Matemàtiques arreu i recursos

Racó històric

Aristarc de Samos, el geòmetra que va mesurar l'univers

Maria Rosa Massa Esteve
Universitat Politècnica de Catalunya

Aristarc de Samos, que se situa entre Euclides (aprox. 300 aC) i Arquímedes (287-212 aC), fou un dels pioners a escriure una obra que calculava les mides de les esferes del Sol i la Lluna relacionant-les amb la mida de la Terra i les distàncies a la Terra. Les matemàtiques i, en concret, la geometria euclidiana, com s'exposarà més endavant, foren una de les eines que van facilitar aquesta descripció i els càlculs d'aproximació.

Aristarc, anomenat "el matemàtic" en l'antiguitat, també va ser una de les rares excepcions a plantejar idees heliocèntriques de l'univers, i va ser conegut com "l'antic Copèrnic" (Heath, 1981a). Tanmateix, en la seva obra del 230 aC, *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*, Aristarc va emprar la teoria geocèntrica.

Quan Aristarc va escriure la seva obra a l'astronomia grega ja es coneixien diverses teories sobre el cosmos. Així Tales (aprox. 624-547 aC), que era conegut com "l'astrònom", va predir i explicar les causes d'un eclipsi de Sol i entenia la Lluna i el Sol com a discos o cilindres curts que es comportaven com si flotessin a l'aigua (Heath, 1981b; Bowen & Goldstein, 1994). Altres interpretacions van procedir de Pitàgores (aprox. 572-497 aC) i els seus seguidors, que van reconèixer que la Terra era una esfera i que Venus, l'estel vespertí, era el mateix planeta que Venus, l'estel matutí. El moviment de la Terra, així com el del Sol, la Lluna i els planetes, al voltant d'un foc central fou també una teoria atribuïda a un deixeble de Pitàgores, Filolau de Crotona (aprox. 470 aC) (Berry, 1961). Posteriorment, Èudox (aprox. 408-355 aC) va proposar una teoria d'esferes homocèntriques per descriure el moviment dels cossos celestes: va suposar que la Terra romania immòbil al centre i que els planetes (incloent-hi el Sol i la Lluna) descrivien moviments circulars al voltant seu. Èudox va considerar les esferes encaixades i concèntriques amb la Terra: tres esferes per al Sol, tres per a la Lluna i quatre per a cadascun dels altres planetes amb diferents velocitats de rotació i eix de gir.

Aristòtil (aprox. 384-322 aC), que amb els seus textos va tenir una gran influència, va analitzar les realitats observables i va reconstruir la teoria de l'univers integrant en la seva cosmologia moltes de les idees dels seus predecessors, tals com el geocentrisme, el marc estructural de les dues esferes, el principi platònic de moviment circular i uniforme dels cossos celestes i, a més, es va apropiar de la teoria presocràtica dels quatre elements. De fet, la pràctica totalitat dels astrònoms grecs, àrabs i cristians van acceptar, de manera implícita o no, les premisses fonamentals de la cosmologia aristotèlica: el caràcter tancat i finit del cosmos, la immobilitat de la Terra al centre de l'univers i la diferència entre les dues regions: la celeste (supralunar) i la terrestre (sublunar).

Aristarc, que va néixer aproximadament el 310 aC a l'illa de Samos, fou deixeble d'Estrató de Làmpsac, tercer director del Liceu, l'escola fundada per Aristòtil (Sthal, 1971-1991 i Wall, 1975). No es coneix gairebé res de la seva vida, però hi ha fonts sobre les seves observacions astronòmiques al Museu d'Alexandria amb Timocaris d'Alexandria (aprox. III aC) i Aristil·lo (deixeble de Timocaris) (Maeyama, 1984; Golstein & Bowen, 1991). Les poques informacions de què es disposen ens arriben per les cites trobades en textos posteriors i per l'obra d'astronomia que ens va deixar.

Claudi Ptolemeu (aprox. 85-165), a la seva obra *Almagest* (150), anomenada també *Sintaxis matemática*, explica que Aristarc va observar el solstici d'estiu l'any 280 aC. Ptolemeu, a l'apartat primer del llibre III de la seva obra, també descriu els procediments d'Aristarc per determinar la longitud de l'any solar (Ptolemy, 1984).

Posteriorment, Nicolau Copèrnic (1473-1543), a la seva obra *De revolutionibus orbium coelestium libri VI* (1543) explica les observacions fetes per Aristarc a Alexandria amb Timocaris d'Alexandria (aprox. III aC) i Aristil·lo. Al capítol II del tercer llibre, Copèrnic relata les observacions dels equinoccis i solsticis amb el títol: "Història de les observacions que comproven la irregular precessió dels equinoccis i els solsticis" i cita Aristarc i Timocaris (Copèrnic, 1987).

