un espace topologique R, sont équivalents:

(A) Tout ensemble infini situé dans R possède au moins un point d'accumulation complète.

(B) Toute suite infinie bien ordonnée d'ensembles fermés decroissants possède au moins un point appartenant à tous les ensembles de la suite.

(C) De toute infinité de domaines recouvrant l'espace R, on peut extraire un nombre fini de domaines jouissant de la même propriété.

[I. Les tres propietats següents d'un espai topològic R són equivalents:

(A) Tot conjunt infinit dins de R té almenys un punt d'acumulació completa.

(B) Tota successió infinita ben ordenada de conjunts tancats decreixents té almenys un punt pertanyent a tots els conjunts de la successió.

(C) De qualsevol infinitat de dominis que recobreixen l'espai R, se'n pot extreure un nombre finit de dominis amb la mateixa propietat.]

La prova d'Alexandroff i Urysohn d'aquest resultat segueix de prop les demostracions dels teoremes de Hausdorff sobre els espais compactes, tenint una cura especial en les cardinalitats que cal preservar. Per fer-ho introdueixen les propietats (A_r), (B_r), (C_r) com les enunciades al teorema però involucrant infinits de cardinal r, i utilitzen el circuit

$$(C) \Rightarrow (A) \Rightarrow (B_r) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C)$$

per a tot cardinal regular r a fi de concloure les equivalències enunciades. A més, proven que $(C_r) \Rightarrow (B_r)$, per la qual cosa (A_r), (B_r), (C_r) són, també, equivalents.

Un resultat similar, en el context del espais $(\mathcal{V})$ de Fréchet va ser provat per Kuratowski i Sierpiński [26]. No s'observen referències creuades entre un i altre article, fet que potser es deu a les dificultats de comunicació del moment. De fet, Alexandroff i Urysohn, en referir-se a Fréchet, assenyalen en una nota a peu de pàgina ([3, p. 2]) que han conegut els seus treballs després d'haver elaborat la memòria, i remarquen les dificultats d'accés a la literatura científica per als membres de la Universitat de Moscou.

Alexandroff i Urysohn defineixen un espai *bicompacte* com aquell que satisfà una de les condicions del teorema i, per tant, totes elles. La bicompacitat provenia de la conjunció de dues propietats: la compacitat de Fréchet (o compacitat numerable) i la compacitat final, que permetia passar del cas no numerable al cas numerable. La distinció entre els espais compactes i els espais bicompactes va clarificar l'anàlisi de les propietats topològiques que condueixen a un teorema d'existència d'extrems per a les funcions contínues.

Des de les dècades dels quaranta i els cinquanta del segle XX, s'ha imposat la definició d'*espai compacte* com aquell que satisfà la propietat dels recobriments oberts expressada en la condició (C) del teorema, la propietat anomenada *de Heine-Borel*. Observem, però, que la propietat (A) és la més propera a la definició original de Fréchet, basada en la propietat de Bolzano-Weierstrass; això explicaria el comentari d'Alexandroff en la introducció a la tercera edició de la memòria reflectit per Cameron [9, p. 373–374]:

> Alexandroff noted that at the time he and Urysohn developed the concept of bicompactness it was done by means of complete accumulation points with a secondary formulation in terms of completely ordered sequences of nonempty decreasing closed sets, and a tertiary formulation by means of open covers. Both of them felt that the order of the formulations represented the order of importance but, as Alexandroff pointed out, paracompactness (the most important generalization of bicompactness) is defined by means of open covers and its importance in the resolution of the general metrization theorem has shown this first impression to be incorrect.
>
> [Alexandroff va observar que en el moment que ell i Urysohn van desenvolupar el concepte de bicompacitat ho van fer mitjançant els punts d'acumulació completa amb una formulació secundària en termes de successions ordenades decreixents de conjunts tancats, i una formulació terciària a partir de recobriments oberts. Ambdós creien que l'ordre de les formulacions representava l'ordre d'importància, però, com Alexandroff va fer notar, la paracompacitat (la generalització més important de la bicompacitat) es defineix a partir de recobriments oberts i la seva importància en la resolució del teorema de metrització general ha evidenciat que la primera impressió era incorrecta.]

