

# Tensión crítica de abolladura a cortante de almas esbeltas de vigas metálicas de inercia variable

## *Critical shear buckling stress of slender tapered web panels*

**A. Víctor Zárate Galván**

Ingeniero Civil

Instituto Mexicano del Transporte



**Enrique Mirambell Arrizabalaga**

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Catedrático del Departamento de Ingeniería de la Construcción. UPC

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona

### RESUMEN

Ante determinadas situaciones de diseño de estructuras metálicas (pórticos de edificios metálicos, puentes metálicos y puentes mixtos), las tensiones que se desarrollan en los elementos pueden ser considerables y no resistidas con secciones de perfiles laminados (perfil I y H). El problema se resuelve mediante el dimensionamiento de vigas o pilares armados proyectados "a medida", los cuales, se forman ensamblando placas de acero por medio de los elementos de unión (uniones atornilladas, uniones soldadas). Por otro lado, para conseguir, si cabe, elementos estructurales óptimos, en muchas ocasiones dichas vigas o pilares armados se proyectan con una variación longitudinal de su sección en función de la distribución de tensiones, definiendo así, elementos armados metálicos de inercia variable. Ello se realiza mediante un panel de alma cuya altura varía a lo largo de la directriz y dos paneles (alas), de modo que, se obtiene un elemento que utiliza material resistente, únicamente, allá donde es requerido y, por consiguiente, con disminución del peso propio. Habitualmente, la variación del canto del alma es lineal; y si no es así, puede aproximarse a ella.

Respecto al comportamiento estructural de las vigas de inercia variable, una de sus principales características es la significativa esbeltez del alma, por lo cual, la abolladura ocurre, a menudo, en el rango elástico del material procediendo posteriormente a la plastificación del acero. En particular, en este artículo se presenta una formulación analítica que permite determinar la tensión crítica de abolladura a cortante del panel de alma de vigas de inercia variable para un parámetro

de forma,  $a$ , igual a la unidad. Dicha formulación, ha sido obtenida a partir de estudios numéricos de inestabilidad de placas y considera la influencia que ejercen las alas en la definición de las condiciones de contorno del propio panel de alma.

### SUMMARY

*In certain design situations of steel structures (steel building frames, and steel and composite bridges), the hot - rolled section beams (I and H) have not sufficient strength to resist the stresses that will be developed in the elements of the structure. By using tailored plate girders, which are usually made of several welded or bolted plates, this problem is solved. More efficient structural elements can often be achieved by designing these plate girders as tapered plate girders. This is usually done by means of a web panel, the depth of which varies as bending moment varies. These members will reduce not only the amount of material, but also the self - weight of the structure. Usually, the depth of the web plate varies linearly.*

*One of the main distinctive features in the structural behaviour of tapered plate girders is the considerable slenderness of the web. This often results in web buckling in the elastic range prior to the yielding of the steel. This paper presents an analytical formulation that makes it possible to determine the critical shear buckling stress of slender tapered web panels, which have an aspect ratio  $a$ , equal to unity. This formulation,*



*obtained on the basis of numerical studies of plate instability, takes into account the influence of the boundary conditions of the tapered web.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En el diseño y construcción de estructuras metálicas proyectadas para salvar luces importantes o resistir cargas fuertes, como es el caso de puentes y pórticos de edificación, las tensiones en las vigas suelen ser, por lo general, importantes. Frente a estas condiciones de diseño, cuando los perfiles laminados en caliente no presentan suficiente inercia o resistencia, o no resultan económicos, es necesario fabricar las vigas, enlazando, por medio de soldadura o de uniones atornilladas, placas de acero, consiguiendo así, una sección transversal capaz de resistir las tensiones normales y tangenciales inducidas por las cargas exteriores, constituyendo de esta manera las vigas armadas.

Con el objetivo de conseguir un elemento más eficiente, desde el punto de vista estructural, en muchas ocasiones, las vigas armadas se proyectan con variación de la inercia (canto variable) de tal manera que la sección resistente disminuye allá donde las solicitaciones son menores. Usualmente dicha inercia variable se consigue a través de un panel de alma cuya altura varía linealmente en función de la ley de momentos flectores del elemento y manteniendo horizontal el ala superior, ver Figura 1. Así pues, dicha variación permite la utilización de material resistente, únicamente, allá donde es requerido, conduciendo ello a una disminución del peso propio.

Habitualmente, la sección transversal de las vigas armadas de inercia variable se define a través de un panel de alma muy esbelto y dos paneles de alas robustas; las tensiones normales de flexión son resistidas por las alas, mientras que, el alma se ve sometida, principalmente, a tensiones tangenciales; dependiendo del nivel de tensiones, el alma puede abollar.

Diversos métodos de análisis y dimensionamiento de elementos estructurales de inercia (canto) variable han sido ya presentados por diversos autores. Dichos trabajos han permitido concluir que para pequeños ángulos de inclinación, de  $10^\circ$  o menos, la teoría de Bernoulli-Euler para vigas prismáticas conduce a resultados sumamente satisfactorios [Lee (1)].

No obstante para ángulos más elevados, tal conclusión no puede adoptarse fácilmente; ello es especialmente cierto cuando se analizan los fenómenos de inestabilidad local (abolladuras de alma y/o alas).

Cuando se proyecta una viga armada "a medida" es necesario prestar especial atención a los temas de inestabilidad y, en concreto, a la inestabilidad local del alma (abolladura del alma). La abolladura es fuertemente sensible a la geometría del elemento considerado y, por consiguiente, sensible a cómo varíe la altura del alma del elemento estructural en cuestión.

El comportamiento del alma hasta la abolladura bajo solicitaciones tangenciales se puede interpretar por medio de una combinación de dos componentes de igual magnitud, una de tracción y otra de compresión, donde la componente de compresión será la causante de la inestabilidad del panel que conducirá a la abolladura de éste. La tensión tangencial que causa dicha inestabilidad en el panel de alma es conocida como tensión tangencial crítica de abolladura. En la Figura 2a se muestra la deformada cualitativa del alma de una viga de inercia variable una vez ya ha abollado. Asimismo, en la Figura 2b se representa, a modo de ejemplo, la curva tensión tangencial - desplazamiento normal al plano medio de la chapa correspondiente al nodo del panel de alma que experimentaría el máximo desplazamiento.

Por otra parte, en el caso de vigas armadas prismáticas, el comportamiento estructural hasta agotamiento por cortante puede interpretarse a través de dos fases claramente diferenciadas. La primera, correspondiente a la tensión tangencial que ocasiona la abolladura del alma, donde, dicha tensión dependerá de la geometría del elemento y de las condiciones de contorno en el alma (unión alma - alas y alma - rigidizadores), y la segunda, correspondiente al proceso de rigidización postcrítica, que experimenta el panel, una vez ya ha abollado. Dicha capacidad postcrítica es interpretada a través de un mecanismo resistente, posterior a la abolladura, basado en el desarrollo de un campo diagonal de tracciones en el alma [Basler (2), Rockey y Skaloud (3), Rockey, Evans y Porter (4), Dubas y Gehri (5)].

Sin embargo, en el caso de vigas armadas de inercia variable, el comportamiento hasta agotamiento por cortante es prácticamente idéntico al de vigas rectangulares, por lo cual, para poder definir un modelo de cortante último es necesario

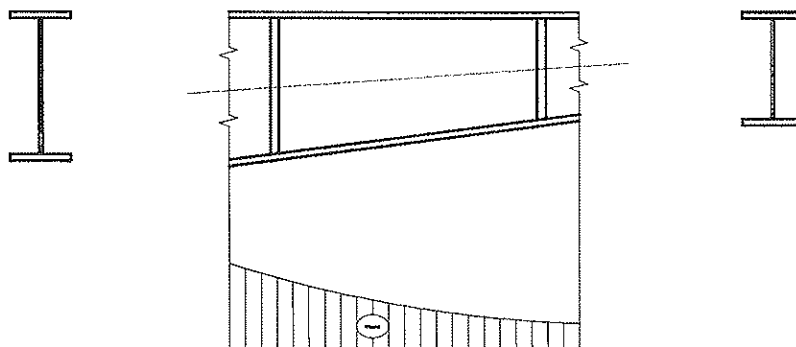


Figura 1. Vigas de inercia variable.