Encara que Aristarc fou reconegut com a astrònom, a la seva època va ser anomenat "el matemàtic" i citat com un dels pocs homes que tenien un profund coneixement de totes les branques de la ciència: geometria, astronomia i música. Vitruvi (s. I aC), arquitecte i tractadista romà, el menciona al capítol I del llibre primer de la seva obra *De architectura* (35-25 a.C.), titulat "De l'essència de l'arquitectura", com un dels que va deixar a la posteritat càlculs numèrics i, en aquest cas, amb unes demostracions impecables pel que fa al rigor (Vitruvi, 1787, 8):

"Els que van rebre de la naturalesa tant talent, perspicàcia i memòria que poden adquirir perfectament la geometria, l'astrologia, la música i d'altres disciplines, passen els límits d'arquitectes i es fan matemàtics; amb els quals poden fàcilment gaudir d'aquestes ciències, i participar així del coneixement de moltes altres. Però rares vegades es veuen tals subjectes, com en altres temps ho van ser Aristarc de Samos, Filolau i Arquites de Tàrent, Apol·loni de Perge, Eratòstenes de Cirene, Arquímedes i Scopinas de Siracusa, els quals van deixar a la posteritat moltes invencions orgàniques i gnomòniques, trobades i explicades per càlcul numèric i raons naturals."

Segons Tannery (1995), Vitruvi també explica que Aristarc havia construït dos rellotges de sol, un d'hemisfèric i un altre de pla. D'altra banda, no ens queda cap dubte que Aristarc va ser un geòmetra molt capaç, com queda provat en el treball d'astronomia que ens ha llegat.

Aristarc, com ja s'ha esmentat, és sobretot conegut per ser l'"antic Copèrnic". Hi ha unanimitat a l'hora d'afirmar que Aristarc fou dels primers a presentar la hipòtesi heliocèntrica. En un text d'Arquímedes, *Arenari* (216 aC), contemporani seu, es dedueix que Aristarc suposava que les esferes de les estrelles i el Sol romanien a l'espai sense moure's i que la Terra girava al voltant del Sol (Erhardt & Erhardt-Siebold, 1942; Neugebauer, 1942). Aristarc comparava l'esfera de les estrelles fixes amb l'òrbita de la Terra (Archimède, 1971, 135),

"Aristarc de Samos ha publicat algunes hipòtesis de les quals es dedueixen per al món dimensions molt més grans que les que acabem de mencionar. Efectivament, suposa que les estrelles fixes i el Sol resten immòbils, que la Terra gira al voltant del Sol sobre una circumferència de cercle, i el Sol ocupa el centre d'aquesta trajectòria, i que l'esfera de les fixes, que s'estén al voltant del mateix centre que el Sol, té una mida tal que la raó del cercle sobre el qual se suposa que la Terra gira, respecte a la distància de les estrelles fixes, és comparable a la raó del centre de l'esfera respecte a la seva superfície."

En aquest sentit també el cita Plutarc (aprox. 46-125), historiador grec, que deu la fama a la seva obra *Vides paral·leles*, on estableix comparacions entre figures gregues i romanes i és una font molt important d'informació sobre l'antiguitat. Un altre escrit de Plutarc és *Obres morals*, que consta de 78 tractats que recullen discussions filosòfiques i de caràcter retòric. En aquella època, se suposava que Aristarc assumia, en les seves teories, el moviment de la Terra. Plutarc va escriure sobre Aristarc en un tractat de les seves *Obres morals* titulat Sobre la cara visible de la Lluna, que se sol citar com a *Moralia* 923 A. Aquí Plutarc comenta que Cleantes (263-232 aC) creia que s'hauria d'atacar Aristarc per desplaçar la Terra del centre de l'univers (Chermiss-Helmbald, 1957, 55):

"Oh Senyor, senzillament no ens acuseu d'impietat com Cleantes, que va creure que els grecs haurien d'haver presentat una acció per impietat contra Aristarc de Samos, sobre la base que estava desplaçant la Terra de l'univers, perquè va intentar explicar ("salvar") els fenòmens suposant que els cels estan quiets mentre que la Terra gira al llarg de l'eclíptica i al mateix temps està girant sobre el seu propi eix."

Tanmateix, malgrat aquestes referències, Aristarc, a la seva obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*, no presenta la hipòtesi heliocèntrica. És probable que aquesta hipòtesi se li suggerís en comprovar, en la seva obra, que el Sol és molt més gran que la Terra i la Lluna i es troba molt més lluny de la Terra que de la Lluna.

Pappos, en el llibre VI de la seva obra Col·lecció matemàtica (aprox. 340), explica que l'obra d'Aristarc es trobava en un recull anomenat *Petita astronomia*, juntament amb l'*Òptica* i els *Fenòmens*, d'Euclides; les *Esfèriques*, de Teodosi (aprox. 107-43 aC); *Sobre l'esfera en moviment*, d'Autòlic de Pítana (aprox. 320 aC), i d'altres (Pappos, 1982). La col·lecció Petita astronomia constituïa un curs d'introducció a la gran astronomia que, de fet, estava representada per l'obra *Almagest*, de Ptolemeu. Tots aquests textos es trobaven escrits en grec, així com en àrab.