Fem notar que la noció d'espai paracompacte fou introduïda per Dieudonné quinze anys més tard, a l'article [12].

5.2 Sobre el teorema de Tychonoff

En l'article «Über die topologische Erweiterung von Räumen» («Sobre l'extensió topològica dels espais») publicat l'any 1930 a *Mathematische Annalen*, vegeu [40], Tychonoff analitza en quines condicions un espai topològic (de Hausdorff) X admet un submergiment en un espai compacte (per *submergiment* o *encaix* s'entén una aplicació contínua i injectiva de X en un altre espai que indueix un homeomorfisme entre X i la seva imatge). El plantejament del problema hauria sorgit a partir de les sessions del Seminari de Topologia dirigit per Alexandroff i s'inspiraria, com hem remarcat a la secció anterior, en el teorema de metritzabilitat d'Urysohn [42], que havia provat que un espai normal que satisfà el segon axioma de numerabilitat és metritzable veient que admet un submergiment en el cub I^ω. La compacitat del cub I^ω era ben coneguda, atès que es tractava d'un subconjunt de l'espai mètric $\mathbb{R}^\omega$ estudiat per Fréchet.

A la introducció de l'article, Tychonoff anuncia que demostrarà el teorema següent:

> Satz I. Zu jeder Kardinalzahl τ gibt es einen nur von dieser Kardinalzahl abhängenden bikompakten Raum R_τ von der Eigenschaft, dass jeder normale topologische Raum, der ein Umgebungssystem von einer Mächtigkeit $\leq \tau$ besitzt, einer Teilmenge des Raumes R_τ homöomorph ist.
>
> [Teorema I. Per a cada nombre cardinal τ existeix un espai bicompacte R_τ que depèn només d'aquest nombre cardinal tal que qualsevol espai topològic normal que té una base d'entorns de cardinal menor o igual que τ és homeomorf a un subconjunt de R_τ.]

Tychonoff s'inspira en el lema d'Urysohn ([32]) i introdueix els espais completament regulars, amb els quals caracteritza els espais que admeten un submergiment en un espai compacte Hausdorff [40, teorema II].

La demostració de Tychonoff del teorema I segueix la mateixa línia que la demostració establerta per Urysohn per al seu teorema de metritzabilitat. L'existència de suficients funcions contínues sobre un espai normal, i de fet també sobre un espai completament regular, permet construir una aplicació de X en $R_\tau = I^\tau$, on $I = [0,1]$ (per a Tychonoff, τ és un ordinal que representa un cardinal de tipus particular, que és un conjunt ben ordenat). A diferència, però, del cas numerable, ara I^τ no és un espai mètric, per la qual cosa s'ha de començar donant un sentit a l'espai topològic R_τ. A la pàgina 546 defineix, per primera vegada en la literatura, la topologia producte de I^τ:

> Es sei J_α eine Menge von der Mächtigkeit τ von abstrakt gegebenen zueinander fremden Einheitsstrecken $0 \leq t \leq 1$. Ein Punkt x des Raumes R_τ is definitionsgemäss der Inbegriff $\{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$ von «Koordinaten» t_α, wobei t_α ein Punkt von J_α, also eine reelle Zahl $0 \leq t_\alpha \leq 1$ ist. Die Umgebungsdefintion geschieht folgendermassen: Es sei $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$ ein Punkt von R_τ. Wir wählen beliebig endlichviele $J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k}$ und auf jedem dieser Intervalle J_{α_i} zwei rationale Zahlen $\tau'_{\alpha_i} < t^0_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$; eine Umgebung von $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$ besteht dann definitionsgemäss aus allen Punkten $x = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$, die den Bedingungen $\tau'_{\alpha_i} < t_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$ genügen.
>
> [Sigui J_α un conjunt d'intervals de cardinal τ. Un punt x de l'espai R_τ està definit per l'expressió $\{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$ de les «coordenades» t_α, on t_α és un punt de J_α, és a dir, un nombre real $0 \leq t_\alpha \leq 1$. Es defineixen els entorns de la manera següent: Sigui $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$ un punt de R_τ. Triem un nombre finit d'intervals $J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k}$ i per a cadascun d'aquests intervals J_{α_i}, dos nombres racionals $\tau'_{\alpha_i} < t^0_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$; un entorn de $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0 \dots\}$ és per definició el conjunt de punts $x = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$ que satisfan $\tau'_{\alpha_i} < t_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$.]