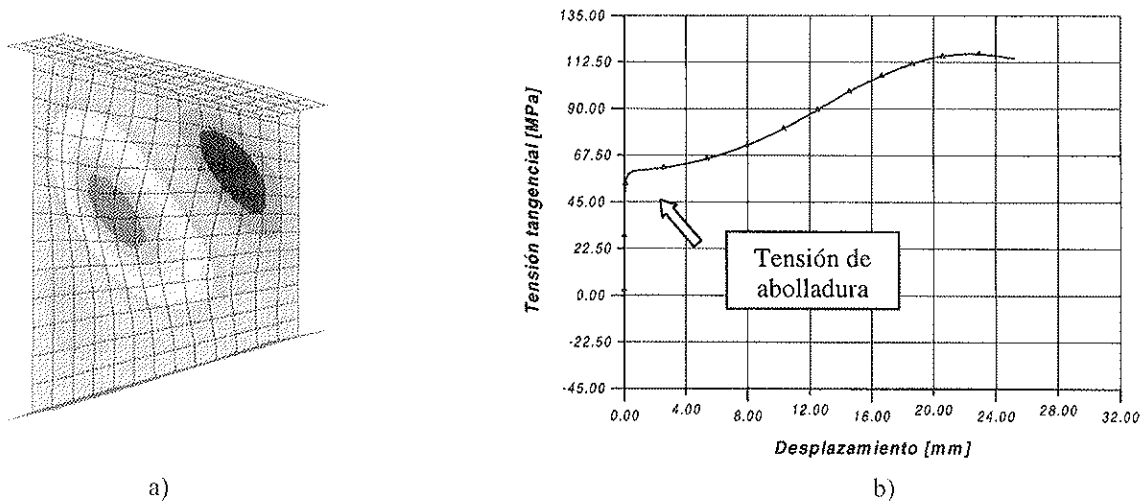


Figura 2. Abolladura del panel de alma de vigas de inercia variable.  
a) Deformada cualitativa. b) Curva tensión tangencial - desplazamiento normal al plano medio del alma.

desarrollar, primeramente, expresiones analíticas que permitan cuantificar la tensión crítica de abolladura del alma. Este es el objetivo fundamental que se persigue en este trabajo y que se presenta en este artículo, para parámetros de forma del alma,  $\alpha$ , igual a la unidad ( $\alpha$ , en este estudio, representa el cociente entre la separación entre rigidizadores transversales verticales y el canto mayor del alma).

## 2. MODELO NUMÉRICO DE ANÁLISIS

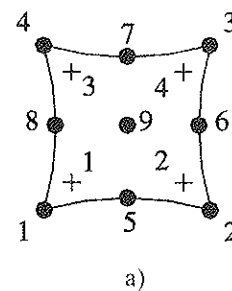
El estudio del comportamiento de vigas armadas de acero requiere un análisis estructural que evalúe la inestabilidad de chapas y el agotamiento resistente del material. Ello debe ser así porque en muchas ocasiones, y en especial en situaciones cercanas al colapso, ambos fenómenos están estrechamente acoplados.

Para valorar el correcto comportamiento de las vigas armadas, tanto en situación de servicio como en situación de rotura, es necesario emplear para ello métodos de análisis que, partiendo de una adecuada técnica para la descripción de su geometría e imperfecciones iniciales, permitan tratar con rigor aquellos temas relacionados con el comportamiento no lineal del material y la no linealidad geométrica.

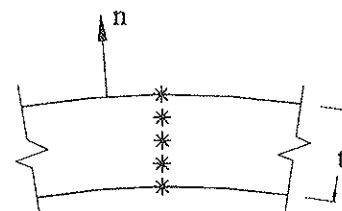
La investigación que se presenta en este artículo se ha realizado utilizando el código ABAQUS [Hibbitt, Karlsson & Sorensen (6)] el cual se basa en la teoría de los elementos finitos y permite considerar tanto la no linealidad geométrica como la no linealidad del material.

El estudio de las vigas armadas de inercia variable se ha llevado a cabo discretizando la geometría de dichos elementos por medio de elementos finitos de segundo orden tipo lámina, los cuales tienen nueve nodos y satisfacen numéricamente la teoría de placas delgadas de Kirchhoff. Por otra parte, este tipo de elementos utiliza integración reducida, disminuyendo así, el tiempo de cálculo en el ordenador. En lo que se refiere a las tensiones y deformaciones, éstas son calculadas en los puntos de integración (cuatro puntos de Gauss en la superfi-

cie del elemento)(ver Figura 3.a). A su vez, el comportamiento a través del espesor se obtiene por medio de cinco puntos de integración, los cuales son definidos utilizando la regla de Simpson (ver Figura 3.b).



a)



b)

Figura 3. Elemento finito tipo lámina utilizado.  
a) Nodos y puntos de integración en la superficie.  
b) Puntos de integración a través del espesor.

En los análisis realizados se ha considerado la hipótesis de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones, contemplando de esta manera, los fenómenos derivados de la no linealidad geométrica. La incorporación de grandes desplazamientos se realiza mediante una continua actualización de la geometría de la estructura tras cada incremento de deformaciones, de forma que la condición de equilibrio se establece sobre la configuración deformada.

El modelo constitutivo del acero es un modelo constitutivo biaxial e isotrópico, combinado con el criterio de plastificación de von Mises. Se considera en el acero un endurecimiento por

deformación cinemático, donde la superficie de plastificación puede desplazarse como un sólido rígido sin modificar su tamaño y forma, pudiendo reproducirse procesos monotónicos de carga y procesos de descarga y recarga. La relación tensión-deformación se basa en el característico diagrama  $\sigma-\epsilon$  uniaxial del acero con comportamiento elastoplástico. En cualquier caso, el presente estudio se enfoca sólo hacia aquellas geometrías de piezas analizadas en donde la tensión crítica de abolladura no supere el rango elástico del material.

Los problemas estáticos donde se considera la no linealidad geométrica involucran, frecuentemente, comportamientos de pandeo y agotamiento, en los que la respuesta carga-desplazamiento muestra rigidez negativa y la estructura debe liberar energía para mantener el equilibrio. El modelo numérico utiliza un procedimiento de análisis no lineal en el que los estados de equilibrio durante las fases inestables de respuesta se hallan usando el método de "Riks modificado" [Hibbitt, Karlsson & Sorensen (6)], útil en el análisis de estructuras que presentan comportamiento no lineal geométrico y del material (comportamiento postcrítico, reblandecimiento del material y agotamiento).

### 2.1. Malla utilizada

La determinación del número de elementos finitos tipo lámina a utilizar en la discretización de las vigas de inercia variable (densidad de malla) se ha realizado mediante un análisis comparativo de los resultados obtenidos con el código *Abaqus* y la teoría clásica [Timoshenko y Gere, (7)]. Para ello, se ha analizado una placa cuadrada sometida a un estado de tensiones tangenciales con condiciones de contorno, en los cuatro bordes, de una placa simplemente apoyada. Dicha placa, cuyas dimensiones son 4000 mm y 12 mm de espesor, se ha discretizado con diferentes densidades de malla (2x2, 4x4, 8x8 y 16x16 elementos). Por otra parte, se adopta para el acero el módulo de elasticidad de  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  y el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

En la Figura 4.a se observa las diferentes densidades de malla utilizadas en la discretización de la placa, mientras que

en la Figura 4.b se muestra la variación de la diferencia de resultados entre el código *Abaqus* y la teoría clásica para cada densidad de malla. Asimismo, se puede observar que dicha diferencia tiende a ser muy pequeña para densidades de malla mayores de 8x8 elementos.

Basados en los resultados anteriores, para el caso de un panel de alma con parámetro de forma  $\alpha$  igual a la unidad, se ha adoptado una malla de 13x13. De la misma manera, en los paneles de alas se ha considerado una malla de 4x13 elementos.

### 2.2. Condiciones de contorno

En la literatura existen diferentes expresiones que permiten determinar la tensión crítica de abolladura a cortante de chapas de acero; dichas expresiones son función de la geometría de la chapa, de las características del material y de las condiciones de contorno [Timoshenko y Gere (7), Bleich (8)]. En el caso de vigas esbeltas de inercia variable, las condiciones de contorno del panel de alma dependen del grado de coacción al giro que pueda experimentar el panel en su contorno. Dicho grado de coacción, a su vez, depende de las características geométricas de los elementos de contorno, en este caso, alas y rigidizadores verticales.