De fet, és una de les poques obres clàssiques que ens ha arribat a nosaltres amb totes les proposicions, il·lustracions i demostracions. Les traduccions i edicions d'aquesta obra són diverses al llarg del temps. Una traducció del grec a l'àrab de l'obra d'Aristarc la va fer Luqa al-Baalbaki, que va morir el 912. Més tard, Nàssir-ad-Din at-Tussí (1201-1274) va fer una recensió de tots els llibres de Petita astronomia. La primera edició de l'obra d'Aristarc va ser una traducció llatina de George Valla el 1448 (amb una segona edició a Venècia el 1498) i, a partir d'aquesta data, es van succeir diverses traduccions com la llatina de Federico Commandino (1572) (vegeu Fig. 1).

Figura 1. Portada del facsímil de la traducció de l'obra d'Aristarc per Commandino (Aristarco, 2017, 77)

Uns cent anys més tard es va publicar una edició grega de John Wallis (Oxford, 1688). Ja al segle XIX, en va sortir una edició grecollatina de Fortia d'Urban (París, 1810), seguida d'una traducció francesa del mateix autor el 1823.

A Oxford, el 1913 va aparèixer una edició grega amb la traducció anglesa de Thomas Heath (Heath, 1981a). És una traducció anglesa feta a partir d'un manuscrit grec del Vaticà, del text de Wallis i de la traducció francesa de Fortia d'Urban.

L'any 2007 es va publicar la primera traducció castellana d'aquest text clàssic del 230 aC, de la qual es va fer una segona edició el 2017 i que a més conté el facsímil de l'edició llatina de Commandino, del 1572. La traducció castellana s'ha fet emprant l'edició llatina de Commandino i l'edició grecoanglesa de Heath. El text grec que apareix en la traducció de Heath ha estat emprat pel professor Joaquín Ritoré per revisar aquesta traducció castellana. Per il·lustrar les proposicions s'han reproduït les figures que apareixen a l'edició llatina de Commandino que, en alguns casos, presenten lletres diferents del text grec publicat per Heath. Per a la traducció dels comentaris de Pappos de la seva *Col·lecció matemàtica* que s'inclouen en el llibre s'ha emprat la traducció francesa de Paul ver Eecke, del 1982, que s'ha revisat amb el text llatí de Commandino i amb la traducció anglesa de Heath (vegeu Fig. 2)

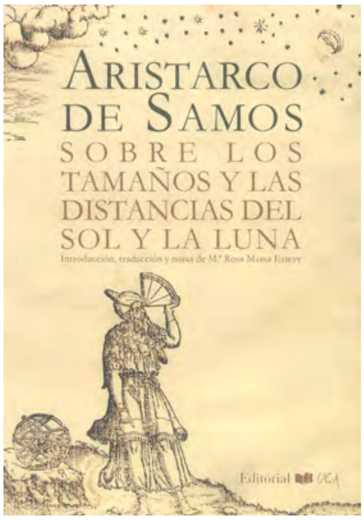


Figura 2. Portada de la traducció castellana (Aristarco, 2017, 1a ed. 2007)

Anàlisi de l'obra *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*

Una valoració integral d'aquesta obra d'astronomia ha de considerar l'estreta relació que van tenir els inicis de l'astronomia amb els orígens de la trigonometria, aspecte, aquest, que contribueix a la seva millor comprensió. En el text, Aristarc es planteja problemes de geometria plana tallant les esferes del Sol i de la Lluna en cercles màxims. Per resoldre els problemes geomètrics, recorre a relacions, considerades avui com a trigonomètriques, entre els angles i els costats d'un triangle. Els angles els expressa com a fraccions d'angle recte, i escriu les raons trigonomètriques com a raons entre els costats dels triangles; així pot determinar les cotes superiors i inferiors del valor que busca. Les proposicions geomètriques que Aristarc empra es troben majoritàriament en els *Elements*, d'Euclides. La teoria de proporcions d'Èudox del llibre V dels *Elements* és utilitzada constantment, i les seves propietats d'invertir, alternar, compondre i multiplicar són aplicades per a proporcions tant d'igualtat com de desigualtat. Aristarc també es basa, implícitament, en altres relacions, que per a nosaltres són trigonomètriques, com si les conegués o les considerés trivials.

Aristarc parteix de sis hipòtesis i, a través de 18 proposicions, demostra tres tesis. Les hipòtesis que presenta Aristarc són:

1. La Lluna rep la llum del Sol.
2. La Terra és com un punt al centre de l'esfera en la qual es mou la Lluna.
3. Quan la Lluna se'ns mostra partida en dues parts, el gran cercle que separa la foscor i la claror de la Lluna s'inclina cap a la nostra visió.
4. Quan la Lluna se'ns mostra partida per la meitat, llavors la mateixa Lluna s'allunya del Sol menys d'una quarta part (90º) en 1/30 part d'un quadrant (o sigui, en 3º).
5. L'amplada de l'ombra de la Terra se suposa com dues Llunes.
6. La Lluna subtendeix una quinzena part d'un signe del zodíac (o sigui 1/15 part de 30º).

