Análisis Matemático para la Ingeniería.

Problemas Resueltos

María Isabel García Planas

Profesora Titular de Universidad

Primera edición: Julio 2020

Editora: la autora

ISBN: 978-84-09-22481-4

A Blanca, Sofía, José Luis y Elisabeth

Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.

Hipatia (Alejandría 355-370)

Si comenzase de nuevo mis estudios, seguiría el consejo de Platón y comenzaría con las matemáticas.

Galileo Galilei (Pisa 1564 - Arcetri 1642)

Presentación

El presente libro es una recopilación de los ejercicios preparados para la asignatura de Cálculo II de la titulación de Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales impartida en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), durante el segundo cuatrimestre del curso académico 2019-20.

Este cuatrimestre se ha visto afectado por el Coronavirus 2019, teniendo que adoptar de forma inesperada la docencia teniendo que hacer, la mayoría de profesores, una transición abrupta para hacer nuestras clases en línea. Esta situación ha obligado a preparar más material docente para ayudar al alumno en su trabajo autónomo. A raíz de esta situación la UPC ha hecho un vuelco hacia la semipresencialidad de la docencia para el próximo curso, y este hecho me ha llevado a recopilar el trabajo realizado para hacerlo útil para la nueva situación.

Las herramientas teóricas necesarias para una óptima comprensión de todos los ejercicios se encuentran en el libro de apuntes de libre disposición “Notas sobre Análisis Matemático para la Ingeniería”que se encuentra en https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/18173/CalculoDif -e-Integ.pdf

Este libro sigue la estructura del libro de apuntes antes mencionado, esto es, está dividido en tres partes, de manera que la primera incluye problemas de cálculo diferencial para n variables. La segunda parte está dedicada al cálculo de integrales para funciones de más de una variable en particular para dos y tres variables. Finalmente, la tercera parte contiene una introducción a la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden.

La Autora

Índice general

PARTE I

Capítulo 1

Continuidad de funciones de n variables

1.1. Topología del espacio $\mathbb{R}^n$

1. Dibujar los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ y decir cuales son abiertos, cerrados o compactos:

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$

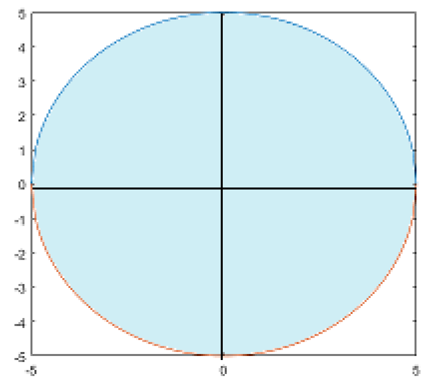
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$

   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$.

   d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, \dfrac{x^2 + y^2}{x} < 2\}$.

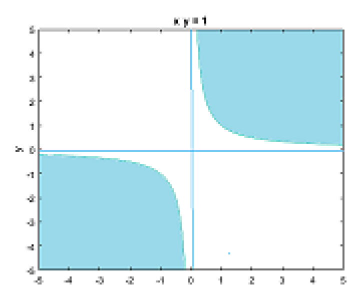
Solución:

a)



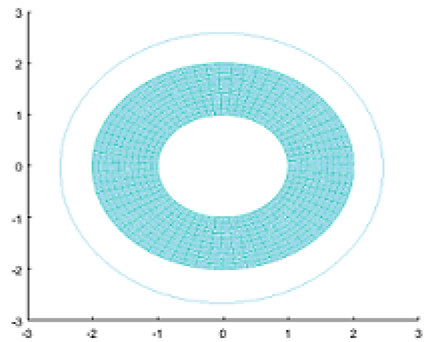
Este conjunto es compacto ya que es cerrado y acotado.

b)



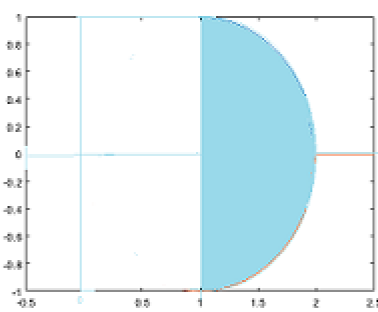
Este conjunto es abierto, no es cerrado ni acotado por lo que no es compacto.

c)



Este conjunto es abierto, es acotado ya que está incluido en cualquier círculo de radio superior a 2, pero no es compacto ya que no es cerrado.

c)



Este conjunto no es abierto ni cerrado, es acotado ya que está incluido en cualquier círculo centrado en el origen de radio superior a 2, pero no es compacto ya que no es cerrado

Observación

“En general”los conjuntos definidos por

- desigualdades del tipo $\lessgtr$ son abiertos
- desigualdades del tipo $\lesseqqgtr$ son cerrados.

solo cuando la función, que define al conjunto, no tiene “problemas”de definición. Ejemplos

$$\{x^2 - 2x + 1 > 0, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ es abierto.}$$

Contraejemplo

$$\{1/x \geq 0, x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty) \text{ es abierto}$$

2. Decir cual de los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados o compactos.

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x,\ e^{xy} - \operatorname{sen} x \leq y^4 + e^x\}$.

   b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ e^{xy} + \mathrm{e}^{yz} + e^{zx} \geq x + y + z\}$.

   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 0, y \leq 2x\}$.

   d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 - y^2 + z^2 < 1,\ xyz > 0\}$.

   e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \operatorname{sen} y > 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$.

   Solución:

   a) Es **compacto** ya que es la intersección de dos conjuntos cerrados:

$$\bar{\mathcal{B}}^2_{1/2}(1/2, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x - 1/4 + y^2 + \leq 1/4\},$$

   que es una bola cerrada y acotada (compacto), y

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{xy} - \operatorname{sen} x \leq y^4 + e^x\}$$

   que es un conjunto definido por una desigualdad no estricta.

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} \geq x + y + z\}$. Este es conjunto es la intersecció de la bola cerrada unidad centrada en el origen y un cerrado, por lo tanto, es compacto.

c) Es cerrado ya que es la intersección de dos conjuntos cerrados.

No es compacto puesto que no está acotado, debido a que los puntos de la forma $(x, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ pertenecen a C.

d) Es la intersección de dos conjuntos abiertos, por tanto, es abierto.

e) Es abierto, ya que es la intersección de tres conjuntos abiertos.

1.2. Funciones vectoriales

1. Dada la función de n variables

$$f(x) = (\ln(||x||), \ln(1 - ||x||))$$

Dar su dominio e imagen

Solución:

Su dominio es: $\mathcal{D}(f) = \mathcal{B}_1^n(0) \setminus \{0\}$, $(\|x\| \neq 0,\ 1 - \|x\| > 0)$.

El conjunto imagen es; $\mathcal{R}(f) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \in (-\infty, 0), \quad y_2 = \ln(1 - e^{y_1})\}$.

2. Dar el dominio de defínción de las siguientes funciones.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2 - 4}$.

b) $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$.

c) $f(x,y) = (\ln(xy), \sqrt{4-x^2-y^2})$.

d) $f(x,y) = \text{arcsen}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

e) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

f) $f(x,y) = \sqrt{y-xy-1}$.

g) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$.

Solución:

a) El dominio es la intersección del dominio de la función numerador y del de la función denominador, menos los puntos que anulan al denominador.

Dominio del numerador: $\{(x,y) \mid 9-x^2-y^2 \geq 0\} = \bar{\mathcal{B}}_3^2(0,0)$ (bola cerrada).

Dominio del denominador: $\{(x,y) \mid x^2+y^2-4 \neq 0\} = \mathbb{R}^2$. El denominador se anula en $\partial\mathcal{B}_2^2(0,0)$.

Por lo tanto: $\mathcal{D}(f) = \bar{\mathcal{B}}_3^2(0,0) \setminus \partial\mathcal{B}_2^2(0,0)$.

b) $\mathcal{D}(f)$ es la clausura de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$.

c) En este caso el dominio es la intersección de los dominios de las dos funciones componentes.

El dominio de f_1 es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ (1er y 3er cuadrantes).

El dominio de f_2 es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4-x^2-y^2 \geq 0$ (bola cerrada)

Por lo tanto:

$$\mathcal{D}(f) = \bar{\mathcal{B}}_2^2(0,0) \cap (\{(x,y) \mid x,y > 0\} \cup \{(x,y) \mid x,y < 0\})$$

d) Teniendo en cuenta que arcsen $: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, se tiene que:

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|, x \neq 0\}$$

e) Teneindo en cuenta que arctan $: (-\infty, \infty) \to [-\pi/2, \pi/2]$, se tiene

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

f) El conjunto definido por $y - xy - 1 = 0$ se expresa por $y(1-x) = 1$.

El plano $\mathbb{R}^2$ queda dividido en cuatro regiones según si $x < 1$ o $x > 1$ i si $y - xy - 1 \geq 0$ o $y - xy - 1 \leq 0$.

Por lo que

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) : x < 1, y \geq \frac{1}{1-x}\} \cup \{(x,y) : x > 1, y \leq \frac{1}{1-x}\}$$

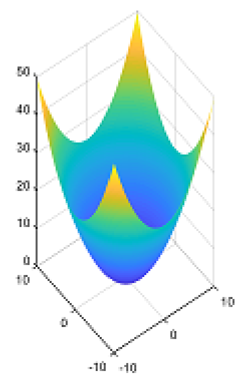
g) El dominio del denominador es $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\}$, y los puntos en que se anula el denominador son $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9 - x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$. Luego

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{B}_3^3(0,0,0). \quad \text{bola abierta}$$

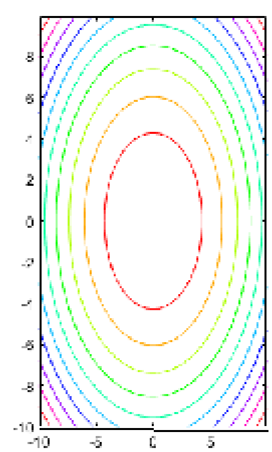
3. Dibujar las curvas de nivel del paraboloide elíptico definido por $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2/4$

Solución:

La gráfica de la función es:



y las curvas de nivel son elipses:



4. Encontrar las curvas de nivel de las siguientes funciones y decir cual es su imagen.

    a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

    b) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.

c) $f(x,y) = x^2 - y$.

d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, definida para $(x,y) \neq (0,0)$.

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, definida para $(x,y) \neq (0,0)$.

f) $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Solución:

a) Las curvas de nivel son circunferencias y el conjunto imagen: $\mathcal{R}(f) = [0,\infty)$.

b) Las curvas de nivel son elipses y el conjunto imagen: $\mathcal{R}(f) = [0,\infty)$.

c) Las curvas de nivel vienen dades por $x^2 - y = C$, con $C \in \mathbb{R}$. Se trata, pues, de parábolas.

Su imagen es: $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$

d) Las curvas de nivel vienen dadas por $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = C$, es decir

$$xy = Cx^2 + Cy^2 \Leftrightarrow Cx^2 - xy + Cy^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4C^2x^2}}{2C}$$

Las curvas de nivel son rectas que pasan por el origen.

Para ver la imagen, observamos que está incluida en $[-1/2, 1/2]$ ya que

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow f(x,y) \leq 1/2$$

y, por otra parte, $(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Leftrightarrow f(x,y) \geq -1/2$

por lo tanto $\mathcal{R}(f) \subset [-1/2, 1/2]$.

Para ver la igualdad, sustituimos y por mx y f es constante y vale $m/(1+m^2)$ que toma todos los valores entre $-1/2$ y $1/2$ variando m.

e) Las curvas de nivel son las rectas $y = \pm\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}x$. Por lo tanto, el conjunto imagen es: $\mathcal{R}(f) = [-1, 1]$.

f) Podemos relacionar los valores de f con los de la función $h(z) = z\mathrm{e}^{-z}$.

Como que $f(x, y) = h(\|(x, y)\|^2)$, las curvas de nivel son circunferencias.

El conjunto imagen es: $\mathcal{R}(f) = (-\infty, e^{-1}]$ ya que h tiene un único máximo absoluto $z = 1$.

1.3. Límites de funciones vectoriales

1. Probar que $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$.

   Solución:

   Fijado $\epsilon > 0$, entonces para $|x - 1| < \delta$ (y, suponiendo $\delta < 1$) tenemos

   $$|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < \delta|x + 1| < 3\delta < \epsilon,$$

   tomando $\delta < \min(\epsilon/3, 1)$, ya que entonces $|x + 1| < 3$.

2. Probar que

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

   b) $\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \|x\|^k = 0$

   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + x + y = 1$

   Solución:

   a) En efecto, teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$, entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon$.

b) Basta con tomar $\delta = \epsilon^{1/k}$ para cualquier $\epsilon > 0$.

c) $|(1 + x + y) - 1| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\|$. Basta con tomar $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$.

3. Consideremos la función

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2} & (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Probar que no existe $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2)$

Solución:

Nos acercamos al origen a través de la recta $x_1 = x_2$ con $x_1 \to 0$,

$f(x_1, x_1) = \frac{x_1^2 x_1^2}{x_1^2 + x_1} \to 0, \; x_1 \to 0$

No acercamos a través de la curva $x_2 = -x_1^2 + x_1^6$,

$f(x_1, -x_1^2 + x_1^6) = \frac{x_1^2(-x_1^2 + x_1^6)^2}{x_1^2 - x_1^2 + x_1^6} = \frac{x_1^6(-1^2 + x_1^4)^2}{x_1^6} \to 1, \; x_1 \to 0$

Los límites según dos curvas distinta no coinciden, por lo tanto el límite no existe.

4. Para las siguientes funciones, hallar valores para $\delta(\epsilon)$ ("óptimos") tales que si $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta(\epsilon)$ entonces $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \epsilon$.

   a) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

   b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

   c) $f(x, y) = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$.

Solución:

Observación: $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

a) $\delta(\epsilon) = \epsilon^{3/2}$, ya que

$|\sqrt[3]{xy}| = \sqrt[3]{|xy|} = |x|^{1/3}|y|^{1/3} \leq (x^2+y^2)^{1/3} \leq \varepsilon$

$\delta = \sqrt{x^2+y^2} \leq \varepsilon^{3/2}$.

b) $\delta(\epsilon) = \epsilon$, ya que

$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \underset{|x^2|\leq|x^2+y^2|}{\leq} \left|\dfrac{x^2y}{x^2}\right| = |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \delta = \varepsilon.$

c) $\delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon/2}$, ya que:

$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} - 1\right| = \left|\dfrac{-2(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\right| \leq 2\|(x,y)\|^2 = 2\delta^2 = \varepsilon.$

5. Calcular

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x+y-3z}{2x-5y+3z}$$

Solución:

$\text{lím}_{(x,0,0)\to(0,0,0)} \dfrac{4x+y-3z}{2x-5y+3z} = \text{lím}_{(x,0,0)\to(0,0,0)} \dfrac{4x}{2x} = 2$

$\text{lím}_{(0,y,0)\to(0,0,0)} \dfrac{4x+y-3z}{2x-y+3z} = \text{lím}_{(0,y,0)\to(0,0,0)} \dfrac{y}{-5y} = -\dfrac{1}{5}$

Ambos límites son distintos, luego el límite no existe.

6. Calcular

   a) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\arccos(x/y)}{1+xy}$.

   b) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

Solución:

a) La función está definida, en el punto $(0,1)$, tanto en el numerador como en el denominador y no se anula en el denominador.

Por lo tanto se puede calcular el límite por sustitución, obteniendo $\pi/2$.

b) Se observa que, si $x=0$, el límite vale 0. Si $x=y$, el límite vale $1/2$

Por caminos distintos llegamos a puntos distintos, luego el límite no existe.

c) Se observa que para $x=0$, el límite vale -1 y para $x=y$, el límite vale 0.

Al igual que en el apartado anterior, el límite no existe.

d) Se observa que para $x=0$, el límite vale 0 y para $x=y$, el límite vale $1/2$.

Por lo tanto, el límite no existe.

e) Se observa que para $x=0$, el límite vale 0 y para $x=y$, nos queda $\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{sen} x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto el límite no existe.

7. Calcular

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$.

c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, (definida si $x, y > 0$ y $x \neq y$).

e) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+y^2}\right)$.

Solución:

a) Teniendo en cuenta que $|xy| \leq (x^2+y^2)|$, se concluye que

$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Por lo que el límite es: 0.

b) En primer lugar

$|xy\ln(x^2+y^2)| \leq |(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)| = h(\|(x,y)\|)$

donde $h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ es la función de una variable definida por

$h(t) = t^2\ln(t^2)$, que comple $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$.