Los trabajos de Basler y Thürlimann (9) y Porter et al (10), realizados para la definición de modelos de cortante último de vigas armadas, adoptaban la hipótesis de interpretar el panel de alma como un panel simplemente apoyado en sus cuatro bordes. Ostapenko y Chern (11) adoptan, sin embargo, condiciones de contorno simplemente apoyado en los bordes paralelos a los rigidizadores verticales, y condición de empotramiento en los bordes paralelos a las alas.

Recientemente, Lee et al (12) y Lee y Yoo (13) han concluido en sus estudios que adoptar la condición de borde simplemente apoyado en el panel de alma de vigas armadas para la determinación de la tensión crítica de abolladura a cortante es excesivamente conservador.

En el modelo numérico de análisis de vigas esbeltas de inercia variable se ha considerado la presencia de las alas y, por

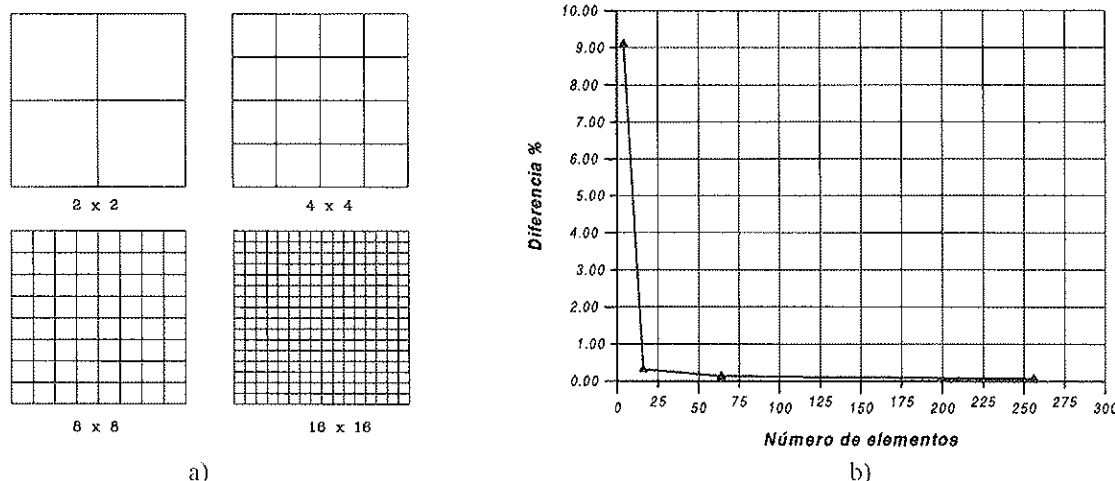


Figura 4. Densidad de malla. a) Mallas consideradas. b) Variación de la diferencia de resultados entre el código Abaqus y la teoría clásica.

consiguiente, la influencia de dichas alas en la determinación de las condiciones de contorno en la unión ala - alma. En la unión panel de alma - rigidizador vertical, se ha considerado una línea de deformación nula y ha sido interpretada en el análisis como un borde simplemente apoyado.

En la Figura 5 y en la Tabla 1 se presentan las condiciones de contorno consideradas en el elemento.

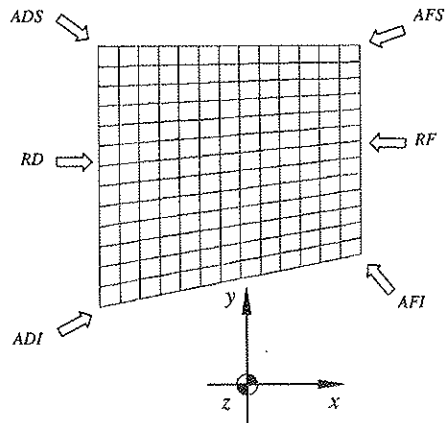


Figura 5. Condiciones de contorno consideradas en el análisis de un elemento de inercia variable.

Tabla 1. Condiciones de contorno

Bordes	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\phi_x$	$\phi_y$	$\phi_z$
RD (Rigidizador dorsal)	0	1	1	1	0	1
RF (Rigidizador frontal)	1	0	1	1	0	1
ADS (Ala dorsal superior)	0	1	1	1	1	0
ADI (Ala dorsal inferior)	0	1	1	1	1	0
AFS (Ala frontal superior)	1	0	1	1	1	0
AFI (Ala frontal inferior)	1	0	1	1	1	0

(0 y 1 representan grados de libertad libre y restringido respectivamente).

### 2.3. Influencia de las imperfecciones iniciales

El modelo numérico a utilizar debe ser capaz de desencadenar el fenómeno de abolladura, lo cual se logra introduciendo, exclusivamente por razones del análisis, imperfecciones geométricas iniciales en los paneles que se analizan. Por consiguiente, se introduce una pequeña deformación fuera del plano medio de la chapa. La forma inicial de esta deformación atiende, de forma general, al primer modo de abolladura a cortante de los paneles a estudiar, correspondiente al modo de menor energía de deformación. La magnitud de dicha imperfección debe ser tal que no influya de forma significativa en el valor de la tensión crítica de abolladura del panel. En este estudio, el máximo desplazamiento impuesto, en la dirección normal al plano medio del alma, es de 0.01mm, es decir, en el entorno de 1/1000 del espesor del alma.

El código utilizado permite estudiar el comportamiento estructural del alma de vigas armadas de inercia variable a través de las curvas tensión tangencial - desplazamiento normal al plano medio del alma. Estas curvas corresponden al punto (nodo) del panel de alma en donde el desplazamiento nodal es máximo. En la Figura 6.a se muestran las dimensiones de las vigas de inercia variable analizadas. La Figura 6.b muestra diferentes respuestas estructurales en función de la tangente del ángulo de inclinación del ala inferior de las vigas de inercia variable.

De igual manera, el código permite estudiar la respuesta estructural del panel de alma en función de las imperfecciones iniciales. Se ha analizado un panel cuadrado con diferentes magnitudes de imperfección, y se han obtenido curvas tensión tangencial - desplazamiento normal en el punto donde se introduce la imperfección geométrica máxima (ver Figura 7). En el caso de la placa con pequeñas imperfecciones iniciales, para un valor de  $\tau$  próximo a 67.0 MPa, de acuerdo con los resultados derivados del modelo, el desplazamiento nodal perpendicular al plano medio crece de forma brusca. En ese instante el panel ha abollado. La teoría lineal clásica de abolladura daría como resultado de la tensión crítica de abolladura

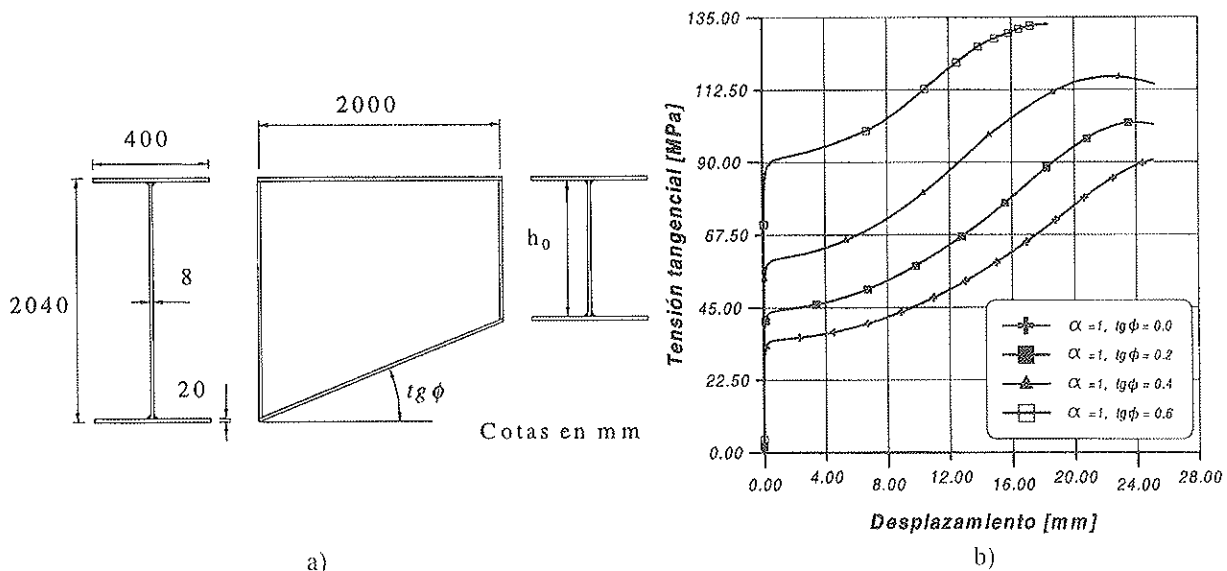


Figura 6. Comportamiento estructural del alma de vigas armadas metálicas de inercia variable. a) Dimensiones consideradas. b) Curva tensión tangencial - desplazamiento normal al plano medio del alma.

