

Posibilidades de los ordenadores personales en el cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos (1)

Por EUGENIO OÑATE (*)
 ANGEL GAONA (**)
 JAVIER OLIVER (*)
 BENJAMIN SUAREZ (*)

Ingenieros de Caminos

1. INTRODUCCION

El método de los elementos finitos, es hoy en día una de las armas más potentes que posee el ingeniero proyectista de estructuras para abordar la faceta del cálculo de una forma sistemática y general especialmente en el caso de tratarse de estructuras de tipología compleja. Esta ha sido la principal razón para que el último decenio se hayan puesto a punto numerosos programas de cálculo por ordenador, que basándose en dicho procedimiento permiten el análisis estático o dinámico de la mayor parte de las estructuras existentes, tanto en régimen de comportamiento lineal como no-lineal.

Con el desarrollo de la informática en los últimos años, la filosofía del uso del ordenador por parte de las oficinas de proyecto está cambiando sensiblemente. En los inicios de la era informática el ordenador supuso el gran paso de automatizar la mayor parte de los cálculos manuales de manera que el tiempo del proceso de cálculo quedaba drásticamente disminuido.

Los macro-ordenadores instalados en grandes centros de cálculo han contribuido al desarrollo de macro-programas de elementos finitos de gran dificultad operativa que permiten el estudio de una gran variedad de problemas diferentes y de distinto grado de complejidad. Muchos de dichos programas (por ejemplo: NASTRAND, SAAB-4, PAFEC, MARC, ANSYS, etc.) han gozado de una gran popularidad entre las empresas de ingeniería y han

sido utilizados con éxito para tratar numerosos problemas prácticos.

La irrupción en el mundo informático de los mini-ordenadores, entendiéndose como tales, a ordenadores de capacidad media 64 KW (1 KW = 1.000 palabras), gran operatividad y pequeñas necesidades de espacio físico, ha cambiado sustancialmente el sistema de cálculo de estructuras por elementos finitos.

El concepto de macro-programa de cálculo está siendo paulatinamente sustituido por el de «micro-programa» o «programa de aplicación específica» que aproveche al máximo las características de la máquina para resolver un problema concreto, lo que naturalmente incide directamente en la necesidad de optimizar al máximo la organización interna del programa de forma que permita su adaptación, aun en el caso de programas complejos, a pequeños ordenadores.

La gran versatilidad de los mini-ordenadores actuales que permite su utilización en un rango de tamaños y capacidades que varían entre los 8 y 450 KW^(*), con unas necesidades de espacio e inversión cada vez menores, ha contribuido a la rápida expansión del «ordenador personal» o «de mesa», que puede ser manejado por una sola persona con gran facilidad.

El campo de actuación de dichos ordenadores es grande y mediante una cuidadosa preparación de los programas permiten estudiar una gran variedad de problemas prácticos de ingeniería.

En este artículo vamos a explorar brevemente las posibilidades de dichos ordenadores en el contexto de análisis de estructuras por el método de los elementos finitos (MEF). Parece evidente que la puesta a punto en un ordenador personal de programas de cálculo

(1) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de junio de 1983.

(*) ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Barcelona.

(**) Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Univ. Nacional de Asunción, Paraguay.

que están fundamentalmente vinculados al desarrollo de los grandes ordenadores, como son los programas de elementos finitos, requiere ante todo una optimización máxima de los programas a utilizar, optimización que oficialmente se puede llevar a cabo sin un buen conocimiento teórico de las bases del MEF y un alto grado de experiencia de su implementación en la práctica.

Para una mejor comprensión de las ideas y terminología que se usarán a lo largo de este artículo se presenta en los apartados siguientes una breve exposición teórica de las bases del MEF, destacando las etapas básicas sobre los que se apoyan los programas de cálculo cuya organización comentaremos.

Tras ello, efectuaremos un repaso de las posibilidades reales que a nuestro entender presentan los ordenadores personales en el estudio por el MEF de los tipos de estructuras más corrientes, para, finalmente, exponer algunas consideraciones sobre líneas de desarrollo futuras previsible en este campo.

2. MODELOS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Antes de seguir adelante introduciremos, siguiendo a Hinton y Owen (8), el concepto de lo que entendemos como un «modelo de cálculo». Esto nos ayudará a situar el método de los elementos finitos en su perspectiva adecuada.

Supongamos un problema relacionado con el cálculo de estructuras, por ejemplo, elegir el diseño más económico para una estructura particular. La forma más lógica de enfocar dicho problema sería efectuar un diseño inicial de la estructura de acuerdo con unas hipótesis previas y estudiar el comportamiento de la misma teniendo en cuenta cuál va a ser su entorno más probable, durante y después del período de construcción. Vemos, por tanto, que debemos escoger un modelo de cálculo adecuado que nos proporcione cierta información sobre el comportamiento de la estructura. Este modelo puede variar, desde unos simples cálculos manuales efectuados sobre la marcha, hasta el análisis no-lineal más sofisticado que requiera varias horas de tiempo de cálculo en ordenador. La elección del modelo dependerá, por consiguiente, de diversos factores como tiempo, dinero, nivel de conocimiento, métodos de cálculo dispo-

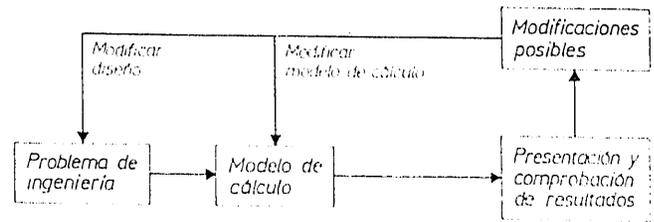


Fig. 1.—Esquema del proceso de cálculo.

nibles y grado de exactitud requerido. Una vez obtenida la solución a partir del modelo, los resultados, debidamente comprobados, deben presentarse de forma clara, generalmente por medio de gráficos. Si la solución no satisface las hipótesis de partida debemos modificar el modelo de cálculo o bien el diseño inicial y repetir el proceso hasta que el diseño de la estructura satisfaga las hipótesis exigidas. El proceso anterior se ha esquematizado en la figura 1.

De acuerdo con lo anterior, las etapas básicas del desarrollo de un modelo de cálculo que permita analizar una estructura por el método de los elementos finitos, son esquemáticamente los siguientes:

1. Consideremos una estructura, como, por ejemplo, el puente de losa y vigas de la figura 2. A partir de la realidad física del puente, sus apoyos y tipos de cargas, durante y después de su construcción, es necesario en primer lugar seleccionar un **modelo matemático** apropiado. Por ejemplo, para analizar losas de hormigón armado podemos elegir entre utilizar la teoría clásica de flexión de placas delgadas o la más avanzada que permite analizar placas de un cierto espesor. Hay que advertir que éste es un típico problema de **equilibrio estático** de estructuras y, por consiguiente, las condiciones del sistema no varían con el tiempo. Las ecuaciones del problema pueden obtenerse a partir del principio de minimización de la energía o bien a partir del principio de los trabajos virtuales. Como extensión de los problemas de equilibrio estático tenemos los problemas de «análisis dinámico», en los que tanto las cargas como la respuesta del sistema son dependientes del tiempo. **En este trabajo se consideran únicamente programas de cálculo es-**

PUENTE SIMPLEMENTE APOYADO

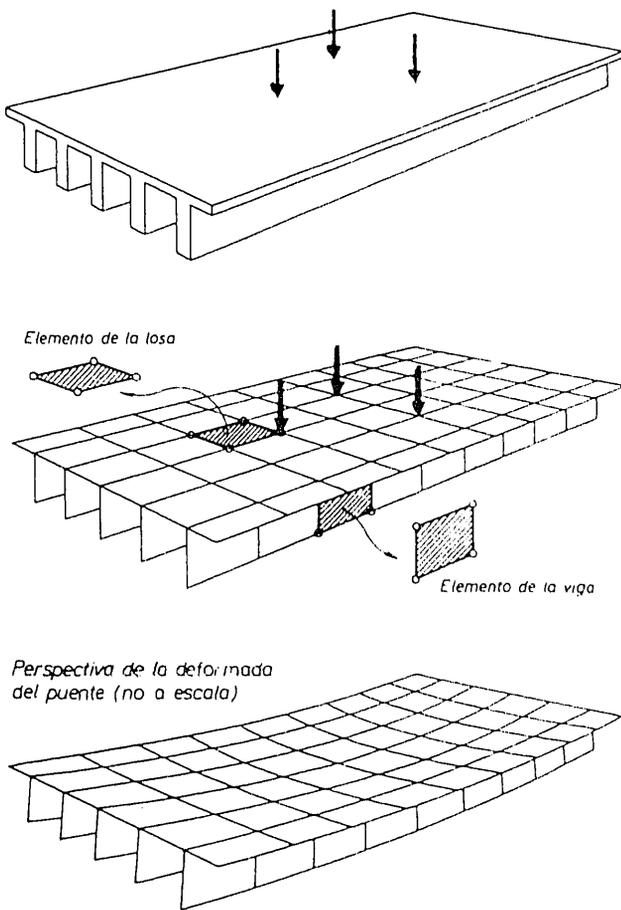


Fig. 2.—Análisis de un puente por elementos finitos laminares.

tático de estructuras, con las hipótesis adicionales de pequeñas deformaciones y comportamiento elástico lineal de los materiales componentes de la estructura.