Teniendo en cuenta la propiedad: Si $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es una función escalar que cumple que $\lim_{t\to 0^+} h(t) = L$, entonces también, para cualquier n: $\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} h\left(\|(x_1,\ldots,x_n)\|\right) = L$.

Entonces, el límite buscado es: 0.

c) El límite es 0 ya que

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \left|\frac{\|(x,y,z)\|^3}{\|(x,y,z)\|^2}\right| = \|(x,y,z)\| \to 0$$

d) En primer lugar, observamos que la función no está definida en ninguna bola centrada en cero (excluyendo el centro).

Podemos multiplicar y dividir por el conjugado

$$\left|\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right| = \left|\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right| = \left|\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}\right|$$
$$= \left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right| \leq \left|\sqrt{x}\right| + \left|\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \leq 2\sqrt{\|(x,y)\|}$$

Por lo que, el límite es: 0.

e) Si hacemos $x = 1$, el límite no existe ($\lim_{y\to 1} \dfrac{\pi}{1+y^2} = \dfrac{\pi}{2}$).

Por lo tanto, el límite no existe.

1.4. Continuidad de funciones vectoriales

1. Sea $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$ si $xy \neq 0$ y $f(x,y) = a$ si $xy = 0$.

   a) ¿Para qué valor de $a \in \mathbb{R}$ es f continua en $(0,0)$?

   b) Para este valor de a discutir la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

a) Hacemos $xy = t$ y definimos $g(t) = \dfrac{\cos(t)-1}{t^2}$, $\lim_{t\to 0} g(t) = -1/2$ (aplicando la regla de l'Hôpital). por lo tanto $a = -1/2$.

b) Por generación, f es continua fuera de $xy = 0$

Para ver la continuidad cuando $xy = 0$: recordamos que para t suficientemente pequeño, podemos aproximar la función de la ,anera:

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + O(t^6) \Leftrightarrow \cos t - 1 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{4!}t^4 + O(t^6)$$

$$\left|\frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}+\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\cos(xy)-1+\frac{1}{2}x^2y^2}{x^2y^2}\right| \underbrace{=}_{t=xy}$$
$$\left|\frac{1}{4!}(xy)^4+O((xy)^6)\right| \to 0, \text{ cuando } (x,y)\to(0,0).$$

2. Estudiar la continuidad de la función $\text{máx} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Solución:

La función máximo es una función que está definida a trozos

$$\text{máx}\{x,y\} = \begin{cases} x & x \geq y \\ \\ y & y < x \end{cases}$$

y, salvo en $x = y$, es una función polinomial (que vale x o y). Veamos que es continua en cualquier punto (a,a), con $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \text{máx}\{x,y\} = a. \text{ En efecto}$$

$$|\text{máx}\{x,y\} - a| \leq \text{máx}\{|x-a|, |y-a|\} \leq \|(x-a, y-a)\|$$

3. Para las siguientes funciones definidas a trozos discutir su continuidad en $\mathbb{R}^2$.

   a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$ si $xy \neq 0$ y $f(x,y) = 1$ si $xy = 0$.

   b) $f(x,y) = \text{máx}\{x,y\}$ si $x > 0$ y $f(x,y) = 0$ si $x \leq 0$.

   c) $f(x,y) = x$ si $|x| \leq |y|$ y $f(x,y) = y$ si $|x| > |y|$.

   d) $f(x,y) = x$ si $x^2+y^2 \leq 1$ y $f(x,y) = y$ si $x^2+y^2 > 1$.

Solución:

a) Observamos que f se puede escribir como composición de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$,

$$f = h \circ g$$

donde $g(x,y) = xy$ y $h(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ si $t \neq 0$ y $h(0) = 1$.

(Para la función h basta observar, aplicando la regla de l'Hôpital, que $\lim_{t\to 0} h(t) = 1$.

Por lo que la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} y, & y \geq x > 0 \\ x, & x > 0, y < x \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

El único problema puede aparecer en $x = 0$.

$\lim_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y) = \begin{cases} a & \text{si } x > 0 (x \to 0) \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Por lo que la función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y > 0\}$

c) Se trata de una función definida a trozos: $f(x,y) = \begin{cases} x, & |x| \leq |y| \\ y, & |x| > |y| \end{cases}$

y es continua salvo quizá en las diagonales de los dos cuadrantes.

En la diagonal (a,a), la función vale a y es continua

$$|f(x,y) - a| = \begin{cases} |x-a|, & |x| \leq |y| \\ |y-a|, & |x| > |y| \end{cases} \leq \|(x-a, y-a)\| \underset{(x,y)\to(a,a)}{\longrightarrow} 0$$

En cambio, en la diagonal $(a, -a)$, $a \neq 0$, la función no es continua. Por ejemplo, supongamos $a > 0$

$$f(x,-a) = \begin{cases} x, & |x| \leq a \\ -a, & |x| > a \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x,a) = -a \neq \lim_{x \to a^-} f(x,a) = a$$

Por lo que la función es contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$.

d) Salvo en la circunferencia unidad centrada en cero, $(\partial \mathcal{B}_1^2(0,0))$, la función es continua.

Tomando un punto (a, b) de esta circunferencia. Entonces, es claro que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b), \\ x^2+y^2<1}} f(x,y) = a$$

mientras que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b), \\ x^2+y^2>1}} f(x,y) = b$$

estos dos límites solo coinciden cuando $a = b$ y $a^2 + b^2 = 1$, y

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

Por lo que la función es discontinua en

$$\partial \mathcal{B}_1^2(0,0) \setminus \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}.$$

Capítulo 2

Derivación de funciones de n variables

2.1. Derivadas parciales primeras y de orden superior

1. Sea $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 - \operatorname{sen}(x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Calcular las derivadas parciales en el origen.

   Solución:

   Para calcular las derivadas parciales en el origen, hacemos uso de la definición

   $\partial_1 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t^3} = 0.$

   $\partial_2 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3/6}{t^3} = 1/6.$

2. calcular las derivadas parciales de

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2 \operatorname{sen} x_1}$$

en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Solución:

$\partial_1 f = e^{x_2 \operatorname{sen} x_1} + x_1 x_2 \cos x_1 e^{x_2 \operatorname{sen} x_1}$, $\partial_2 f = x_1 \operatorname{sen} x_1 e^{x_2 \operatorname{sen} x_1}$

$\partial_1 f(\pi/2, 0) = 1$ y $\partial_2 f(\pi/2, 0) = \pi/2$.

3. Calcular la matriz jacobiana de $f(x_1, x_2) = (e^{x_1+x_2} + x_2, x_1 x_2^2, \cos(x_1 x_2^2))$.

Solución:

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} + 1 \\ x_2^2 & 2x_1 x_2 \\ -x_2^2 \operatorname{sen}(x_1 x_2^2) & -2x_1 x_2 \operatorname{sen}(x_1 x_2^2) \end{pmatrix}$$

4. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones.

   a) $f(x, y) = x^{y^x}$.

   b) $f(x, y) = x^{xy}$.

   c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$.

   d) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

   e) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

   f) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Solución:

a) $x^{(y^x)} = e^{y^x \log x} = e^{e^{x \log y} \log x}$ y su derivada parcial respecto x vale

$$\partial_x(x^{(y^x)}) = x^{y^x} y^x \left(\ln(x) \ln(y) + \frac{1}{x} \right)$$

y respecto y vale

$$\partial_y(x^{(y^x)}) = x^{y^x} x y^{x-1} \ln(x)$$

b) $f(x, y) = x^{xy} = e^{xy \ln x}$.

$\partial_x f(x, y) = x^{yx} \left(y \ln(x) + y\right)$,

$\partial_y f(x, y) = x^{yx} x \ln(x)$.

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x = e^{x \ln(x^2+y^2)}$.

$\partial_x f(x, y) = (x^2 + y^2)^x \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \right)$,

$\partial_y f(x, y) = 2xy(x^2 + y^2)^{x-1}$.

d) $\partial_x f(x, y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}$,

$\partial_y f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2 x}{x^2+y^2}$.

e) $\partial_x f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$,

$\partial_x f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$.

f) $\partial_x f(x, y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$\partial_y f(x, y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

5. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones.

   a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

c) $f(x, y) = \dfrac{\cos x + \mathrm{e}^{xy}}{x^2 + y^2}$.

d) $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \tan(y^2 z)$.

e) $f(x, y, z) = x\mathrm{senh}\left(\dfrac{y}{z}\right)$.

Solución:

a) $\partial_x f(x, y) = \dfrac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$,

$\partial_y f(x, y) = \dfrac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.

b) $\partial_x f(x, y) = \dfrac{-4xy^2}{(x^2 - y^2)^2}$,

$\partial_x f(x, y) = \dfrac{4yx^2}{(x^2 - y^2)^2}$

c) $\partial_x f(x, y) = \frac{ye^{xy} - \mathrm{sen}(x)}{x^2 + y^2} - \frac{2\,x(\cos(x) + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$

$\partial_y f(x, y) = \frac{xe^{xy}}{x^2 + y^2} - \frac{2\,y(\cos(x) + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$

d)

$$
\begin{aligned}
\partial_x f &= e^x \tan\left(y^2 z\right) \\
\partial_y f &= 2\left(\tan\left(y^2 z\right)^2 + 1\right) yze^x \\
\partial_z f &= \left(\tan\left(y^2 z\right)^2 + 1\right) y^2 e^x
\end{aligned}
$$

e)

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= \operatorname{senh}\left(\frac{y}{z}\right) \\
\partial_y f &= \frac{x\cosh\left(\frac{y}{z}\right)}{z} \\
\partial_z f &= -\frac{xy\cosh\left(\frac{y}{z}\right)}{z^2}
\end{aligned}$$

2.2. Derivabilidad y continuidad

1. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si}(x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estudiar la continuidad en el origen de dicha función

   b) Calcular las derivadas parciales en el origen

Solución:

a) No es continua en el origen ya que no tiene límite $(0,0)$ (si nos acercamos con rectas $y = mx$ cada límite es distinto).

b)

$$f(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial_1 f(0,0) = 0$$

$$f(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial_2 f(0,0) = 0$$

2. Aplicando la definición, calcular (si existen) las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en el $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

b) $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 1$.

Solución:

a) $\partial_x f(0,0) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$,

$\partial_y f(0,0) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$.

b) Como que $f(h,0) = h\ln h^2$, no existe $\partial_x f(0,0)$,

Como que $f(0,h) = 0$, $\partial_y f(0,0) = 0$.

c) Como que $f(h,0) = (h^2)^h = e^{2h\ln h}$, $(\text{lím}_{h\to 0} \frac{e^{2h\ln(h)}-1}{h})$ no existe $\partial_x f(0,0)$,

Como que $f(0,y) = 1$, $\partial_y f(0,0) = 0$.

3. Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones y dar su matriz jacobiana.

   a) $f(x,y) = (\mathrm{e}^{xy} + y, y^2x)$.

   b) $f(x,y) = (\cos(x+2y), y\mathrm{e}^{x+y}, \cosh(xy^2))$.

   c) $f(x,y,z) = (z\tan(x^2+y^2), xy\ln(z))$.

Solución:

a)

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

b)

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} -\text{sen}(x+2y) & -2\text{sen}(x+2y) \\ ye^{x+y} & (y+1)e^{x+y} \\ y^2\text{senh}\,(xy^2) & 2xy\text{senh}\,(xy^2) \end{pmatrix}$$

c)

$$Jf = \begin{pmatrix} 2xz\sec^2(x^2+y^2) & 2yz\sec^2(x^2+y^2) & \tan(x^2+y^2) \\ y\ln(z) & x\ln(z) & \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

4. De acuerdo con la ley de los gases perfectos se tiene la relación $PV = kT$, donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura y k una constante. Probar que

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1.$$

Solución:

Aislando cada magnitud y haciéndola variable de las otras

$T = PV/k$, por lo tanto, $\partial_P T = V/k$.

$P = kT/V$, por lo tanto, $\partial_V P = -kT/V^2$

$V = kT/P$, por lo tanto, $\partial_T V = k/P$

Así pues,

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{V}{k}\right)\cdot\left(-\frac{kT}{V^2}\right)\cdot\left(\frac{k}{P}\right) = -\frac{KT}{VP} = -1$$

2.3. Derivadas parciales de orden superior

1. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2 + x_2\mathrm{sen}\,(x_1)$.

   a) Calcular las derivadas parciales en todos los puntos (x_1, x_2) de esta función.

   b) Calcular las derivadas parciales de las funciones halladas en el apartado anterior (derivadas parciales segundas de f)

   c) Calcular todas las derivadas parciales de orden 3, $\partial^3_{x_1x_1x_1}f$, $\partial^3_{x_1x_2x_1}f$, $\partial^3_{x_2x_1x_1}f$, $\partial^3_{x_2x_2x_1}f$ de dicha función

Solución:

a) $\partial_{x_1}f = 3x_1^2 + x_2 + x_2\cos(x_1)$,

$\partial_{x_2}f = x_1 + \mathrm{sen}\,(x_1)$.

b)

$$\begin{aligned}
\partial^2_{x_1x_1}f &= \partial_{x_1}\left(\partial_{x_1}f\right) = 6x_1 - x_2\mathrm{sen}\,(x_1),\\
\partial^2_{x_2x_1}f &= \partial_{x_2}\left(\partial_{x_1}f\right) = 1 + \cos(x_1),\\
\partial^2_{x_ix_j}f &= \partial_{x_1}\left(\partial_{x_2}f\right) = 1 + \cos(x_1),\\
\partial^2_{x_1x_2}f &= \partial_{x_2}\left(\partial_{x_2}f\right) = 0.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\partial^3_{x_1x_1x_1} f &= \partial_{x_1}\left(\partial^2_{x_1x_1} f\right) = -x_2\cos(x_1) + 6,\\
\partial^3_{x_1x_2x_1} f &= \partial_{x_1}\left(\partial^2_{x_2x_1} f\right) = -\mathrm{sen}\,(x_1),\\
\partial^3_{x_2x_1x_1} f &= \partial_{x_2}\left(\partial^2_{x_1x_1} f\right) = -\mathrm{sen}\,(x_1),\\
\partial^3_{x_2x_2x_1} f &= \partial_{x_2}\left(\partial^2_{x_2x_1} f\right) = 0
\end{aligned}$$

2. consideremos la función:

$$\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Calcular las funciones derivadas parciales

   b) Calcular las derivadas parciales segundas cruzadas

Solución:

a)

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4\,x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4\,x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b)

$$\partial^2_{x,y} f(x,y) = \partial^2_{y,x} f(x,y) = \frac{x^6 + 9\,x^4y^2 - 9\,x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^4}$$

Para calcular $\partial^2_{y,x}(0,0)$ debemos usar la definición:

$$\partial^2_{y,x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial_x f(0,y) - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\frac{-y^5}{y^4} = -1$$

mientras que la la derivada segunda $\partial^2_{x,y}(0,0)$

$$\partial^2_{x,y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial_y f(x,0) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{x^5}{x^4} = 1$$

Observamos que en este caso, las derivadas cruzadas no coinciden.

3. Considerar la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Aplicando la defínción de derivada parcial calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
   c) Demostrar que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
   d) ¿Cuál es el mayor subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ en el que $f \in \mathcal{C}^1(D)$?

Solución:

a) Como que $f(x,0) = 0$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

b) Usando las reglas de derivación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

c) Podemos ecoger la recta $y = 0$ y (límite 0)

y la recta $x = 0$ y (límite 1).

d) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. Considerar la función

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0)=0$.

a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, si $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Usando la definición calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Usando la definición calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

d) ¿Cuál es el mayor subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ en el que $f \in \mathcal{C}^2(D)$?

e) ¿Cuál es el mayor subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ en el que $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$?

Solución:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

d) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

e) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2.4. Derivadas direccionales

1. Consideremos la función $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Dar la derivada direccional máxima de f en $(0,0)$.

   Nota: tener en cuenta que la función dada no es $\mathcal{C}^1$ en ningún entorno de $(0,0)$ y recordar que, por definición, los vectores según los cuales se calculan las derivadas direccionales son unitarios.