El sistema d'entorns definit determina, en efecte, un espai topològic de Hausdorff. Tychonoff imposa la racionalitat dels nombres τ'_{α_i} i τ''_{α_i} per mantenir el control sobre el cardinal de I^τ, ja que llavors $\aleph_0 \cdot \tau = \tau$.

L'altre ingredient que necessita Tychonoff per a adaptar la demostració d'Urysohn és provar que l'espai topològic $R_\tau = I^\tau$ així definit és bicompacte. La demostració, que desenvolupa en la secció 2, *Beweis der Bikompaktheit von R_τ* ('demostració de la bicompacitat de R_τ'), utilitza inducció transfinita per a construir coordenada a coordenada un punt d'acumulació completa per a un subconjunt infinit $E \subseteq R_\tau$ donat. En un article posterior, «Ein Fixpunktsatz» («Un teorema de punt fix»), publicat l'any 1935 [41], Tychonoff necessita la compacitat d'un producte d'espais bicompactes de Hausdorff arbitraris; a la pàgina 772 comenta:

> Das Produkt von bikompakten Räumen ist wieder bikompakt. Diesen Satz beweist man wörtlich so wie die Bikompaktheit des Produktes von Strecken.
>
> [El producte d'espais bicompactes és també bicompacte. Aquest teorema es demostra literalment com la bicompacitat dels productes d'intervals.]

La versió general d'aquest teorema és el que es coneix com a *teorema de Tychonoff*, resultat que es considera un dels més importants de la topologia general. Comentarem una variant de la demostració, essencialment equivalent a la demostració de Tychonoff, deguda a Eduard Čech (1893–1960). Un bon exercici consisteix a seguir la prova per al producte de dos espais bicompactes (cf. [45]).

En l'article publicat l'any 1937 a *Annals of Mathematics* que porta per títol «On bicompact spaces», Čech va estendre els resultats de Tychonoff i va introduir el que s'anomenaria més tard la *compactificació de Stone-Čech* (que va ser introduïda simultàniament i de forma independent per Marshall Stone (1903–1989)) [32]. En la primera part de l'article [10], Čech exposa les idees i definicions que utilitzarà en el seu treball i, en particular, demostra el teorema de Tychonoff general; a la pàgina 830, enuncia:

> The cartesian product $S = \mathfrak{P}_i S_i$ of any family of bicompact spaces is a bicompact space.
>
> [El producte cartesià $S = \mathfrak{P}_i S_i$ de qualsevol conjunt d'espais bicompactes és un espai bicompacte.]

La demostració que planteja, que és la que presentem a continuació, segueix bàsicament la línia de la que havia fet Tychonoff anys enrere amb algunes modificacions menors, com usar recobriments oberts allà on Tychonoff utilitzava sistemes de tancats amb interseccions finites no buides.

Prova del teorema de Tychonoff. Per a facilitar la lectura de la prova, reformularem algunes de les notacions de l'article de Čech. El resultat que volem provar és que, donada una família d'espais topològics bicompactes, X_α, $\alpha \in I$, el producte $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ és un espai bicompacte. Per veure-ho és suficient provar que tot conjunt infinit $E \subset X$ té un punt d'acumulació completa.

Pel teorema de Zermelo, podem suposar que els elements de I són de tots els ordinals menors o iguals a un ordinal donat. Tal com està definida la topologia producte, n'hi ha prou de veure que es pot construir un punt $z = (z_\alpha)$ definint les coordenades per inducció transfinita de manera que se satisfaci la propietat següent:

($\mathbf{A}_\alpha$) Per a qualsevol nombre finit d'índexs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \le \alpha$ i qualssevol oberts $U_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$, $1 \le i \le n$, el cardinal de

$$\left(U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\beta \neq \alpha_i} X_\beta\right) \cap E$$

és igual al cardinal de E.