2. Una vez escogido el modelo matemático se procede a discretizar la estructura en porciones, no intersectantes entre sí, denominadas elementos finitos, dentro de los cuales se interpolan las variables principales. Estos elementos están conectados por un número discreto de puntos a lo largo de su contorno denominados «nodos» o «puntos nodales». Dichos puntos no tienen, en general, un significado físico tan claro como los «nodos» de unión de dos elementos en los sistemas de barras, de ahí su diferente denominación.
3. Se calculan las matrices de rigidez, $K^{(e)}$, y el vector de cargas, $f^{(e)}$, para cada elemento.

4. Se procede al ensamblaje de las matrices de rigidez y el vector de carga elementales en la matriz de rigidez global, K , y el vector de cargas, f , respectivamente.
5. El sistema de ecuaciones simultáneas lineales resultante, $Kg = f$, se resuelve para calcular las variables incógnitas, g , utilizando uno cualquiera de los métodos conocidos para solución de ecuaciones algebraicas simultáneas lineales. (Método de eliminación de Gauss, Choleski, Frontal, etc.).
6. Una vez calculados los desplazamientos, g , se pueden calcular las deformaciones y, seguidamente, las tensiones o esfuerzos, así como las reacciones en los nodos con movimientos prescritos.
7. Para obtener la solución en las etapas (3) - (6) es necesario proceder a una **implementación en ordenador** del método de los elementos finitos mediante el uso de un programa comercial, o bien de uno desarrollado al respecto.
8. Una vez obtenidos los primeros resultados numéricos correctos, la etapa siguiente corresponde a la **interpretación y presentación de dichos resultados**. Para ello suele hacerse uso de diversas técnicas gráficas que facilitan dicha labor.
9. Una vez estudiados los resultados, el ingeniero analista debe plantearse efectuar varias modificaciones que pueden introducirse en diversos momentos del análisis por elementos finitos. Así, por ejemplo, puede encontrar que la teoría de cálculo de estructuras inicialmente adoptada es inapropiada y consiguientemente debe modificarse. Por otro lado, la malla de elementos finitos utilizada en el análisis puede ser demasiado grosera para reproducir la distribución de tensiones correcta y, por tanto, debe refinarse o, alternativamente, utilizar otro tipo de elemento finito más preciso. Otras clases de dificultades pueden deberse a problemas de precisión asociados al mal condicionamiento de las ecuaciones; al método de solución del sistema de ecuaciones

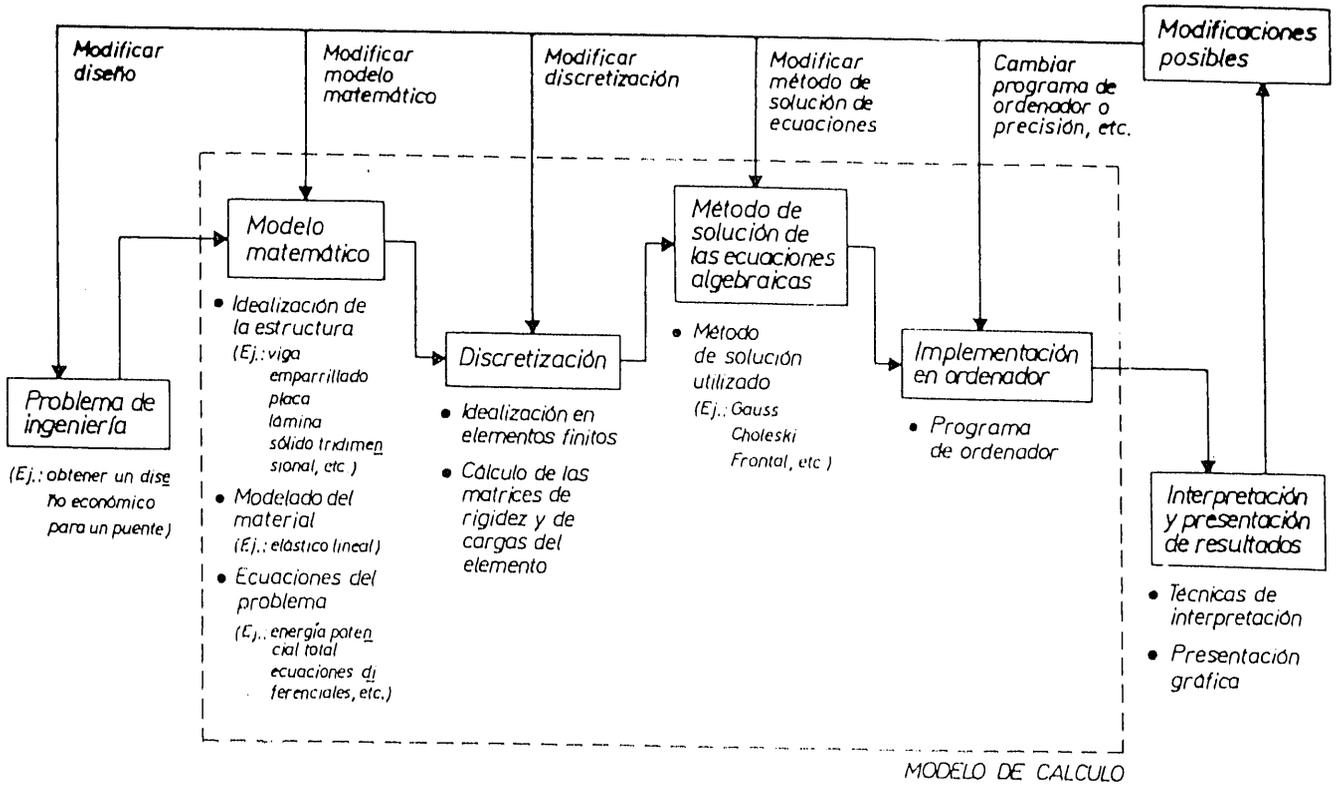


Fig. 3.—Modelo de cálculo para análisis de un puente por elementos finitos.

utilizado, o a la máxima longitud de las palabras que permita el ordenador empleado, lo que puede exigir el uso de doble precisión u otras medidas más drásticas. Como es natural, frecuentemente ocurrirán errores de entrada de datos que deben corregirse.

Todas las etapas anteriores se han esquematizado en la figura 3. Hay que resaltar que el objeto de incluir aquí los pasos anteriores de una forma tan detallada no es otro que el de destacar todas las etapas que intervienen en el proceso de elaboración de un **programa óptimo para cálculo de estructuras por el MEF**; optimización que, como se ha apuntado en la introducción, es quizá la característica clave del éxito de la implementación de dicho programa en un ordenador de pequeña memoria.

El método de los elementos finitos fue inicialmente desarrollado por ingenieros relacionados con la aeronáutica, quienes utilizaron simples sistemas de barras elásticas para aproximar complejos sistemas continuos. El uso de funciones definidas por subregiones para aproximar la función incógnita fue utilizado por primera vez por Courant (42) para

estudiar problemas de tensión de barras. Este procedimiento fue posteriormente formalizado (43, 44) y Clough (45), en 1960, introdujo la expresión «elementos finitos». Desde entonces el método de los elementos finitos ha tenido un espectacular desarrollo, y hoy en día está reconocido como un procedimiento general para obtener la solución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sometidas a condiciones de contorno iniciales conocidas (ver referencias 1-41).

El desarrollo de los ordenadores digitales, como ya se ha apuntado antes, y la creciente complejidad de muchas áreas de la tecnología moderna, han facilitado que el método disfrute en la actualidad de una posición única como técnica de solución versátil y potente para una gran variedad de problemas avanzados de ingeniería.

Desde el punto de vista ingenieril, la característica más atractiva del método de los elementos finitos, y quizá también la más peligrosa, estriba en el hecho de que es un método aproximado. En las manos de un ingeniero cuidadoso y experto es un procedimiento muy útil para obtener información sobre un cierto tipo de problemas para los que no exis-

ten soluciones analíticas disponibles. No obstante, su mismo carácter aproximado le confiere un cierto peligro, y su utilización, si no se posee una experiencia previa, debe efectuarse con precaución.

3. INTRODUCCION A LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1. Elementos finitos unidimensionales: Barra a tracción

Si un sistema ingenieril, ya sea de naturaleza estructural o no, tiene sus propiedades distribuidas de manera continua de forma que puede tomar infinitas posiciones de equilibrio dependientes de la naturaleza de las acciones externas que lo solicitan, se dice que tiene infinitos grados de libertad. La respuesta de dicho sistema puede calcularse resolviendo las ecuaciones diferenciales correspondientes que gobiernan su comportamiento. Sin embargo, en los problemas reales de ingeniería este tipo de análisis es con frecuencia difícil o imposible debido a la naturaleza de las condiciones del contorno, la distribución de las propiedades físicas de los materiales, la forma geométrica, etc., y generalmente, en la práctica se hace uso de métodos más simplificados que permiten predecir el comportamiento del sistema de una manera aproximada. El método de los elementos finitos es uno de los diversos procedimientos que existen para aproximar el comportamiento de un sistema con infinitos grados de libertad por el de otro, con aproximadamente las mismas propiedades físicas y geométricas, pero con un número finito de grados de libertad, de manera que las ecuaciones de equilibrio del sistema puedan expresarse por un sistema algebraico de ecuaciones simultáneas con un número de incógnitas determinado.

