¿Cambia la noción de π si cambia el ambiente?

por

Miguel-C. Muñoz-Lecanda

Resumen. Partiendo de las ideas clásicas sobre la definición de π en el plano geométrico, se extienden esas ideas al caso de superficies de revolución y también a dimensiones superiores a dos. En este último caso se proponen y comparan diferentes posibilidades en la definición, así como las propiedades de las distintas generalizaciones construidas. Al final, vistas las divergencias de interpretación, se propone una definición general que iguala la definición usando la longitud de la circunferencia con la que usa el área del círculo.

1. Introducción histórica

La circunferencia y el círculo han ejercido un profundo atractivo sobre los seres humanos y de ello queda constancia desde que se tienen referencias. Tanto si es como objetos concretos o como creaciones abstractas, también como fuente de ideas relacionadas con algunas aplicaciones prácticas como la rueda y su eje, y relacionándola con otras ideas más abstractas como el número π. Algunas culturas llegaron pronto a reconocer la constancia de la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro; otras tardaron más. Pero todas ellas sintieron interés por esos objetos geométricos relacionándolos con propiedades o fuerzas sobrenaturales o con informaciones muy profundas sobre la estructura del mundo en que vivían. Parece que es un poco más tardía la constancia de la relación entre la superficie del círculo y el cuadrado del radio, y también la igualdad entre los dos «números» como aproximaciones a la idea de π, igualdad que se atribuye a Arquímedes, 287–212 AC.

El cálculo del valor de π procede inicialmente de la primera aproximación, después los métodos se han ido refinando. Damos en el Cuadro 1 algunos resultados significativos a lo largo del tiempo, en los que hay que tener en cuenta que las fechas de muchos de los datos iniciales son aproximadas. Están tomadas esencialmente de [1], [2], [9] y de la tabla que se presenta en [13].

En este trabajo no vamos a tratar de calcular π, tampoco de hallar aproximaciones, sino de comparar la definición de π con otras definiciones posibles también asociadas a circunferencias y de intentar llevar esas ideas a otros lugares distintos del plano, por ejemplo a espacios de dimensión mayor que dos o a superficies curvadas, en particular a superficies de revolución en el espacio ordinario.

Evidentemente, π es el número real dado por su definición clásica: longitud de una circunferencia en el plano geométrico ordinario dividida por su diámetro; y la observación experimental, desde hace más de tres mil años al menos, de que no

Año	Persona/Lugar/Método	Valor/**Cifras**
$\approx$ 2000 AC	Babilonia	$25/8 = 3.125$
$\approx$ 2000 AC	Egipto	$(16/9)^2 \approx 3.1605$
$\approx$ 1100 AC	China	3
$\approx$ 550 AC	Israel	3
$\approx$ 250 AC	Arquímedes/Grecia	$(223/71, 22/7)$
$\approx$ 250 AC	Chung Hing/China	$\sqrt{10} \approx 3.16$
$\approx$ 150 AC	Tolomeo/Grecia-Egipto	$377/120 \approx 3.14166$
$\approx$ 500 DC	Aryabhata/India	$62832/2000 = 3.1416$
$\approx$ 800 DC	Al-Juarismi/Persia	3.1415926535897932
1220 DC	Fibonacci/Italia	3.141818
1424 DC	Al-Kashi/Persia	3.141818
1596 DC	van Ceulen/Holanda	**32 cifras**
1705 DC	Sharp/Inglaterra	**72 cifras**
1855 DC	Richter/Alemania	**500 cifras**
1949 DC	ENIAC	**2 037**
1959 DC	IBM 704	**16 167**
1967 DC	CDC 6600	**500 000**
1973 DC	CDC 7600	**1 001 250**
1986 DC	CRAY-2	**29 360 111**
1999 DC	Hitachi SR8000	**206 158 430 000**
2004 DC	HITACHI	**1 351 100 000 000**
2011 DC	2 x Intel Xeon X5680	**10 000 000 000 000**

Cuadro 1: Valores de π conocidos.

depende de la circunferencia que se haya tomado. Partiendo de eso, en cada uno de los apartados aclararemos cómo se hacen esas diferentes ampliaciones a situaciones geométricas diferentes al plano ordinario.

De acuerdo con esa intención, la organización del trabajo es la siguiente:

En la sección 2 se recuerdan y comparan en lenguaje moderno las definiciones de π mediante la longitud de una circunferencia y el área de un círculo en el plano euclídeo.

La sección 3 se dedica a generalizar la idea de π a la superficie esférica $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con la distancia ordinaria inducida. Se da la definición utilizando la longitud de una circunferencia. Para ello hay que aclarar lo que es una circunferencia sobre la superficie esférica. Se comprueba que, en este caso, la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro depende de la circunferencia que se tome.

La construcción del caso anterior se amplía en la sección 4 al caso de algunas superficies de revolución en $\mathbb{R}^3$, particularizando a los casos del paraboloide y del hiperboloide de revolución y comparando los resultados. Otra vez se comprueba que depende de la circunferencia que se tome.

En la sección 5 se estudia el caso euclídeo para esferas de dimensión mayor que dos. La noción de π se generaliza de tres formas diferentes comparando los resultados y estudiando los límites asintóticos con respecto a la dimensión. Ninguna de las tres depende de la circunferencia, en realidad hiperesfera, que se tome.

En este caso, se observa que las dos definiciones, la que proviene de la longitud y la que proviene del área, no coinciden. Se propone una definición, que incluye la función Gamma, que generaliza el caso del plano euclídeo al espacio euclídeo de cualquier dimensión y que hace que las dos definiciones coincidan en todos los casos.

Finalmente, la sección 6 se dedica a añadir unos comentarios a lo realizado y a señalar algunas perspectivas futuras.

La referencia y fuente fundamental de información e ideas ha sido [3], aunque [4] y [7] se han usado esporádicamente. Las relaciones asociadas con la función Γ se han tomado de [12], y las fórmulas que permiten calcular la superficie y el volumen de una esfera en cualquier dimensión se han tomado de [11].

2. Caso del plano euclídeo

Supongamos que vivimos en un plano euclídeo que identificamos con $\mathbb{R}^2$ dotado de un producto escalar euclídeo y referido a una base ortonormal e_1, e_2. Una circunferencia S^1_R de radio R y centro el origen tiene como ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, es decir,

$$S^1_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Vamos a calcular su longitud $L(S^1_R)$. Para ello, por simetría observamos que es cuatro veces la longitud de la intersección con uno de los cuadrantes de $\mathbb{R}^2$ y esa intersección con el primer cuadrante K_1 se puede representar como

$$S^1_R \cap K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \geq 0,\ y = (R^2 - x^2)^{1/2}\},$$

de donde

$$\begin{aligned} L(S^1_R) &= 4\int_0^R \left(1 + y'(x)^2\right)^{1/2} dx = 4\int_0^R \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)^{1/2} dx \\ &= 4R\int_0^R (R^2 - x^2)^{-1/2}\, dx. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x = Rz$ tenemos

$$L(S^1_R) = 4R\int_0^1 \left(1 - z^2\right)^{-1/2} dz.$$

Y por tanto π, cociente entre $L(S^1_R)$ y $2R$, vale

$$\pi = \frac{L(S^1_R)}{2R} = 2\int_0^1 \left(1 - z^2\right)^{-1/2} dz,$$

que es independiente de R.