Les hipòtesis de les quals parteix es poden agrupar en dos blocs: un per a les tres primeres, que són descriptives, i l'altre, per a les tres restants, que són, a més, quantitatives. Aquestes hipòtesis, doncs, no aporten cap angle, cap mesura, sinó que descriuen les posicions dels astres. Les altres tres hipòtesis proporcionen mesures obtingudes probablement per observació. Així, la quarta implica que quan la Lluna forma angle recte amb el Sol i la Terra l'angle de visió de la Lluna des de la Terra és de 87º, ja que l'altre angle del triangle rectangle amida una trentena part (1/30) d'un quadrant (90º), és a dir, 3º. Per la seva banda, la cinquena ens proporciona la grandària de l'ombra de la Terra, que és dues vegades la Lluna. La sisena i última ens explica que la Lluna és vista des de la Terra formant un con, amb un angle de 2º, que és una quinzena part d'un signe del zodíac (30º) (Carman, 2014).

Les tres tesis de l'obra d'Aristarc es demostren al llarg de 18 proposicions que es poden dividir en dos grans blocs. Així, en les primeres vuit Aristarc compara les distàncies entre el Sol, la Lluna i la Terra, i en les restants compara les mides (grandàries) del Sol i la Lluna amb la Terra. Les tres tesis que Aristarc enuncia al principi del llibre són:

1. La distància al Sol des de la Terra és més gran que 18 vegades, però més petita que 20 vegades, la distància a la Lluna des de la Terra (proposició 7).
2. El diàmetre del Sol està en la mateixa raó que el diàmetre de la Lluna (proposició 9).
3. El diàmetre del Sol té, respecte al diàmetre de la Terra, una raó més gran que la de 19 a 3, però més petita que la de 43 a 6 (proposició 15).

Analitzem tot seguit les demostracions de les proposicions que corresponen a les tesis que vol mostrar.

Tesi núm. 1. Proposició núm. 7. La distància al Sol des de la Terra és més gran que 18 vegades, però més petita que 20 vegades, la distància a la Lluna des de la Terra (Fig. 3).

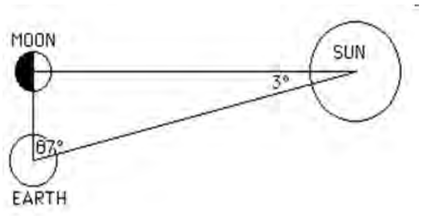


Figura 3. Representació de la proposició 7

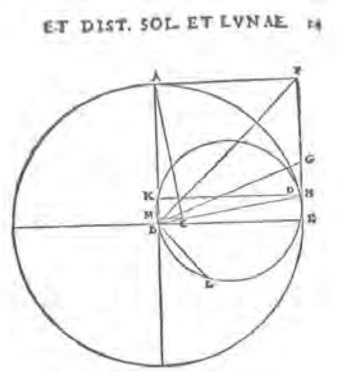


Figura 4. Il·lustració de la proposició 7 a Commandino (Aristarco, 2017, 117)

Siguin A el centre del Sol, B el centre de la Terra i C el centre de la Lluna quan se'ns mostra partida per la meitat (Fig. 4). Llavors, CB representa la distància a la Lluna des de la Terra i AB representa la distància al Sol des de la Terra (Berggren & Sidoli, 2007). Així s'ha de demostrar que:

$$18\ CB < AB < 20\ CB$$

De fet, aquesta desigualtat és equivalent a: $18 < AB/CB < 20$. Es pot comprovar la certesa d'aquesta desigualtat calculant el $\sin 3°$ i veient que es troba entre 1/20 i 1/18:

$$1/18 > CB/AB = \sin 3° > 1/20$$

Aristarc es basa en el fet que l'angle observat de la Terra a la Lluna és de 87º, o sigui, que $ABC = EBD$ val 3º, és a dir, una trentena part d'un quadrant: $90º/30º = 3º$, ja que l'angle BCA és recte, quan la Lluna se'ns presenta partida per la meitat.

El problema és l'angle observat per Aristarc. L'angle, en realitat, és 89º 5/6º en lloc de 87º. Els resultats d'Aristarc haurien estat quasi correctes si hagués tingut mitjans d'observació més acurats. Cent anys més tard, Hiparc va ser capaç d'obtenir una aproximació més acurada de la distància a la Lluna, però una apreciació més real va haver d'esperar instruments més precisos (Stahl, 1971-1991).