El objeto de este apartado es presentar brevemente los conceptos básicos de la aplicación del método de los elementos finitos al cálculo de estructuras mediante un sencillo problema unidimensional, de barras sometidas a esfuerzo axial. Aunque dicho problema pueda parecer de excesiva sencillez y de escasa utilidad práctica dentro del campo del análisis de estructuras, consideramos que su inclusión aquí es importante, puesto que permite introducir de una forma simple y detallada los conceptos básicos del método de los elementos finitos que se utilizan de *forma sis-*

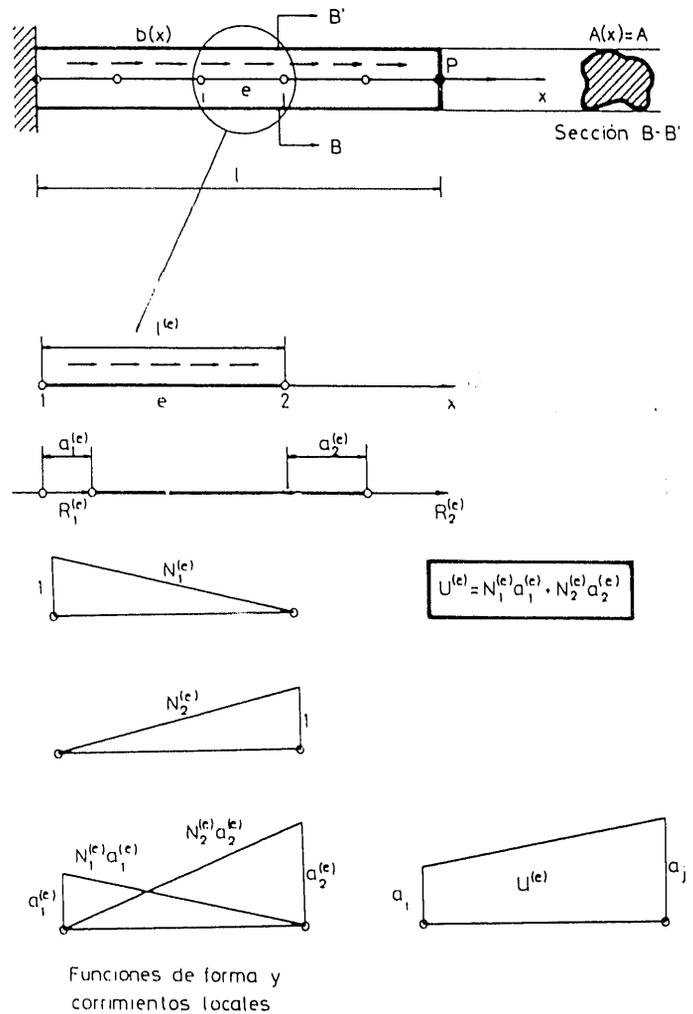


Fig. 4.—Barra de sección constante. Discretización en elementos de dos nodos.

temática en la solución de problemas más complejos y *que son esenciales para la programación del método.*

Consideremos la barra de la figura 4 sobre la que actúan fuerzas puntuales y repartidas a lo largo de su longitud l . Para el estudio de la deformación de dicha barra por elementos finitos considerémosla dividida en porciones (fase de discretización) o «elementos» conectados entre sí por una serie de puntos o nodos.

La base de la aplicación del MEF a problemas de estructuras por el método de los desplazamientos se encuentra en la obtención de las ecuaciones del equilibrio del elemento que relacionan las fuerzas «resultantes» que actúan en los nodos y los movimientos de los mismos, para seguidamente y por equilibrio

de fuerzas en los nodos obtener las ecuaciones de equilibrio de la estructura.

En todo análisis de estructuras por el MEF el proceso teórico se puede dividir, por consiguiente, en cinco etapas que definiremos a continuación de forma esquemática:

Etapas 1: Discretización del campo de movimientos

El único movimiento que experimenta la barra en un desplazamiento u en dirección del eje x .

Aislando un elemento, e , de dos nodos, (ver figura 4), se puede expresar el desplazamiento en el interior del mismo, $u^{(e)}$, en función de los desplazamientos de los extremos $a_1^{(e)}$ y $a_2^{(e)}$, por medio de la expresión:

$$u^{(e)} = N_1^{(e)}(x) a_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x) a_2^{(e)} \quad (4)$$

donde $N_1^{(e)}$ y $N_2^{(e)}$ son funciones polinómicas de interpolación (o de «forma») de los nodos 1 y 2 respectivamente. La unicidad del campo de desplazamientos exige que la función de forma de un nodo tome el valor unidad en dicho nodo y cero en los demás. [Para más detalles consultar Zienkiewicz (41)].

La ecuación (4) puede ponerse en forma matricial como:

$$\underline{u}^{(e)} = \{U\}^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \underline{N}^{(e)} \underline{a}^{(e)} \quad (5)$$

donde $\underline{N}^{(e)}$ y $\underline{a}^{(e)}$ son la matriz de funciones de forma y el vector de parámetros nodales del elemento e , respectivamente.

Etapas 2: Discretización del campo de deformaciones

La única deformación en este problema viene definida por $\epsilon_x = \frac{du}{dx}$. En el interior del elemento, e , se tendrá por tanto que:

$$\underline{\epsilon}^{(e)} = \{\epsilon_x\}^{(e)} = \frac{dN_1^{(e)}}{dx} a_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} a_2^{(e)} \quad (6)$$

o en forma matricial:

$$\underline{\epsilon}^{(e)} = \left[\frac{dN_1^{(e)}}{dx} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \right] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \underline{B}^{(e)} \underline{a}^{(e)} \quad (7)$$

donde $\underline{B}^{(e)}$ es la *matriz de deformación* del elemento e .

Etapas 3: Discretización del campo de tensiones

La tensión σ_x se obtiene por la conocida relación $\sigma_x = E \epsilon_x$, donde E es el módulo de elasticidad del material. Dentro del elemento, e , se tendrá por consiguiente:

$$\underline{\sigma}^{(e)} = \{\sigma_x\} = E^{(e)} \underline{\epsilon}^{(e)} \quad (8)$$

y haciendo uso de (7) se puede escribir:

$$\underline{\sigma}^{(e)} = \{E^{(e)}\} \underline{B}^{(e)} \underline{a}^{(e)} = \underline{D}^{(e)} \underline{B}^{(e)} \underline{a}^{(e)} \quad (9)$$

donde $\underline{D}^{(e)}$ se conoce con el nombre de matriz de constantes elásticas del material del elemento e .

Etapas 4: Obtención de las ecuaciones de equilibrio del elemento

Existen diversas alternativas para obtener las ecuaciones matriciales de equilibrio del elemento. Una de las más generales es utilizar el principio de los trabajos virtuales sobre el dominio del elemento. No entraremos aquí en detalles de la aplicación de dicho procedimiento pues creemos que se salen de los objetivos de este trabajo. La igualdad de trabajo interno y externo en el elemento durante la aplicación de unos movimientos virtuales se puede escribir como:

$$\int_0^{\rho^{(e)}} \delta \epsilon_x^{(e)} \sigma_x^{(e)} A dl = \int_0^{\rho^{(e)}} \delta u^{(e)} b^{(e)} dx + R_1^{(e)} \delta a_1^{(e)} + R_2^{(e)} \delta a_2^{(e)} \quad (10)$$

siendo b la carga repartida por unidad de área y δu y $\delta \epsilon_x$, respectivamente, el desplazamiento virtual en dirección x y la deformación virtual correspondiente.

Sustituyendo en la ec (10) las ecuaciones de la discretización ecs. (5)-(9), se obtiene:

$$\begin{aligned} [\delta \underline{a}^{(e)}]^\top & \left[\int_0^{\rho^{(e)}} [\underline{B}^{(e)}]^\top (EA)^{(e)} \underline{B}^{(e)} dx \right] \underline{a}^{(e)} = \\ & = [\delta \underline{a}^{(e)}]^\top \left[\int_0^{\rho^{(e)}} [\underline{N}^{(e)}]^\top b dx + \underline{g}^{(e)} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\underline{g}^{(e)} = [R_1^{(e)}, R_2^{(e)}]^\top$ es el vector de fuerzas actuantes en los nodos.