COMENTARIO. Esa integral es impropia en el límite superior, pero es convergente. En efecto, su convergencia es equivalente a la de la integral en $[0, 1]$ de la función $f(z) = (1 - z)^{-1/2}$ ya que

$$\lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^2)^{-1/2}}{(1 - z)^{-1/2}} = 1/\sqrt{2},$$

y la integral de f es convergente como se comprueba directamente calculando una primitiva.

Si tomamos otra circunferencia con centro en un punto $(a, b) \neq (0, 0)$, el cálculo es equivalente y se obtiene el mismo valor. También podemos observar que una traslación conserva las longitudes y nos lleva el centro de la circunferencia al origen.

Tampoco depende ese valor de tomar cualquier producto escalar euclídeo en el plano, ya que una isometría nos lo transforma en el caso que hemos considerado.

De ahí podemos enunciar como ya probado el siguiente resultado:

TEOREMA. *En el plano euclídeo la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro no depende de la circunferencia elegida; es una constante, a la que llamamos π, que vale*

$$\pi = 2 \int_0^1 \left(1 - z^2\right)^{-1/2} dz.$$

Como consecuencia podemos decir que, dada una circunferencia de radio R en el plano ordinario, su longitud es $2\pi R$.

COMENTARIO. Otra definición de π se obtiene mediante la integral

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{1/2}\, dx$$

que proviene de tomar el área A limitada por una circunferencia de radio R dividida por el cuadrado del radio. La relación entre las dos definiciones se obtiene de la siguiente manera:

1. Por una parte, utilizando la definición de π relacionada con la longitud, el área limitada por una circunferencia de radio R viene dada por

$$A = \int_0^R 2\pi x\, dx = \pi R^2,$$

entendiendo que el círculo es la unión de circunferencias de centro el origen y radios $x \in [0, R]$, y aplicando las ideas de Cavalieri para la integración.

2. Pero, también, utilizando la ecuación que define la circunferencia, $x^2 + y^2 = R^2$, en $\mathbb{R}^2$, esa área es

$$A = 2 \int_{-R}^R \left(R^2 - x^2\right)^{1/2} dx = 2R^2 \int_{-1}^1 \left(1 - t^2\right)^{1/2} dt$$

mediante el cambio $x = Rt$. En este caso hemos interpretado la integral como área bajo la gráfica de una función continua.

De ahí la equivalencia entre las dos definiciones habituales de π mediante integración asociada a la longitud de una circunferencia y al área encerrada, es decir

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2}\,dx = 2\int_{0}^{1} (1-z^2)^{-1/2}\,dz.$$

La primera igualdad la acabamos de conseguir, comparando las expresiones 1. y 2. anteriores, y la segunda es la definición de π que hemos adoptado.

En lo que sigue utilizaremos la aproximación por la longitud y el diámetro como preferente, y al final de la sección 5 comentaremos lo que ocurre con la aproximación mediante el área y el cuadrado del radio.

3. Caso de la superficie esférica en el espacio $\mathbb{R}^3$

Vamos a quedarnos de momento en dimensión dos pero no en el plano. Empecemos por una superficie esférica en el espacio ordinario de tres dimensiones y supongamos que vivimos sobre esa superficie, sin separarnos de ella. Eso obliga a medir la distancia poniendo hilos, o líneas, sobre la superficie de la esfera que serán líneas curvas, no como en el espacio de tres dimensiones, o en el plano, que medimos distancias tomando líneas rectas.

Así, tomemos una esfera S^2_ρ de centro el origen de $\mathbb{R}^3$ y radio ρ, y llamemos N, S a sus polos norte y sur respectivamente.

Lo primero que hemos de hacer es determinar cómo son las circunferencias sobre la esfera. Para ello necesitamos conocer las curvas equivalentes a las rectas del plano, es decir, las curvas geodésicas. Esas curvas que miden la mínima distancia entre dos de sus puntos son los círculos máximos (siempre que no lleguen a más de media circunferencia, pues en tal caso ya no miden la mínima distancia). Ahora, si tomamos un punto en la esfera como centro, los puntos que están a la misma distancia sobre la esfera de ese punto forman una circunferencia sobre la esfera. Esa circunferencia sobre la esfera también tiene forma de circunferencia plana y es la intersección de un plano con la esfera. Así, las circunferencias sobre la superficie S^2_ρ que consideramos son las intersecciones con planos.

Lo primero que hay que observar es que una circunferencia en la esfera S^2_ρ tiene dos centros distintos y, si no es una circunferencia máxima, también dos radios diferentes. Ello es debido a la simetría de dicha esfera (ver al final del apartado 3.1 unos comentarios sobre los posibles problemas que nos da esa situación). Para evitarlos de momento, fijaremos un punto de la esfera, por ejemplo el polo norte, y tomaremos circunferencias de centro ese punto. A lo largo de la sección iremos comentando los aspectos diferentes si cambiamos el centro de la circunferencia que consideramos.

Una circunferencia especial en esa esfera es el ecuador, al que llamaremos EC. Visto desde y sobre la esfera, ese ecuador es una circunferencia de centro el punto N y de radio en la esfera $R = 2\pi\rho/4 = \pi\rho/2$. Su longitud es $L(EC) = 2\pi\rho$. De ahí obtenemos que, sobre la esfera y para el ecuador, la relación entre su longitud y su diámetro, relación a la que llamaremos $\pi(EC)$, vale

$$\pi(EC) = \frac{L(EC)}{2R} = \frac{2\pi\rho}{\pi\rho} = 2.$$

Si tomamos ahora una circunferencia, S_β, paralela al ecuador pero a una distancia angular β del polo norte, obtenemos que su longitud como circunferencia de radio $r = \rho \operatorname{sen} \beta$ del plano de $\mathbb{R}^3$ dado por $z = \rho \cos \beta$ es

$$L(S_\beta) = 2\pi r = 2\pi\rho \operatorname{sen} \beta.$$

Pero, sobre esa esfera S^2_ρ, la circunferencia S_β tiene radio $R = \rho\beta$, así que $\pi(S_\beta)$, la relación entre la longitud y el diámetro de S_β pero visto en la esfera, vale

$$\pi(S_\beta) = \frac{L(S_\beta)}{2R} = \frac{2\pi\rho \operatorname{sen} \beta}{2\rho\beta} = \pi \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}$$

que depende de β, razón de la notación $\pi(S_\beta)$, y por lo tanto del radio de la circunferencia.