Demostració que 18 $CB < AB$

Primer demostrarem la desigualtat: $1/18 > CB : AB$, o sigui $AB > 18\ CB$. Aristarc empra quatre estratègies matemàtiques en la demostració de la primera desigualtat. Traslladar el problema del triangle Sol-Terra-Lluna a un triangle semblant construint una circumferència adequada; utilitzar, com si fos trivial, la relació entre les tangents (expressió actual) i els angles ($\tan\alpha : \tan\beta > \alpha : \beta$, amb α, β angles del primer quadrant); emprar la proporció establerta entre els segments que determinen la bisectriu d'un angle d'un triangle i els seus costats, i l'última, aproximar l'arrel de 2 per 7/5. Al final Aristarc trasllada el resultat obtingut en el triangle semblant, al triangle ABC inicial, Sol-Terra-Lluna i conclou que $AB > 18\ CB$.

Veiem el desenvolupament de la demostració. Sigui A el centre del Sol; B, el centre de la Terra, i C, el centre de la Lluna quan se'ns mostra partida per la meitat, llavors CB representa la distància a la Lluna des de la Terra i AB representa la distància al Sol des de la Terra. Per la hipòtesi núm. 4, l'angle BAC és 3º, llavors l'angle ABC que mesura l'allunyament de la Lluna al Sol és 87º, ja que BCA és recte, quan la Lluna se'ns mostra partida per la meitat. Tot seguit Aristarc dibuixa una circumferència de centre B i radi AB i estudia el problema en BHE (primera estratègia), triangle semblant construït de costats perpendiculars al donat, o sigui que l'angle DBE val 3º.

A més, completa el quadrat de costats AB, BE amb els costats AF i FE. Sigui, doncs, l'angle FBE igual a 45º i l'angle GBE la meitat, o sigui, 90/4. Fent la raó entre els dos angles GBE i DBE, que val 3, dona 15 és a 2.

Diu Aristarc que (segona estratègia), com que sabem que la raó entre els costats oposats a aquests angles (que ara anomenem tangents dels angles) és més gran que la raó entre els angles, es pot escriure que:

$GE : HE > (GBE) : (DBE) = 15 : 2$.

Ara, aplicant el teorema de Pitàgores al triangle isòsceles ($BE = FE$) format per la meitat del quadrat, es compleix que $FB^2 = 2BE^2$.

A continuació aplica proporcions als triangles semblants i empra el teorema de la bisectriu (tercera estratègia), i arriba a la conclusió que $FG^2 = 2GE^2$.

L'estratègia que usa tot seguit és utilitzar la raó $50 : 25 = 2 > 49 : 25$ (quarta estratègia) per aproximar l'arrel de 2. Llavors escriu: $FG^2 : GE^2 = 2 > 49 : 25$. Traient l'arrel quadrada queda $FG : GE > 7 : 5$. Component la raó (componendo), $FG + GE = FE$ (Euclides, 1956; Pla i Carrera, 2018) resulta $FE : GE > 12 : 5 = 36 : 15$.

Però com que abans havia demostrat que $GE : HE > 15 : 2$, fent el producte de les dues raons (ex aequali), $FE : GE$ amb $GE : HE$, resulta $FE : HE > 36 : 2 = 18 : 1$.

O sigui que $FE > 18\ HE$, però com que $FE = BE$ llavors $BE > 18\ HE$. Sabem també que BH, que és la hipotenusa, és més gran que BE, que és un catet; llavors, $BH > 18\ HE$. Ara escriu aquest resultat en el triangle semblant a aquest, és a dir, la demostració que ha fet en el triangle BHE l'expressa en el triangle ortogonal ABC mitjançant la proporció: $BH : HE = AB : CB$ i conclou que $AB > 18\ CB$. O sigui que la distància al Sol des de la Terra (AB) és més gran que 18 vegades la distància a la Lluna des de la Terra (CB): $18CB < AB$.

Demostració de $AB < 20BC$

(Fig. 5)

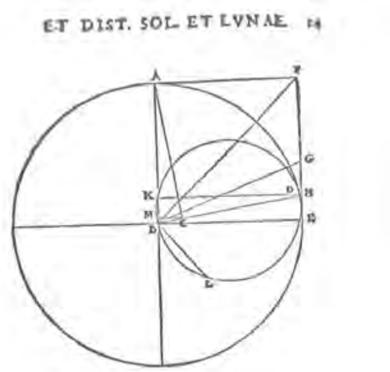


Figura 5. Il·lustració de la proposició 7 a Commandino (Aristarco, 2017, 117)

Per a la segona desigualtat ($AB < 20CB$), Aristarc treballa també amb el triangle semblant anterior i traça DK paral·lela a BE. Construeix una nova circumferència DKB prenent la hipotenusa DB com a diàmetre. Llavors, l'angle $HBE = 3°$ i l'angle $KDB = 3°$, per angles oposats pel vèrtex. L'arc $BK = 6°$, ja que correspon a l'angle central. Aristarc té en compte que l'angle inscrit val la meitat de l'arc que abasta.