Teniendo en cuenta que los desplazamientos

tos virtuales son arbitrarios se llega finalmente a la ecuación buscada:

$$\underline{K}^{(e)} \underline{a}^{(e)} - \underline{F}^{(e)} = \underline{q}^{(e)} \quad (12)$$

donde:

$$\underline{K}^{(e)} = \int_0^{j^{(e)}} [\underline{B}^{(e)}]^T \underline{D}^{(e)} \underline{B}^{(e)} dx \quad (13)$$

es la matriz de rigidez del elemento con $\underline{D}^{(e)} = (EA)^{(e)}$, y

$$\underline{F}^{(e)} = \int_0^{j^{(e)}} [\underline{N}^{(e)}]^T b dx \quad (14)$$

es el vector de fuerzas nodales debido a la carga repartida.

Etapa 5: Ensamblaje y formación del sistema de ecuaciones global

El ensamblaje se efectúa mediante la sencilla regla de equilibrio de fuerzas nodales, que establece que la suma de las fuerzas nodales en un nodo donde concurren varios elementos es igual a la fuerza exterior que actúa en dicho nodo, esto es:

$$\sum_e R_i^{(e)} = R_i^{exterior} \quad (15)$$

Utilizando la ecuación (R) se llega, tras operar cuidadosamente, a la ecuación:

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f} \quad (16)$$

donde \underline{K} y \underline{f} son respectivamente, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas equivalentes nodales de la estructura y \underline{a} es el vector de desplazamientos nodales.

Como nota destacable recalcaremos que para la formación de \underline{K} y \underline{f} se pueden seguir exactamente las mismas reglas que se utilizan en cálculo de estructuras de barras por métodos matriciales.

3.2. Generalización de conceptos

Las etapas explicadas en el apartado anterior para el sencillo problema del estudio de la barra de tracción simple nos proporcionan una idea muy clara de los pasos a seguir en el estudio de cualquier problema de estructuras por el MEF. La única diferencia es que las matrices del elemento $\underline{N}^{(e)}$, $\underline{B}^{(e)}$ y $\underline{D}^{(e)}$ necesarias para el cálculo de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas del elemento [ver ecs. (13) y (14)] tienen expresiones diferentes, apropiadas con la definición del campo de corrimientos, deformaciones y tensiones de cada estructura.

Una vez definidas todas las fases de cálculo se plantea la organización del cálculo de las matrices y vectores, lo que implica la correcta evaluación de las integrales correspondientes en una, dos o tres dimensiones de acuerdo con cada tipología estructural:

- a) *de forma directa*, lo que la mayoría de las veces resulta complicado, salvo en elementos muy sencillos.
- b) *numéricamente*, lo que es imprescindible en elementos complejos (ver figura 5).

Como vemos, la elección del tipo de elemento condiciona en gran manera el esquema operativo para la organización del cálculo de los vectores y matrices del elemento. El número de elementos utilizable para cada

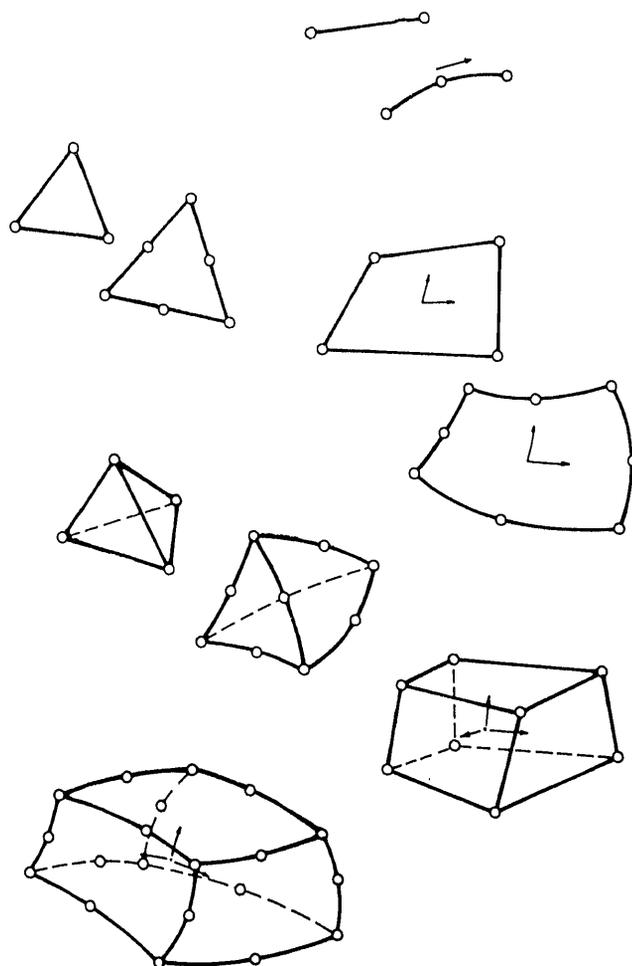


Fig. 5.—Algunos elementos finitos «populares» en una, dos y tres dimensiones.

tipología estructural es prácticamente ilimitado, teniendo cada uno de ellos unas características convergentes y de precisión distintas. Es por ello que la elección del elemento a usar es una decisión que la mayor parte de las veces es función directa de la experiencia. El tema en sí es amplio y se sale de los objetivos de este artículo. No obstante, para centrar conceptos con vistas a la discusión sobre la organización del programa, presentaremos en el apartado siguiente unas ideas muy breves sobre elementos complejos.

3.3. Elementos finitos complejos: Elementos isoparamétricos

En muchos problemas prácticos es conveniente que los elementos finitos sean capaces de poder reproducir contornos curvos. En dicho caso la complejidad de la geometría del elemento hace imposible el cálculo manual de las distintas integrales y hay que hacer uso de la integración numérica.

La forma más corriente de operar en dichos casos es definir unas coordenadas locales adimensionales interiores al elemento y definir las funciones de forma con respecto a ellas. Asimismo, todas las operaciones resultan más sencillas si la geometría se expresa en función de las coordenadas del elemento por medio de las mismas funciones de forma (elemento isoparamétrico) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X &= \sum_i N_i^{(e)} x_i \\ y &= \sum_i N_i^{(e)} y_i \end{aligned}$$

con

$$N_i = N_i(\xi, \eta)$$

donde ξ y η son las coordenadas locales del elemento (ver figura 5). Aparece entonces un elemento fundamental en el cálculo que es la matriz Jacobiano, J , de la transformación de las coordenadas x, y a ξ, η y que nos permite obtener el diferencial de área en ejes locales como:

$$dx dy = |J| d\xi d\eta$$

y asimismo obtener las derivadas cartesianas de las funciones de interpolación. (Para más detalles consultar Hinton y Owen (8), (46).

Para el cálculo numérico de las distintas integrales es corriente utilizar la conocida regla de Gauss-Seidel. (Ver Zienckiewicz cap. 7) (41).

4. ORGANIZACION GENERAL DE UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

Disponemos ya de todos los ingredientes teóricos necesarios para organizar un programa para cálculo de estructuras por el MEF. Antes de empezar resaltaremos que para que dicho programa sea implementable con éxito en un ordenador de tipo personal son imprescindibles varias condiciones.

1. Optimización del almacenaje de datos. Influye en la capacidad de memoria necesaria.
2. Optimización de las operaciones a efectuar, eliminando las innecesarias. Influye en el tiempo de cálculo.
3. Desarrollar un programa modular al máximo de forma que se puedan aislar y ejecutar si es necesario módulos separados para luego proceder a su interconexión.

De acuerdo con estas premisas, todas ellas prácticamente de igual importancia a la hora

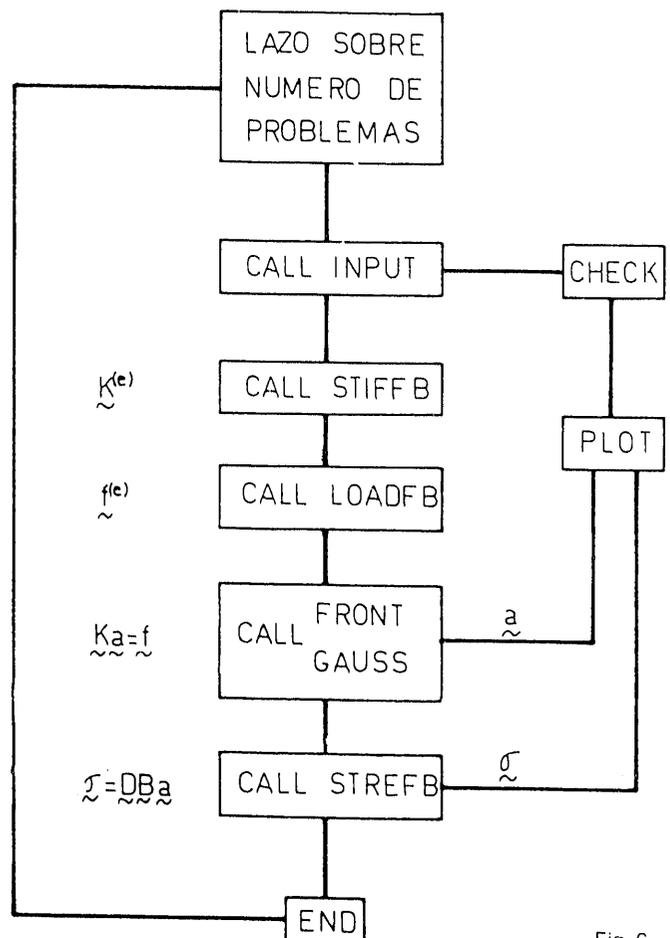


Fig. 6.

de medir la eficacia del programa, el *programa básico* de elementos finitos con el mínimo de operaciones necesarias (cálculo directo de la matriz de rigidez y los vectores de fuerzas del elemento) tendría el diagrama de flujo que se muestra en la figura 6. En dicho diagrama identificamos las siguientes subrutinas:

1. *Entrada de datos.* Subrutina INPUT.
2. *Cálculo de la matriz de rigidez del elemento $K^{(e)}$.* Subrutina STIFFB.
3. *Cálculo del vector de cargas del elemento $f^{(e)}$.* Subrutina LOADFB.
4. *Solución del sistema de ecuaciones $Ka = f$ para ensamblaje y cada estado de cargas.* Subrutina FRONT (método frontal) o GAUSS (método de Gauss).
5. *Cálculo de tensiones en cada elemento.* Subrutina STREFFB.
6. *Salida gráfica de resultados (opcional).* Subrutina PLOT.
7. *Generación automática de malla y comprobaciones.* Subrutina CHECK.