Así pues, sobre una esfera la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro no es constante, es dependiente del radio de la circunferencia.

Si ahora acercamos la circunferencia al polo norte, tenemos

$$\lim_{\beta \to 0} \pi(S_\beta) = \lim_{\beta \to 0} \pi \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} = \pi.$$

Pero, si la acercamos al polo sur,

$$\lim_{\beta \to \pi} \pi(S_\beta) = \lim_{\beta \to \pi} \pi \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} = 0.$$

3.1. Comparación entre la esfera y el plano euclídeo

En el párrafo anterior se han utilizado los ángulos sobre la esfera. Aparentemente el procedimiento ha sido distinto del estudio previo que hemos hecho en el plano y además parece esconder que la medición de ángulos proviene de interpretar, adecuadamente, esos resultados anteriores sobre la circunferencia. Vamos a ver ahora cómo se puede hacer lo anterior sin referencias a los ángulos, utilizando la integración para hallar las longitudes y los radios de las circunferencias sobre la esfera.

La esfera S^2_ρ de radio ρ y centro el origen en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto

$$S^2_\rho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}.$$

Vamos a calcular la relación entre longitud y diámetro de la circunferencia S_c, intersección de la esfera con el plano $z = c$, con $c \in [0, \rho)$.

Longitud en $\mathbb{R}^3$:

S_c es una circunferencia de $\mathbb{R}^3$ de radio $r = (\rho^2 - c^2)^{1/2}$.

Su longitud es $L(S_c) = 2\pi(\rho^2 - c^2)^{1/2}$.

Radio de S_c en S^2_ρ:

$$R(S_c) = \int_c^\rho \rho(\rho^2 - z^2)^{-1/2}\, dz = \rho \int_{c/\rho}^1 (1 - t^2)^{-1/2}\, dt,$$

habiendo hecho el cambio de variable $z = \rho t$ y teniendo en cuenta que ese radio es la longitud de la curva dada por $y = (\rho^2 - z^2)^{1/2}$ para $z \in [c, \rho]$.

Y por tanto,

$$\pi(S_c) = \frac{L(S_c)}{2R(S_c)} = \frac{2\pi(\rho^2 - c^2)^{1/2}}{2\int_c^\rho \rho(\rho^2 - z^2)^{-1/2}\, dz} = \pi \frac{(\rho^2 - c^2)^{1/2}}{\int_c^\rho \rho(\rho^2 - z^2)^{-1/2}\, dz},$$

que depende de ρ y de c.

Si hacemos $c \to \rho$, es decir, nos acercamos al polo norte, aplicando la regla de l'Hôpital obtenemos

$$\lim_{c\to\rho} \pi(S_c) = \lim_{c\to\rho} \frac{\pi(\rho^2 - c^2)^{1/2}}{\int_c^\rho \rho(\rho^2 - z^2)^{-1/2}\, dz} = \lim_{c\to\rho} \frac{-c\pi(\rho^2 - c^2)^{-1/2}}{-\rho(\rho^2 - c^2)^{-1/2}} = \lim_{c\to\rho} \frac{c\pi}{\rho} = \pi,$$

por lo que en las cercanías del polo norte el comportamiento es «como» en el plano, tal como habíamos obtenido anteriormente utilizando el ángulo β.

Y si hacemos $c \to 0$ nos acercamos al ecuador y, entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{c\to 0} \pi(S_c) &= \lim_{c\to 0} \pi \frac{(\rho^2 - c^2)^{1/2}}{\int_c^\rho \rho(\rho^2 - z^2)^{-1/2}\, dz} \\ &= \pi \lim_{c\to 0} \frac{(\rho^2 - c^2)^{1/2}}{\rho\int_{c/\rho}^1 (1 - t^2)^{-1/2}\, dt} = \frac{\pi}{\int_0^1 (1 - t^2)^{-1/2}\, dt} = 2, \end{aligned}$$

puesto que ya sabemos que $\pi = 2\int_0^1 (1 - z^2)^{-1/2}\, dz$. Tal como habíamos obtenido directamente para el ecuador de la esfera.

Veamos ahora lo que ocurre si tomamos una circunferencia más alejada del polo norte que el ecuador. Sea $c \in (-\rho, 0]$ y $S_c = \{(x, y, z) \in S^2(\rho);\ z = c\}$ y calculemos su longitud y su radio en la esfera $S^2(\rho)$:

Longitud de S_c:

S_c es una circunferencia de $\mathbb{R}^3$ de radio $r = (\rho^2 - c^2)^{1/2}$.

Su longitud es $L(S_c) = 2\pi(\rho^2 - c^2)^{1/2}$.

Radio de S_c en $S^2(\rho)$:

$$R(S_c) = \frac{\pi\rho}{2} + \int_c^0 \rho(\rho^2 - z^2)^{-1/2}\, dz = \frac{\pi\rho}{2} + \rho\int_{c/\rho}^0 (1 - t^2)^{-1/2}\, dt.$$

De donde el valor de $\pi(S_c)$ en este caso es

$$\pi(S_c) = \frac{L(S_c)}{2R(S_c)} = \frac{2\pi(\rho^2 - c^2)^{1/2}}{\pi\rho + 2\int_c^0 \rho(\rho^2 - z^2)^{-1/2}\,dz} = \frac{2\pi(\rho^2 - c^2)^{1/2}}{\pi\rho + 2\rho\int_{c/\rho}^0 (1 - t^2)^{-1/2}\,dt}.$$

Si hacemos $c \to -\rho$ obtenemos

$$\lim_{c \to -\rho} \pi(S_c) = 0.$$

Tal como hemos dicho al principio de la sección, las circunferencias en la esfera con centro en el polo norte también son circunferencias de centro el polo sur. En este caso tenemos una cierta ambigüedad en la definición de π para la esfera que se manifiesta en ese sumando constante, $\pi\rho$, que aparece en el denominador de las expresiones anteriores. En la sección 4, el paraboloide y el hiperboloide de revolución nos permitirán comparar la situación con la de la esfera.

3.2. Algunas conclusiones

De todo lo anterior se pueden extraer algunas conclusiones:

La intersección de la esfera $S^2(\rho)$ de $\mathbb{R}^3$ con un plano nos da una circunferencia en el plano que también es una circunferencia en la esfera, pero con distinto centro y distinto radio en un caso y el otro. La recta perpendicular a ese plano que pasa por el centro de la esfera nos determina sobre la esfera dos puntos a los que llamaremos polos asociados al plano. Esos dos puntos son centros de la circunferencia si la observamos desde y sobre la esfera. Como circunferencia del plano, su centro es la intersección de ese plano inicial con esa recta perpendicular.