   Solución:

   Calculemos la derivada direccional en una dirección, (u,v) co $u^2+v^2=1$
   $\text{lím}_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t(u,v)) - f(0,0)}{t} = \text{lím}_{t\to 0} \dfrac{\frac{t^2u^2tv}{t^2u^2+t^2v^2} - 0}{t} =$
   $\text{lím}_{t\to 0} \dfrac{\frac{t^3u^2v}{t^2(u^2+v^2)}}{t} = \text{lím}_{t\to 0} \dfrac{t^3u^2v}{t^3} = u^2v = h(u,v)$
   Busquemos los extremos de la función h (derivada direccional) con la restricción $u^2+v^2=1$

   $h(u,v) = (1-v^2)v = g(v)$

   $g'(v) = 1 - 3v^2 = 0, \Rightarrow \;\; v = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   $g''(v) = -6v < 0$ para $v = +\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   $u^2 = 1 - v^2 = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

   el valor máximo se alcanza en $(\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3})$ y vale $h(u,v) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

2. Calcular la derivada direccional máxima de $f(x,y) = x^y$ en $(e,1)$.

   Solución:

El gradiente de la función f es $\nabla f(x,y) = (x^{y-1}y,\ x^y \ln(x))$

En el punto $(e,1)$, es $\nabla f(e,1) = (1,\ e)$

Por la fórmula del gradiente, la derivada máxima es $\|\,(1,\ e)\,\| = \sqrt{1+e^2}$

3. Usar la fórmula del gradiente para calcular las siguientes derivadas direccionales.

   a) $D_u f(1,0)$ si $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ y $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

   b) $D_u f(0,-1)$ si $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(\pi y)$ y $u = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

   c) $D_u f(1,0,0)$ si $f(x,y,z) = x^2 \mathrm{e}^{-yz}$ y $u = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Solución:

En todos los casos usaremos $\partial_v f(a) = \langle v, \nabla f(a)\rangle$

y, por lo tanto, lo primero que hacemos es calcular el gradiente.

a) $\nabla f(1,0) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right) = (1,\ 0)$

$D_u f(1,0) = \langle (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (1,\ 0)\rangle = 2/\sqrt{5}$

b) $\nabla f(0,-1) = (\cos(\pi y)\, e^x,\ -\pi e^x \mathrm{sen}\ (\pi y)) = (-1,\ 0)$

$D_u f(0,-1) = \langle (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1,\ 0)\rangle = 1/\sqrt{2}$

c) $\nabla f(1,0,0) = \left(2\, x e^{(-yz)},\ -x^2 z e^{(-yz)},\ -x^2 y e^{(-yz)}\right) = (2,\ 0,\ 0)$

$$D_u f(1,0,0) = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2/\sqrt{3}$$

4. Dada la función $f(x,y,z) = 2x^3 y - 3y^2 z$

a) Calcular la derivada direccional en $P = (1, 2, -1)$ en la dirección que va hacia $Q = (3, -1, 5)$

b) ¿En qué dirección a partir de P es máxima la derivada direccional?

c) ¿Cuál es el valor de la derivada direccional máxima?

Solución

a) Calculamos el gradiente en P

$$(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z)_P = (6x^2y, 2x^3 - 6yz, -3y^2)_{(1,2,-1)} = (12, 14, -12)$$

La dirección viene dada por el vector $Q - P = (2, -3, 6)$ que normalizando es $v = \frac{1}{7}(2, -3, 6)$

Por lo tanto la derivada direccional es:

$$\langle (12, 14, -12), \frac{1}{7}(2, -3, 6) \rangle = -\frac{90}{7}$$

b) La derivada direccional máxima es la dirección del gradiente:

$$(12, 14, -12)$$

c) El valor es la norma del gradiente:

$$\langle (12, 14, -12), \frac{1}{\|(12, 14, -12)\|}(12, 14, -12) \rangle = \frac{\|(12, 14, -12)\|^2}{\|(12, 14, -12)\|} = 22$$

5. El perfil de una cierta montaña se modela mediante la función $h(x, y) = 5000 - 0{,}01x^2 - 0{,}02y^2$, donde si (x, y) es un punto del plano ("imaginario", ya que la tierra no es plana) que define la base de la montaña, entonces $z = h(x, y)$ nos da la correspondiente altura.

Un montañero se encuentra en el punto $(x, y) = (10, 10)$, a punto de alcanzar la cima.

a) ¿En qué dirección se ha de mover para subir más rápidamente?

b) ¿Cuál es la pendiente?

c) Si en lugar de escoger la dirección de máxima pendiente opta por escoger una con una pendiente del 40 %, ¿qué dirección debe seguir?

Solución:

a) Si se encuentra en el punto de coordenadas $(10, 10)$, la dirección "para subir más rápidamente" es la dirección de la derivada máxima de la función altura. Para calcularla:

$$\nabla f(x, y) = (-0{,}02x, -0{,}04y) \to \nabla f(10, 10) = (-0{,}2, -0{,}4)$$

y por tanto la dirección de la derivada máxima será

$$v = \frac{\nabla f(10, 10)}{\|\nabla f(10, 10)\|} = \frac{1}{1/\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{5}, \frac{-2}{5} \right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

b) La pendiente es precisamente el valor de la derivada direccional

$$\nabla f(10, 10) = 1/\sqrt{5}.$$

c) Para determinar la o las direcciones que dan lugar a esta pendiente, escribimos

$$\partial_v f(10, 10) = \langle v, \nabla f(10, 10) \rangle = \langle v, (-0{,}2, -0{,}4) \rangle =$$
$$- 0{,}2v_1 - 0{,}4v_2 = 0{,}4 \text{ (pendiente del 40 \%)}$$

La ecuación para la dirección será:

$$v_1 + 2v_2 = -2, \quad \text{con } \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1,$$

ya que el vector ha de tener módulo 1.

Podemos escribir $v_1 = \operatorname{sen}\theta$ y $v_2 = \cos\theta$ y solo nos queda la ecuación de la izquierda en términos de θ: $\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta = -2$.

Una solución es claramente $\theta = \pi$, que corresponde a la dirección $(0, -1)$ y la otra es $\operatorname{sen}\theta + 2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = -2$ de donde $\operatorname{sen}\theta = -4/5$ y el vector es $(-4/5, -3/5)$.

2.5. Regla de la cadena

1. Dada la composición $\tilde{f} = f \circ g$ con $f(y_1, y_2) = (\cos(y_2) + y_1^2, e^{y_1+y_2}, y_1 - y_2)$ y $g(x_1, x_2) = (e^{x_1^2}, x_1 - \operatorname{sen}(x_2))$. Comprobar que

$$J\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Con el producto de las matrices jacobianas en $(0, 0)$

   b) Calculando directamente la composición y las derivadas en $(0, 0)$.

Solución:

a) La matriz jacobiana de f en (y_1, y_2) es

$$Jf(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2\,y_1 & -\operatorname{sen}(y_2) \\ e^{(y_1+y_2)} & e^{(y_1+y_2)} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz jacobiana de g en (x_1, x_2) es

$$Jg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2\,x_1 e^{\left(x_1^2\right)} & 0 \\ 1 & -\cos(x_2) \end{pmatrix}$$

Ahora queremos calcular la matriz jacobiana de la composición en $(0,0)$, $J\tilde{f}(0,0)$ usando la regla de la cadena, que en este caso nos dice:

$$J\tilde{f}(0,0) = (Jf)(g(0,0))(Jg)(0,0) \underbrace{=}_{g(0,0)=(1,0)} (Jf)(1,0)(Jg)(0,0)$$

como que

$$(Jg)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (Jf)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e & e \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matriz jacobiana de la composición es

$$J\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e & e \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Veamos que pasa si hacemos primero la composición.

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \Bigg(\cos(x_1 - \operatorname{sen}(x_2)) + e^{\left(2\,x_1^2\right)}, e^{\left(x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} - \operatorname{sen}(x_2)\right)}, \\ -x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} + \operatorname{sen}(x_2)\Bigg)$$

y su matriz jacobiana $J\tilde{f}(x_1, x_2)$ es

$$\begin{pmatrix} 4\,x_1 e^{\left(2\,x_1^2\right)} - \operatorname{sen}(x_1 - \operatorname{sen}(x_2)) & \cos(x_2)\operatorname{sen}(x_1 - \operatorname{sen}(x_2)) \\ \left(2\,x_1 e^{\left(x_1^2\right)} + 1\right) e^{\left(x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} - \operatorname{sen}(x_2)\right)} & -\cos(x_2)\, e^{\left(x_1 + e^{\left(x_1^2\right)} - \operatorname{sen}(x_2)\right)} \\ 2\,x_1 e^{\left(x_1^2\right)} - 1 & \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

que, evaluada en el $(0,0)$ da (obviamente) el mismo resultado

$$J\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular $\partial_1 \tilde{f}(x_1,x_2)$ si $\tilde{f} = f \circ g$ con

$$\begin{aligned} f(y_1,y_2,y_3) &= y_1^2 + y_2^2 - y_3, \\ g(x_1,x_2) &= (x_1^2 x_2, x_2^2, e^{-x_1x_2}). \end{aligned}$$

   a) A partir de la descripción explícita de la composición

   b) Utilizando la regla de la cadena

Solución:

En este caso la composición vale

$$\tilde{f}(x_1,x_2) = x_1^4 x_2^2 + x_2^4 - e^{-x_1x_2}$$

y es fácil ver que

$$\partial_{x_1}\tilde{f}(x_1,x_2) = 4x_1^3 x_2^2 + x_2 e^{-x_1x_2}.$$

b) Cálculo de matrices jacobianas:

$$Jg(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2\,x_1x_2 & x_1^2 \\ 0 & 2\,x_2 \\ -x_2 e^{(-x_1x_2)} & -x_1 e^{(-x_1x_2)} \end{pmatrix}$$

$$Jf(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} 2\,y_1 & 2\,y_2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana se puede obtener primero haciendo el producto de las matrices y despuesés sustituir las variables y_i por su valor respecto las variables x_j

$$\begin{pmatrix} 4\,x_1x_2y_1 + x_2e^{(-x_1x_2)} & 2\,x_1^2y_1 + 4\,x_2y_2 + x_1e^{(-x_1x_2)} \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, la derivada parcial respecto x_1 es la primera componente,

$$\partial_{x_1}\tilde{f}(x_1,x_2) = 4\,x_1x_2y_1 + x_2e^{(-x_1x_2)} \underbrace{=}_{y_1=x_1^2x_2} 4x_1^3x_2^2 + x_2e^{-x_1x_2}$$

o haciendo primero el cambio de la relación de las variables y_i respecto x_j en la matriz jacobiana de f y después hacer el producto:

3. Sean $f(u,v) = (\mathrm{tg}(u-1) - \mathrm{e}^v, u^2 - v^2)$ y $g(x,y) = (\mathrm{e}^{x-y}, x-y)$.

   Calcular $D(f \circ g)(1,1)$ mediante la regla de la cadena.

   Solución:

   Calculemos $Df(u,v)$ y $Dg(x,y)$

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \sec^2(u-1) & -e^v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, \quad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Teniendo en cuenta que $g(1,1) = (1,0)$, se tiene

$$D(f \circ g)(1,1) = Df(1,0)Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Dada una función $f = f(u, v, w)$ de clase C^1, calcular medante la regla de la cadena, las derivadas parciales primeras de la función h en términos de las de α, β y γ en cada uno de los casos siguientes.

   a) $h(x) = f(x, \alpha(x), \beta(x))$

   b) $h(x, y) = f(y, \alpha(x, y), \beta(x))$

   c) $h(x, y, z) = f(\alpha(z), \beta(y, z), \gamma(x, y, z))$

Solución:

a)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (g_1(x), g_2(x), g_3(x)) & \longrightarrow & f(u, v, w) \\ & & (x, \alpha(x), \beta(x)) & \longrightarrow & f(x, \alpha(x), \beta(x)) \end{array}$$

$$h'(x) = \begin{pmatrix} \partial_u f(u, v, w) & \partial_v f(u, v, w) & \partial_w f(u, v, w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \\ g_3'(x) \end{pmatrix}$$

$$h'(x) = \partial_1 f(x, \alpha(x), \beta(x)) + \partial_2 f(x, \alpha(x), \beta(x))\alpha'(x) + \partial_3 f(x, \alpha(x), \beta(x))\beta'(x)$$

b)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
(x,y) & \longrightarrow & (g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)) & \longrightarrow & f(u,v,w) \\
 & & (y, \alpha(x,y), \beta(x)) & \longrightarrow & f(y, \alpha(x,y), \beta(x))
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x h(x,y) & \partial_y h(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \partial_u f(u,v,w) & \partial_v f(u,v,w) & \partial_w f(u,v,w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x g_1(x) & \partial_y g_1(x) \\ \partial_x g_2(x) & \partial_y g_2(x) \\ \partial_x g_3(x) & \partial_y g_3(x) \end{pmatrix}$$

$$\partial_x h(x,y) = \partial_v f(y, \alpha(x,y), \beta(x)) \partial_x \alpha(x,y) + \partial_w f(y, \alpha(x,y), \beta(x)) \beta'(x),$$

$$\partial_y h(x,y) = \partial_u f(y, \alpha(x,y), \beta(x)) + \partial_v f(y, \alpha(x,y), \beta(x)) \partial_y \alpha(x,y).$$

c)

$$\begin{aligned}
\partial_x h(x,y) &= \partial_w f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z)) \partial_x \gamma(x,y,z), \\
\partial_y h(x,y) &= \partial_v f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z)) \partial_y \beta(y,z) + \\
&\quad \partial_w f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z)) \partial_y \gamma(x,y,z), \\
\partial_z h(x,y) &= \partial_u f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z)) \alpha'(z) + \\
&\quad \partial_v f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z)) \partial_z \beta(y,z) + \\
&\quad + \partial_3 f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z)) \partial_z \gamma(x,y,z).
\end{aligned}$$

2.6. Derivada de las funciones inversa e implícita

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$. Comprobar que existe f^{-1} localmente y calcular Df^{-1}.

   Solución:

   La matriz jacobiana de f en un punto (x,y) cualquiera es

   $$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}$$

   y su determinante es

   $$\det(Df(x,y)) = -2\,e^{(x+y)}$$

   que no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, en cada punto (x,y) existe una función inversa local y la matriz jacobiana de la inversa es

   $$Df^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{-x} & \frac{1}{2}\,e^{-x} \\ \frac{1}{2}\,e^{-y} & -\frac{1}{2}\,e^{-y} \end{pmatrix}$$

2. Sea $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Probar que f tiene una inversa local en todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ y calcular su matriz derivada.

   Solución:

   En primer lugar, veamos que f tiene una inversa local en cada punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

Como que f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ solo es necesario ver que el determinante jacobiano no se anula en ningún punto

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 2\,e^{(2\,y)} & 2\,e^{(2\,z)} \\ 2\,e^{(2\,x)} & 0 & -2\,e^{(2\,z)} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, su determinante jacobiano vale

$$\det\left(Df(x,y,z)\right) = -4\left(e^{2\,x+2\,z} + e^{2\,y+2\,z}\right) < 0$$

que no se anula en ningún punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

Para ver que tiene inversa global, tenemos que encontrar la inversa y ver que es $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$. Para hacerlo, hemos de aislar x, y, z de la expresión siguiente

$$\begin{aligned} \bar{x} &= e^{2y} + e^{2z} \\ \bar{y} &= e^{2x} - e^{2z} \\ \bar{z} &= x - y \end{aligned}$$

y expresarlas en función de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

3. Sea $f(x,y,z) = x^2 + ay^2 + z^2 + xy + 2z - 1$

   a) Determinar para que valor de a, $f(x,y,z) = 0$ define en el punto $p = (0,-1,0)$ a $z = g(x,y)$ como función implícita de x e y
   b) Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en el punto $(0,-1)$
   c) Calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial xx}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial xy}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial yx}$ y $\dfrac{\partial^2 g}{\partial yy}$ en el punto $(0,-1)$

Solución: a) $f(0,-1,0)=0 \;\Rightarrow\; a=1$

p pertenece a la superficie $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+2z-1=0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x+y\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y+x\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z+2\end{aligned}$$

Las derivadas parciales son continuas (son funciones polinómicas)

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(p)=2\cdot 0+2=2\neq 0$

Por lo tanto $f=0$ define a z como función implícita de x e y en el punto p.

b) derivamos implícitamente $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+2z-1=0$ respecto a x y respecto a y

$$\begin{aligned}2x+y+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad&\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+y}{2z+2}\\ 2x+y+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad&\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2y+x}{2z+2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,-1)=\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(0,-1)=1$$

c) Derivamos implícitamente

$$\begin{aligned}2x+y+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial x}&=0\\ 2x+y+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial x}&=0\end{aligned}$$

respecta a x y respecto a y

$$
\begin{array}{lll}
2+2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial xx}+2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial xx}=0 & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 z}{\partial xx}=-\dfrac{2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2z+2} \\
2\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial yx}+1+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial yx}=0 & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 z}{\partial yx}=-\dfrac{2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+1}{2z+2} \\
2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}+1+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}=0 & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}=-\dfrac{2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+1}{2z+2} \\
2+2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial xx}+2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial yy}=0 & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 z}{\partial yy}=-\dfrac{2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{2z+2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 z}{\partial xx}(0,-1)=-\dfrac{2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=-\dfrac{5}{4} \\
\dfrac{\partial^2 z}{\partial yx}=-\dfrac{2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+1}{2}=-1 \\
\dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}=-\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+1}{2}=-1 \\
\dfrac{\partial^2 z}{\partial yy}=-\dfrac{2+2\cdot 1}{2}=-2
\end{array}
$$

4. Probar que el sistema de ecuaciones siguiente

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
xe^{u+v}+2uv & = & 1 \\
ye^{u-v}-\frac{u}{1+v} & = & 2x,
\end{array}\right.
$$

determina dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ que satisfacen $u(1,2)=v(1,2)=0$. Calcular $\partial_x u(1,2)$ y $\partial_y v(1,2)$.