Observese la analogía de dicho diagrama de flujo con el de un programa para cálculo de estructuras de barras por métodos matriciales.

Cada una de las subrutinas anteriores puede considerarse en sí un subprograma de manera que, de hecho, puede ejecutarse de forma independiente, lo que es generalmente esencial para su implementación en un ordenador de pequeña capacidad de memoria central.

En el caso de tratarse de un programa que utilice elementos complejos (de tipo isoparamétrico) la estructura central del programa se mantiene, pero el cálculo de las distintas matrices y vectores es ahora más laborioso y *debe efectuarse numéricamente*. Un diagrama de flujo bastante optimizado para este caso puede verse en la figura 7, donde las subrutinas adicionales tienen los significados siguientes:

Subrutinas NODEXY, CHECK 1, CHECK 2, y ECHO. Generación automática de malla y subrutinas de comprobación de geometría.

Subrutina GAUSS. Cálculo de coeficientes y coordenadas de los puntos de integración numérica.

Subrutina SFR. Cálculo de las funciones de forma y sus derivadas con respecto a los ejes locales.

Subrutina JACOB. Cálculo del Jacobiano y

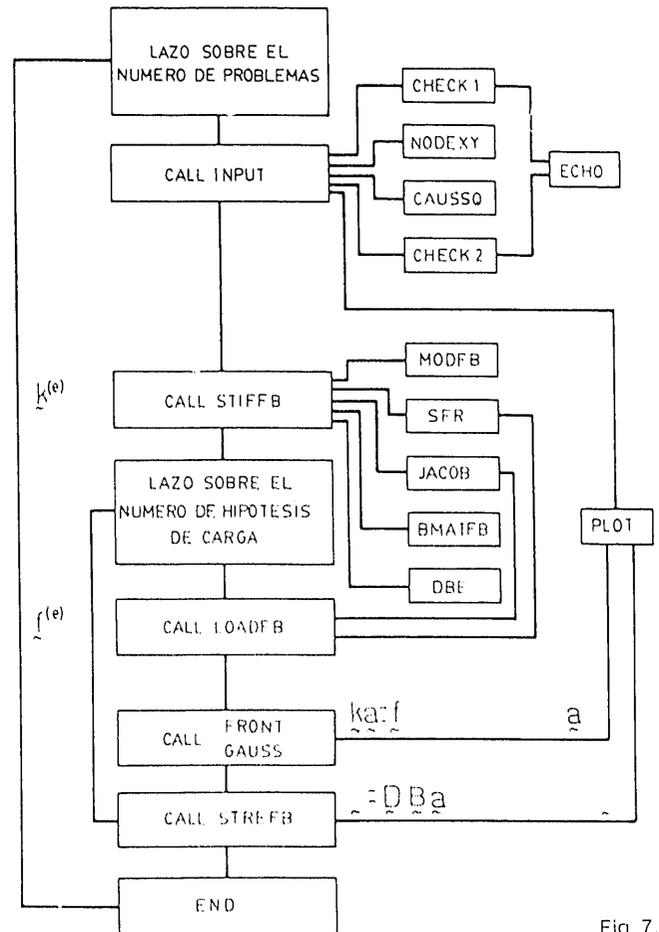


Fig. 7.

derivadas cartesianas de las funciones de forma.

Subrutina BMAT. Cálculo de la matriz de deformación $\underline{B}^{(e)}$.

Subrutina MODS. Cálculo de la matriz de constantes elásticas $\underline{D}^{(e)}$.

Subrutina DBE. Cálculo del producto matricial $\underline{B}\underline{D}^{(e)}$.

Por razones de espacio no podemos entrar aquí en más detalles de cada una de las subrutinas anteriores. Nos basta aquí con tener en cuenta que en un programa de este tipo su utilización es conveniente y ayuda a mantener el carácter modular del programa. Para más detalles al respecto consúltese las referencias (8) y (46).

5. APLICACIONES CONCRETAS DE LOS ORDENADORES PERSONALES EN EL CALCULO DE ESTRUCTURAS

Una vez definido el esquema de programa óptimo para cálculo de estructuras por ele-

mentos finitos sencillos, o bien por elementos más complejos, (figura 5), es interesante tener una idea de las posibilidades reales de implementación de dicho programa en un ordenador de tipo personal y establecer, al menos de forma aproximada, los límites de aplicación del mismo para cada tipología estructural.

Como ya se ha comentado, en este trabajo consideraremos únicamente el caso de análisis estático de estructuras en régimen lineal, que, por otra parte, y salvo en casos excepcionales es el campo de actuación actual de los pequeños ordenadores. En la figura 8 hemos esquematizado las cuatro grandes alternativas que se presentan en el análisis de toda estructura, resaltando, como se aprecia en la figura, el caso particular, por otra parte el más corriente en la práctica, que aquí tratamos.

Para aclarar mejor conceptos, en la figura 9

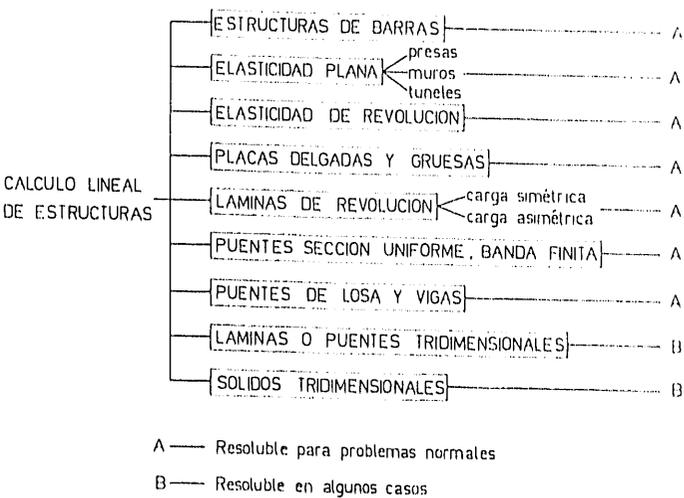


Fig. 8.

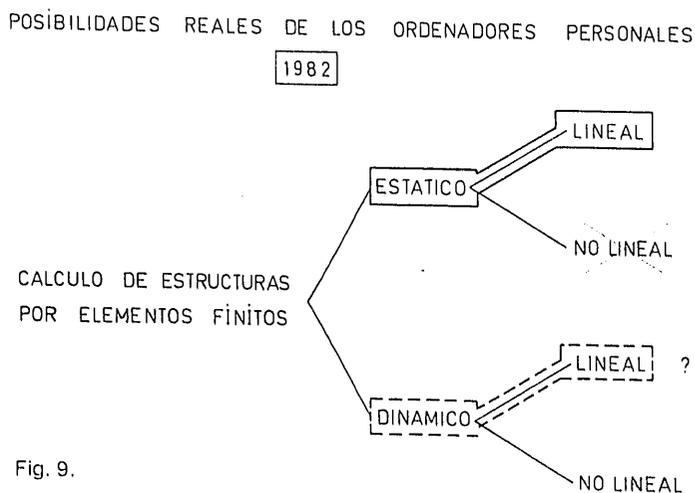


Fig. 9.

se ha efectuado una división tipológica de las estructuras más usuales con el fin de sistematizar un poco la evaluación de las posibilidades de utilización de los ordenadores personales en cada una de ellas. En los apartados siguientes comentaremos brevemente los aspectos más destacados de nuestra experiencia en dicho campo.