En detalle podemos considerar tres situaciones diferentes:

1. Si el plano es tangente a la esfera nos da un punto. En este caso la longitud de la circunferencia es cero y su radio también.
2. Si el plano contiene un diámetro, entonces obtenemos que la intersección es una circunferencia máxima de la esfera. Respecto de los polos asociados, la circunferencia será el ecuador.

   Ese ecuador es una circunferencia en la esfera $S^2(\rho)$ de centro uno cualquiera de los dos polos asociados. Para ella, la relación entre su longitud y su diámetro vale 2.
3. Si el plano no contiene ningún diámetro, entonces la circunferencia obtenida es un paralelo. En este caso tenemos una circunferencia en la esfera cuyo centro es uno cualquiera de los dos polos, pero de distinto radio según el polo que escojamos. Respecto al más cercano su radio es menor que $\pi\rho/2$, y respecto al más lejano es mayor que $\pi\rho/2$.

   En el primer caso, la relación entre la longitud y el diámetro es mayor que 2 y menor que π. En el segundo es menor que 2.

La simetría de la esfera nos permite conocer que nada de lo que hemos comentado depende del punto que elijamos como polo norte o del plano que tomemos para cortar la esfera.

4. Superficies de revolución

Ahora seguiremos en dimensión dos pero cambiaremos la superficie esférica por otras superficies.

Empezaremos estudiando dos casos particulares, el paraboloide y el hiperboloide de revolución, y después un caso más general. En todas esas superficies hay que empezar por determinar las circunferencias de esas superficies con las que vamos a trabajar, y calcular el radio y la longitud de esas circunferencias. Además, todo eso hay que hallarlo sobre la superficie.

4.1. Paraboloide de revolución

Consideramos ahora el paraboloide de revolución de ecuación $z = x^2 + y^2$, es decir, nuestra superficie será el conjunto

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2\},$$

y tomemos el punto $Q = (0, 0, 0) \in P$.

La superficie P es de revolución alrededor del eje OZ y está generada por la curva $z = x^2$. Las curvas intersección de P con un plano que contenga al eje OZ, las generatrices de P, son curvas geodésicas en la superficie, es decir, sobre ellas se realiza la distancia mínima. Como consecuencia, la curva, S_c, intersección de la superficie con un plano de ecuación $z = c$, $c > 0$, nos da una circunferencia en P de centro el punto Q y radio, $R(S_c)$, la longitud de una de esas generatrices desde el centro Q hasta S_c. De ahí tenemos que:

Longitud de S_c:

La curva S_c es una circunferencia en $\mathbb{R}^3$ de radio $c^{1/2}$.

Su longitud es $L(S_c) = 2\pi c^{1/2}$.

Radio de S_c en P:

$$R(S_c) = \int_0^{c^{1/2}} \left(1 + 4x^2\right)^{1/2} dx,$$

ya que es la longitud de la parábola $z = x^2$, $y = 0$, para $x \in [0, c^{1/2}]$.

De donde el valor de $\pi(S_c)$ en este caso es

$$\pi(S_c) = \frac{L(S_c)}{2R(S_c)} = \frac{2\pi c^{1/2}}{2\int_0^{c^{1/2}} \left(1 + 4x^2\right)^{1/2} dx} = \pi \frac{c^{1/2}}{\int_0^{c^{1/2}} \left(1 + 4x^2\right)^{1/2} dx},$$

que depende de c.

Podemos observar que

$$\lim_{c\to 0} \pi(S_c) = \pi \lim_{c\to 0} \frac{c^{1/2}}{\int_0^{c^{1/2}} \left(1 + 4x^2\right)^{1/2} dx} = \pi \lim_{c\to 0} \frac{(1/2)c^{-1/2}}{(1 + 4c)^{1/2}(1/2)c^{-1/2}} = \pi,$$

$$\lim_{c\to \infty} \pi(S_c) = \pi \lim_{c\to \infty} \frac{c^{1/2}}{\int_0^{c^{1/2}} \left(1 + 4x^2\right)^{1/2} dx} = \pi \lim_{c\to \infty} \frac{(1/2)c^{-1/2}}{(1 + 4c)^{1/2}(1/2)c^{-1/2}} = 0,$$

con lo que el comportamiento es distinto al del caso de la esfera.

Comentario. El caso que hemos tratado en el paraboloide es el que correspondería a la esfera de radio unidad. Si queremos tratar para el paraboloide un caso más general, basta estudiar la superficie dada por $z = \alpha(x^2 + y^2)$, con $\alpha > 0$. Los resultados que se obtienen son los mismos y no dependen de α en general.

4.2. Hiperboloide de revolución

Consideramos ahora la rama de hipérbola de ecuación $z^2 = y^2 - 1$, $y > 0$, en el plano YZ de $\mathbb{R}^3$ y construimos la superficie de revolución generada al girar esa curva alrededor del eje OY, es decir la superficie definida por

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + z^2 = y^2 - 1,\ y > 1\}.$$

En este caso, las hipérbolas generatrices son curvas geodésicas de H, por lo tanto la curva S_c intersección de H con $y = c$, $c > 1$, es una circunferencia en H de centro el punto $Q = (0, 1, 0)$ y radio la longitud de una generatriz desde ese centro hasta la circunferencia S_c. Solo vamos a utilizar esas circunferencias. Para ese caso tenemos:

Longitud de S_c en $\mathbb{R}^3$:

La curva S_c es una circunferencia en $\mathbb{R}^3$ de radio $(c^2 - 1)^{1/2}$.
Su longitud es $L(S_c) = 2\pi(c^2 - 1)^{1/2}$.

Radio de S_c en H:

$$R(S_c) = \int_1^c \left(\frac{2y^2 - 1}{y^2 - 1}\right)^{1/2} dy,$$

ya que es la longitud de la hipérbola de ecuación $z = (y^2 - 1)^{1/2}$, contenida en el plano $x = 0$, desde $y = 1$ hasta $y = c$.

De donde el valor de $\pi(S_c)$ en este caso es

$$\pi(S_c) = \frac{L(S_c)}{2R(S_c)} = \frac{2\pi(c^2 - 1)^{1/2}}{2\int_1^c \left(\frac{2y^2-1}{y^2-1}\right)^{1/2} dy} = \pi\frac{(c^2 - 1)^{1/2}}{\int_1^c \left(\frac{2y^2-1}{y^2-1}\right)^{1/2} dy},$$

que depende de c.