Solución:

El primer paso es escribir el sistema como una ecuación del tipo $f(x,y,u,v)=0$ con las dimensiones adecuadas.

En este caso, dado que el sistema es equivalente a

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
xe^{u+v}+2uv-1 & = & 0 \\
ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x & = & 0,
\end{array}\right.
$$

podemos definir $f(x, y, u, v) = (f_1, f_2)$ con

$$f_1(x, y, u, v) = xe^{u+v} + 2uv - 1,$$
$$f_2(x, y, u, v) = ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x$$

Así, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ donde $\Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \{v \neq -1\}$ es $\mathcal{C}^1(\Omega)$.

Ahora hemos de ver cuales son las variables dependientes y cuales son las independientes según el enunciado, y ver que las dimensiones son las adecuadas. Nos piden dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ y, por lo tanto, las variables dependientes son (u, v) mientras que las independientes son (x, y). Entonces $m = 2$ y $n = 2$:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, u, v) \mapsto f(x, y, u, v)$$

número de variables dependientes = número de ecuaciones.

Ahora hemos de comprobar que se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita en el punto $p = (1, 2, 0, 0)$ que es el que se obtiene de $u(1, 2) = v(1, 2) = 0$.

La función f es $\mathcal{C}^1$ alrededor del punto, ya que $v \neq -1$.

El punto p cumple que $f(p) = 0$.

La matriz $D_{(u,v)}f(p)$ es invertible ya que

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{(u+v)} + 2\,v & xe^{(u+v)} + 2\,u \\ ye^{(u-v)} - \frac{1}{v+1} & -ye^{(u-v)} + \frac{u}{(v+1)^2} \end{pmatrix}$$

y, por tanto, en el punto $p = (1, 2, 0, 0)$, es inversible

$$D_{(u,v)} f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema de la Función Implícita, localmente existe una función implícita $\mathbb{C}^1$ $g : \Omega^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de manera que

$$f(x, y, g(x, y)) = 0, \quad g_1(1, 2) = u(1, 2) = g_2(1, 2) = v(1, 2) = 0$$

Para encontrar $\partial_x g_1(1, 2), \partial_y g_2(1, 2)$, usamos la regla de la cadena para derivar $f(x, y, g(x, y)) = 0$:

$$D_{(x,y)} f(x, y, g(x, y)) + D_{(u,v)} f(x, y, g(x, y)) D_{(x,y)} g(x, y) = 0$$

que evaluado en $p = (1, 2, 0, 0)$ se obtiene:

$$D_{(x,y)} f(1, 2, 0, 0) + D_{(u,v)} f(1, 2, 0, 0) D_{(x,y)} g(1, 2) = 0$$

y, junto con los cálculos antes realizados se tiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{D_{(x,y)} f(1,2,0,0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{D_{(u,v)} f(1,2,0,0)} D_{(x,y)} g(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aislando $D_{(x,y)} g(1, 2)$ e invirtiendo $D_{(u,v)} f(1, 2, 0, 0)$ obtenemos

$$D_{(x,y)} g(1, 2) = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Así, identificando los términos de la matriz $D_{(x,y)} g(1, 2)$

$$\partial_x u_1(1, 2) = \partial_x g_1(1, 2) = 0, \quad \partial_y v(1, 2) \partial_y g_2(1, 2) = 1/3$$

5. El siguiente sistema determina dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ que satisfacen $u(1,1)=v(1,1)=0$

$$\begin{cases} x+yv+e^{yu}+e^{xv} &= 3 \\ y-xv+e^{xu}+e^{yv} &= 3, \end{cases}$$

Determinar $Dg(1,1)$ y $Dg^{-1}(0,0)$ si $g(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$

Solución:

Comprobar las condiciones del teorema de la función implícita.

El sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x+yv+e^{yu}+e^{xv}-3 &= 0 \\ y-xv+e^{xu}+e^{yv}-3 &= 0, \end{cases}$$

Queremos que (x,y) sean las variables independientes y que (u,v) sean las variables dependientes. Escogemos la función $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} x+yv+e^{yu}+e^{xv}-3 &= f_1(x,y,u,v) \\ y-xv+e^{xu}+e^{yv}-3 &= f_2(x,y,u,v), \end{cases}$$

Hay el mismo número de variables dependientes que de ecuaciones.

El teorema de la función implícita nos dice que existe una función $g:\Omega^*:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida en un entorno de $p=(1,1,0,0)$ tal que

$$f(x,y,g(x,y))=0, \quad g_1(1,1)=g_2(1,1)=0$$

Para encontrar $Dg(1,1)$, usamos la regla de la cadena para derivar $f(x,y,g(x,y))=0$ resp. (x,y):

$$D_{(x,y)}f(x,y,g(x,y))+D_{(u,v)}f(x,y,g(x,y))D_{(x,y)}g(x,y)=0,$$

derivando:

$$\begin{pmatrix} ve^{(vx)}+1 & ue^{(uy)}+v \\ ue^{(ux)}-v & ve^{(vy)}+1 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} ye^{(uy)} & xe^{(vx)}+y \\ xe^{(ux)} & ye^{(vy)}-x \end{pmatrix} D_{(x,y)}g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que evaluado en $p = (1,1,0,0)$ se obtiene:

$$D_{(x,y)}f(1,1,0,0) + D_{(u,v)}f(1,1,0,0)D_{(x,y)}g(1,1) = 0$$

y, calculando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D_{(x,y)}g(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde

$$D_{(x,y)}g(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculemos $Dg^{-1}(0,0)$. Como que $g(1,1) = (0,0)$, g es $\mathcal{C}^1$ localmente y $D_{(x,y)}g(1,1)$ es no singular (inversible), el teorema de la función inversa nos dice que la inversa existe localmente, es $\mathcal{C}^1$ y, además,

$$Dg^{-1}(0,0) = Dg(1,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sea $f(x,y,t) = (x^5 + y - t, x^2 + y^3 - t^2) = (0,0)$

   a) Probar que x e y son funciones implícitas de t en el entorno de $(1,0,1)$

b) Sea $g(x,y) = x^3y$, calcular $\dfrac{dg}{dt}$

Solución:

a) $f \in \mathcal{C}^\infty$

$f(1,0,1) = (0,0)$

$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,0)} = \det \begin{pmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix}_{(1,0)} = (15x^4y^2 - 2x)_{(1,0)} =$ $-2 \neq (0,0)$

Luego x e y son funciones implícitas de t.

b)

$$\frac{dg}{dt} = 3x^2x'y + x^3y'$$

Calculamos x' e y' a partir de f, esto es, derivamos f implícitamente respecto a t:

$$\left.\begin{aligned} 5x^4x' + y' - 1 &= 0 \\ 2xx' + 3y^2y' - 2t &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 3y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix}} = \frac{3y^2 - 2t}{15x^4y^2 - 2x} \qquad y' = \frac{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix}} = \frac{10x^4t - 2x}{15x^4y^2 - 2x}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dg}{dt} = 3x^2y \cdot \frac{3y^2 - 2t}{15x^4y^2 - 2x} + x^3 \cdot \frac{10x^4t - 2x}{15x^4y^2 - 2x}$$

2.7. Fórmula de Taylor

1. Sea $f(x,y) = e^{xy^3}$.

   ¿Cuánto vale $\partial^{12}_{x^3y^9} f(0,0)$?

   Solución:

   Como que el desarrollo de Taylor de la función exponencial es:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots$$

   el desarrollo de Taylor de f será

$$\begin{aligned} e^{xy^3} &= 1 + xy^3 + \frac{1}{2}(xy^3)^2 + \frac{1}{3!}(xy^3)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(xy^3)^k + \ldots \\ &= 1 + xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^6 + \frac{1}{3!}x^3y^9 + \ldots + \frac{1}{k!}x^ky^{3k} + \ldots \end{aligned}$$

   Por tanto,

$$\partial^{12}_{x^3y^9} f(0) = \frac{1}{3!}3!9! = 9!$$

2. Aplicación al cálculo de límites. Calcular, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{sen}\,(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2 + y^2}.$$

   (Indicación: Calcular el desarrollo de Taylor del numerador hasta el orden 2 y usar las propiedades del residuo de Taylor $R_2(x,y)$.)

   Solución:

   Como que conocemos los siguientes desarrollos de Taylor

$$e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots,$$

$$\operatorname{sen}(x+y) \cong (x+y) - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 + \ldots$$

la parte cuadrática de Taylor de $f(x,y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(x+y)$ es

$$T_2[f](x,y) = (x+y) + x(x+y) = x + y + x^2 + xy$$

y, por tanto, el numerador de la función a calcular el límite es

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^x \operatorname{sen}(x+y) - x - y - x^2 - xy = \\ &\qquad x + y + x^2 + xy + R_2[f](x,y) - x - y - x^2 - xy = \\ &\qquad\qquad R_2[f](x,y) \end{aligned}$$

Así, el límite vale cero por el teorema del residuo de Taylor:

$$\begin{aligned} &\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^x \operatorname{sen}(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2+y^2} = \\ &\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2[f](x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0 \end{aligned}$$

3. La resistencia total R correspondiente a dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo verifica

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Usando la aproximación lineal, estimar la variación del valor de R si incrementamos el valor de R_1 de 10 ohms a 10,5 ohms y decrecemos el valor de R_2 de 15 ohms a 13 ohms.

Solución: La función que nos da la resistencia equivalente es

$$R(R_1,R_2) = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Su aproximación cuadrática en $R_0 = 10\Omega$, $R_1 = 15\Omega$ es

$$R(R_1, R_2) = R(10, 15) + \underbrace{\partial_1 R(10, 15)}_{9/25}(R_1 - 10) + \underbrace{\partial_2 R(10, 15)}_{4/25}(R_2 - 15)$$

Así pues, la variación en el valor de R será

$$R(10{,}5, 13) - R(10, 15) \cong \partial_1 R(10, 15) \cdot 0{,}5 + \partial_2 R(10, 15) \cdot (-2) = -7/50.$$

4. Calcular todas las derivadas parciales hasta el orden 2 de las siguientes funciones y dar su desarrollo de Taylor hasta términos de grado 2 incluidos, en el entorno del punto que se indica en cada caso.

   a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ entorno del punto $(1, \pi/2)$.

   b) $f(x, y) = x^y$ entorno del punto $(1, 1)$.

   c) $f(x, y) = e^{x/y}$ entorno del punto $(0, 1)$.

   d) $f(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen}(yz)$ entorno del punto $(0, 1, \pi)$.

Solución:

a) Aquí hemos de calcular las derivadas parciales, ya que el desarrollo lo queremos alrededor del cero. Como que

$$\partial_x f(x, y) = y \cos(xy)\,,\ \partial_y f(x, y) = x \cos(xy)$$

no tenemos términos lineales. El desarrollo de Taylor alrededor de $(1, \pi/2)$ hasta los términos cuadráticos es

$$f(x, y) \cong 1 + \frac{1}{2!}\frac{1}{4}\pi^2 (x-1)^2 \\ - \frac{1}{2}\pi(x-1)(y-\pi/2)\frac{1}{2!}(-1)(y-2)^2$$

b) Como que $f(1,1) = 1$, $\partial_x f(x,y) = x^{y-1}y$ y $\partial_y f(x,y) = x^y \ln(x)$, y, además las derivadas segundas son

$$\begin{aligned}
\partial f^2_{x^2}(x,y) =& x^{y-2}(y-1)y \\
\partial f^2_{xy}(x,y) =& x^{y-1}y\ln(x) + x^{y-1} \\
\partial f^2_{y^2}(x,y) =& x^y \ln(x)^2
\end{aligned}$$

de manera que, evaluadas en $(1,1)$ son

$$\partial f^2_{x^2}(1,1) = 0, \partial f^2_{xy}(1,1) = 1, \partial f^2_{y^2}(1,1) = 0$$

$$f(x,y) \cong 1 - y - xy$$

c) Como que

$$\partial_x f(x,y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, \quad \partial_y f(x,y) = -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

en el punto $(1,0)$ tenemos que

$$\partial_x f(x,y) = 1, \quad \partial_y f(x,y) = 0$$

Si calculamos las derivadas segundas

$$\begin{aligned}
\partial f^2_{x^2}(x,y) =& \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2} \\
\partial f^2_{xy}(x,y) =& -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^3} - \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2} \\
\partial f^2_{y^2}(x,y) =& \frac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^4} + \frac{2\,xe^{\frac{x}{y}}}{y^3}
\end{aligned}$$

y las derivadas en $(0,1)$ y el polinomio cuadrático de Taylor es

$$\partial f^2_{x^2}(0,1) = 1, \quad \partial f^2_{xy}(0,1) = -1, \quad \partial f^2_{y^2}(0,1) = 0$$

$$f(x,y) \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1)$$

d) Observamos que, como que $\operatorname{sen}(1 \cdot \pi) = 0$, y

$$e^{-x} \cong 1 - x + O(x^2)$$

Es suficiente calcular el desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen}(yz)$ hasta el orden 2 y multiplicarlo por $(1-x)$ (del desarrollo de Taylor de e^{-x}).

$$\operatorname{sen} yz \cong -(z-\pi) - \pi(y-1) - (z-\pi)(y-1)$$

Multiplicándolo por $(1-x)$ nos queda:

$$-(z-\pi) - \pi(y-1) - (z-\pi)(y-1) + x(z-\pi) + x\pi(y-1) + x(z-\pi)(y-1)$$

y tomando solo los términos de orden 2 encontraremos el desarrollo de Taylor de orden 2 de f:

$$f(x,y) \cong -(z-\pi) - \pi(y-1) - (z-\pi)(y-1) + x(z-\pi) + \pi x(y-1).$$

5. Mediante el desarrollo de Taylor de funciones de una variable, calcular los desarrollos de Taylor en el origen hasta términos de grado dos incluidos, de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\ln(1+x+y)$.

   b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x}\cos y$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y}$.

d) $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x+y}\sqrt{1+x}\cos(x+y+z)$.

Solución:

a)

$$e^{xy} \cong 1 + xy, \quad \ln(1+x+y) \sim x + y - (x+y)^2/2.$$

$$f(x, y) \cong \ln(1+x+y) \sim x + y - (x+y)^2/2.$$

b)

$$e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad \cos(y) \cong 1 - \frac{1}{2}y^2$$

$$f(x, y) \cong 1 + x + (x^2 - y^2)/2.$$

c)

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots, \quad r = -(x+y)$$

$$f(x, y) \cong 1 - (x+y) + (x+y)^2.$$

d)

$$\begin{aligned} e^{x+y} &\cong 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2, \\ \sqrt{1+x} &\cong 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 \\ \cos(x+y+z) &\cong 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2 = \\ &\qquad 1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + (x+y)z + \frac{1}{2}z^2 \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) \cong 1 + \frac{3}{2}x + y - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}yx - zx - zy - \frac{1}{2}z^2.$$

6. Calcular el desarrollo de Taylor en el origen de las siguientes funciones hasta el orden que se indica en cada caso y dar el valor de todas las derivadas parciales de la función en el $(0,0)$ correspondientes al orden máximo hasta el cual se ha desarrolado (por ejemplo, si desarrollamos hasta el orden 5 queremos $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^n y^m}(0,0)$ con $n+m=5$.)

   a) $f(x,y) = \ln(1+x^2-y)$ hasta el orden 3.

   b) $f(x,y) = \cos(xy)$ hasta el orden 8.

   c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}$ hasta orden 8.