Suposem definides les coordenades z_α per a $\alpha < \lambda$ i provem que existeix z_λ de manera que se satisfà (A_λ): en cas contrari, per a tot $y_\lambda \in X_\lambda$ hi ha:

— un entorn $y_\lambda \in U_{y_\lambda} \subset X_\lambda$,
— un subconjunt finit d'índexs $I(y_\lambda)$ menors que λ,
— i entorns oberts $z_\alpha \in V_{z_\alpha}^{y_\lambda} \subset X\alpha$, per a $\alpha \in I(y_\lambda)$,

tals que, si escrivim

$$U(y_\lambda) = \prod_{\alpha \in I(y_\lambda)} U_{y_\alpha} \times \prod_{\beta \notin I(y_\lambda)} X_\beta, \quad V(y_\lambda) = \prod_{\alpha \in I(y_\lambda)} V_{y_\alpha} \times \prod_{\beta \notin I(y_\lambda)} X_\beta,$$

el cardinal de $E \cap U(y_\lambda) \cap V(y_\lambda)$ és menor que el cardinal de E.

Els oberts U_{y_λ} formen un recobriment de X_λ, i per la bicompacitat de X_λ en podem extreure un subrecobriment finit,

$$X_\lambda = U_{y_\lambda^1} \cup \cdots \cup U_{y_\lambda^m}. \tag{2}$$

Així, el cardinal del conjunt

$$E \cap (U(y_\lambda^1) \cap V(y_\lambda^1)) \cap \cdots \cap (U(y_\lambda^1) \cap V(y_\lambda^1))$$

és menor que el cardinal de E. Per (2), aquest conjunt conté

$$E \cap V(y_\lambda^1) \cap \cdots \cap V(y_\lambda^m),$$

que, per tant, tindrà cardinal menor que el de E. Però això és absurd ja que es compleix (A_μ) per a qualsevol μ tal que $\alpha \le \mu < \lambda$, per a tot $\alpha \in I(\lambda_y)$. □

Čech va preguntar si el producte d'espais compactes és un espai compacte. Anys més tard, el 1949, J. Novák va mostrar un exemple de dos espais compactes amb producte no compacte; és a dir, la compacitat de Fréchet no és estable per a productes ([33]), i referma així la noció d'espai bicompacte per damunt de la d'espai compacte.

6 Reflexions finals

La noció de compacitat és una abstracció de les propietats topològiques dels intervals $[a, b]$ de la recta real, que es remunten als teoremes de Bolzano i de Weierstrass. El teorema de Borel i les extensions de Schönflies i Lebesgue afirmen que tot recobriment obert d'un interval $[a, b]$ admet un subrecobriment finit. Com en molts altres teoremes importants, la conclusió del teorema ha esdevingut la definició d'un nou concepte, el d'espai (bi)compacte.

Desprendre la propietat de Heine-Borel dels recobriments dels intervals del teorema Bolzano-Weierstrass fins a consolidar la definició d'*espai compacte* no va ser immediat. D'una banda, hem vist com sorgeix aquesta propietat per a recobriments numerables en la tesi de Borel. Per a Borel, el teorema permetia en certes situacions provar l'existència de punts d'un interval fora d'una unió numerable de subintervals, i el va utilitzar en la seva proposta de teoria de la mesura definida a partir de recobriments numerables i no pas finits, com els que s'empraven en la definició de *contingut* de Jordan.

D'altra banda, l'anàlisi dels espais de funcions o la de les varietats geomètriques de Riemann aconsellaven estudiar espais generals en què es pogués definir la continuïtat d'una funció i, en particular, caracteritzar aquells espais en els quals les funcions contínues estan fitades i assoleixen els seus extrems. Fréchet va desenvolupar uns espais abstractes propers a l'anàlisi i va proposar la definició d'*espai compacte* basant-se en la propietat de Bolzano-Weierstrass dels intervals. A més, va relacionar la compacitat amb el teorema de Borel. Per la seva banda, Hausdorff va desenvolupar una teoria més geomètrica, la dels espais topològics, a la qual va estendre els resultats sobre espais compactes de Fréchet.