En esta situación, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to 1} \pi(S_c) &= \pi \lim_{c\to 1} \frac{(c^2 - 1)^{1/2}}{\int_1^c \left(\frac{2y^2-1}{y^2-1}\right)^{1/2} dy} \\
&= \pi \lim_{c\to 1} \frac{c(c^2 - 1)^{-1/2}}{((2c^2 - 1)/(c^2 - 1))^{1/2}} = \pi \lim_{c\to 1} \frac{c}{(2c^2 - 1)^{1/2}} = \pi, \\
\lim_{c\to \infty} \pi(S_c) &= \pi \lim_{c\to \infty} \frac{(c^2 - 1)^{1/2}}{\int_1^c \left(\frac{2y^2-1}{y^2-1}\right)^{1/2} dy} = \pi \lim_{c\to \infty} \frac{c}{(2c^2 - 1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\pi,
\end{aligned}$$

con lo que el comportamiento es distinto al del caso de la esfera y del paraboloide de revolución.

4.3. Superficies de revolución más generales

Consideramos ahora el caso genérico de una superficie de revolución T generada por la curva diferenciable de ecuación $z = f(x)$, para $x \geq 0$, al girar alrededor del eje OZ. Supondremos que $f(0) = 0$ y que $f'(0) = 0$ para asegurar la diferenciabilidad de la superficie, y también que $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, para asegurar que $f(x)$ crece para todo $x > 0$. Con estas condiciones, la definición paramétrica de T es

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = u\cos v, y = u \operatorname{sen} v, z = f(u), u \geq 0, v \in [0.2\pi)\}.$$

Tomando $c \geq 0$ y $z_0 = f(c)$, obtenemos la circunferencia

$$S_c = \{(x, y, z_0),\ x = c\cos v, y = c \operatorname{sen} v, z_0 = f(c), v \in [0, 2\pi)\}$$

contenida en la superficie de revolución T. Dicha circunferencia S_c en T tiene centro el punto $(0, 0, 0)$ y radio en T la longitud de la curva $z = f(x)$ para $x \in [0, c]$.

Longitud de S_c en $\mathbb{R}^3$:

La curva S_c es una circunferencia en $\mathbb{R}^3$ de radio c.

Su longitud es $L(S_c) = 2\pi c$.

Radio de S_c en T:

$$R(S_c) = \int_0^c \left(1 + f'(x)^2\right)^{1/2} dx,$$

ya que es la longitud de la curva de ecuaciones $y = 0$, $z = f(x)$, desde $x = 0$ hasta $x = c$.

Por tanto, el valor de $\pi(S_c)$ en este caso es

$$\pi(S_c) = \frac{L(S_c)}{2R(S_c)} = \frac{2\pi c}{2\int_0^c \left(1 + f'(x)^2\right)^{1/2} dx} = \pi \frac{c}{\int_0^c \left(1 + f'(x)^2\right)^{1/2} dx},$$

que depende de c.

En esta situación,

$$\lim_{c\to 0} \pi(S_c) = \pi \lim_{c\to 0} \frac{c}{\int_0^c \left(1 + f'(x)^2\right)^{1/2} dx} = \pi \lim_{c\to 0} \frac{1}{\left(1 + f'(c)^2\right)^{1/2}} = \pi$$

suponiendo que f' es continua en $x = 0$. Merece la pena observar que es el mismo resultado que el obtenido en los casos particulares anteriores: esfera, paraboloide o hiperboloide de revolución.

Si hubiéramos supuesto que $\lim_{x\to 0} f'(x) = \alpha$, habríamos obtenido que

$$\lim_{c\to 0} \pi(S_c) = \frac{1}{\left(1 + \alpha^2\right)^{1/2}}\, \pi.$$

4.4. Comentarios

1. En los casos anteriores hemos tomado sobre las superficies estudiadas unas circunferencias especialmente fáciles para poder hacer los cálculos sin problemas. Esas superficies consideradas contienen muchas otras circunferencias de las que no es fácil calcular su longitud ni tampoco su «forma geométrica».
2. Así como en la esfera todos los puntos tienen el mismo comportamiento debido a la simetría, no ocurre lo mismo en el paraboloide y el hiperboloide ni en las superficies de revolución analizadas. Las geodésicas no son tan elementales si tomamos como punto base, como centro, otro diferente al vértice y, por lo tanto, las circunferencias tampoco son curvas sencillas en esos casos.
3. Las tres superficies consideradas y la más general de revolución son de curvatura positiva. En el caso de curvatura negativa, por ejemplo el hiperboloide de ecuación $z = x^2 - y^2$, no es sencillo determinar las circunferencias aunque se tome como centro el punto $(0, 0, 0)$. En ese caso se podría hacer el estudio local en un entorno de ese punto pero sería más delicado. Y además no añadiría nada a la comprensión de las ideas que se están presentando.
4. El plano es la superficie de curvatura constante nula en el espacio ordinario. Las esferas son las de curvatura constante positiva.

   Por otra parte, es sabido que no existen superficies de curvatura constante negativa, no singulares y completas, en el espacio euclídeo de tres dimensiones, lo que obliga a hacer solamente estudios locales, en el entorno de un punto. En [8] se pueden ver comentarios y dibujos sobre la forma de las circunferencias en los casos considerados y en otros en los que la curvatura es negativa. Incluir alguno de esos casos complicaría enormemente los cálculos y no clarificaría los objetivos de este trabajo.
5. El estudio del límite cuando el radio tiende a infinito no se puede hacer en general, pues depende del comportamiento asintótico de la superficie.
6. En los casos anteriormente tratados, se podría haber optado por la definición de π en el plano euclídeo a partir del área limitada por la circunferencia y el cuadrado del radio en lugar de la longitud de la circunferencia y el diámetro. En general, los resultados que se obtienen indican que no se verifica la igualdad de los dos cocientes, al contrario de lo que ya hemos visto que sí ocurre en el plano euclídeo.

   Como ejemplo veamos el caso de la esfera S^2_ρ tomando el polo norte como centro y su ecuador EC como circunferencia sobre la superficie esférica:

   Superficie limitada sobre S^2_ρ por la circunferencia EC: $S(EC) = 2\pi\rho^2$.
   Radio de EC al cuadrado: $R^2 = (\pi\rho/2)^2$.

   Tomando la superficie limitada y el radio al cuadrado obtenemos

$$\frac{S(EC)}{R^2} = \frac{2\pi\rho^2}{(\pi\rho/2)^2} = \frac{8}{\pi},$$

mientras que, tomando la longitud y el diámetro habíamos obtenido anteriormente,

$$\frac{L(EC)}{2R} = \frac{2\pi\rho}{\pi\rho} = 2,$$

resultados que no coinciden.

Es decir, las dos aproximaciones clásicas para definir π que coinciden en el plano no lo hacen para la esfera de $\mathbb{R}^3$ en general.

5. Dimensión mayor que dos

Ahora vamos a aumentar la dimensión. Hasta este momento nos hemos limitado a dimensión dos. Veamos lo que ocurre en dimensiones mayores.