Solución:

a)

$$\ln(1+t) \cong t - t^2/2 + t^3/3$$

$$f(x,y) \cong y - x^2 + \frac{1}{2}y^2 - yx^2 + \frac{1}{3}y^3$$

$$\partial^3_{y^3} f(0,0) = 2, \quad \partial^3_{yx^2} f(0,0) = -2.$$

b)

$$f(x,y) \cong 1 - \frac{1}{2}(yx)^2 + \frac{1}{24}(yx)^4$$

$$\partial^4_{y^4x^4} f(0,0) = 24.$$

c)

$$f(x,y) \cong 1 + (x^2-y^2) + \frac{1}{2}(x^2-y^2)^2 + \frac{1}{6}(x^2-y^2)^3 + \frac{1}{24}(x^2-y^2)^4$$

$$\partial^8_{x^8} f(0,0) = \partial^8_{y^8} f(0,0) = 8!/4!,$$

$$\partial^8_{y^2x^6} f(0,0) = \partial^8_{y^6x^2} f(0,0) = -5!2$$

$$\partial^8_{y^4x^4} f(0,0) = 4!6$$

7. Determinar el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ de tal manera que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y) - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Solución:

$$\arctan t \cong t + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^3}{5} + \ldots$$

$$\arctan(x^2+y) \sim x^2 + y - \frac{1}{3}y^3 \Longrightarrow \lambda = -1/3.$$

8. Sea

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2$$

a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)$

b) Calcular las derivadas parciales de órdenes superiores

c) Desarrollar la función $f(x,y)$ en potencias de $x-1$, y $y+2$

Solución:

Observamos que f es $\mathcal{C}^\infty$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2+3$,

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial xx} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial yy} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial xxx} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial yxx} = 2$ $\frac{\partial^3 f}{\partial xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial yxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial yyx} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial yyy} = 0$

Puesto que todas las derivadas parciales de orden 3 son constantes, todas las de orden superior son nulas

c) Aplicamos el teorema de Taylor en el punto $(1,-2)$ $(x-1=0, y+2=0)$

$f(x,y) = f(1,-2) + (x-1)\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2) + (y+2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2) + \dfrac{1}{2!}((x-1)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial xx}(1,-2) + 2(x-1)(y+2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(1,-2) + (y+2)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial yy}(1,-2)) + \dfrac{1}{3!}((x-1)^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial xxx}(1,-2) + 3(x-1)^2(y+2)\dfrac{\partial^3 f}{\partial xxy}(1,-2) + 3(x-1)(y+2)^2\dfrac{\partial^3 f}{\partial xyy}(1,-2) + (y+2)^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial yyy}(1,-2)) + R_3$

R_3 es el residuo que en este caso es cero pues todas las derivadas superiores son nulas.

Calculando tenemos

$$f(x,y) = -10-4(x-1)+4(y+2)-2(x-1)^2+2(x-1)(y+2)+(x-1)^2(y+2)$$

9. Dada la función $f(x,y) = e^{xy^2}\operatorname{sen}(xy^2)$

Calcular: $\partial^{15}_{x^5y^{10}} f(0{,}0)$

Solución

Desarrollamos $f(t) = e^t\operatorname{sen}(t)$ haciendo el producto de los desarrollos de e^t y $\operatorname{sen}(t)$

$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!}$

$\operatorname{sen}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$

Ahora basta hacer el cambio $t = xy^2$ y localizar el sumando correspondiente a x^5y^{10}

$Cx^5y^{10} = \frac{1}{5!10!} \partial^{15}_{x^5y^{10}} f(0,0) = (\frac{1}{5!} + \frac{-1}{2!3!} + \frac{1}{4!})x^5y^{10} = \frac{-8}{2 \cdot 5!}$

Luego $\partial^{15}_{x^5y^{10}} f(0,0) = -4 \cdot 10!$.

2.8. Extremos de funciones de varias variables

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to f(x) = e^{-(1-||x||^2)^2}$. Demostrar que tiene un mínimo relativo en 0 y que la hipersuperficie de nivel $||x|| = 1$ está formada por todos los máximos relativos de f.

   Solución:

   Observamos que las curvas de nivel son las hiperesferas $\|x\| = c$: $e^{-(1-||x||^2)^2} = e^{-k^2}$, equivalentemente $c = 1 - k = ||x||^2$.

   $f(x) = h(\|x\|)$ donde $h(t) = e^{-(1-t^2)^2}$ tiene un mínimo relativo en $t = 0$ y máximo relativo en $t = 1$.

   El resultado se sigue de los dos puntos anteriores.

2. Consideremos la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ restringida a $\bar{\mathcal{B}}^1_1(0, 0)$. Determinar los puntos en los cuales f alcanza su màximo y su mínimo.

   Solución:

El único punto crítico es el origen de coordenadas donde f vale cero.

Veamos que pasa en la frontera $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Si restringimos f a estos puntos tenemos $\bar{f}(x) = 2x^2 - 1$ por $x \in [-1, 1]$.

El único punto crítico en el interior de este intervalo es $x = 0$, donde f vale -1.

Finalmente nos falta restringir $\bar{f}$ a la frontera de $[-1, 1]$, es decir calcular $\bar{f}(\pm 1) = 1$.

En conclusión: f toma su máximo en $(\pm 1, 0)$ y el mínimo en $(0, \pm 1)$.

3. Para la función $f(x, y) = x^2 y + y^2 x$ ver que $(0, 0)$ es un candidato a extremo relativo pero que el método del hessiano no permite caracterizarlo. ¿A qué conclusión llegamos si restringimos los valores de (x, y) a los de la recta $y = x$?

Solución:

a) $(0, 0)$ es un candidato a extremo relativo porque

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

b) Por otra parte el hessiano no está definido en signo, ya que

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y no podemos concluir nada a partir de las derivadas segundas.

c) $(0, 0)$ no es extremo de $f(x, y)$ porque $f(x, x) = 2x^3$ y $(0, 0)$ es un punto de inflexión sobre esta curva (no es ni máximo ni mínimo).

4. Considerar la función $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

   a) Si restringimos los valores de (x, y) a los de una recta pasando por $(0, 0)$, ver que el origen es un mínimo relativo de la función amb independencia de la recta escogida.

   b) Discutir si el resultado del apartado (a) permite concluir que $f(x, y)$, como función de dos variables, tiene un mínimo relativo en el $(0, 0)$.

   c) Estudiar si el origen es o no un mínimo relativo si restringimos los valores de (x, y) a los de una parábola de la forma $y = ax^2$ y refinar la discusión del apartado (2).

Solución:

a) Si tomamos una recta del tipo $(x, \lambda x)$, entonces

$$F(x, \lambda x) = x^2(\lambda - x)(\lambda - 3x) \sim (\text{por} \quad x \cong 0) \sim \lambda^2 x^2$$

y, por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo relativo sobre cualquier recta que pase por el origen.

Si intentamos usar el criterio de las derivadas segundas, calculemos el hessiano

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que no está definido (valores propios 0 y 2).

c) Los valores de la función sobre una parábola de la forma $y = ax^2$ son

$$f(x, ax) = x^4(a - 1)(a - 3),$$

y por tanto, cuando $1 < a < 3$, $(0,0)$ es un máximo relativo y $(0,0)$ no es extremo de $f(x,y)$.

PARTE II

Capítulo 3

Integración de funciones de n variables

3.1. La integral de Riemann

1. a) Calcular $\int_{[0,1]^2} 1 - x$

   b) Comprobar que se obtiene el mismo resultado calculando $\lim_{N\to\infty} S_N$.
   (S_N sumas de Riemann)

Solución:

a) Vale 1/2 ya que

$[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

La función $f(x,y) = 1 - x$ es positiva (ver la gráfica).

El volumen bajo la gáfica de $1 - x$ es la mitad del cubo $[0,1]^3$.

b) $x_i = \frac{i}{N}$ y $y_j = \frac{j}{N}$ por lo tanto $M_{ij} = 1 - x_i = 1 - \frac{i}{N}$.

La suma de Riemann es

$$S_N = \frac{1}{N^2}\sum_{ij=0}^{N-1}\left(1-\frac{i}{N}\right) = \frac{1}{N^3}\sum_{i=0}^{N-1}(1+2+\ldots+N)) =$$
$$\frac{1}{N^3}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N^2}(1+\ldots+1) = \frac{N+1}{2N} \to \frac{1}{2}$$

2. Acotar superior e inferiormente

$$\int_{\mathcal{B}_R^3(0)} e^{-||x||^2}.$$

Solución:

Como que

$$e^{-||x||^2} \in [0,1]$$

y

$$m(\mathcal{B}_R^3(0)) = 4\pi R^3/3,$$

entonces

$$0 \leq \int_{\mathcal{B}_R^3(0)} e^{-||x||^2} \leq 4\pi R^3/3$$

3. Demostrar que

$$1/6 \leq \int_\Omega \frac{1}{y-x+3} \leq 1/4,$$

donde Ω es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,0)$.

Solución:

El triángulo tiene área (medida) $1/2$.

Como que la hipotenusa es $y-x=0$, dentro del triángulo tenemos

$$y-x \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \leq 1$$

Por tanto, podemos acotar superior e inferiormente el denominador por

$$y - x + 3 \leq 3, \quad y - x + 3 \geq y - 1 + 3 \geq 0 + 2 = 2$$

Como que $2 \leq y - x + 3 \leq 3$,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y - x + 3} \leq \frac{1}{2}$$

y la cota sale de $m(\Omega) = 1/2$.

4. Calcular

   $\iint_D xydxdy$ donde D es el dominio cerrado por $x = -\sqrt{y}$, $y = 2x$ y $y = 3$

   Solución:

$$\int_0^3 dy \int_{-4\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}y} xdx = \int_0^3 (\frac{1}{8}y^2 - 2y)dy = -\frac{63}{8}$$

5. Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$.

   Calcular $\iint_\Omega f$ donde $\Omega = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x\}$.

   Solución:

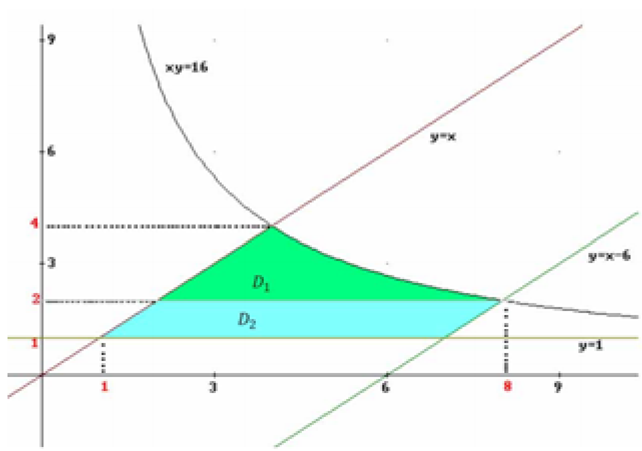
   $\int_1^2 \left(\int_x^{2x} \dfrac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\dfrac{1}{x+y} \right]_x^{2x} dx = \int_1^2 (-\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2x})dx = \dfrac{1}{6} \ln x \Big]_1^2 = \dfrac{1}{6} \ln 2$

6. Sea $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 16, x \geq y, x - 6 \leq y, x \geq 0, y \geq 1\}$

   a) Dibujar Ω

   b) Calcular $\iint_\Omega \dfrac{x}{y} dxdy$

a)



b) Dividimos el recinto en dos:

$\Omega_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y + 6\}$

$\Omega_2 = \{(x, y) \mid 2 \leq y \leq 4, y \leq x \leq \frac{16}{y}\}$

$$\int\int_{\Omega_1} \frac{x}{y} dxdy + \int\int_{\Omega_2} \frac{x}{y} dxdy =$$
$$\int_1^2 \left(\int_y^{y+6} \frac{x}{y} dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_y^{\frac{16}{y}} \frac{x}{y} dx \right) dy =$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{y} \frac{x^2}{2} \Big]_y^{y+6} + \int_2^4 \frac{1}{y} \frac{x^2}{2} \Big]_y^{\frac{16}{y}} =$$
$$15 + 18 \ln 2$$

7. Escribir la integral triple $\displaystyle\iiint_A f(x, y, z) dxdydz$ en términos de integrales iteradas en la región A de $\mathbb{R}^3$ consistente en el tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y + 4z = 12$.

Solución:

El tetraedro corta los ejes en el triángulo definido por los puntos

$$(6,0,0), \quad (0,4,0), \quad (0,0,3)$$

y viene expresado por las relaciones

$$A = \{x \in [0,6], y \in [0,4], z \in [0,3], 2x + 3y + 4z \leq 12\}$$

Vamos a expresar el dominio empezando por x:

x se puede mover en el intervalo $[0,6]$,

y queda limitada por $y \in [0,4]$, $3y \leq 12 - 2x - 4z$ y $z \in [0,3]$ por lo tanto,

$$y \in \left[0, 4 - \frac{2}{3}x\right]$$

Finalmente, z queda limitada por $z \in [0,3]$ y $4z \leq 12 - 2x - 3y$:

$$z \in \left[0, 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right]$$

de donde

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}} f(x,y,z)dz$$

8. Calcular la integral triple $\iiint_A xdxdydz$ en la región A de $\mathbb{R}^3$ consistente en un tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ $(a, b, c > 0)$.

Solución:

Este dominio es equivalente a

$$A = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1\}$$

que es el tetraedro de vértices

$$(0,0,0),(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$$

Dejaremos la integración respecto a x para el final, e intentamos seguir el orden

$$\int dx \int dy \int xdz$$

en la parametrización adecuada del dominio

$$A=\left\{x\in[0,a], 0\leq y\leq b-\frac{bx}{a}, 0\leq z\leq c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}\right\}$$

Así pues, la integral se expresa como

$$\int_0^a dx \int_0^{b-\frac{bx}{a}} dy \int_0^{c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}} xdz$$

En primer lugar integramos respecto z

$$\int_0^{c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}} xdz = x\left(c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}\right)$$

ahora este resultado lo integramos respecto a y

$$\int_0^{b-\frac{bx}{a}} x\left(c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}\right)dy = x\left(c-\frac{cx}{a}\right)\left(b-\frac{bx}{a}\right)$$
$$-\frac{cx}{b}\underbrace{\int_0^{b-\frac{bx}{a}} ydy}_{\frac{1}{2}\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2} = x\left(c-\frac{cx}{a}\right)\left(b-\frac{bx}{a}\right)-\frac{cx}{2b}\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2 =$$
$$\left(b-\frac{bx}{a}\right)\left(x\left(c-\frac{cx}{a}\right)-\frac{cx}{2b}\left(b-\frac{bx}{a}\right)\right) =$$
$$\left(b-\frac{bx}{a}\right)\left(x\left(c-\frac{cx}{a}\right)-\frac{x}{2}\left(c-\frac{cx}{a}\right)\right) =$$
$$\left(b-\frac{bx}{a}\right)\left(c-\frac{cx}{a}\right)\left(x-\frac{x}{2}\right) = bc\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\frac{x}{2}$$

Finalmente, integramos respecto a x:

$$\int_0^a bc\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\frac{x}{2}dx = \int_0^a \left(\frac{1}{2}\,bcx - \frac{bcx^2}{a} + \frac{bcx^3}{2\,a^2}\right)dx =$$

$$\left[\frac{(6\,a^2x^2 - 8\,ax^3 + 3\,x^4)bc}{24\,a^2}\right]_0^a = \frac{1}{24}\,a^2bc$$

9. Calcular

$\iint_D xydxdy$ donde D es el dominio cerrado por $x = -\sqrt{y}$, $y = 2x$ y $y = 3$

Solución:

$$\int_0^3 dy\int_{-4\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}y} xdx = \int_0^3 (\frac{1}{8}y^2 - 2y)dy = -\frac{63}{8}$$

10. Calcular

$\iint_D 2y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ con $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2-4x \leq 0\}$ y $y \geq 0$

Solución:

El recinto es el semicírculo de centro $(2,0)$ y radio 2 situado en el semiplano superior, luego $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4x-x^2}$

$\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} 2y\sqrt{x^2+y^2}dy = \int_0^4 \dfrac{2}{3}\,(x^2+y^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{128}{5}$

11. Calcular $\iint_D \dfrac{x^3\operatorname{sen}^2 y}{x^2+1+\operatorname{tg}^2 y}dxdy$; donde $D = \{(x,y) \mid |x| \geq 1, |y|1\}$

Solución:

El integrando es impar en x, y el recinto de integración simétrico respecto al eje $OY(x=0)$;

Por lo tanto la integral es nula.