Utilitza BL el costat d'un hexàgon inscrit en la circumferència per relacionar el seu arc de circumferència (60°) amb el de la corda determinada pel costat oposat a l'angle de 3º. Destaquem que de nou està suposant una certa relació trigonomètrica entre els angles i els seus sinus ($\alpha : \beta > \sin\alpha : \sin\beta$, amb α, β angles del primer quadrant).

- Arc BL : Arc $BK > BL : BK$;
- Arc $BK = 6°$ i Arc $BL = 60°$, llavors:
  $10 : 1 > BL : BK$, equivalent a $BL < 10BK$
- $BD = 2r = 2BL$, ja que BL és el costat de l'hexàgon.

Llavors, de $BL < 10\ BK$ resulta que $BD = 2BL < 20\ BK$. Novament traslladа el resultat obtingut en el triangle semblant al triangle ABC inicial, Sol-Terra-Lluna, i conclou que:

$$AB < 20\ CB$$

Tesi núm. 2. Proposició 9. El diàmetre del Sol és més gran que 18 vegades el diàmetre de la Lluna, però més petit que 20 vegades aquest diàmetre (Fig. 6).

Dibuixeu un con amb el nostre ull al vèrtex A. La base del con és el cercle màxim del Sol amb centre B, obtingut tallant per un pla la seva esfera. Entre el nostre ull i el cercle del Sol es troba el cercle de la Lluna amb centre C, també obtingut tallant la seva esfera per un pla. Llavors, quan els tres punts A, C, B, estan en línia recta, traceu un pla per ACB; aquest pla tallarà les esferes en cercles màxims i el con en línies rectes. Traceu els radis del Sol i la Lluna BK i OC, respectivament, i establiu una proporció entre els costats dels triangles semblants ACG i ABK, on els costats són les distàncies i els radis del Sol i la Lluna. Aplicant el teorema de Tales i la proposició 7 anterior, queda demostrat.

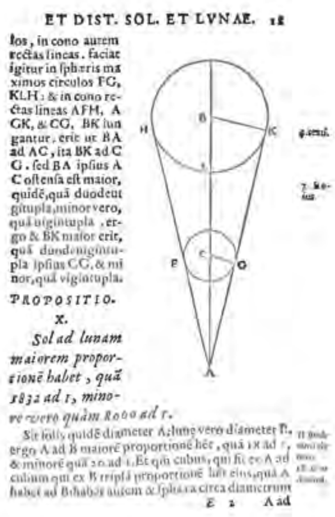


Figura 6. Il·lustració de la proposició 9 a Commandino (Aristarco, 2017, 117)

Proposició 10. El Sol té respecte a la Lluna una raó més gran que la de 5.832 a 1, però més petita que la de 8.000 a 1.

Obté aquesta relació aplicant la fórmula del volum als valors dels radis i les relacions que ha demostrat a la proposició 9, ja que $18^3 = 5.832$ i $20^3 = 8000$.

Les proposicions 11 a 14 són lemes per a la demostració de la proposició 15, que és la tercera tesi (Carman, 2014).

Tesi núm. 3. Proposició 15. El diàmetre del Sol té, respecte al diàmetre de la Terra, una raó més gran que la de 19 a 3 però més petita que la de 43 a 6 (Fig. 7).

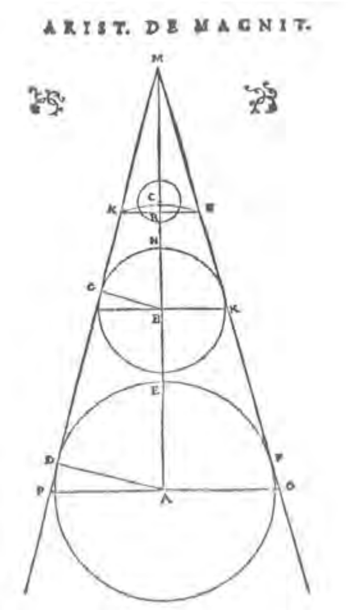


Figura 7. Il·lustració de la proposició 15 a Commandino (Aristarco, 2017, 146)

Empra la raó entre les distàncies de la proposició 7 i les hipòtesis 5 i 6, sobre la mida de l'ombra de la Terra i sobre l'angle de 2º del con a què subtendeix la Lluna, respectivament.

A partir d'aquesta relació entre els diàmetres en la proposició 16 conclou, elevant al cub, que la mida del Sol és més gran que 6.859/27 vegades la mida de la Terra i més petita que 79.507/216 vegades aquest.

Emprant aquests resultats en les proposicions 17 i 18, relaciona els diàmetres i eleva al cub les mides de la Lluna en relació amb la Terra.

Algunes reflexions

El text constitueix una col·lecció coherent de proposicions, amb una descripció correlativa de les idees que vol mostrar, tenint sempre presents els seus objectius, és a dir, calcular les mides i les distàncies dels astres. Les proposicions constitueixen exercicis matemàtics amb operacions entre raons, amb construccions geomètriques singulars que ens mostren la gran qualitat matemàtica de l'obra d'Aristarc.