Empezamos analizando la situación en el espacio de tres dimensiones y podemos observarla desde diferentes puntos de vista.

Primera aproximación en $\mathbb{R}^3$: Para definir π en el plano hemos utilizado como primera aproximación clásica el cociente entre la longitud de la circunferencia $S^1_R \subset \mathbb{R}^2$ y la longitud, $2R$, de su diámetro.

Si consideramos la situación equivalente en $\mathbb{R}^3$, en vez de una circunferencia S^1_R y su longitud, tendríamos que considerar la superficie esférica S^2_R y su área como numerador, y además proponer un denominador adecuado que generalice el diámetro de la circunferencia en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, podemos considerar el ecuador de la esfera, que es una circunferencia S^1_R, y tomar la superficie limitada por ella en ese plano ecuatorial de S^2_R, superficie que es πR^2.

Segunda aproximación en $\mathbb{R}^3$: En el plano, la segunda aproximación era el cociente entre el área encerrada en el plano por S^1_R y R^2.

Ahora, en $\mathbb{R}^3$ tendríamos como numerador el volumen limitado por la esfera S^2_R y como denominador R^3.

Aunque más adelante veremos otras posibles interpretaciones, si queremos ampliar estas ideas al caso general, es decir al espacio $\mathbb{R}^n$, esto nos lleva a estudiar la «superficie» y el «volumen» de una bola en $\mathbb{R}^n$. Es importante darse cuenta de que el numerador lo hemos de medir en $\mathbb{R}^n$, pero el denominador lo medimos en $\mathbb{R}^{n-1}$ aunque ambas sean magnitudes del mismo «grado dimensional» tanto si son longitud en el plano, área en el espacio o volumen en dimensiones superiores. Eso es lo que hace que no dependa del radio R de la esfera.

Empecemos entonces por definir con claridad los objetos geométricos que vamos a utilizar y sus medidas en la dimensión adecuada.

5.1. Esferas en $\mathbb{R}^n$

La esfera de $\mathbb{R}^n$ de centro el origen y radio R, que llamaremos $S^{n-1}_R \subset \mathbb{R}^n$, está definida por

$$S^{n-1}_R = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n;\ (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = R^2\}.$$

El volumen limitado por S_R^{n-1} en $\mathbb{R}^n$ y la superficie de dicha esfera son, respectivamente,

$$V(S_R^{n-1}) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \qquad S(S_R^{n-1}) = \frac{d}{dR} V(S_R^{n-1}) = \frac{n\pi^{n/2} R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Si intersecamos S_R^{n-1} con su plano ecuatorial obtenemos una esfera S_R^{n-2} contenida en $\mathbb{R}^{n-1}$, es decir, una esfera de dimensión uno menos. Sustituyendo en las expresiones anteriores obtenemos que el volumen de $S_R^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es

$$V(S_R^{n-2}) = \frac{\pi^{(n-1)/2} R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)},$$

en donde ha de ser $n > 2$. Para $n = 2$, tenemos $V(S_R^0) = 2R$, que es el caso del diámetro de una circunferencia.

En las expresiones anteriores, $\Gamma(x)$ es la conocida **función Gamma**. Como solo aparece evaluada en números naturales n o en cocientes de la forma $n/2$, únicamente necesitamos saber que $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, con lo que $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \geq 1$, y que $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$, valores que se pueden encontrar calculados en cualquier libro de cálculo.

Existen muchos textos en los que se pueden consultar, calculadas con detalle, las expresiones anteriores para las esferas de dimensión superior. Señalamos entre ellos tres de muy diferente intención y estilo, [5, 6, 10]. Los tres son de acceso fácil, en particular el tercero es de libre acceso digital.

5.2. Primera generalización de π: $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$

Partimos aquí de la primera definición de π en el plano euclídeo que corresponde al cociente entre la longitud de la circunferencia y la de su diámetro.

Tomamos la esfera $S_R^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ y, de acuerdo con los comentarios anteriores, para definir esa primera generalización tendremos:

Numerador: «Superficie» de S_R^{n-1}: $S(S_R^{n-1})$.

Denominador: «Superficie» delimitada por el ecuador S_R^{n-2} en el plano $\mathbb{R}^{n-1}$: $V(S_R^{n-2})$.

La expresión del denominador se sigue de que el plano ecuatorial de S_R^{n-1} está definido por $x^n = 0$ en $\mathbb{R}^n$, y su intersección con S_R^{n-1} es la esfera S_R^{n-2} contenida en el espacio $\mathbb{R}^{n-1}$, que es ese plano ecuatorial.

Llamaremos $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ al correspondiente cociente, que será la primera generalización de π. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\Pi_1(\mathbb{R}^n) &= \frac{S(S_R^{n-1})}{V(S_R^{n-2})} = \frac{n\pi^{n/2} R^{n-1}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{(n-1)/2} R^{n-1}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{n\pi^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{n\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(n/2)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Es decir, si $n > 2$,

$$\Pi_1(\mathbb{R}^n) = 2\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Para el caso $n = 2$, se tiene

$$\Pi_1(\mathbb{R}^2) = \frac{S(S_R^1)}{V(S_R^0)} = \frac{2\pi R}{2R} = \pi.$$

He aquí unos ejemplos:

1. $n = 3$:
$$\Pi_1(\mathbb{R}^3) = \frac{S(S_R^2)}{V(S_R^1)} = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 4$$
2. $n = 4$:
$$\Pi_1(\mathbb{R}^4) = \frac{S(S_R^3)}{V(S_R^2)} = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{3}{2}\pi$$
3. $n = 5$:
$$\Pi_1(\mathbb{R}^5) = \frac{S(S_R^4)}{V(S_R^3)} = 2\pi^{1/2}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{16}{3}$$

en donde hemos utilizado las ya citadas expresiones $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$.

5.2.1. Otras expresiones de $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$

A fin de poder calcular el límite de $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ cuando $n \to \infty$ vamos a obtener otras expresiones, separando los casos en que n sea par o impar. Dichas expresiones nos permitirán además comprobar que $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ contiene a π solo si n es par.