para esta geometría el valor de 65.05 MPa. Ambos valores de la tensión están muy próximos, pudiendo concluirse que la introducción de esta imperfección reproduce, de forma adecuada, el efecto perseguido de abollar el panel, sin que el valor de la tensión crítica de abolladura se vea afectado. En cualquier caso, un análisis detallado de la influencia de las imperfecciones iniciales, tanto en magnitud como en esquema, sobre el comportamiento en servicio de estructuras de chapa metálica (abolladura y "respiración del alma") puede encontrarse en la bibliografía [Roca, P., Mirambell, E. y Costa, J. (14), Costa, J., Mirambell, E. y Roberts, T.M. (15)].

### 3. ESTUDIO DE LA ABOLLADURA DEL PANEL DE ALMA

En este apartado se estudia el comportamiento a abolladura de paneles de alma de elementos de inercia variable, en los cuales el parámetro de forma  $\alpha$ , relación entre la longitud del panel (distancia entre rigidizadores) y el canto mayor, sea igual a la unidad.

Se realiza, en primer lugar, un estudio paramétrico relativo a la influencia que ejercen las variables geométricas de diseño de elementos de inercia variable (vigas o pilares armados) sobre la abolladura del alma y, posteriormente, se formulan diferentes expresiones analíticas que permiten estimar la tensión crítica de abolladura de estos paneles de alma de canto variable. Tales expresiones se centran en la cuantificación de la tensión crítica en el canto menor del alma, debido a que en éste se localiza la tensión tangencial mayor, pudiendo de esta manera, determinar las geometrías donde el nivel de tensiones alcanza la plastificación del material antes de que ocurra la abolladura del panel de alma.

#### 3.1. Parámetros geométricos

Se presentan a continuación los parámetros o variables geométricas, objeto del estudio paramétrico. La Figura 8 muestra los parámetros geométricos que definen el elemento estructural metálico, desde un punto de vista geométrico. Las variables de diseño, objeto de este estudio, se obtienen a través de la relación entre diferentes parámetros como son  $\lambda_{ala} = b_f / t_f$ ,  $\eta = b_f / h_1$ ,  $tg\phi$  y  $\alpha = a / h_1$  ( $\alpha = 1$ ).

En estas relaciones,  $\lambda_{ala}$  es la esbeltez del ala, definida por la relación entre el ancho de ala,  $b_f$  y el espesor de ala,  $t_f$ ,  $\eta$  es la relación entre el ancho de ala y el canto mayor del alma  $h_1$ ,  $\alpha$  es el parámetro de forma del alma, definido por la relación entre la separación de los rigidizadores transversales  $a$  y el canto mayor del alma  $h_1$  y  $tg\phi$  es la pendiente del ala inferior.

En este trabajo, se procedió a realizar un análisis de sensibilidad basado en el tipo de secciones longitudinales y transversales más utilizados en la construcción, estableciendo así los rangos de variación de las variables de diseño a contemplar en el estudio paramétrico para el caso de  $\alpha = 1$ . Los rangos considerados fueron ,  $10 \leq \lambda_{ala} \leq 60$ ,  $0.2 \leq \eta \leq 0.50$  y  $0.1 \leq tg\phi \leq 0.6$ .

En cualquier caso, el parámetro relevante en este estudio es la esbeltez del alma. Dicho parámetro marca la sensibilidad del panel de alma a la inestabilidad. Como norma práctica habitual puede adoptarse para el tipo estructural de puentes una esbeltez próxima a 200, mientras que para edificación industrial, dicha esbeltez se encuentra en el entorno de 300 [Maquoi (16)].

Éste ha sido el rango de valores de esbeltez de alma considerado en el presente estudio. La influencia de dicha variable

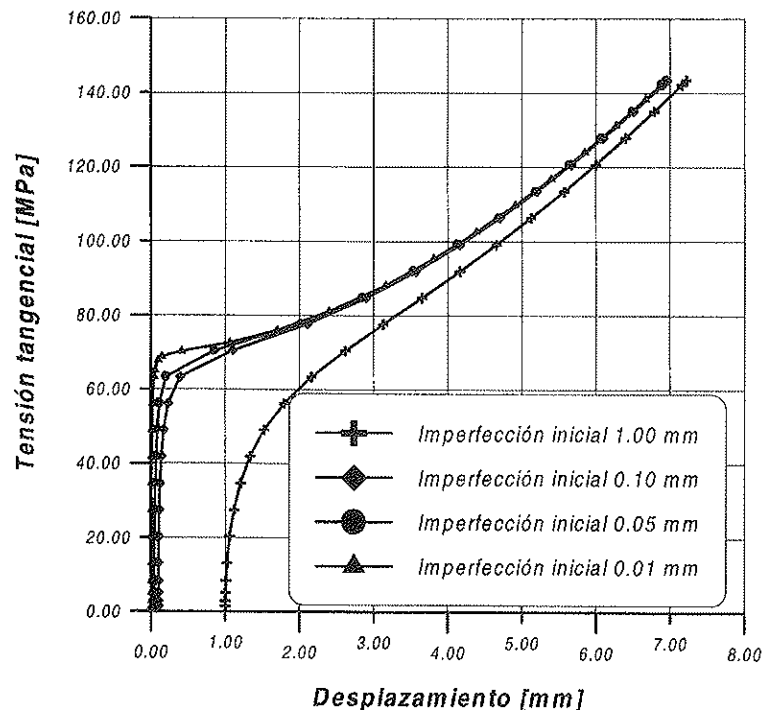


Figura 7. Influencia de las imperfecciones iniciales en el comportamiento estructural de un panel esbelto sometido a tensiones tangenciales.

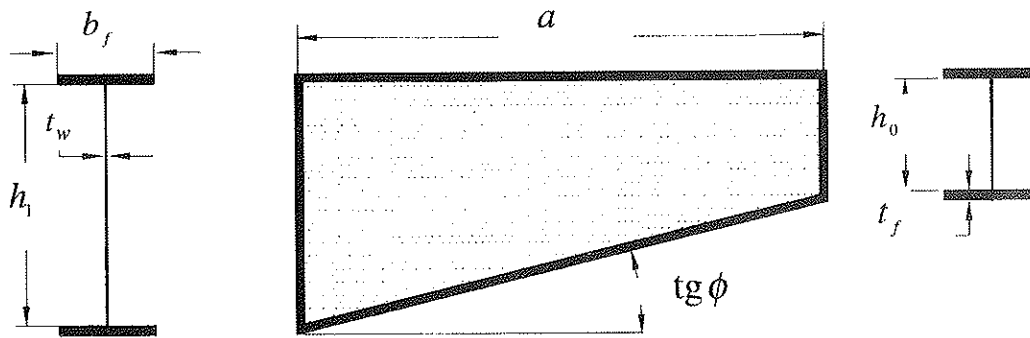


Figura 8. Parámetros geométricos de vigas de inercia variable.

geométrica (esbeltez =  $h_1 / t_w$ ) queda recogida de forma explícita en la formulación que permite determinar la tensión crítica de abolladura de chapas de canto variable sometidas a cortante, de acuerdo con lo recogido en la formulación de la teoría clásica.