És un text ric i ben estructurat i, al nostre entendre, les seves demostracions són impecables pel que fa al rigor. Tanmateix, el rigor en el seu raonament no va ser acompanyat d'observacions correctes; així, Aristarc va observar un angle de 87º, quan en realitat és quasi de 90º. Pappos, en el seu comentari quan reivindica l'obra d'Aristarc, explica que ell diu que es dedueixen aquestes mides de les seves suposicions; llavors, evidentment, si fossin unes altres suposicions serien uns altres resultats (Pappos, 1982, Aristarco, 2017).

A més, l'obra d'Aristarc conté demostracions, com les que s'han analitzat, que serveixen per a l'ensenyament de la trigonometria (Massa-Esteve, 2003 i 2005). El text permet remarcar fonamentalment dues idees: l'aplicació de la trigonometria al càlcul de distàncies i el lligam de la trigonometria amb la seva eina base: la geometria. El teorema de Pitàgores, el teorema de Tales, el teorema de la bisectriu i la teoria de proporcions euclidiana són emprats per a les demostracions d'aquestes mesures de l'univers. Més de 2.000 anys després, els procediments matemàtics d'Aristarc continuen sent, en certa manera, útils, i aporten proves de com la matemàtica resol amb geometria plana un problema d'astronomia de l'antiguitat.

Més enllà de les idees matemàtiques, l'interès de l'obra d'Aristarc rau també en la presentació d'un mètode rigorós de càlcul de distàncies relatives Terra-Sol, Terra-Lluna, que va contribuir el 230 aC a un major coneixement astronòmic.

Referències

[1] Archimède, *Des spirales, De l'équilibre des figures planes, L'arénaire, La quadrature de la parabole*. Charles Mugler (Trad.) París: Les Belles Lettres (1971).

[2] Aristarco de Samos, *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*. M. R. Massa-Esteve (Introducción, traducción y notas). Cadis: Editorial UCA (2017) (1a Edició 2007).

[3] J. L. Berggren & N. Sidoli, *Aristrachus's On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon: Greek and Arabic Texts*. Archive for History of Exact Sciences 61 (2007), p. 213-254.

[4] A. Berry, *A Short History of Astronomy*, Nueva York: Dover (1961) (1a ed. John Murray, 1898).

[5] A. C. Bowen & B. R. Goldstein, *Aristarchus of Samos, Thales and Heraclitus on Solar Eclipses: An Astronomical Commentary on P. Oxy. 53.3710 cols. 2.33-3.19*. Physis 31.3 (1994), p. 689-729.

[6] C. C. Carman, *Two problems in Aristarchus's treatise on the sizes and distances of the sun and moon*. Archive for History of Exact Sciences 68 (2014), p. 35-65.

[7] N. Copérnico, *Sobre las revoluciones*. Carlos Mínguez Pérez (Trad.) Madrid: Editorial Tecnos S. A. (1987).

[8] H. Chermiss & W. Helmbald, *Plutarch's Moralia*. Londres: Cambridge-Mass (1957).

[9] Euclides, *Elementos. Vol. 1, libros I-IV*. Int. de Luis Vega. Trad. y notas de María Luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos (1991). Vol. 2, libros V-IX. Trad. y notas de M. L. Puertas Castaños. Madrid: Gredos (1994). Vol. 3, libros X-XIII. Trad. i notes de M. L. Puertas Castaños. Madrid: Gredos, (1996).

[10] R. V. Erhardt & E. V. Erhardt-Siebold, *Archimedes' Sand-Reckoner: Aristarchos and Copernicus*. Isis 33 (5) (1942), p. 578-602.

[11] B. R. Goldstein & A. C. Bowen, *The introduction of dated observations and precise measurement in Greek astronomy*, Archive for History of Exact Sciences 43 (2), (1991), p. 93-132.

[12] T. L. Heath, *Aristarchus of Samos. The Ancient Copernichus*. Nova York: Dover Publications (1981a) (1a ed. Oxford: Clarendon Press 1913).

[13] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics, I & II*. Nova York: Dover Publications (1981b) (1a ed. Oxford: Clarendon Press 1921).

[14] Y. Maeyama, *Ancient stellar observations: Timocaris, Aristilo, Hipparcus, Ptolemy–the date and accuracies*. Centaurus 27 (3-4) (1984), p. 280-310.

[15] M. R. Massa Esteve, *Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de les matemàtiques*. Biaix 21 (2003), p. 4-9.

[16] M. R. Massa Esteve, *L'Ensenyament de la trigonometria. Aristarc de Samos (310-230 aC)*. A: P. Grapi & M. R. Massa (eds.): Actes de la I Jornada sobre Història de la Ciència i Ensenyament "Antoni Quintana Marí". Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica (2005), p. 95-101.

[17] O. Neugebauer, *Archimedes and Aristarchus*. Isis 34 (1942), p. 4-6.