Utilizaremos que la función Γ cumple lo siguiente:

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\pi^{1/2} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!}\pi^{1/2}, \quad k \geq 0.$$

1. Caso n **par**: $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ En este caso se tiene que
$$\Pi_1(\mathbb{R}^{2k}) = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k)} = 2\pi^{1/2}\frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!\,(k-1)!}\pi^{1/2} = \pi\frac{k}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k}.$$

   Ahora, aplicando la aproximación de Stirling $m! \simeq m^m\,e^{-m}\sqrt{2\pi m}$ para m grande, para el caso par obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\Pi_1(\mathbb{R}^{2k}) &= \lim_{k\to\infty}\pi\frac{(2k)!}{2^{2k-1}\,k!(k-1)!}\\ &= \pi\lim_{k\to\infty}\frac{(2k)^{2k}\,e^{-2k}\sqrt{4\pi k}}{2^{2k-1}\,k^k\,e^{-k}\sqrt{2\pi k}\,(k-1)^{k-1}\,e^{-k+1}\sqrt{2\pi(k-1)}}\\ &= \pi\lim_{k\to\infty}\frac{2}{e\pi^{1/2}}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}\frac{k}{\sqrt{k-1}} = \infty.\end{aligned}$$

2. Caso n **impar**: $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Esta vez,

$$\Pi_1(\mathbb{R}^{2k+1}) = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = 2\pi^{1/2}\frac{k!\,2^{2k}k!}{(2k)!\,\pi^{1/2}} = 2^{2k+1}\binom{2k}{k}^{-1}.$$

Y el límite asintótico es

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\Pi_1(\mathbb{R}^{2k+1}) &= \lim_{k\to\infty}\frac{(k!)^2\,2^{2k+1}}{(2k)!}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{k^{2k}\,e^{-2k}(2\pi k)2^{2k+1}}{(2k)^{2k}\,e^{-2k}\sqrt{4\pi k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{4\pi k}{\sqrt{4\pi k}} = \infty.\end{aligned}$$

De todo lo anterior podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_1(\mathbb{R}^n) = \lim_{n\to\infty}\frac{S(S_R^{n-1})}{V(S_R^{n-2})} = \infty.$$

5.2.2. Comentarios

1. Puede observarse que $\Pi_1(\mathbb{R}^{2k+1})$ es racional mientras que $\Pi_1(\mathbb{R}^{2k})$ es irracional.
2. Además,

$$\Pi_1(\mathbb{R}^{2k})\cdot\Pi_1(\mathbb{R}^{2k+1}) = 4k\pi, \qquad \frac{\Pi_1(\mathbb{R}^{2k})}{\Pi_1(\mathbb{R}^{2k+1})} = \pi\frac{k(2k)!^2}{2^{4k}k!^4}.$$

3. De donde

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Pi_1(\mathbb{R}^{2k})}{\Pi_1(\mathbb{R}^{2k+1})} = 1$$

utilizando la aproximación de Stirling para $n!$.

5.3. Nueva generalización de π: $\Pi_2(\mathbb{R}^n)$

En la generalización anterior hemos entendido que la expresión $2R$, en el denominador del cálculo tradicional de π en el plano, se refería a la longitud del diámetro, es decir, la medida del segmento de la recta de corte de la circunferencia con su recta ecuatorial. Su extensión natural ha sido la medida de la esfera ecuatorial de dimensión uno menos.

Pero podríamos haber pensado que ese $2R$ se refería al diámetro elevado a la unidad, que es la dimensión de la recta ecuatorial. Entonces la generalización natural será poner:

Numerador: «Superficie» de S_R^{n-1}: $S(S_R^{n-1})$.

Denominador: Dos veces el radio elevado a $n-1$: $(2R)^{n-1}$.

De acuerdo con eso, llamaremos $\Pi_2(\mathbb{R}^n)$ a

$$\Pi_2(\mathbb{R}^n) = \frac{S(S_R^{n-1})}{(2R)^{n-1}} = \frac{\frac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{(2R)^{n-1}} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)2^{n-1}}.$$

Considerando por separado el caso par y el caso impar, tenemos:

1. Caso n **par**: $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\Pi_2(\mathbb{R}^{2k}) = \frac{2k\pi^k}{\Gamma(k+1)2^{2k-1}} = \frac{\pi^k}{(k-1)!\,2^{2k-2}}.$$

2. Caso n **impar**: $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\Pi_2(\mathbb{R}^{2k+1}) = \frac{(2k+1)\pi^{k+1/2}}{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)2^{2k}} = \frac{(2k+1)\pi^{k+1/2}}{\frac{(2(k+1))!}{2^{2(k+1)}(k+1)!}\pi^{1/2}2^{2k}} = \pi^k\,\frac{(k+1)!\,(2k+1)2^2}{(2(k+1))!}.$$

El comportamiento asintótico viene dado por

$$\lim_{k\to\infty} \Pi_2(\mathbb{R}^{2k}) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \Pi_2(\mathbb{R}^{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} \pi^k\,\frac{(k+1)!\,(2k+1)2^2}{(2(k+1))!} = 0,$$

utilizando otra vez la aproximación de Stirling.

Y por tanto $\Pi_2(\mathbb{R}^n)$ tiende a cero si n tiende a infinito.

5.4. Aún otra generalización de π: $\Pi_3(\mathbb{R}^n)$

Tal como hemos comentado, la segunda definición tradicional de π proviene del área del círculo dividida por su radio al cuadrado. Esto nos dará la tercera generalización de π:

$$\Pi_3(\mathbb{R}^n) = \frac{V(S_R^{n-1})}{R^n} = \frac{\frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{R^n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

que nos obliga otra vez a separar los casos de n par o impar:

1. Caso n **par**: $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\Pi_3(\mathbb{R}^{2k}) = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^k}{k!}.$$

2. Caso n **impar**: $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\Pi_3(\mathbb{R}^{2k+1}) = \frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi^{k+1/2}}{\frac{(2(k+1))!}{2^{2(k+1)}(k+1)!}\pi^{1/2}} = \pi^k\,\frac{2^{2(k+1)}(k+1)!}{(2(k+1))!}.$$

Lo que nos da como comportamiento asintótico que $\Pi_3(\mathbb{R}^n)$ tiende a cero cuando n crece.

5.5. Comparativa de las tres generalizaciones

Presentamos una tabla de las tres generalizaciones realizadas para valores pequeños de la dimensión n:

n	3	4	5	6	7	8
$\Pi_1(\mathbb{R}^n)$	4	$3\pi/2$	$2^4/3$	$3\cdot 5\pi$	$2^5/5$	$5\cdot 7\pi/2^3$
$\Pi_2(\mathbb{R}^n)$	π	$\pi^2/2^2$	$\pi^2/(2\cdot 3)$	$\pi^3/2^5$	$\pi^3/(2^2\cdot 3\cdot 5)$	$\pi^4/(2^7\cdot 3)$
$\Pi_3(\mathbb{R}^n)$	$2^2\pi/3$	$\pi^2/2$	$2^3\pi^2/(3\cdot 5)$	$\pi^3/(3\cdot 2)$	$2^4\pi^3/(3\cdot 5\cdot 7)$	$\pi^4/4!$

En el caso del plano, $n = 2$, las tres definiciones coinciden con el valor tradicional, esto es, π.