5.1. Elasticidad bidimensional

Muchas estructuras reales se estudian mediante su idealización en un problema de elasticidad en dos dimensiones, este es el caso de las presas, túneles, muros, bóvedas, etc., bajo ciertas condiciones de carga. Los programas de ordenador para este tipo de problemas son, por consiguiente, de gran interés práctico y en los últimos años se ha dedicado un gran esfuerzo en tratar de encontrar una configuración de programa óptima

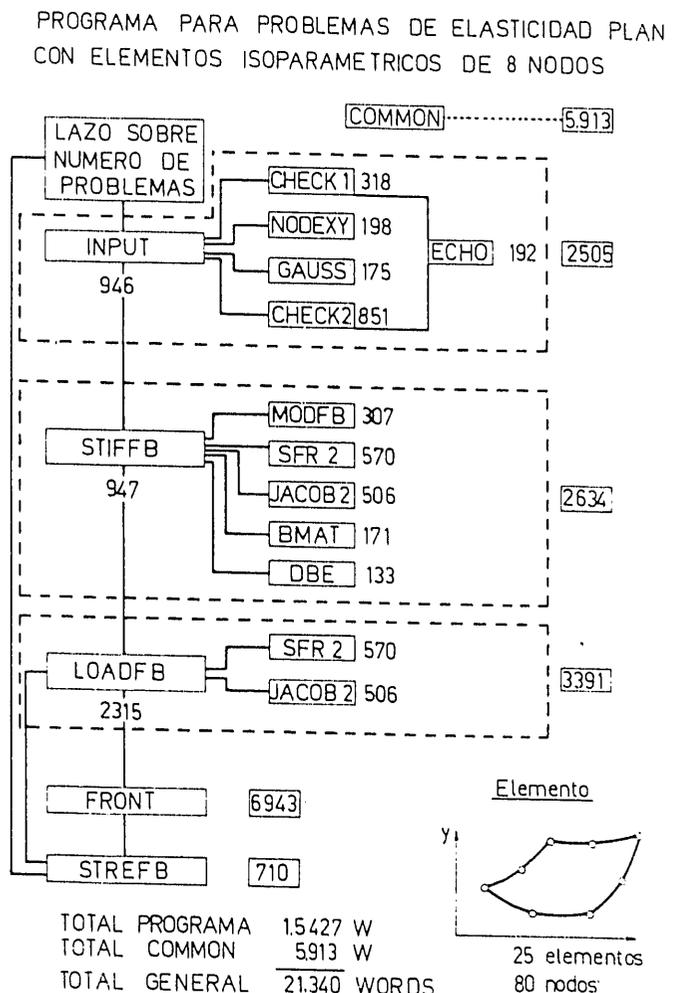


Fig. 10.

que permitiera hacer posible su implementación en una amplia gama de ordenadores.

En la figura 10 se muestra un diagrama de flujo de un programa clásico de este tipo para elementos isoparamétricos. (Observese la analogía de dicho diagrama con el de la figura 7). Como dato indicativo hemos señalado en dicha figura al lado de cada una de las subrutinas, su tamaño en *palabras* (para el caso de un programa que utilice 25 elementos isoparamétricos de 8 nodos y un máximo de 80 nodos) (41) de manera que se tenga una idea aproximada de las posibilidades reales de utilización del programa en un ordenador personal. Hay que resaltar que la información del programa se transmite a través de bloques «COMMON» cuya capacidad se muestra también en la figura 10. Asimismo, para mayor información se ha sumado la capacidad máxima de cada subrutina independiente (ver apartado 6) resaltándose dicho número en la figura 10 dentro de un cuadrado. Dicho número, más el correspondiente al de los bloques COMMON, representa la capacidad de memoria central necesaria para poder ejecutar cada subrutina independiente lo que, en definitiva, nos da un índice real del tamaño máximo del problema a estudiar. Así, de la figura 10 se deduce el tamaño máximo de las subrutinas siguientes:

- Entrada de datos, etc.: INPUT + COMMON = 8.418 palabras.
- Cálculo matriz de rigidez $K^{(e)}$: STIFFB + COMMON = 8.547 palabras.
- Cálculo vector de cargas $f^{(e)}$: LOADFB + COMMON = 9.309 palabras.
- Solución de $K\bar{a} = \bar{f}$ por método frontal: FRONT + COMMON = 12.856 palabras.
- Cálculo de tensiones $\sigma^{(e)}$: STREFFB + COMMON = 6.623 palabras.

De lo anterior se deduce que la capacidad máxima del ordenador necesaria para ejecutar un problema de las posibilidades del que se nos muestra en la figura 10, es de 12.856 palabras lo cual está perfectamente dentro del rango de los ordenadores personales. Dicha ejecución implicaría, naturalmente, un encadenamiento de las ejecuciones de cada una de las subrutinas consideradas como subprogramas independientes, lo que no representa una gran dificultad. Si, no obstante, se pretende ejecutar todo el programa como un bloque conjunto de forma simultánea, la capacidad necesaria de memoria central sería,

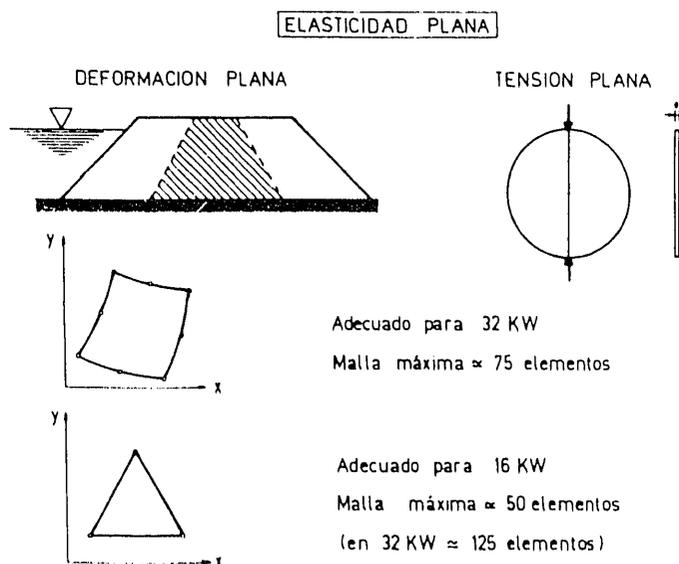


Fig. 11.

como se puede apreciar en la figura 16, de 21.340 palabras, cifra que se encuentra dentro del rango de los ordenadores de 32 KW. En cualquier caso queda patente la posibilidad de la implementación del programa en un ordenador personal con un número de elementos suficiente para realizar un cálculo de un problema real con suficiente aproximación. Dicho número es, como se desprende, de las cifras de capacidades de la figura 19, ampliable en todos los casos, en función de la modalidad de solución (por subrutinas independientes o por programa completo) y de la capacidad de memoria central máxima del ordenador correspondiente.

En la figura 11, se presentan a título orientativo, cifras del número máximo de elementos triangulares (matrices explícitas) e isoparamétricos de 8 nodos (matriz calculada numéricamente) que de acuerdo con nuestra experiencia, podrían utilizarse en ordenadores de 16 y 32 KW.

5.2. Problemas de elasticidad con simetría de revolución

Es bien conocido que el análisis de una estructura como sólido de revolución es una simplificación del caso general de la elasticidad tridimensional. Si las cargas actuantes son también de revolución, el problema se transforma en *bidimensional* y el programa de cálculo tiene *exactamente* la misma estructura y capacidad que el explicado en las figuras 10 y 11 para el caso de elasticidad plana. Si

las cargas no son de revolución el problema puede estudiarse con elementos planos pero aparece una tercera variable que es el movimiento circunferencial y es preciso hacer uso de técnicas de desarrollo en serie de Fourier de las variables en dirección de la circunferencia (41).

El tamaño del problema en este caso sigue siendo razonable y su implementación en un ordenador pequeño es posible.

En la figura 12 se presentan cifras estima-

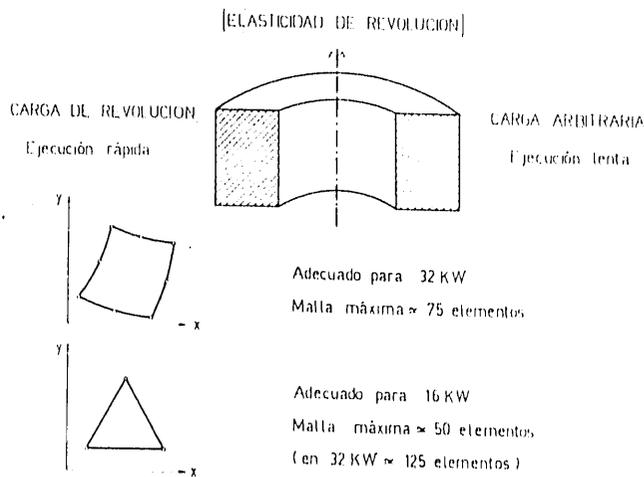


Fig. 12.

tivas del número máximo de elementos triangulares e isoparamétricos que se han logrado implementar sin dificultad (sin segmentar el programa) en ordenadores de 16 y 32 KW.

5.3. Flexión de placas delgadas y gruesas

Los problemas de placas son muy frecuentes dentro del campo de las estructuras. Con respecto al cálculo por elementos finitos se suele dividir el análisis de placas en dos tipos: a) Placas delgadas, en las que se utiliza la teoría de Kirchhoff (22) (y la de Mindlin (22) tomando algunas precauciones) y b) Placas gruesas, en las que sólo es válida la teoría de Mindlin. En ambos casos el número de variables nodales es el mismo y el tamaño del programa de cálculo es prácticamente similar.