El tipo de acero considerado en este estudio es el acero tipo Fe 510 [Eurocódigo 3 (17)], cuyo límite elástico  $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$ , su resistencia última  $f_u = 510 \text{ N/mm}^2$ , el módulo de elasticidad  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  y el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

### 3.2. Resultados del análisis estructural

Para todos los elementos estructurales (vigas armadas) de inercia variable, se determinó la tensión crítica de abolladura del alma. Dicha tensión es fácilmente identificable a través de la curva carga (cortante o tensión) - máximo desplazamiento normal al plano medio del alma, puesto que para dicho valor de la tensión, el desplazamiento normal crece de forma brusca. Ello ya podía apreciarse en las curvas presentadas en la Figura 6. La Figura 9 muestra la distribución de desplazamientos normales al plano medio del alma de una de las vigas armadas analizadas, una vez aquella ya ha abollado. En concreto se marca el punto para el cual se determina la curva carga - desplazamiento máximo.

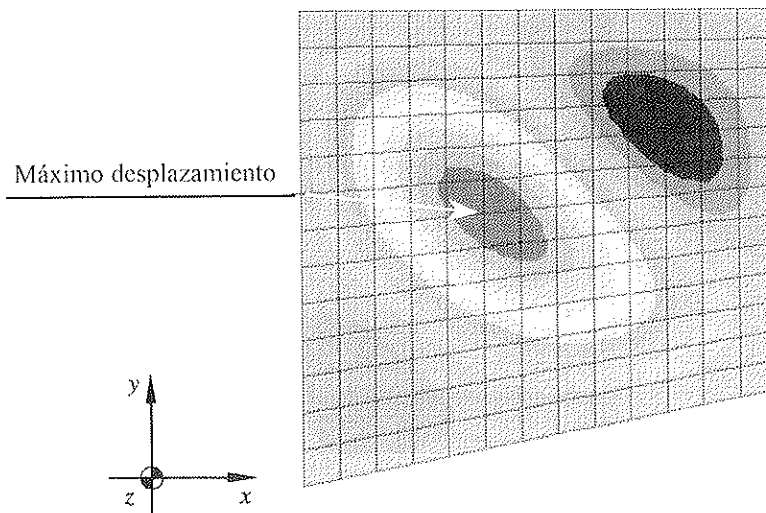


Figura 9. Deformada cualitativa del panel de alma de un elemento de inercia variable, cuando el alma ha abollado.

Conviene señalar que para todas las geometrías analizadas, el parámetro de forma del alma es  $\alpha = 1$ . En la Figura 10 se muestra el comportamiento tenso - deformacional del alma sometida a tensiones tangenciales; en dicha figura puede constatar la existencia de una tensión tangencial (tensión crítica) para la cual, a partir de ese valor, la placa experimenta grandes desplazamientos en la dirección perpendicular al plano medio de la misma.

Asimismo, puede apreciarse, que las curvas tensión tangencial - máximo desplazamiento normal son algo diferentes, en función del valor de la esbeltez  $\lambda_{\text{alma}}$  de las alas. Lógicamente, cuanto mayor es dicha esbeltez, menor es la tensión crítica de abolladura del panel de alma de altura variable. En este sentido, puede concluirse que el valor de la tensión crítica de abolladura es sensible a las características geométricas de las alas y alma, incluso adoptando un mismo parámetro de forma del alma  $\alpha = 1$ .

Conocida la tensión crítica de abolladura, referida al canto menor  $h_0$  de los paneles analizados, y en base a la formulación de la teoría clásica, podría determinarse el coeficiente de abolladura  $k$  a través de la expresión conocida de teoría clásica

$$\tau_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t_w}{h_0} \right)^2$$

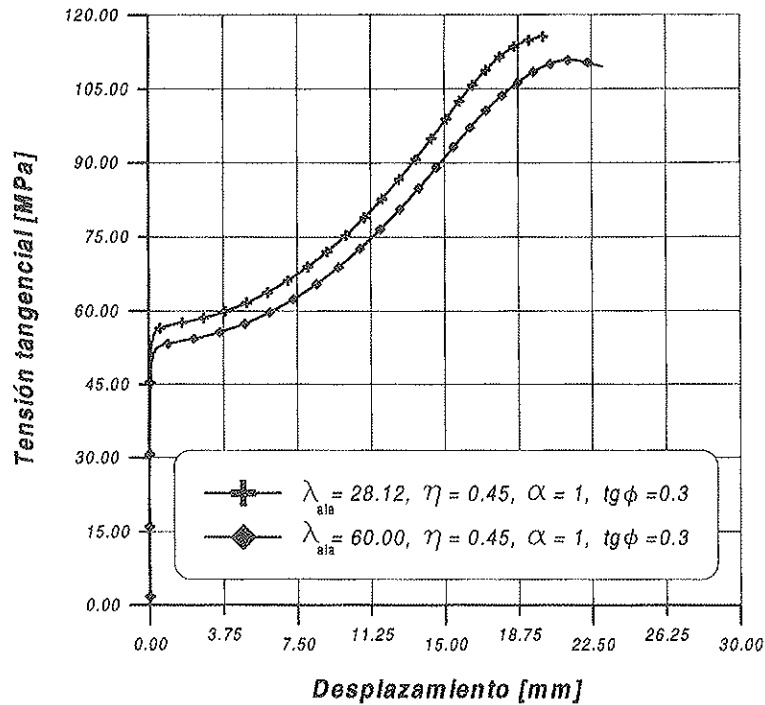


Figura 10. Comportamiento del alma de un elemento estructural de inercia variable sometido a tensiones tangenciales.

En esta expresión  $E$  es el módulo de elasticidad,  $\gamma$  el coeficiente de Poisson,  $t_w$  el espesor del alma y  $\tau_{cr}$  la tensión crítica de abolladura. El coeficiente  $k$  a determinar debería contemplar la presencia de las alas, a través de su propia esbeltez y del parámetro  $\eta$ , relación entre ancho de ala  $b_f$  y canto mayor del alma  $h_t$ . También debería considerar el ángulo de inclinación  $\phi$  del ala inferior del elemento de inercia variable estudiado en cuestión. La determinación de este coeficiente  $k$  se plantea en el siguiente apartado.

En la Figura 11 se presentan diferentes valores del coeficiente de abolladura en piezas de inercia variable, obtenidos mediante el modelo numérico de elementos finitos, en función de la esbeltez de ala  $\lambda_{ala}$  y del parámetro  $\eta$ . Puede observarse que existe una relación aproximadamente lineal entre el valor del coeficiente de abolladura y la esbeltez del ala; y ello es así para diferentes valores de la inclinación del ala inferior. No obstante, la relación lineal, interpretada a través de la pendiente de la recta, es diferente para cada valor de  $\eta$ . De aquí,

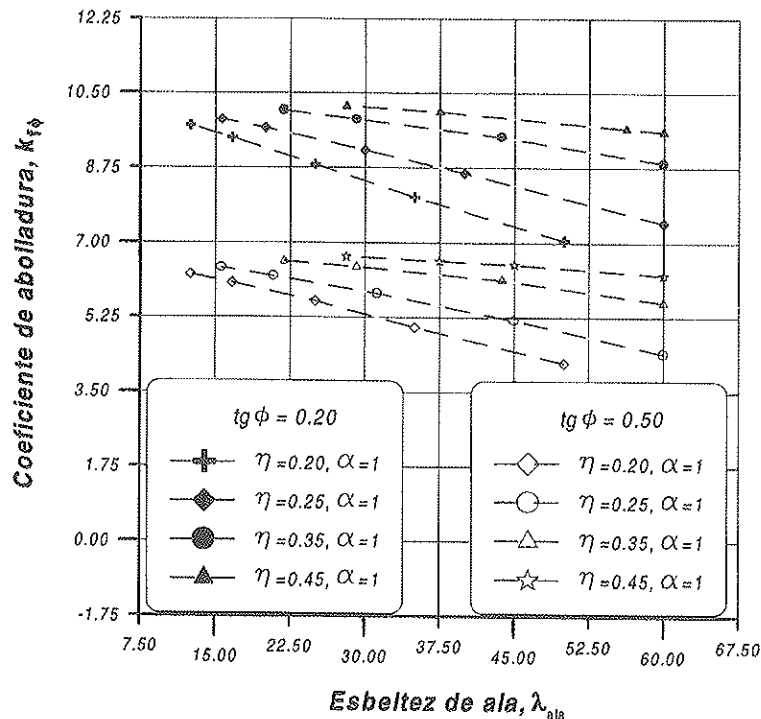


Figura 11. Valores del coeficiente de abolladura de alma en elementos de inercia variable en función de la esbeltez y ancho de ala para diferentes pendientes del ala inferior ( $tg\phi = 0.20, 0.50$ )



puede concluirse que el coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$  depende, no sólo de la esbeltez de ala, sino también del ancho de la misma.