Estas generalizaciones varían en función de la dimensión, y además las tres nos dan diferentes valores en todas las dimensiones salvo en el caso ya mencionado del plano. Teniendo en cuenta que todas ellas son generalizaciones naturales de las dos aproximaciones a la definición de π en el plano, hay que observar que en dimensiones superiores esas dos aproximaciones así generalizadas no coinciden entre sí.

5.6. Comentario sobre los denominadores

Si consideramos las generalizaciones $\Pi_2(\mathbb{R}^n)$ y $\Pi_3(\mathbb{R}^n)$, parecen ser las más inmediatas a partir de las que originan la noción habitual de π en el plano, pero no coinciden sus valores salvo para $n = 2$.

Nos preguntamos si es posible definir unos «buenos denominadores» que nos dieran el mismo resultado para el cociente si consideramos las dos aproximaciones últimas hechas, es decir, tomar la superficie, que corresponde a la longitud de la circunferencia en el plano, o tomar el volumen, que corresponde a la superficie limitada por la circunferencia en el plano, en el numerador del cociente que nos define π, y eso para cualquier dimensión.

Comparando las dos expresiones de $\Pi_2(\mathbb{R}^n)$ y $\Pi_3(\mathbb{R}^n)$ obtenidas arriba, tenemos que, despejando $\pi^{n/2}$, nos queda

$$\pi^{n/2} = \frac{S(S_R^{n-1})}{\frac{nR^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}} = \frac{V(S_R^{n-1})}{\frac{R^n}{\Gamma(n/2+1)}},$$

lo cual proporciona los denominadores adecuados para obtener el mismo resultado en las dos aproximaciones.

También lo podemos escribir como

$$\Pi(\mathbb{R}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{S(S_R^{n-1})}{nR^{n-1}} = \frac{V(S_R^{n-1})}{R^n},$$

conservando así la igualdad de las expresiones clásicas. Por eso lo hemos llamado $\Pi(\mathbb{R}^n)$. Pero el cociente obtenido depende de la dimensión del espacio, es decir, de n. Estas dos igualdades serían una generalización de las dos aproximaciones para obtener π en el plano. Ahora habría que preguntarse por el significado de ese denominador $\Gamma(n/2+1)$ que, en particular, depende de la dimensión.

Si los separamos para n par $(2k)$ o impar $(2k+1)$, tenemos

$$\Pi(\mathbb{R}^{2k}) = \frac{\pi^k}{k!}, \quad k \geq 1,$$

$$\Pi(\mathbb{R}^{2k+1}) = \pi^k \frac{2^k}{(2k-1)!!} = \pi^k \frac{2^{2(k+1)}(k+1)!}{(2(k+1))!}, \quad k \geq 1.$$

Una tabla con algunos valores de $\Pi(\mathbb{R}^n)$ es la siguiente:

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Pi(\mathbb{R}^n)$	π	$2^2\,\pi/3$	$\pi^2/2$	$2^3\,\pi^2/15$	$\pi^3/6$	$2^4\,\pi^3/105$	$\pi^4/24$	$2^5\,\pi^4/945$

6. Comentarios finales y perspectivas

1. Se han estudiado posibles generalizaciones de la idea clásica geométrica que define π mediante el cociente entre la longitud de una circunferencia en el plano y su diámetro tanto a otras geometrías distintas del plano, algunas superficies de $\mathbb{R}^3$, como a dimensiones superiores a dos.
2. La generalización al caso de otras geometrías, como la esfera o las superficies de revolución, no conserva esta constancia de la relación que define π, ya que depende del radio de las circunferencias tomadas.
3. También se han definido expresiones que generalizan a cualquier dimensión las dos definiciones de π en el plano, la primera tomando la longitud de una circunferencia y la otra utilizando el área de un círculo.

   Estas generalizaciones muestran que no se conservan algunas de las propiedades que ocurren en el plano euclídeo, en particular, la igualdad de las dos aproximaciones geométricas a la definición de π.
4. Pero se ha obtenido una expresión que generaliza la igualdad de las dos aproximaciones a π en el plano, sea por la longitud de la circunferencia o por el área del círculo. Esa expresión depende de la dimensión pero no del radio de las esferas tomadas.

   Tampoco se comportan todas de la misma manera cuando se hace el estudio asintótico con la dimensión.
5. El estudio realizado sobre la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ se puede trasladar a las esferas $S_R^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ teniendo en cuenta que los hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ cortan a la esfera S_R^{n-1} en esferas de dimensión $n-2$ a las que se podría aplicar el procedimiento seguido en el caso de S^2.

   También sería posible estudiar el caso de «superficies» de revolución en dimensión mayor que tres.

6. Otro estudio pendiente es el caso de las geometrías hiperbólica o elíptica, al menos en el plano. En este caso se podrán utilizar resultados semejantes a los de [8].

Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado por el proyecto MTM2014-54855-P del Ministerio de Ciencia e Innovación de España, por el Ministerio de Economía y Competitividad de España a través del programa «María de Maeztu» R&D (MDM-2014-0445) y por el proyecto SGR-2014-634 de la AGAUR de la Generalidad de Cataluña.

El autor agradece los comentarios del revisor anónimo que han permitido mejorar el trabajo.

Referencias

[1] R. P. Agarwal, H. Agarwal y S. K. Sen, Birth, growth and computation of pi to ten trillion digits, *Adv. Difference Equ.* 2013: 100, 59 pp.

[2] D. H. Bailey, Some background on Kanada's recent Pi calculation, 2003, http://crd-legacy.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/dhb-kanada.pdf

[3] P. Beckmann, *A History of Pi*, St. Martin's Press, New York, 1971.

[4] L. Berggren, J. Borwein y P. Borwein, *Pi: A Source Book*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[5] R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, vol. II, Interscience, New York, 1964.

[6] J. Dieudonné, Elementos de análisis, vol. 3, sec. 16.24, Ed. Reverté, Barcelona, 1981.

[7] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel y R. Remmert, *Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] B. A. Fusaro, The area of a hypersphere in Riemannian space, *Amer. Math. Monthly* **80** (1973), 179–184.

[9] J. M. Gómez Aroca, Valores obtenidos para PI a lo largo de la historia, http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/tabla_pi.htm

[10] D. M. Y. Sommerville, *An introduction to the Geometry of n dimensions*, Methuen & Co. Ltd., London, 1929.

[11] E. W. Weisstein, Ball, *MathWorld*, http://mathworld.wolfram.com/Ball.html

[12] E. W. Weisstein, Gamma function, *MathWorld*, http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html

[13] Wikipedia, Número π, https://es.wikipedia.org/wiki/Numero_pi

Miguel-C. Muñoz-Lecanda, Universidad Politécnica de Cataluña, Campus Norte, Edificio C-3, C. Jordi Girona 1, 08034-Barcelona, España

Correo electrónico: miguel.carlos.munoz@upc.edu