[18] Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique, 2 Tomos. P. V. Eecke (Trad.), París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard (1982).

[19] J. Pla i Carrera, *Història de la matemàtica. Grècia IIa (els Elements d'Euclides, llibres I, II, III, IV, V i VI) : resultats, textos i contextos*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, Secció de Ciències i Tecnologia (2018).

[20] Ptolemy's, *Almagest*. G. J. Toomer (Trad.) Nova York: Springer-Verlag (1984).

[21] W. H. Sthal, *Aristarchus of Samos*. A: C. C. Gillispie (ed.). Dictionary of Scientific Biography. Nova York: Scribner's 1 (1971-1991), p. 246-250.

[22] P. Tannery, *Mémoires Scientifiques*, 6 vols.. A: J. L. Heiberg & H. G. Zeuthen (ed.). Paris : Éditions Jacques Gabay (1995-1996) (1a. ed., París: Gauthier-Villars et Cie, 1912-1950).

[23] Vitruvio, *Los diez libros De Architectura de M. Vitruvio Polion*. Joseph Ortiz & Sanz (trad.). Madrid: Imprenta Real (1787).

[24] B. E. Wall, *The Historiography of Aristarchus of Samos*. Studies in the History and Philosophy of Science 6 (1975), p. 201-228.

GeoGebra

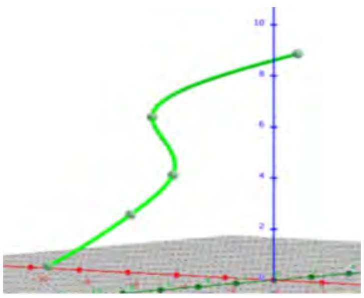
El món de les superfícies amb GeoGebra

Bernat Ancochea Millet
President de l'Associació Catalana de GeoGebra

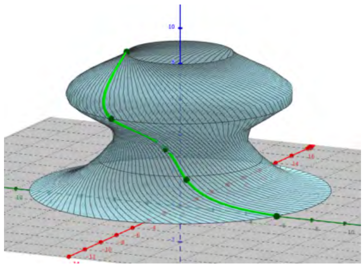
En l'anterior butlletí us vam parlar d'uns comandaments que ha incorporat el GeoGebra per a la construcció de superfícies de revolució. En aquest mirarem d'aprofundir una mica més en el tema parlant de superfícies reglades i d'altres tipus que creiem que es poden treballar amb l'alumnat sense haver de fer servir càlculs complexos. Tots els detalls més tècnics els podeu trobar en aquest enllaç: `https://www.geogebra.org/m/gqgdmyhd`. És un taller que vam donar amb José Manuel Arranz i José Muñoz a les JAEM al mes de juliol. També vam presentar aquest tema al seminari de Castro Urdiales el 23 de novembre amb referències a l'avaluació.

La comanda `Spline`

La comanda `Spline` permet trobar una corba que uneix un conjunt de punts a partir d'un polinomi de tercer grau (o superior). Només cal crear els punts a la finestra 2D o 3D (no cal que els punts estiguin en un mateix pla) i, tot seguit, definir una llista amb els noms de tots ells: $\{A, B, C, D, \ldots\}$. Després ja només cal introduir l'expressió `Spline(nom,grau_polinomi)` i ja tenim la corba. Moveu els punts i observeu com s'ajusta la corba. Si no poseu res com a grau del polinomi, és 3 per defecte.



Aquestes corbes les podem fer girar al voltant de qualsevol eix per generar superfícies de revolució.



Superfícies reglades

Les superfícies reglades es poden trobar a molts llocs, des de la vela d'un vaixell fins a les cúpules d'alguns edificis. Són superfícies construïdes a partir de dues corbes, principalment segments, però també arcs i splines. En aquest enllaç `https://www.museunacional.cat/ca/nuar-lespai-donacio-aurelia-munoz` en trobareu un molt bon exemple. La construcció es fa punt a punt: cada punt d'una de les corbes s'uneix per un segment a un punt de l'altra corba de manera que el resultat pot donar lloc a formes molt variades si modifiquem la posició dels extrems o dels punts que defineixen les corbes. Per fer-ho amb GeoGebra cal disposar de les equacions paramètriques de les corbes però no sempre les tenim. Veurem el cas més senzill, la superfície reglada obtinguda a partir de dos segments (podeu copiar i enganxar les comandes que us mostrem a la línia d'Entrada del GeoGebra):

- Primer hem de definir com a corbes paramètriques els dos segments AB i CD de la forma següent:

$$\mathtt{a} = \mathtt{Corba}(\mathtt{A} + \mathtt{k}(\mathtt{B} - \mathtt{A}, \mathtt{k}, 0, 1))$$
$$\mathtt{b} = \mathtt{Corba}(\mathtt{C} + \mathtt{k}(\mathtt{D} - \mathtt{C}, \mathtt{k}, 0, 1))$$