Alexandroff i Urysohn van tancar el cercle amb la noció d'espai bicompacte, deslligant els espais compactes de formacions numerables, i analitzant aquesta nova categoria d'espais d'una manera profunda i sistemàtica. Finalment, el treball de Tychonoff confirmava la rellevància dels espais bicompactes, importància que no deixaria de créixer en anys posteriors.

Sovint els estudiants dels cursos de grau troben difícil d'entendre la definició d'*espai compacte* mitjançant la propietat de Heine-Borel; pensem que conèixer l'origen de la noció de compacitat i el camí seguit fins a consolidar-la pot ajudar-nos en la presentació que en fem a classe.

Agraïments

La segona autora ha estat parcialment finançada pel Ministeri d'Economia i Competitivitat, HA2016-75871-R. El tercer autor ha estat parcialment finançat per l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca, 2017SGR-932 i el Ministeri de Ciència i Innovació, 2015-069135P.

Referències

[1] Alexandroff, P. «Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie». *Math. Ann.*, 94 (1) (1925), 296–308.

[2] Alexandroff, P.; Urysohn, P. «Sur les espaces topologiques compacts». *Bull. Acad. polon. (A)* (1923), 5–8.

[3] Alexandroff, P. S.; Urysohn, P. S. «Mémoire sur les espaces topologiques compacts». *Verhandelingen der Koninklijke (Nederlandse) Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde, Sectie 1*, 14 (1929), 93 p.

[4] Andre, N. R.; Engdahl, S. M.; Parker, A. E. «An analysis of the first proofs of the Heine-Borel Theorem». *Convergence. MAA Publications*, (2013).

[5] Arboleda, L. C. «Introducción de la topología de vecindades en los trabajos de Fréchet y Hausdorff». *Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur.*, 41 (161) (2017), 528–537.

[6] Borel, É. «Sur quelques points de la théorie des fonctions». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 12 (1895), 9–55.

[7] Borel, É. *Leçons sur la théorie des fonctions*. París: Gauthier-Villars et fils, 1898.

[8] Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. París: Hermann, 1971.

[9] Cameron, D. E. «The birth of Soviet topology». *Topology Proc.*, 7 (2) (1982), 329–378.

[10] Čech, E. «On bicompact spaces». *Ann. of Math. (2)*, 38 (4) (1937), 823–844.

[11] de Possel, R. «Espaces topologiques». *Séminaire de Mathématiques (Julia)*, 3 (1935–1936), exp. no 1, 1–18.

[12] Dieudonné, J. «Une généralisation des espaces compacts». *J. Math. Pures Appl. (9)*, 23 (1944), 65–76.

[13] Dieudonné, J. *History of Functional Analysis*. Amsterdam-Nova York: North-Holland Publishing Co., 1981. [Notas de Matemática; 77] (North-Holland Mathematics Studies; 49)

[14] Dugac, P. «Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue». *Arch. Internat. Hist. Sci.*, 39 (122) (1989), 69–110.

[15] Fréchet, M. «Généralisation d'un théorème de Weierstrass». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 139 (1904), 848–850.

[16] Fréchet, M. M. «Sur quelques points du calcul fonctionnel». *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22 (1906), 1–72.

[17] Fréchet, M. *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*. París: Gauthier Villars, 1928.

[18] Graham, L.; Kantor, J.-M. *Naming Infinity. A true story of religious mysticism and mathematical creativity*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press, 2009. [Traducció al castellà: *El nombre del*

infinito. Un relato verídico de misticismo religioso y creatividad matemática. Barcelona: Acantilado, 2012]

[19] Hadamard, J. «Sur certains applications possibles de la théorie des ensembles». A: *Proceedings of the First International Congress of Mathematicians*. Zuric: Teubner Verlag, 1899, 201–202.