3.2. Principio de Cavalieri

1. Calcular el volumen del cuerpo $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{4z} + \dfrac{y^2z^2}{9} \leq z, 0 \leq z \leq 4\}$.

   Solución:

   Observamos que, si z es constante el dominio es el interior de una elipse:

   $$\frac{x^2}{(2z)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{z}}\right)^2} = 1$$

   cuya área es $\pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot 2z \cdot \frac{3}{\sqrt{z}}$

   Por el principio de Cavallieri el volumen es área de la base por altura:

   $$\int_0^4 \pi \cdot 2z \cdot \frac{3}{\sqrt{z}} = 6\pi \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_0^4 = 32\pi$$

2. Calcular el volumen del cuerpo $x^2 + y^2 = z$ con $0 < z < 9$

   Solución:

   Observamos que, si z es constante el dominio es el interior de una circunferencia de radio $\sqrt{z}$ cuya área es πz

   Por el principio de Cavallieri el volumen es

   $\int_0^9 \pi z dz = \dfrac{\pi}{2} z^2 \Big|_0^9 = \dfrac{81\pi}{2}$

3. Aplicar el principio de Cavalieri para calcular los siguientes volúmenes a partir del área de secciones con planos paralelos a los planos coordenados (escogidos de forma adecuada).

a) Volumen rodeado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. (Solución: $\frac{4}{3}\pi abc$.)

b) Volumen rodeado por el cono invertido de base elíptica $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$, con $0\le z\le h$. (Solución: $\frac{1}{3}\pi abh^3$.)

c) Volumen de la pirámide de base rectangular de lados a, b y altura h. (Solución: $\frac{abh}{3}$.)

d) Volumen del tetraedro limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ $(a,b,c>0)$. (Solución: $\frac{abc}{6}$.)

e) Volumen rodeado por el casquete esférico determinado por la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ y la condición $R-h\le z\le R$. (Solución: $\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$.)

b) Para $z=$ cte el dominio es una elipse $\dfrac{x^2}{a^2z^2}+\dfrac{y^2}{b^2z^2}=1$ cuya área es $\pi azbz=\pi abz^2$, por lo que podemos aplicar el principio de Cavalieri:

$$\int_0^h \pi abz^2=\frac{1}{3}\pi abh^3.$$

3.3. Cambios de variable en $\mathbb{R}^n$

1. Calcular $\iint_D \sqrt{9-(x^2+y^2)}$ donde D es el cuarto de círculo situado en el primer cuadrante, centrado en el origen y radio $3/\sqrt{2}$.

Solución:

Cambio a coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, jacobiano: r

$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{3/\sqrt{2}} \sqrt{9-r^2} r dr = \int_0^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{3/2} \right]_0^{3/\sqrt{2}} = \frac{9\pi}{4\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)$,

2. Calcular $\iiint_D xy^2z^3(z+yz+xyz)dxdydz$ siendo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < xyz < a, 0 < yz < b, 0 < z < c$

   Solución:

   Cambio de variables: $u = xyz$, $v = yz$, $w)z$ por lo tanto $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{v}{w}$, $z = w$

   Jacobiano: $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{w} & -\frac{v}{w^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{vw}$

   $\int_0^a du \int_0^b dv \int_0^c uvw(w+v+u)\frac{1}{vw}dw = a^2bc(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4})$

3. Calcular

   $\int\int\int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, on B es la bola de centro al origen y radio 1.

   Solución:

   Cambio a coordenadas esféricas

   $$B^* = \{r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

   entonces $e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = e^{r^3}$, $dxdydz = r^2 \cos\varphi dr d\theta d\varphi$.

   $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 e^{r^3} r^2 \cos\varphi dr = \frac{4}{3}\pi(e-1)$

4. Calcular el área del círculo: $\Omega = \{x^2+y^2 \le c^2\}$.

Solución:

Calculemos su área en coordenadas polares

$$\int_{\Omega} dxdy = \begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \\ \Omega^* = \{r \in [0,c], \theta \in [0,2\pi]\} \end{pmatrix} = \int_0^c \int_0^{2\pi} r dr d\theta$$

$$= \int_0^c r \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = \underbrace{\left(\int_0^c r dr \right)}_{r^2/2} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \right)}_{2\pi} = \pi c^2$$

5. Calcular el área de la elipse:

$$\Omega = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Solución:

Utilizaremos coordenadas elípticas: $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $\quad \Omega^* = \{r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]\}$

de manera que el jacobiano es

$$\det JT(a) = \begin{vmatrix} a\cos(\theta) & -ar\,\text{sen}\,(\theta) \\ b\,\text{sen}\,(\theta) & br\cos(\theta) \end{vmatrix} = abr$$

$\iint_{\Omega} dxdy = \iint_{\Omega^*} abr dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr dr d\theta = \pi ab$

6. Calcular el área de la rosa de 4 pétalos

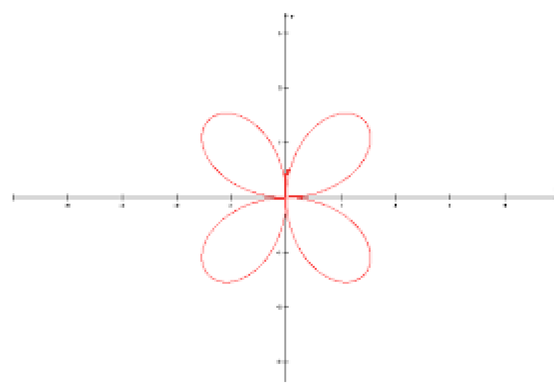
Solución:

Se trata de la ecuación (expresada en coordenadas polares) definida por

$$r = a\text{sen}(2\theta)$$

Nos piden el área de la región en coordenadas polares

$$\Omega^* = \{\theta \in [0, 2\pi], 0 < r < a\text{sen}2\theta\}$$



Se ha de integrar la función 1 sobre el dominio definido en coordenadas polares y utilizar el término del jacobiano ($dxdy = rdrd\theta$

$$\text{Área} = \int_{\Omega^*} rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\,\text{sen}2\theta} rdr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, a^2\text{sen}^2 2\theta d\theta =$$
$$= \left[\frac{1}{16}\, a^2 (4\,\theta - \text{sen}\;(4\,\theta))\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\,\pi a^2$$

7. Calcular $\int_\Omega xy$, Ω intersección con el primer cuadrante de la corona circular de centro $(0, 0)$, radio interior 1 y radio exterior 2.

Solución:

Este dominio en coordenadas polares viene dado por

$$\Omega^* = \{r \in [1,2] \in \theta \in [0, \pi/2]\}$$

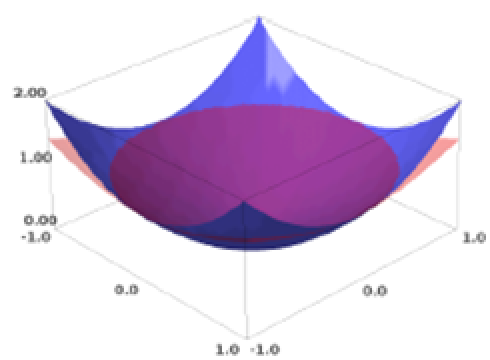
Aplicando el cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenada polares

$$\int_\Omega xydxdy = \int_{\Omega^*} \underbrace{r\cos\theta}_{x} \underbrace{r\text{sen}\theta}_{y} \underbrace{rdrd\theta}_{\text{cambio var.}} =$$

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos\theta\text{sen}\theta}_{\frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta} d\theta \int_1^2 r^3 dr = \underbrace{\left[\frac{-1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2}}_{1/2} \underbrace{\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2}_{4-1/4} = \frac{15}{8}$$

8. Calcular el volumen comprendido entre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$, para $z > 0$.

Solución:



Se aplicará el cambio de coordenadas a coordenadas cilíndricas, ya que el cuerpo tiene simetría axial.

Los dominios de integración en cartesianas y cilíndricas:

$$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$$\Omega^* = \{r^2 \leq z \leq r\} = \{r \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi], r^2 \leq z \leq r\}$$

ya que $r^2 \leq r \Leftrightarrow r \in [0,1]$.

Así podemos aplicar directamente en coordenadas cilíndricas para calcular el volumen:

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega^*} r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{r} r dz =$$
$$2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = \pi \frac{1}{6}$$

Observación: En el cálculo de volúmenes donde los cuerpos tengan simetría axial respecto el eje $x = y = 0$, la expresión en coordenadas cilíndricas no dependerá de θ y podemos pasar la integral $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ multiplicando delante.

9. Calcular el volumen de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está al exterior del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$ $(a > b > 0)$.

   Usando coordenadas cilíndricas, ya que el cuerpo tiene una simetría axial.

   Calcularemos el volumen de $z \geq 0$ y multiplicaremos por 2.

   Los dominios de integración en coordenadas cartesianas y polares es:

$$\Omega = \{z \leq \sqrt{a^2 - x^2 + y^2}, b^2 \leq x^2 + y^2 \geq a^2\}$$
$$\Omega^* = \{z \leq \sqrt{a^2 - r^2}, r \in [b, a], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Se puede calcular directamente en coordenadas cilíndricas:

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega^*} r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_b^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz \right) =$$

$$2\pi \int_b^a r(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} dr = 2\pi \left[\frac{-1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_b^a =$$

$$2\pi \frac{-1}{3} \left(0 - (a^2 - b^2)^{3/2}\right) = \frac{2\pi}{3} \left(a^2 - b^2\right)^{3/2}$$

Por lo tanto, el volumen del cuerpo es

$$\frac{4\pi}{3} \left(a^2 - b^2\right)^{3/2}.$$

10. Calcular el volumen de $\mathcal{B}_R^3(0)$, el interior de la esfera de radio R en $\mathbb{R}^3$.

Se aplicará coordenadas esféricas ya que el cuerpo tiene simetría central (el origen).

Los dominios de integración en coordenadas cartesianas y esféricas:

$$\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

$$\Omega^* = \{r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

ya que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Se puede plantear directamente la integral en coordenadas esféricas para calcular el volumen:

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega^*} \underbrace{r^2 \cos\varphi}_{\text{jacobiano}} dr d\theta d\varphi =$$

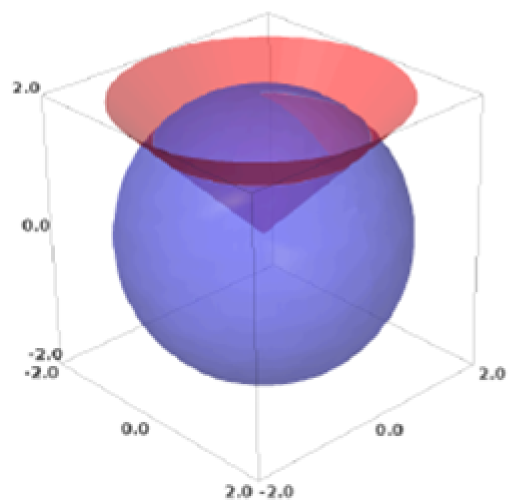
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

11. Calcular el volumen del dominio Ω cortado sobre la bola $r \leq a$ por el cono $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $(a > 0,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

Solución:

En coordenadas esféricas, el dominio Ω viene dado por

$$\Omega^* = \{r \in [0, a], \varphi \in [\alpha, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi]\}$$



y, por lo tanto, podemos calcular directamente su volumen en coordenadas esféricas

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega^*} \underbrace{r^2 \cos\varphi}_{\text{jacobiano}} dr d\theta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 dr \int_\alpha^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2\pi \cdot \frac{a^3}{3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$\frac{2\pi a^3}{3}(1 - \operatorname{sen}\alpha)$$

12. Usar coordenadas polares para calcular las siguientes integrales dobles.

    a) $\iint_A (x^2+y^2)dxdy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.

    b) $\iint_A \cos(x^2+y^2)dxdy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \dfrac{\pi}{2}\}$.

    c) $\iint_A \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2}dxdy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

    d) $\iint_A \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq R^2\}$. (Indicación: Usar las propiedades elementales de sen y cos para ver que: $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(R)) = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}}$ y $\cos(\operatorname{arctg}(R)) = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}}$.)

    e) $\displaystyle\iint_A x(x^2+y^2)dxdy$, A sector circular de centro $(0,0)$ y radio R formando ángulos entre $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{6}$ con el eje x positivo.

Solución:

$$dxdy = rdrd\theta.$$

a) El dominio en coordenadas polares es $A^* = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\iint_A (x^2+y^2)dxdy = \iint_{A^*} r^2 \cdot rdrd\theta = 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi$$

b) El dominio en coordenadas polares es $A^* = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\iint_A \cos(x^2+y^2)dxdy = \iint_{A^*} \cos(r^2) \cdot rdrd\theta =$$
$$2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(r^2)rdr = 2\pi(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(r^2)\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}) = \pi$$

c) En coordenadas polares, el dominio es $A^* = \{\theta \in [0, 2\pi], r \in (0, 1]\}$. Así

$$\iint_A \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2} dxdy = \iint_{A^*} \frac{r^2(\cos\theta + \text{sen}\theta)^2}{r^2+2} r dr d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \text{sen }\theta)^2 d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{r^2+2} dr$$

Calculamos cada una de las integrales

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \text{sen }\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (\underbrace{\cos^2\theta + \text{sen }^2\theta}_{1} + \underbrace{2\text{sen }\theta\cos\theta}_{\text{sen }2\theta}) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \text{sen } 2\theta d\theta}_{0} = 2\pi$$

y, por otra parte,

$$\int_0^1 \frac{r^3}{r^2+2} dr = \int_0^1 \left(r - \frac{2\,r}{r^2+2} \right) dr = \left[\frac{1}{2} r^2 - \ln(r^2+2) \right]_0^1 =$$
$$\frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3}$$

d) En coordenadas polares, el dominio es

$$A^* = \{\theta \in [0, 2\pi], r \in (0, R]\}.$$

Así

$$\textstyle\iint_A \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{A^*} \frac{r}{(1+r^2)^2 r} dr d\theta =$$
$$(\text{no hay } \theta) = 2\pi \textstyle\int_0^R \frac{1}{(1+r^2)^2} dr =$$
$$2\pi \left[\tfrac{r}{2\,(r^2+1)} + \tfrac{1}{2} \text{arctg} + (r) \right]_0^R = \tfrac{\pi R}{(R^2+1)} + \pi\,\text{arctg}(R)$$

Para resolver la integral

$$\int \frac{1}{(1+r^2)^2}dr = \frac{r}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2}\text{arctg}\,(r) + C$$

Hacemos el cambio de variable $r = \text{tg}\, u$ de manera que se convierte en

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\text{sen}\,(2u) + C$$

e) En coordenadas polares, el dominio es $A^* = \{\theta \in [\pi/6, \pi/3], r \in (0, R]\}$. Así

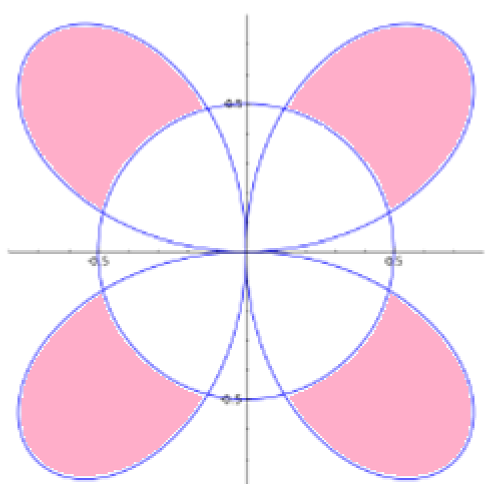
$$\iint_A x(x^2+y^2)dxdy =$$

$$\iint_{A^*} r\cos\theta r^2 r dr d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos\theta d\theta \int_0^R r^4 dr \,[\text{sen}\ \theta]_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{R^5}{5} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\frac{R^5}{5} = \frac{\sqrt{3}-1}{10}R^5$$

13. Calcular el área del dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ definido en coordenadas polares, siguiente: A es la región definida por $\frac{1}{2} \leq r \leq |\text{sen}\ (2\theta)|$.

Solución:



El dominio tiene una simetría respecto los ejes X e Y y, por lo tanto, podemos calcular el área en el primer cuadrante $\theta \in [0, \pi/2]$ donde, además, el sen 2θ es positivo.