La Figura 12 muestra los valores del coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$  en función de la esbeltez de ala, para diferentes pendientes del ala inferior. En todas las gráficas se observa que la relación entre el coeficiente de abolladura y la esbeltez es prácticamente lineal. Por otra parte, la pendiente en todas las gráficas es prácticamente la misma, independientemente de la inclinación del ala inferior  $tg\phi$  del elemento estructural analizado.

De lo anterior puede deducirse que la relación  $k_{f\phi} - \lambda_{ala}$  presenta un comportamiento lineal con respecto a la pendiente del ala inferior  $tg\phi$ , mientras que, con respecto al ancho de ala, el comportamiento de tal relación viene controlado por un valor de la pendiente diferente, en función de  $\eta$ .

En la Figura 13 se muestra la relación claramente no lineal existente entre el coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$  y la relación entre espesores de alas  $t_f$  y alma  $t_w$ . Los resultados obtenidos facilitan la interpretación del comportamiento de los paneles esbeltos de alma de elementos de inercia variable, para un parámetro de forma del alma  $\alpha = 1$ . En función de las características geométricas del elemento analizado de inercia variable se ha podido determinar el coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$ .

Diferentes curvas tensión tangencial - desplazamiento normal al plano medio del panel de alma, correspondientes a diferentes inclinaciones del ala inferior del elemento estructural analizado, se muestran en la Figura 14. Todos los paneles de alma presentan un parámetro de forma  $\alpha = 1$ . Los puntos de cambio brusco de pendiente de las curvas reproducen los valores de la tensión crítica de abolladura de paneles de alma de canto variable.

Las deformadas del panel de alma para un nivel de tensión tangencial próximo a la tensión crítica de abolladura, y para diferentes valores de  $tg\phi$ , se presentan en las Figuras 14.a, 14.b y 14.c, correspondientes respectivamente a  $tg\phi = 0.2, 0.4$  y  $0.6$ .

Por otra parte, también puede observarse que en la fase postcrítica, la reserva de resistencia tiende a disminuir a medida que aumenta  $tg\phi$ , debido a la disminución de la componente vertical del campo diagonal de tracciones. Esta última conclusión debe ser considerada cuando se definan modelos de cortante último para elementos estructurales armados de inercia variable.

### 3.3. Análisis de los resultados y formulación propuesta

En los apartados anteriores se ha analizado la respuesta tenso-deformacional y el comportamiento frente a abolladura de paneles esbeltos de alma de canto variable de elementos metálicos (vigas y pilares armados) de inercia variable. Los estudios paramétricos han permitido valorar la influencia de los parámetros geométricos de los elementos metálicos de inercia variable sobre la tensión crítica de abolladura, y sobre el coeficiente de abolladura.

A continuación, se propone una formulación analítica, basada en los resultados obtenidos mediante el modelo numérico de elementos finitos, que permite obtener el coeficiente de abolladura para elementos esbeltos de alma de canto variable, con un parámetro de forma  $\alpha = 1$ , y que contempla la presencia de las alas y la pendiente del ala inferior.

El coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$ , dependiendo de las características geométricas de las alas y de la inclinación del ala

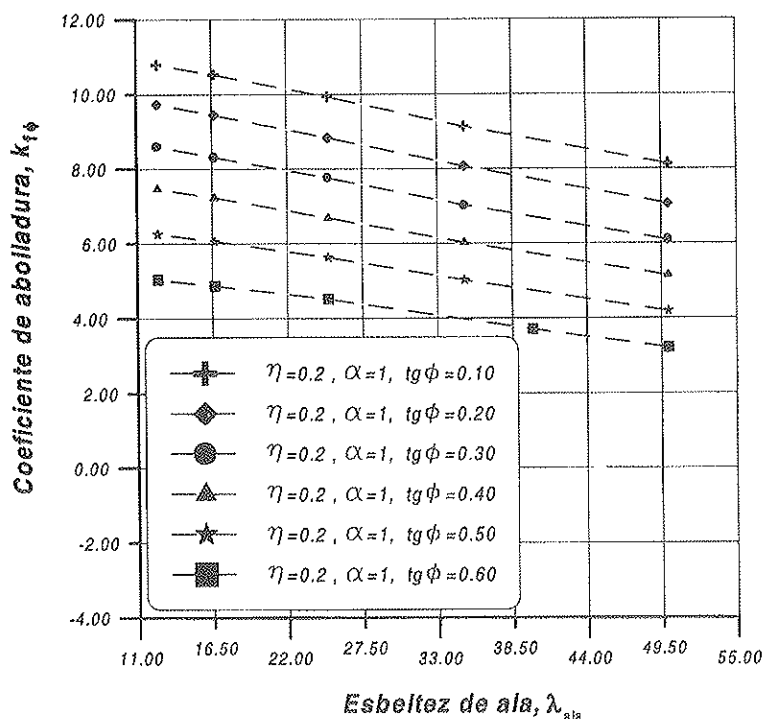


Figura 12. Valor del coeficiente de abolladura del alma en elementos de inercia variable, en función de la esbeltez del ala para diferentes pendiente del ala inferior  $tg\phi$

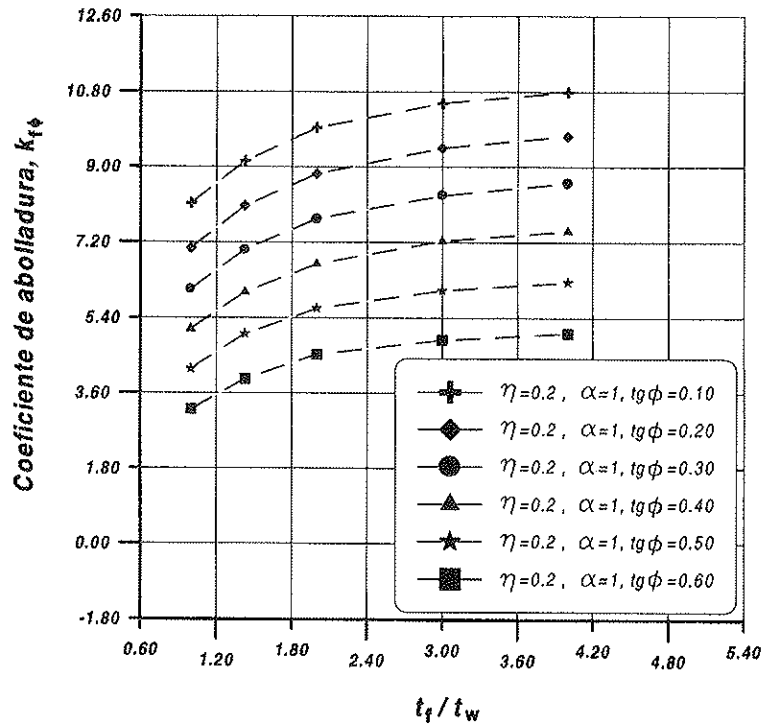


Figura 13. Variación del coeficiente de abolladura de alma en elementos de inercia variable, en función de la relación de espesores  $t_f/t_w$  para diferentes pendientes del ala inferior  $tg\phi$ .