[20] Hallett, M. «Towards a theory of mathematical research programmes. I». *British J. Philos. Sci.*, 30 (1) (1979), 1–25.

[21] Hausdorff, F. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Verlag Von Veit & Comp., 1914.

[22] Hausdorff, F. *Set Theory*. Nova York: Chelsea Publishing Company, 1957. [Traduït per John R. Aumann *et al.*]

[23] Hawkins, T. *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*. Nova York: Chelsea Publishing Co., 1975. [Reimpressió de l'original]

[24] Hilbert, D. «Ueber die Grundlagen der Geometrie». *Math. Ann.*, 56 (3) (1902), 381–422.

[25] Hildebrandt, T. H. «The Borel theorem and its generalizations». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 32 (5) (1926), 423–474.

[26] Kuratowski, C.; Sierpiński, W. «Le théorème de Borel-Lebesgue dans la théorie des ensembles abstraits». *Fund. Math.*, 2 (1921), 172–178.

[27] Lebesgue, H. L. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France*. París: Gauthier-Villars, 1904.

[28] Manheim, J. H. *The Genesis of Point Set Topology*. Oxford-París-Frankfurt: Pergamon Press; Nova York: The Macmillan Co., 1964.

[29] Maurey, B.; Tacchi, J.-P. «La genèse du théorème de recouvrement de Borel». *Rev. Histoire Math.*, 11 (2) (2005), 163–204.

[30] Moore, G. H. «The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology». *Historia Math.*, 35 (3) (2008), 220–241.

[31] Moreno, J. «Gènesi del concepte d'espai compacte (1895–1925)». Treball de fi de grau. Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC, maig 2019.

[32] Munkres, J. *Topología*. 2a ed. Madrid: Prentice Hall, 2002.

[33] Novák, J. «On the Cartesian product of two compact spaces». *Fund. Math.*, 40 (1953), 106–112.

[34] Pier, J. «Genèse et évolution de l'idée de compact». *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 14 (2) (1961), 169–179.

[35] Pier, J.-P. «Historique de la notion de compacité». *Historia Math.*, 7 (4) (1980), 425–443.

[36] Poincaré, H. «Sur les fonctions à espaces lacunaires». *Acta Societatis scientiarum Fennicae*, 12 (1883), 343–350; *Amer. J. Math.*, 14 (3) (1892), 201–221.

[37] Raman-Sundström, M. «A pedagogical history of compactness». *Amer. Math. Monthly*, 122 (7) (2015), 619–635.

[38] SCHÖNFLIES, A. «Sur un théorème de Heine et un théorème de Borel». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 144 (1907), 22–23.

[39] TAYLOR, A. E. «A study of Maurice Fréchet. I. His early work on point set theory and the theory of functionals». *Arch. Hist. Exact Sci.*, 27 (3) (1982), 233–295.

[40] TYCHONOFF, A. «Über die topologische Erweiterung von Räumen». *Math. Ann.*, 102 (1) (1930), 544–561.

[41] TYCHONOFF, A. «Ein Fixpunktsatz». *Math. Ann.*, 111 (1) (1935), 767–776.

[42] URYSOHN, P. «Zum Metrisationsproblem». *Math. Ann.*, 94 (1) (1925), 309–315.

[43] WEIL, A. «Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale». París: Hermann & cie, 1937. (Publications de l'Institut de mathématique de l'Université de Strasbourg; 1. Actualités scientifiques et industrielles; 551)

[44] WEYL, H. *Die Idee der riemannschen Fläche*. Leipzig: B. G. Teubner, 1913.

[45] WRIGHT, D. G. «Tychonoff's theorem». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120 (3) (1994), 985–987.

[46] YOUNG, W. H.; YOUNG, G. C. *The Theory of Sets of Points*. Cambridge: Cambridge University Press, 1906.

JÚLIA MORENO
julsmorenomontes@gmail.com

MÒNICA BLANCO, PERE PASCUAL
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
08028 BARCELONA
{monica.blanco,pere.pascual}@upc.edu