Debemos encontrar los valores de $\theta \in [0, \pi/2]$ para los cuales

$$\text{sen } 2\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

El dominio en coordenadas polares que describe la parte en el primer cuadrante es, pues,

$$\Omega^* = \left\{ \theta \in [\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}], \frac{1}{2} \leq r \leq |\text{sen } (2\theta)| \right\}$$

Por lo tanto, el área de una cuarta parte de la figura es

$$\int_{\Omega^*} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} d\theta \int_{1/2}^{\text{sen } 2\theta} r dr = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \tfrac{1}{2} \left(\text{sen }^2 2\theta - \tfrac{1}{4} \right) d\theta =$$
$$\left[\tfrac{1}{8}\, \theta - \tfrac{1}{16} \text{ sen } \ (4\, \theta) \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \tfrac{1}{24}\, \pi + \tfrac{1}{48} \left(3\sqrt{3} \right)$$

El resultado final se obtiene de multiplicar por cuatro el resultado obtenido: Volumen $= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

14. Calcular $\iiint_B z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} dxdydz$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - 1 \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{z^2}{2}, \ z \geq 0\}$.

Solución:

El dominio es adecuado para usar coordenadas cilíndricas ya que es un cuerpo de revolución.

Geométricamente, es el recinto que hay entre un cono y un paraboloide

En coordenadas cilíndricas el domino se expresa como:

$$B^* = \left\{ z^2 - 1 \leq r^2 \leq \frac{z^2}{2}, z \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

Para poder calcular la integral es preciso que expresemos el dominio como producto de intervalos y para ello determinamos para que valores de $z \geq 0$ tenemos que $z^2 - 1 \leq \frac{z^2}{2}$, que equivalentemente

$$0 \leq 1 - \frac{z^2}{2} \Leftrightarrow z \in [0, \sqrt{2}]$$

Por otra parte, para determinar los valores de r, observamos que las desigualdades anteriores también las podemos expresar como

$$B^* = \left\{ \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1], z \in [\sqrt{2}r, \sqrt{r^2 + 1}] \right\}$$

La integral expresada en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-r^2} r dr \int_{\sqrt{2}r}^{\sqrt{r^2+1}} z dz = \\
&\qquad 2\pi \int_0^1 e^{-r^2} r \left(-\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} \right) dr = \\
&\qquad 2\pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} r^3 e^{\left(-r^2\right)} + \frac{1}{2} r e^{\left(-r^2\right)} \right) dr \\
&\qquad = 2\pi \left[\frac{1}{4} r^2 e^{\left(-r^2\right)} \right]_0^1 = 2\pi \frac{1}{4} e^{(-1)}
\end{aligned}$$

15. Calcular $\iiint_B z dx dy dz$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 6,\ x^2 + y^2 \leq z,\ z \geq 0\}$.

Solución

Este dominio está limitado entre una esfera de radio $\sqrt{6}$, por debajo, el paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$.

Se trata de un volumen de revolución

Su intersección:

$$z + z^2 = 6, \Leftrightarrow z = -3, 2$$

Como que estamos considerando $z \geq 0$, el dominio para la z es $z \in [0, 2]$, por una parte, y por $z \in [2, \sqrt{6}]$, por otra.

En coordenadas cilíndricas el dominio se expresa como

$$B^* = B_1^* \cup B_2^* = \left\{\theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2], r \in (0, \sqrt{z})\right\} \cup \\ \left\{\theta \in [0, 2\pi], z \in [2, \sqrt{6}], r \in (0, \sqrt{6 - z^2})\right\}$$

La integral en B_1 (en coordenadas polares B_1^*) és

$$I_1 = \int_{B_1^*} zrdrd\theta dz = 2\pi \int_0^2 zdz \int_0^{\sqrt{z}} rdr = \\ 2\pi \int_0^2 \frac{z^2}{2} dr = 8\pi/3$$

La integral en B_2 (en coordenadas polares B_2^*) es

$$I_2 = \int_{B_2^*} zrdrd\theta dz = 2\pi \int_2^{\sqrt{6}} zdz \int_0^{\sqrt{6-z^2}} rdr = \\ 2\pi \int_2^{\sqrt{6}} \frac{6z - z^3}{2} dz = \pi \left[3z^2 - \frac{z^3}{3}\right]_2^{\sqrt{6}} = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto la solución es:

$$I = I_1 + I_2 = 9\pi/2$$

16. Calcular la siguiente integral triple.
$\iiint_B \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, donde el recinto B es el definido por $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$.

Solución:

Geométricamente se trata del volumen comprendido entre dos esferas de radio a y radio b.

Tanto el integrando como el dominio son muy adecuados para utilizar coordenadas esféricas.

Podemos escribir la integral en coordenadas esféricas usando el hecho de que el dominio se expresa como

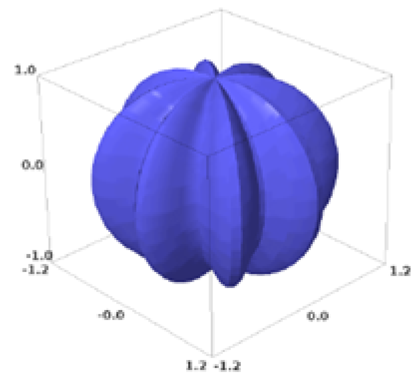
$$B^* = \{r \in [a,b], \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

y que, $r^2 = x^2+y^2+z^2$, $dxdydz = r^2 \cos\varphi dr d\theta d\varphi$.

$$\iiint_B \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz = \int_{B^*} \tfrac{r^2 \cos\varphi}{r^3} dr d\theta d\varphi =$$
$$\int_{B^*} \cos\varphi r^{-1} dr d\theta d\varphi = 2\pi \int_a^b r^{-1} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi =$$
$$2\pi \ln \tfrac{b}{a} 2 = 4\pi \ln \tfrac{b}{a}$$

17. Calcular el volumen del dominio $B \subset \mathbb{R}^3$ cerrado por la esfera deformada definido en coordenadas esféricas, $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\cos\varphi \text{sen } \theta$, $z = r \text{sen } \varphi$ $(0 < \theta < 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2})$, de la forma. $r = 1 + 0{,}2\text{sen } (8\theta)\text{sen } (\varphi)$.

Solución:



$$Vol(B) = \int_{B^*} r^2 \cos\varphi dr d\theta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^{1+0,2\text{sen }(8\theta)\text{sen }(\varphi)} r^2 dr =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \left(\frac{1}{375} \text{sen }(\varphi)^3 \text{sen }(8\,\theta)^3 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{25} \text{sen }(\varphi)^2 \text{sen }(8\,\theta)^2 + \frac{1}{5} \text{sen }(\varphi) \text{sen }(8\,\theta) + \frac{1}{3} \right) d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{75} \text{sen }(8\,\theta)^2 + \frac{2}{3} \right) d\theta = \frac{34}{25}\pi$$

18. Calcular la integral triple $\iiint_B \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$, donde B es la región en el primer octante de $\mathbb{R}^3$ acotada por los conos $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ y $\varphi = \text{arctg}(2)$ y la esfera de radio $r = \sqrt{6}$. (Recordatorio: sen $(\text{arctg}(a)) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.)

Solución:

El dominio en coordenadas esféricas se expresa como

$$B^* = \left\{ \theta \in [0, 2\pi], r \in (0, \sqrt{6}), \varphi \in [\pi/4, \text{arctg}2] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz = \int_{B^*} \tfrac{1}{r} r^2 \cos\varphi dr d\theta d\varphi = \\
&\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\text{arctg}(2)} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} r dr = \\
&2\pi \cdot \left(\text{sen }(\text{arctg }(2)) - \text{sen } \tfrac{\pi}{4}\right) \cdot 3 = 2\pi(\tfrac{2}{5}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})3
\end{aligned}$$

19. Calcular la integral doble siguiente $\iint_D xydxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 \leq 2y - x \leq 12,\ 0 \leq x \leq 4\}$, mediante el cambio de variables $x = 4u$ y $y = 2u + 3v$.

Solución:

El dominio en las nuevas coordenadas es $D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq v \leq 2,\ 0 \leq u \leq 1\}$

El Jacobiano es $\det \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) = 12$

$$\begin{aligned}
&\iint_D xydxdy = \iint_{D^*} (4u(2u+3v)12dudv = \\
&\int_1^2 dv \int_0^1 (8u^2 + 12uv) \cdot 12du = 140
\end{aligned}$$

PARTE III

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

4.1. Ecuaciones de variable separada

1. Resolver $y' = -\dfrac{x^2}{(y+1)^4}$.

   Solución:

   Esta ecuación puede expresarse de la forma

   $$(y+1)^4 dy = -x^2 dx$$

   por lo que

   $$\frac{1}{5}(y+1)^5 = -\frac{1}{3}x^3 + K$$

2. Resolver $(3x^2y - xy) + (2x^3y^2 + x^3y^4)y' = 0$

   Solución:

Operando la ecuación se convierte en

$$\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+(2y+y^3)y'=0$$

Integrando: $3\ln x+\dfrac{1}{x}+y^2+\dfrac{1}{4}y^4=K.$

Observación: al conjunto de soluciones debemos añadir $y=0$ que claramente es solución de la ecuación pero no lo es de esta última.

3. Resolver $y'=\dfrac{4y}{x(y-3)}$

Solución:

Esta ecuación se escribe:

$$\frac{y-3}{y}dy=\frac{4}{x}dx$$

Integrando: $y-3\ln y=4\ln x+K.$

4. Resolver $1+e^{3x}y'=0$

Solución:

La ecuación se escribe $-e^{-3x}dx=dy$

$$\int dy=\int -e^{-3x}dx$$

$$y=\frac{1}{3}e^{-3x}+K$$

4.2. Ecuaciones lineales

1. Resolver la ecuación lineal $y' = 3y + x$,

   Solución:

   La solución general viene dada por

   $$y(x) = Ke^{\int 3dx} + e^{\int 3dx}\int xe^{-\int 3dx}dx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

   Operando obtenemos

   $$\begin{aligned} y(x) &= e^{3x}(K + \int xe^{-3x}) = e^{3x}(K - \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}) = \\ &= Ke^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

2. Resolver: $y' + 2xy = 4x$

   Solución:

   La ecuación se escribe $y' = -2xy + 4x$ es decir $f(x) = -2x$ y $g(x) = 4x$.

   $$y(x) = Ke^{\int -2xdx} + e^{\int -2xdx}\int 4xe^{-\int -2xdx}dx = Ke^{-x^2} + 2$$

3. Resolver: $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

   Solución:

   La ecuación se escribe de la forma $y' = \frac{1}{x}y + x^2 + 3x - 2$, y $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 + 3x - 2$

   $$y(x) = Ke^{\int \frac{1}{x}dx} + e^{\int \frac{1}{x}dx}\int (x^2 + 3x - 2)e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx$$

calculando:

$$y(x) = Kx + \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x\ln x$$

4. Resolver: $\cos x \cdot y' + \operatorname{sen} x \cdot y = 1$

Solución:

La ecuación se escribe de la forma $y' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}$ con $f(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $g(x) = \frac{1}{\cos x}$

$$y(x) = Ke^{\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx} + e^{\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx}\int \frac{1}{\cos x}e^{-\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx}dx$$

Calculando: $y(x) = K\cos x + \operatorname{sen} x$

4.3. Ecuaciones de Bernouilli

1. Resolver $y' = y + xy^6$.

Solución:

Esta ecuación es de Bernouilli de orden 6.

El cambio de variable $v = y^{-5}$ la convierte en

$$v' = -5v - 5x = f(x)v + g(x),$$

cuya solución general es:

$$v(x) = Ke^{\int f(x)dx} + e^{\int f(x)dx}\int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

$$v(x) = Ke^{\int -5dx} + e^{\int -5dx} \int -5xe^{-\int -5dx} dx =$$
$$= e^{-5x}(K + \frac{1}{5}e^{5x} - xe^{5x}) = Ke^{-5x} + \frac{1}{5} - x.$$

Deshaciendo el cambio tenemos

$$y^{-5} = Ke^{-5x} + \frac{1}{5} - x.$$

Es fácil observar que la función $y = 0$ también es solución, por lo que el conjunto de soluciones es

$$\{y^{-5} = Ke^{-5x} + \frac{1}{5} - x\} \cup \{y = 0\}.$$

2. Resolver $(1 + x^2)y' = xy + xy^2$.

Solución:

Escribiendo la ecuación dada en la forma

$$y' = \frac{x}{1+x^2}y + \frac{x}{1+x^2}y^2$$

vemos que es una ecuación de Bernouilli de orden 2.

Apliquemos el cambio de función $v = y^{-1}$ convirtiéndola en la siguiente ecuación lineal

$$v' = -\frac{x}{1+x^2}v - \frac{x}{1+x^2} = f(x)v + g(x),$$

cuya solución general es:

$$v(x) = Ke^{\int f(x)dx} + e^{\int f(x)dx} \int g(x)e^{-\int f(x)dx} dx, \quad K \in \mathbf{R}.$$

$$v(x) = Ke^{\int -\frac{x}{1+x^2}dx} + e^{\int -\frac{x}{1+x^2}dx} \int -\frac{x}{1+x^2} e^{-\int -\frac{x}{1+x^2}dx} dx =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} (K + \int -\frac{x}{1+x^2} e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} dx) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (K + \int -\frac{x}{1+x^2} \sqrt{1+x^2}) = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} - 1.$$

Deshaciendo el cambio obtenemos

$$y^{-1} = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} - 1,$$

y puesto que $y = 0$ es solución, tenemos que el conjunto de soluciones es

$$\{-y^{-1} = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} - 1\} \cup \{y = 0\}.$$

4.4. Ecuaciones de Ricatti

1. Resolver $y' = \frac{2}{x-1} + \frac{1-2x}{x(x-1)}y - \frac{1}{x(x-1)}y^2$.

Solución:

Es fácil comprobar que en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, la función $y = 1$ es una solución particular de la ecuación

Para hallar una solución hacemos el cambio $y = 1 + \frac{1}{z}$.

Calculando

$$y' = -\frac{z'}{z^2}$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\frac{z'}{z^2} &= \frac{2}{x-1} + \frac{1-2x}{x(x-1)}\left(1+\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{x(x-1)}\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 = \\
&= -\frac{1+2x}{x(x-1)}\frac{1}{z} - \frac{1}{x(x-1)}\frac{1}{z^2}.
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
z' = \frac{1+2x}{x(x-1)}z + \frac{1}{x(x-1)},
$$

que es lineal.

Resolvamos esta ecuación

$$
\begin{aligned}
z(x) &= e^{\int \frac{1+2x}{x(x-1)}dx}\left(K + \int \frac{1}{x(x-1)} e^{-\int \frac{1+2x}{x(x-1)}dx}\right) = \\
&= \left|\frac{(x-1)^3}{x}\right|\left(K + \int \frac{1}{x(x-1)}\frac{|x|}{|(x-1)^3|}dx\right) = \\
&= \begin{cases} \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} + \dfrac{1}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Deshaciendo el cambio de función tenemos

$$
\frac{1}{y-1} = \begin{cases} \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} + \dfrac{1}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x < 0 \end{cases}
$$

4.5. Ecuaciones homogéneas

1. Resolver $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$.

   Solución:

   Puesto que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, la función f es homogénea de grado cero, por tanto la ecuación diferencial es homogénea.