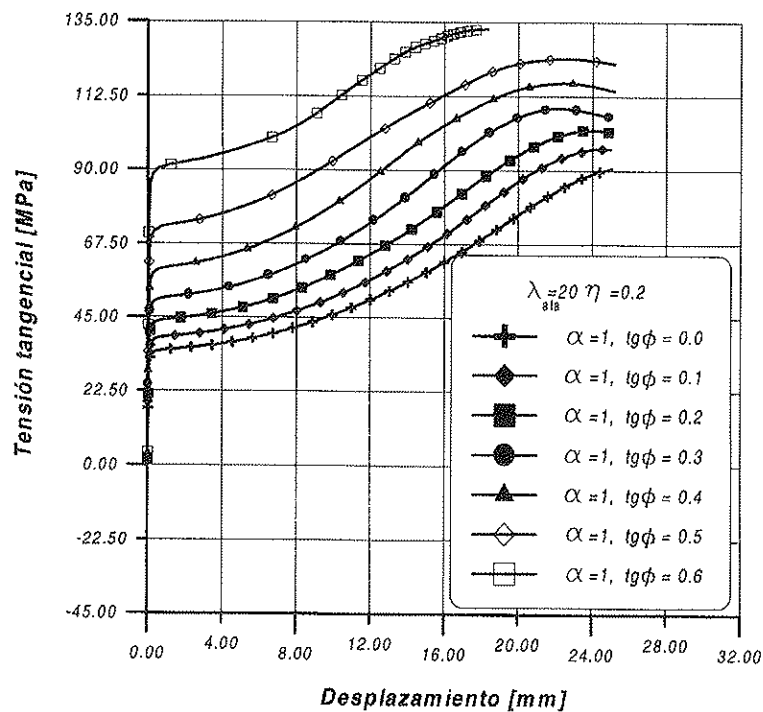
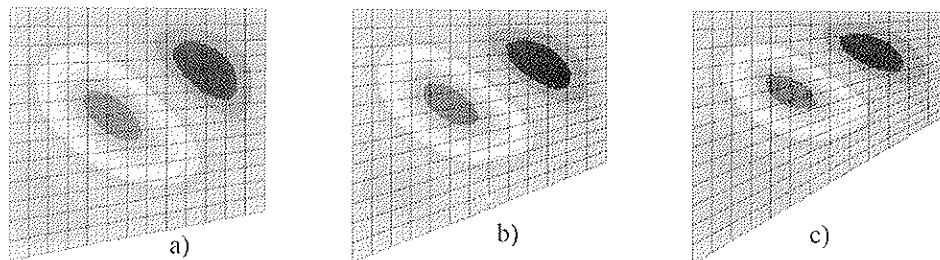


Figura 14. Comportamiento de abolladura de paneles esbeltos de alma de elementos de inercia variable. a)  $tg\phi = 0.2$ , b)  $tg\phi = 0.4$  y c)  $tg\phi = 0.6$

inferior, puede obtenerse a través de la siguiente expresión

$$k_{f\phi} = c_1 \cdot \eta^{c_2} - c_3 \cdot \eta^{-c_4} \cdot \lambda_{ata} \quad [1]$$

en donde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$  son coeficientes parciales que dependen de la pendiente  $\text{tg}\phi$  del elemento metálico en cuestión y que quedan definidos mediante las expresiones siguientes

$$c_1 = 13.45 - 12.70 \cdot \text{tg}\phi \quad [2.a]$$

$$c_2 = 0.032 - 0.04 \cdot \text{tg}\phi \quad [2.b]$$

$$c_3 = 0.0075 - 0.0081 \cdot \text{tg}\phi \quad [2.c]$$

$$c_4 = 1.39 + 0.76 \cdot \text{tg}\phi \quad [2.d]$$

Las expresiones anteriores han sido obtenidas mediante un análisis matemático del comportamiento del coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$ , obtenido con el modelo de elementos finitos, respecto a las diversas variables geométricas  $\lambda_{ata}$ ,  $\eta$  y  $\text{tg}\phi$ . Primeramente, se obtiene para cada variable una ecuación en base logarítmica que correlaciona dicha variable con el coeficiente crítico de abolladura. Posteriormente, de las ecuaciones obtenidas para cada variable se estudia la correlación entre cada una de ellas con el objetivo de determinar una expresión general, sencilla y práctica, que fuera función de dichas ecuaciones, y a su vez permitiera conocer con precisión el coeficiente crítico de abolladura.

En la Tabla 2 se presentan, a modo de ejemplo de aplicación, valores del coeficiente de abolladura de paneles esbeltos de canto variable con un parámetro de forma  $\alpha = 1$ , y para diferentes valores de los parámetros geométricos tenidos en cuenta en el estudio. Como puede observarse, la diferencia entre los valores obtenidos con la formulación propuesta y los valores derivados del modelo numérico de elementos finitos son poco relevantes, y no superan, en estos casos, el 4 %.

### 3.4. Tensión crítica de abolladura de paneles esbeltos de alma de canto variable

Determinadas las expresiones analíticas que permiten obtener el coeficiente de abolladura a cortante de paneles de alma de canto variable, es posible obtener entonces la tensión crítica de abolladura de paneles de alma de elementos estructurales de inercia variable (vigas o pilares armados).

Conviene señalar que la determinación del coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$  se ha planteado tomando como referencia la expresión de la teoría clásica, y en particular, tomando como referencia la esbeltez de alma correspondiente al canto menor  $h_0$ .

Por consiguiente, el valor de la tensión tangencial crítica de abolladura puede obtenerse mediante la siguiente expresión,

$$\tau_{cr} = k_{f\phi} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{t_w}{h_0}\right)^2 \quad [3]$$

en donde, como bien es sabido,  $E$  es el módulo de elasticidad,  $\nu$  el coeficiente de Poisson y  $t_w / h_0$  el inverso de la esbeltez del alma, en la sección de menor canto. El valor del coeficiente de abolladura  $k_{f\phi}$  se obtiene a través de la expresión [1].

La ecuación anterior, tomando como valor de referencia el inverso de la esbeltez del alma en el canto mayor ( $t_w / h_1$ ), adopta la siguiente forma:

$$\tau_{cr} = k_{f\phi} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{t_w}{h_1}\right)^2 \cdot (1+\gamma)^2 \quad [4]$$

en donde  $\gamma = (h_1 - h_0) / h_0$  representa la relación entre el canto mayor y menor del alma.

**Tabla 2. Valores del coeficiente de abolladura de paneles esbeltos de alma de elementos metálicos de inercia variable, obtenidos de acuerdo con la formulación analítica propuesta en este estudio**

$\lambda_{ata} = \frac{b_f}{t_f}$	$\eta = \frac{b_f}{h_1}$	$\text{tg}\phi$	$k_{f\phi}$ (MEF)	$k_{f\phi}$ (Formulación)	Dif. (%)
40.00	0.20	0.6	3.69	3.70	0.27
16.67	0.20	0.6	4.87	4.89	0.41
40.00	0.45	0.6	5.33	5.33	0.00
16.67	0.45	0.6	5.40	5.60	3.57
35.00	0.20	0.4	6.02	5.88	2.32
16.67	0.20	0.4	7.23	7.07	2.21
35.00	0.45	0.4	7.88	7.68	2.53
16.67	0.45	0.4	8.01	7.99	0.24
35.00	0.20	0.2	8.06	8.03	0.37
16.67	0.20	0.2	9.45	9.32	1.37
35.00	0.45	0.2	10.08	10.00	0.79
16.67	0.45	0.2	10.31	10.36	0.48

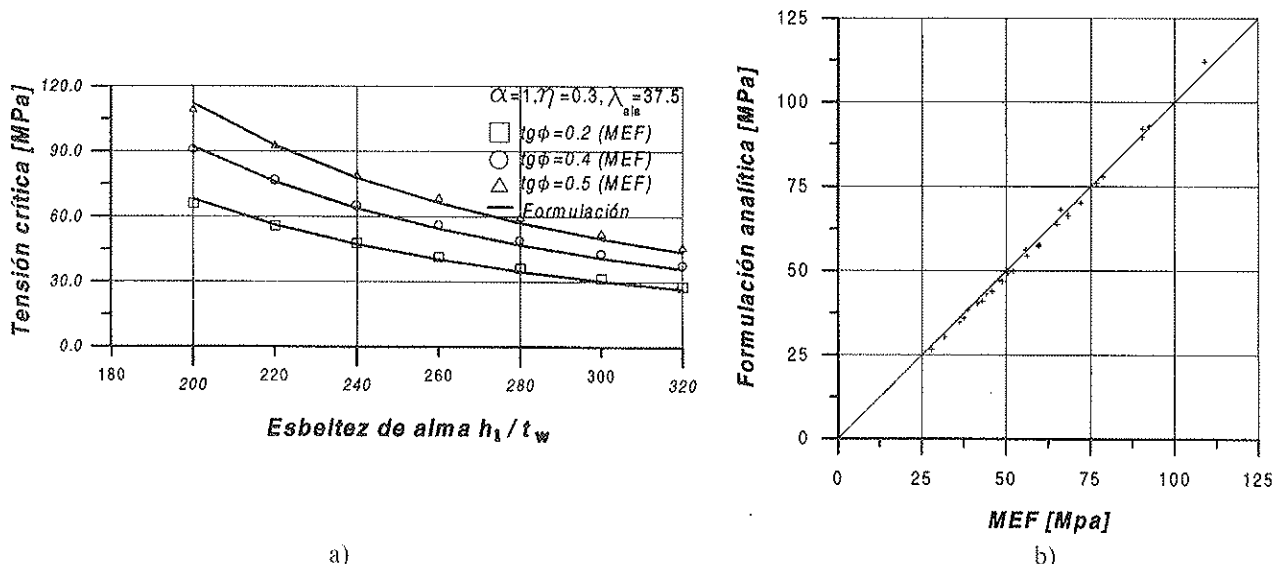
En la Tabla 3 se recogen diferentes valores de la tensión crítica de abolladura obtenidos con la formulación y con el modelo numérico de elementos finitos. Puede apreciarse que la bondad en el ajuste de resultados de la formulación propuesta es ciertamente elevada.