En la figura 13 se ofrece el diagrama de flujo característico de un programa de flexión de placas que utiliza 72 elementos triangulares de tres nodos y un máximo de 90 nodos, en el que se han destacado, al igual que en la figura 1 el tamaño de las diferentes subrutinas

PROGRAMA PARA FLEXION DE PLACAS

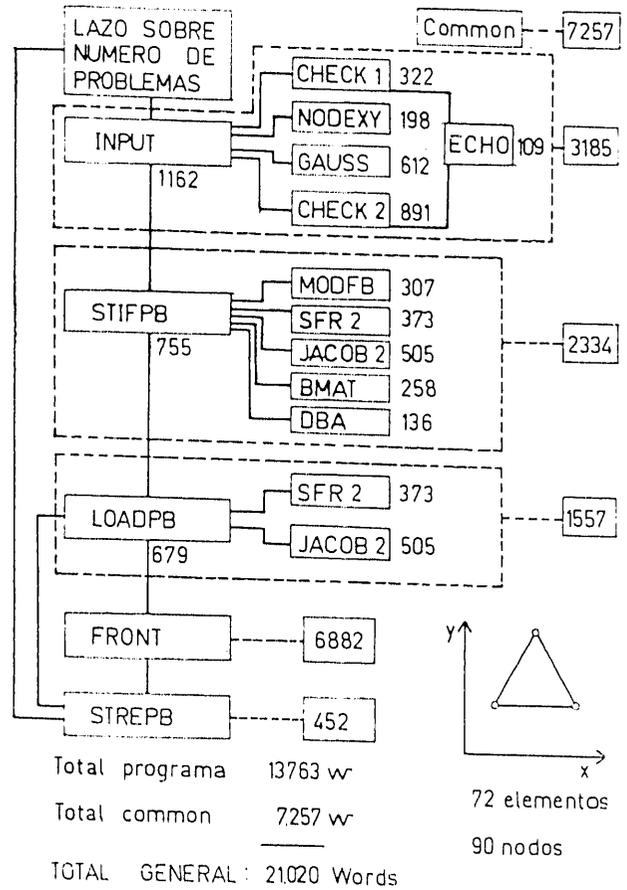


Fig. 13.

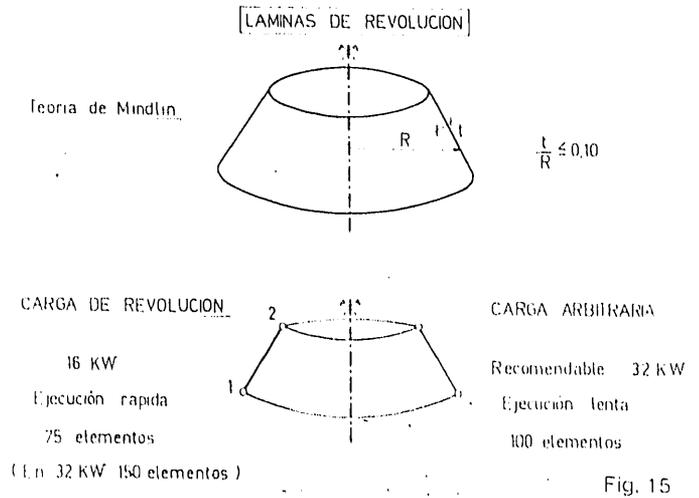
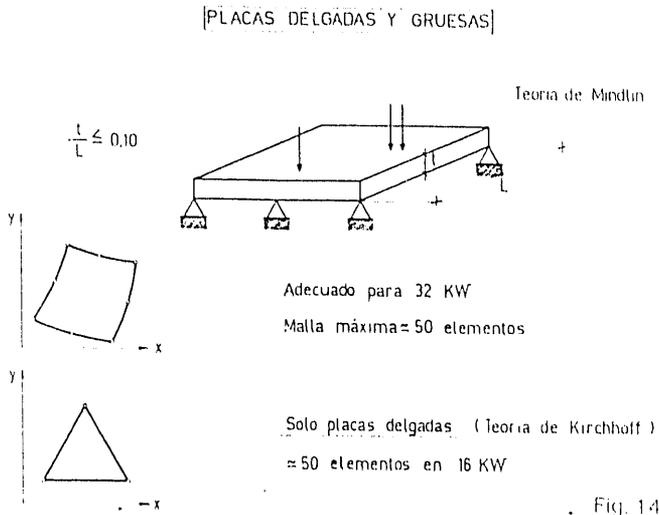
nas y en un cuadrado el de los subprogramas independientes.

De la figura se desprenden las siguientes conclusiones con respecto a necesidades de capacidad de cada parte del programa:

- Entrada de datos: INPUT + COMMON = 10.442 palabras.
- Cálculo de matriz de rigidez $K^{(e)}$: STIFPB + COMMON = 9.591 palabras.
- Cálculo de vector de cargas $f^{(e)}$: LOADPB + COMMON = 8.814 palabras.
- Solución de $K_a \bar{u} = \bar{f}$ por método frontal: FRONT + COMMON = 14.319 palabras.
- Cálculo de tensiones $\sigma^{(e)}$: STREPB + COMMON = 7.809 palabras.

Vemos que la máxima capacidad de memoria central necesaria para ejecutar el programa por subprogramas independientes sería de 14.139 palabras, lo cual encajaría en un ordenador de 16 KW. El programa completo ocupa 21.020 palabras lo cual es adecuado para ordenadores de 32 KW. En ambos casos

CALCULO DE ESTRUCTURAS POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS



es posible incrementar el número máximo de elementos utilizables lo cual hace que el programa sea implementable en ordenadores personales.

En la figura 14 se presenta, a título orientativo, cifras estimativas del número máximo de elementos triangulares e isoparamétricos que se han logrado implementar sin dificultad (sin segmentar el programa) en ordenadores de 16 y 32 KW.

5.4. Láminas de revolución delgadas y gruesas

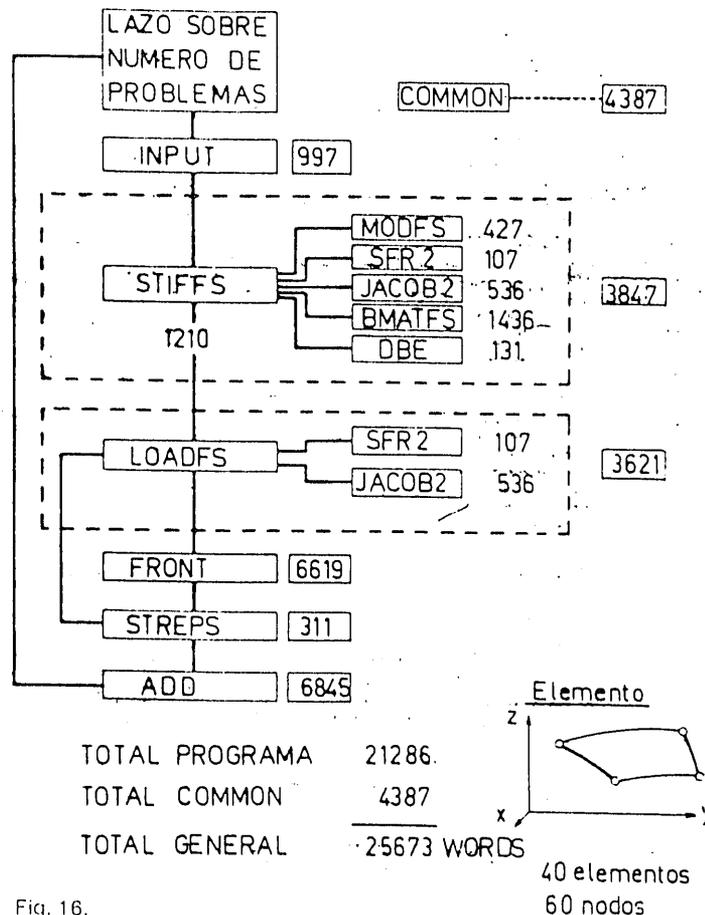
Las estructuras laminares de revolución constituyen un alto porcentaje de las estructuras de uso en la práctica (depósitos, torres de enfriamiento, centrales nucleares, etc.). El interés de un programa de ordenador que permita su cálculo de una manera sencilla es, por consiguiente, grande.

Si la carga es también de revolución se puede hacer uso de una teoría más simplificada y el tamaño de las matrices resultantes es pequeño (27). En el caso de cargas arbitrarias hay que desarrollar las variables en series de Fourier en dirección circunferencial (37) y el programa de cálculo es algo más laborioso y de ejecución más lenta.

En la figura 15 se presentan a título indicativo, el número máximo de elementos troncocónicos de dos nodos basados en la teoría de Mindlin (37) que han logrado implementarse con éxito (sin segmentar el programa) en ordenadores de 16 y 32 KW en el caso de carga de revolución y en el de carga arbitraria. Incidentalmente, añadiremos que el tamaño del

programa para el caso de carga arbitraria es idéntico al de análisis de puentes por el método de la banda finita que se muestra en la figura 16 y se comenta en el apartado siguiente (23) (37).