   Hacemos el cambio $y = xz$, $y' = z + xz'$ por lo que tenemos

   $$z + xz' = \frac{x^2z^2 + 2x^2z}{x^2 + 2x^2z} = \frac{x^2(z^2 + 2z)}{x^2(1 + 2z)} = \frac{z^2 + 2z}{1 + 2z},$$

   ecuación de variables separadas:

   $$f(z) - z = \frac{z^2 + 2z}{1 + 2z} - z = \frac{z - z^2}{1 + 2z}$$
   $$\frac{1 + 2z}{z - z^2}dz = \frac{1}{x}dx$$
   $$\left(\frac{1}{z} - \frac{3}{z - 1}\right) dz = \frac{1}{x}dx$$

   La solución de la ecuación expresada en forma paramétrica es:

   $$\left.\begin{aligned} |x| &= K\frac{|z|}{|z - 1|^3} \\ y &= K\frac{z|z|}{|z - 1|^3} \end{aligned}\right\} \quad K \in \mathbb{R}^+$$

2. Resolver $x + (y - 2x)y' = 0$

   Solución:

   $$y' = \frac{-x}{y - 2x} = \frac{x}{2x - y} = \frac{\lambda x}{2\lambda x - \lambda y}$$

$y' = \dfrac{1}{2 - \frac{y}{x}}$

Es una ecuación diferencial homogénea

Sea $y = xz$, $y' = z + xz'$

$z + xz' = y' = \dfrac{1}{2 - \frac{y}{x}} = \dfrac{1}{2 - z}$

$xz' = \dfrac{1}{2 - z} - z = \dfrac{1 - 2z + z^2}{2 - z}$

$x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1 - 2z + z^2}{2 - z}$

$\dfrac{2 - z}{1 - 2z + z^2} dz = \dfrac{1}{x} dx$

$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{2-z}{1-2z+z^2} dz = -\frac{1}{2} \int \frac{2z-2}{1-2z+z^2} dz + \int \frac{1}{1-2z+z^2} dz$

$\ln|x| + C = -\dfrac{1}{2} \ln(1 - 2z + z^2) - \dfrac{1}{z - 1}$

deshaciendo el cambio y operando:

$(x - y) \ln|x - y| = x + K(x - y)$

3. Resolver $y' = -\dfrac{y(1 + e^{\frac{x}{y}})}{e^{\frac{x}{y}}(y - x)}$

Solución:

La función $f(x, y) = -\dfrac{y(1 + e^{\frac{x}{y}})}{e^{\frac{x}{y}}(y - x)}$ es homogénea de grado cero:

$$-\frac{\lambda y(1 + e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}})}{e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}(\lambda y - \lambda x)} = -\frac{\lambda y(1 + e^{\frac{x}{y}})}{e^{\frac{x}{y}}\lambda(y - x)} = -\frac{y(1 + e^{\frac{x}{y}})}{e^{\frac{x}{y}}(y - x)}.$$

Luego la ecuación diferencial es homogénea.

Haciendo el cambio $y = xz$, $y' = z + xz'$, obtenemos una ecuación de variables separadas cuya solución se expresa como:

$$\int \frac{1}{f(z) - z} dz = \int \frac{1}{x} dx,$$

siendo $f(z) = -\dfrac{z(1+e^{\frac{1}{z}})}{e^{\frac{1}{z}}(z-1)}$, por lo que

$$\frac{1}{f(z)-z} = -\frac{e^{\frac{1}{z}}(z-1)}{z+z^2e^{\frac{1}{z}}}$$

y

$$\begin{aligned}
\int -\frac{e^{\frac{1}{z}}(z-1)}{z+z^2e^{\frac{1}{z}}}dz &= \int \frac{1}{x}dx \\
-\ln|1+ze^{\frac{1}{z}}| &= \ln|C_1x| \\
|x| &= \frac{|C_1|}{|1+ze^{\frac{1}{z}}|},\ C_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Por lo que la familia de soluciones expresada en forma paramétrica viene dada:

$$\left.\begin{aligned}
|x| &= \frac{|C|}{|1+ze^{\frac{1}{z}}|}, \\
y &= \frac{x|C|}{|1+ze^{\frac{1}{z}}|},
\end{aligned}\right\} \quad C \in \mathbb{R}.$$

4.6. Ecuaciones diferenciales exactas y factores integrantes

1. Resolver $(2x^3+3y)+(3x+y-1)y' = 0$.

   Solución:

   Comprobemos que es exacta.

   Las funciones $f(x,y) = 2x^3+3y$, $g(x,y) = 3x+y-1$, son de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial 2x^3+3y}{\partial y} = 3 \quad \frac{\partial 3x+y-1}{\partial x} = 3,$$

por lo que la ecuación diferencial es exacta.

Busquemos la solución

$$h(x,y) = \int (2x^3+3y)dx + \varphi(y) = \frac{1}{2}x^4 + 3xy + \varphi(y),$$

$$\varphi(y) = \int \left((3x+y-1) - \frac{\partial}{\partial y} \int (2x^3+3y) \right) dy =$$
$$= \int (3x+y-1-3x) = \int (y-1)dy = \frac{1}{2}y^2 - y + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Luego la familia de soluciones es

$$h(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + 3xy + \frac{1}{2}y^2 - y + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2. Resolver $-y + xy' = 0$

Solución:

Claramente no es exacta: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 \neq \dfrac{\partial g}{\partial x} = 1$

$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \dfrac{-1-1}{x} = -\dfrac{2}{x} = \mu(x)$

Entonces $e^{\int \mu(x)} = e^{\int -\frac{2}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$ es un factor integrante

Comprobación:

$-\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{x}y' = f_1 + g_1 y' = 0$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\partial g_1}{\partial x}.$

3. Resolver $(x^2+y^2+x) + xyy' = 0$

Solución:

La ecuación diferencial dada no es exacta ya que

$$\frac{\partial(x^2+y^2+x)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial xy}{\partial x} = y.$$

Sin embargo

$$\frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{g(x,y)} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x} = \psi(x)$$

que sólo depende de x, por lo que

$$\varphi(x,y) = e^{\int \psi(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

es un factor integrante.

4. Resolver $(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$

Solución:

$$\frac{\partial(2x-1)}{\partial y} = \frac{\partial(3y+7)}{\partial x} = 0$$

Luego la ecuación es exacta y por lo tanto existe f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x-1$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y+7$

$\int(2x-1)dx = x^2 - x + g(y) = f(x,y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = 3y+7 \qquad g(y) = \int(3y+7)dy = \dfrac{3}{2}y^2 + 7y$

Luego $f(x,y) = x^2 - x + \dfrac{3}{2}y^2 + 7y$

Y la solución general es $x^2 - x + \dfrac{3}{2}y^2 + 7y = c$

Observación: Esta ecuación también es de variables separadas

5. Resolver $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$

   Solución:
   $\dfrac{\partial 3x^2y^2}{\partial y} = \dfrac{\partial 2x^3y}{dx} = 6x^2y.$
   Luego la ecuación es exacta.

   $h(x, y) = \int 3x^2y^2dx = x^3y^2 + \varphi(y)$

   $\frac{\partial h}{\partial y} = 2x^3y + \varphi'(y) = 2x^3y, \Rightarrow \ \varphi'(y) = 0$

   Luego $h(x, y) = x^3y^2$ y la solución es $x^3y^2 = C$

6. Probar que $\dfrac{1}{x+2}$ es un factor integrante para la ecuación $(x + 1)dx +$ $(x + 2)dy = 0$

   y en caso afirmtaivo resolverla.

   Solución:

   La ecuación se convierte en $\dfrac{x+1}{x+2}dx + dy = 0$

   claramente es exacta

   $f(x, y) = \int \dfrac{x+1}{x+2}dx = x - \ln(x + 2) + g(y)$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = 1, \ \Rightarrow g(y) = y$
   Luego $f(x, y) = x - \ln(x + 2) + y$ y la solución es

   $$x - \ln(x + 2) + y = c$$

7. Estudiar si la ecuación

   $$2xy^2 - 3y^3 + (7 - 3xy^2)y' = 0.$$

es exacta o si existe factor integrante que la convierte en exacta

Solución:

Las funciones $f(x,y) = 2xy^2 - 3y^3$, y $g(x,y) = 7 - 3xy^2$, son de clase C^∞, en todo $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial(2xy^2 - 3y^3)}{\partial y} = 4xy - 9y^2$$
$$\frac{\partial(7 - 3xy^2)}{\partial x} = 3y^2$$

por lo que la ecuación diferencial no es exacta.

Sin embargo

$$-\frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{g(x,y)} = \frac{4xy - 9y^2 + 3y^2}{2xy^2 - 3y^3} = \frac{2}{y} = \psi(y)$$

que sólo depende de y, por lo que

$$\varphi(x,y) = e^{\int \psi(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{\ln y^2} = y^2,$$

es un factor integrante.

4.7. Resolución de EDO's usando la transformada de Laplace

1. Resolver

   $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10\cos t$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 3$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace:

$\mathcal{L}[y'''] + 4\mathcal{L}[y''] + 5\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = 10\mathcal{L}[\cos t]$

Buscamos las transformadas de cada sumando

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'''] &= s^3F(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3F(s) - 3 \\
\mathcal{L}[y''] &= s^2F(s) - sy(0) - y'(0) = s^2F(s) \\
\mathcal{L}[y'] &= sF(s) - y(0) = sF(s) \\
\mathcal{L}[y] &= F(s) \\
\mathcal{L}[\cos t] &= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas

$(s^3F(s) - 3) + 4(s^2F(s)) + 5(sF(s)) + 2F(s) = 10\dfrac{s}{s^2+1}$

$(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)F(s) - 3 = 10\dfrac{s}{s^2+1}$

$(s+1)^2(s+2)F(S) = \dfrac{3s^2+10s+3}{s^2+1}$

$F(s) = \dfrac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s+1)^2(s+2)} = \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{2}{(s+1)^2} + \dfrac{-s+2}{s^2+1}$

Aplicando la antitransformada

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{2}{(s+1)^2} + \dfrac{-s+2}{s^2+1}]$

$y(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} - \cos t + 2\operatorname{sen} t$

2. Resolver

$y'' + 4y = h(t)$ donde $h(t) = \begin{cases} -4t + 8\pi & 0 < t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$, con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

Solución:

Observación: $h(t) = (-4t + 8\pi)\mathcal{U}(t) + (4t - 8\pi)\mathcal{U}(t - 2\pi) = (\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 2\pi))(-4t + 8\pi)$

Aplicando la transformada de Laplace

$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h(t)]$

Busquemos las transformadas de cada sumando

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y''] &= s^2F(s) - sy(0) - y'(0) = s^2F(s) - 2s \\
\mathcal{L}[y] &= F(s) \\
\mathcal{L}[h(t)] &= \mathcal{L}[(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 2\pi))(-4t + 8\pi)] = \\
&\mathcal{L}[(\mathcal{U}(t))(-4t + 8\pi)]+ \\
&+ \quad 4\mathcal{L}[\mathcal{U}(t - 2\pi)(t - 2\pi)] = \\
&= \frac{-4}{s} + \frac{8\pi}{s} + 4e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Recordatorio: $\mathcal{L}[f(t - a)\mathcal{U}(t - a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)]$

Sustituyendo:

$s^2F(s) - 2s + 4F(s) = \dfrac{-4}{s^2} + \dfrac{8\pi}{s} + 4e^{-2\pi s}\dfrac{1}{s}$

$(s^2 + 4)F(s) = \dfrac{3s^3 + 8\pi s - 4}{s^2} + e^{-2\pi s}\dfrac{4}{s^2}$

$Y(s) = \dfrac{2s^3 + 8\pi s - 4}{s^2(s^2 + 4)} + e^{-2\pi s}\dfrac{4}{s^2(s^2 + 4)}$

$Y(s) = \dfrac{2\pi}{s} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{(2 - 2\pi)s + 1}{s^2 + 4} + e^{-2\pi s}(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2 + 4})$

Aplicando la antritransformada de Laplace

$y(t) = 2\pi - t + (2 - 2\pi)\cos 2t + \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \mu_{2\pi}(t)((t - 2\pi) - \dfrac{\operatorname{sen}(2(t - 2\pi))}{2}$

3. Resolver $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - 3\pi)\cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$

Solución:

Sea $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. La transformada de la parte izquierda es

$$(s^2+2s+2)Y(s) - s - 1$$

mientras que la parte derecha es:

$$\mathcal{L}[\delta(t-3\pi)\cos t](s) = e^{-3\pi s}\cos 3\pi = -e^{-3\pi s}$$

Así, la solución para la transformada es

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} - \frac{e^{-3\pi s}}{s^2+2s+2}$$

Vamos a calcular la antitransformada de los dos sumandos.

Como que $s^2+2s+2 = (s+1)^2+1$

se tiene claro que

$$\frac{s+1}{s^2+2s+2} = \mathcal{L}\left[e^{-t}\cos(t)\right]$$

y que

$$\frac{1}{s^2+2s+2} = \mathcal{L}\left[e^{-t}\text{sen }(t)\right].$$

Hemos de calcular la antitransformada del segundo sumando.

Para ello usaremos la fórmula

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mathcal{U}(t-a)](s) = e^{-as}F(s)$$

con

$$f(t) = e^{-t}\cos(t)\,, F(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}, \quad a = 3\pi$$

$$\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+2s+2} = \mathcal{L}[e^{-(t-3\pi)}\underbrace{\text{sen }(t-3\pi)}_{-\text{sen}\,t}\mathcal{U}(t-3\pi)](s)$$

Así pues, la solución es:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\cos{(t)} + e^{-(t-3\pi)}\text{sen}\,t\cdot\mathcal{U}(t-3\pi) \\ &= \left(\cos t + e^{3\pi}\text{sen}\,t\cdot\mathcal{U}(t-3\pi)\right)e^{-t} \end{aligned}$$

4. Resolver $y'' + y' + y = 0$, con las condiciones iniciales $y'(0) = \frac{-1}{2}$ y $y(0) = 1$.

Solución:

En primer lugar calcularemos la ecuación que satisfce la transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ de la función incógnita $y = y(t)$.

$$\underbrace{(s^2+s+1)}Y(s) - s - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+1}$$

Encontramos la solución buscando la antitransformada de $Y(s)$, primero observamos que se puede escribir como

$$Y(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+1/2)^2+3/4}$$

Observamos que para $G(s) = \frac{s}{s^2+3/4}$ tenemos

$$G(s) = \mathcal{L}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right](s)$$

y usando las fórmulas de traslación tenemos

$$Y(s) = \mathcal{L}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]\left(s+\frac{1}{2}\right) = \mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

de manera que la solución es

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

5. Resolver $y'' + y = \operatorname{sen} 2t$, con las condiciones iniciales $y'(0) = -1$ y $y(0) = 0$.

   Solución:

$$y(t) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{3}$$

6. Resolver

$$ty'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0,$$

   con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

   Solución:

   Buscamos la transformada de Laplace

   $L[ty''] + L[(1 - 2t)y'] - 2L[y] = 0$

   $L[ty''] = -\frac{d}{ds} L[y''] = -\frac{d}{ds}(s^2 F(s) - sy(0) - y'(0)) = -s^2 F'(s) - 2sF(s) + 1$

   $L[(1 - 2t)y'] = L[y'] - 2L[ty'] = (sF(s) - y(0)) + 2\frac{d}{ds}(sF(s) - y(0))$

   $L[(1-2t)y'] = (sF(s)-1)+2(F(s)+sF'(s)) = 2sF'(s)+(s+2)F(s)-1$

   $L[y] = F(s)$

   Sustituyendo

   $(-s^2 F'(s) - 2sF(s) + 1) + (2sF'(s) + (s + 2)F(s) - 1) - 2F(s) = 0$

   $-s(s - 2)F'(s) - sF(s)) = 0$

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{s}{-s(s-2)}$$

$$\int \frac{F'(s)}{F(s)} = \int \frac{s}{-s(s-2)}$$

$$\ln F(s) = -\ln(s-2) + \ln C$$

$$F(s) = \frac{C}{s-2}$$

Calculando la antitransformada

$$y(t) = Ce^{2t}$$

$$y(0) = Ce^{2\cdot 0} = 1$$

$$y(t) = e^{2t}$$

Bibliografía

[1] A.I. Allueva, J.L. Alejandre, *Matemáticas Bloque 4, Ecuaciones diferenciales de primer orden*. Universidad de Zaragoza.

[2] F. Ayres, *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill. New York, 1969.

[3] J.M. Bayod, *Cálculo Integral*. Universidad de Cantabria, (2012).

[4] C. Bonet, A. Compta, N. Consul, M. Ollé, P. Pascual, A. Roig, *Càlcul integral per a enginyers*. Edicions UPC, 2002.

[5] R.L. Borrelli, C.S. Coleman. *Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación*. Oxford University Press, 2002.

[6] J. de Burgos. *Cálculo infinitesimal de varias variables*. McGraw-Hill, 2008.

[7] R. Cabrera, Solucionario de problemas de ecuaciones diferenciales. ESPOL Ecuador. (2009)

[8] J. Clotet, J. Ferrer, Mª I. García, *Càlcul Diferencial d'una i diverses variables. Problemes resolts*. Edicions UPC (2000),

[9] M. I. García Planas, *Notas sobre análisis matemático para la ingeniería.* Ed. La autora, (2012).

[10] J. Marsden y Anthony J. Tromba, *Cálculo vectorial.* Addison Wesley Iberoamericana, 2004.

[11] R. Larson, B.H. Edwards. *Cálculo de varias variables.* McGraw-Hill, 2010.

[12] M.R. Spiegel, *Cálculo Superior.* McGraw-Hill, 1963.

[13] D.G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Thomson Paraninfo, 2009.