La Figura 15.a muestra la relación entre la tensión tangencial crítica de abolladura del alma y la esbeltez del alma  $h_1/t_w$  para un parámetro de forma  $\alpha = 1$ . Se observa que la tensión crítica de abolladura disminuye al aumentar la esbeltez del alma, tal como era de esperar. En la Figura 15.b se muestran algunos resultados de tensión crítica de abolladura de paneles de alma de inercia variable obtenidos con el modelo numérico de elementos finitos, los cuales, se comparan con los obtenidos mediante la formulación propuesta, manifestándose la gran bondad de la misma en el ajuste.

### 4. CONCLUSIONES

En el presente artículo se propone una formulación analítica para calcular la tensión crítica de abolladura a cortante de paneles esbeltos de alma de canto variable para parámetros de forma  $\alpha=1$ . Dicha formulación ha sido determinada a partir de resultados obtenidos con un modelo numérico basado en el método de los elementos finitos y, de igual manera, ha quedando constatada la gran bondad del ajuste.

Asimismo, puede concluirse, que el comportamiento del panel de alma de elementos de inercia variable frente a abolladura es función de las características geométricas del elemento y de las condiciones de contorno del alma en los bordes. La inclinación del ala inferior influye considerablemente en la tensión crítica de abolladura. Por otro lado, las condi-



Figuras 15. Tensión crítica de abolladura de alma de elementos metálicos de inercia variable.  
 a) Tensión crítica de abolladura - esbeltez del alma.  
 b) Comparación de la tensión crítica de abolladura entre la formulación propuesta (expresión [3]) y MEF.

Tabla 3. Valores de la tensión crítica de abolladura de paneles esbeltos de alma de elementos metálicos de inercia variable, obtenidos de acuerdo con la formulación analítica propuesta en este estudio (expresión [3])

$\frac{h_1}{t_w}$	$\frac{h_0}{t_w}$	$\alpha$	$\eta$	$\lambda_{ala}$	$tg\phi$	MEF (MPa)	[3] (MPa)	Dif. (%)
250	225.0	1.0	0.20	20.00	0.10	38.62	38.34	0.72
250	200.0	1.0	0.20	20.00	0.20	43.84	43.13	1.61
250	175.0	1.0	0.20	20.00	0.30	50.44	49.35	2.16
250	150.0	1.0	0.20	20.00	0.40	59.63	57.83	3.01
250	125.0	1.0	0.20	20.00	0.50	72.03	70.12	2.56
250	100.0	1.0	0.20	20.00	0.60	90.23	89.68	0.60
200	160.0	1.0	0.30	37.50	0.20	66.09	68.11	2.96
300	240.0	1.0	0.30	37.50	0.20	31.54	30.28	3.99
220	132.0	1.0	0.30	37.50	0.40	76.77	76.04	0.95
320	192.0	1.0	0.30	37.50	0.40	37.40	35.95	3.87
240	120.0	1.0	0.30	37.50	0.50	78.70	77.81	1.13
280	140.0	1.0	0.30	37.50	0.50	59.52	57.21	3.88

ciones de contorno se definen a través de las características geométricas de las alas (esbeltez de ala, ancho de ala y relación entre ancho de ala y conato mayor del alma) y con la adopción de la hipótesis de líneas de deformación nula en los rigidizadores transversales.

La presencia de las alas permite un cierto grado de coacción al giro del alma, siendo dicha coacción función de la rigidez de las mismas. Por consiguiente, la condición de contorno existente en la unión ala - alma puede variar desde la condición de borde simplemente apoyado a borde empotrado. Dicho efecto queda recogido en la expresión [3] mencionada en el artículo, que permite obtener el coeficiente de abolladura para cualquier geometría de vigas armadas de inercia variable para un valor del parámetro de forma igual a la unidad.

De igual manera, se ha podido apreciar que durante la fase postcrítica, la reserva de resistencia que muestra la viga armada de inercia variable tiende a disminuir a medida que aumenta la pendiente del ala inferior, lo cual es debido a la disminución de la componente vertical del campo diagonal de tensiones. Esta conclusión deberá ser considerada cuando se quiera desarrollar modelos de cortante último en almas de canto variable, pertenecientes a elementos estructurales armados de inercia variable.

Este trabajo tiene continuidad en la generalización de la formulación propuesta para el caso de contemplar cualquier valor del parámetro de forma  $\alpha$ . La formulación generalizada será punto de partida para el desarrollo de posteriores modelos de cortante último en vigas armadas de inercia variable.

### Agradecimientos

El primer autor desea expresar su gratitud al Instituto Mexicano del Transporte y la Universidad Autónoma de Querétaro, México, por su apoyo y cooperación.

### REFERENCIAS

- (1) Lee, L. H. N. On the lateral buckling of a tapered narrow rectangular beam. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 26, 1959, 457-458.
- (2) Basler, K. Strength of plate girders. PhD thesis, Lehigh University, Bethlehem, 1959.
- (3) Rockey, K. C. y Skaloud, M. Influence of flange stiffness upon the load carrying capacity of webs in shear. Final Report, 8<sup>th</sup> Congress IABSE, New York, 1968, 429-439.
- (4) Rockey, K. C., Evans, H. R. y Porter, D. M. A design method for predicting the collapse behaviour of plate girders. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Part 2*, 1978, 85-112.
- (5) Dubas, P. y Gehri, E. Behaviour and design of steel plated structures. In *Applied Statics and Steel Structures*, Swiss Federal Institute of Technology Zürich / Switzerland, 1986.
- (6) Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., (1996). *Abaqus / Standard Theory and User's Manual*. Pawtucket, 1996.
- (7) Timoshenko S. P., y Gere J. M. *Theory of elastic stability*, 2<sup>nd</sup> edn. McGraw-Hill Co., Inc., New York, 1961.
- (8) Bleich, F. *Buckling strength of metal structures*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1952.
- (9) Basler, K., y Thürlimann, B. Plate girder research. *Proceedings, AISC National Engineering Conference*. American Institute of Steel Construction, New York, 1959.
- (10) Porter, D. M., Rockey, K. C., y Evans, H. R. The collapse behaviour of plate girders loaded in shear. *Structural Engineering*, 1975, 53, No. 9, 313-325.
- (11) Ostapenko, A., Chern, C. y Parsanejad, S. Ultimate strength design of plate girder. *Developments in Bridge Design and Construction*, University College, Cardiff, 1971, 505-518.
- (12) Lee, S. C., Davidson, J. S. y Yoo, C. H. Shear buckling coefficients of plate girder web panels. *Computers & Structures*, 1996, 59, No. 5, 789-795.
- (13) Lee, S. C. y Yoo, C. H. Strength of plate girder web panels under pure shear. *Journal of Structural Engineering*, 1998, 124, No. 2, 184-194.
- (14) Roca, P., Mirambell, E. y Costa, J. Geometric and material nonlinearities in steel plates. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1996, 122, No. 12, December.
- (15) Costa, J., Mirambell, E. y Roberts, T.M. Numerical studies of fatigue induced by breathing of slender web plates. *Proceedings of the 1996 Engineering Systems Design and Analysis Conference*, ASME, Montpellier, 1996, 1, 79-86.
- (16) Maquoi, R. *Constructional steel design, an international guide*. In *Plate Girders* (eds Patrick J. Dowling, John E. Harding and Reidar Bjorhovde). Elsevier Applied Science, 1992.
- (17) Eurocode 3 (1996). *Proyecto de Estructuras de Acero*. AENOR, Asociación Española de Normalización y Certificación, Madrid.