PROGRAMA PARA PUENTES RECTOS O CURVOS Y LAMINAS DE REVOLUCION BAJO CARGA ARBITRARIA



5.5. Puentes de sección uniforme.
Banda finita

En puentes cuya sección transversal se mantiene constante en dirección longitudinal se puede efectuar un análisis por elementos finitos mucho más simplificado combinando el uso de elementos finitos para modelar el comportamiento transversal de la estructura y series de Fourier para modelar el comportamiento longitudinal. Este procedimiento, que comúnmente se conoce con el nombre genérico de *método de la banda finita*, ha sido utilizado en numerosas ocasiones para analizar con éxito puentes simplemente apoyados o continuos de muy diversas tipologías (18), (23), (37), (47) y (48).

En la figura 16 se muestra el diagrama de flujo característico de un programa para análisis de puentes rectos y curvos (¡y válido también para láminas de revolución como extrapolación del caso del puente curvo cerrado sobre sí mismo!) (23) (37) que permite un máximo de 40 elementos en banda lineal y 60 nodos donde se puede observar el tamaño de las diferentes subrutinas. De la figura se deducen las necesidades de capacidad siguientes:

- Entrada de datos: INPUT + COMMON = 5.384 palabras.
- Matriz de rigidez $K^{(e)}$: STIFFS + COMMON = 8.234 palabras.
- Valor de cargas $f^{(e)}$: LOADFS + COMMON = 8.008 palabras.
- Solución del sistema $K_a = f$: FRONT + COMMON = 11.006 palabras.
- Cálculo de tensiones: STREPS + COMMON = 4.698 palabras.
- Suma de los términos armónicos: ADD + COMMON = 11.232 palabras.

Por consiguiente, la capacidad máxima de memoria central del ordenador necesaria para ejecutar dicho programa (por subrutinas encadenadas) sería de 11.232 palabras, lo que lo hace idóneo para su uso en ordenadores personales de 16 KW.

En el caso de ejecución del programa completo, la capacidad necesaria serían 25.637 palabras cifra que está todavía ampliamente dentro del rango de los 32 KW.

En la figura 17 se muestra, a título indicativo, el número de elementos máximos que hemos logrado implementar (sin segmentar el programa) en ordenadores de 16 y 32 KW.

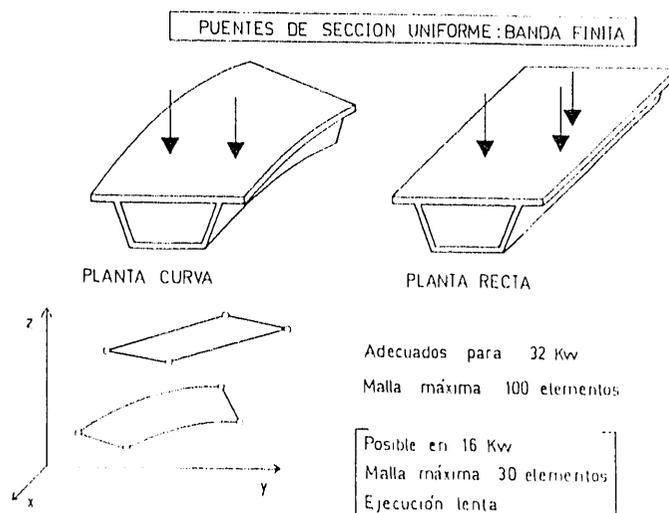


Fig. 17.

5.6. Puentes de losa y vigas

La tipología de puente más usual en la práctica la constituyen los puentes formados por un tablero de hormigón sobre una serie de vigas (generalmente también de hormigón). En los casos en que las vigas sean de alma estrecha (vigas doble I, etc.) y no se precisen cálculos muy sofisticados, es muy corriente analizar la estructura conjunta utilizando una combinación de la teoría de placas con la de vigas. El programa de cálculo por elementos finitos combina, por consiguiente, elementos isoparamétricos (u otros más sencillos) de placa, con elementos unidimensionales de viga. El número de grados de libertad del problema resultante es idéntico al del problema de flexión del tablero, considerado como placa. Por consiguiente, el tamaño del programa de ordenador correspondiente es del orden (un poco mayor) del de flexión de placas cuyo diagrama se muestra en la figura 13.

A título orientativo, se indican en la figura 18 el número máximo de elementos isoparamétricos de placa de 8 nodos y unidimensionales de 3 nodos que se han logrado implementar con éxito (sin segmentar el programa) en ordenadores de 16 y 32 KW.

5.7. Láminas o puentes tridimensionales

El análisis de una estructura laminar de forma arbitraria es un problema de cierta dificultad del cálculo de estructuras, debido a las pocas hipótesis simplificadoras que pueden establecerse (29). Un programa general para cálculo de este tipo de estructuras por ele-

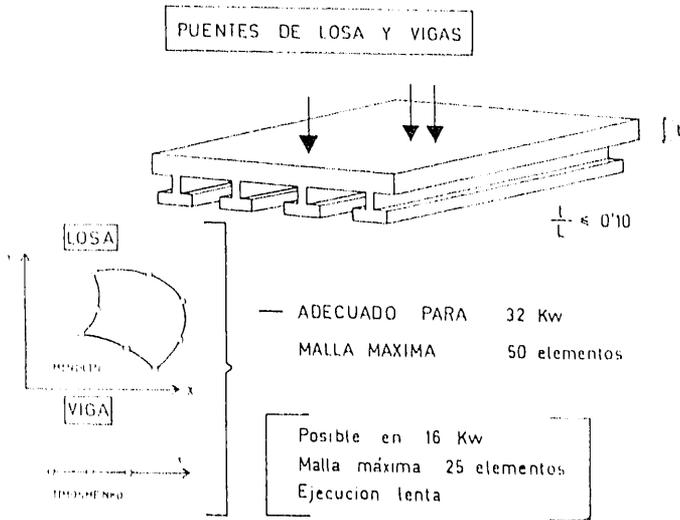


Fig. 18.

mentos finitos (especialmente en el caso de elementos isoparamétricos) es complejo (31). Asimismo, el tamaño del programa es considerable y su implementación en un ordenador con una capacidad de memoria limitada está condicionada a una segmentación del mismo, laboriosa y a la utilización de un número de elementos pequeño.

No obstante, dicha implementación es posible y en la figura 18 se dan cifras estimativas del máximo número de elementos de lámina isoparamétricos de 8 nodos y triangulares (explícitos) de tres nodos que han logrado implementarse en ordenadores de 32 KW.

5.8. Sólidos tridimensionales

En muchas estructuras no quedan otras alternativas para su análisis que hacer uso de la teoría de la elasticidad tridimensional y utilizar los elementos finitos tridimensionales correspondientes. Así ocurre en la mayor parte de los casos en los que se quiera estudiar el efecto de la interacción estructura/terreno y no se pueda hacer uso de ningún tipo de simplificaciones (presas, bóveda, etc.) (91).

No obstante la aparente complejidad del problema, sucede en ocasiones que el coste asociado, en necesidad de capacidad y tiempo de cálculo, a un análisis tridimensional es de un orden similar al análisis de la estructura como lámina siempre que éste sea posible (tal es el caso de la alternativa de estudiar una presa bóveda, sin considerar el terreno, como sólido tridimensional o utilizando la teoría de

lámina). Por consiguiente, y siguiendo los razonamientos que se hicieron en el apartado anterior para las láminas, en casos especiales y con una segmentación del programa cuidadosa sería posible adaptar un programa de elementos tridimensionales a ordenadores de 32 KW. Dicha implementación de hecho ya se ha llevado a cabo con éxito y en la figura 20 se muestra el número de elementos tetraédricos de 4 nodos que se han logrado implementar en un ordenador de 32 KW. El uso de elementos más complejos, como es el prisma isoparamétrico de 20 nodos que se muestra en la misma figura aumenta las necesidades de capacidad, y su utilización en pequeños ordenadores para resolver problemas reales no es, hoy en día adecuado.

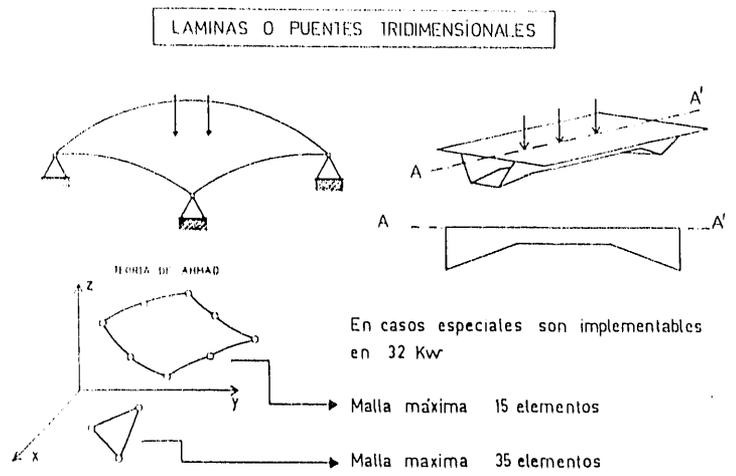


Fig. 19.

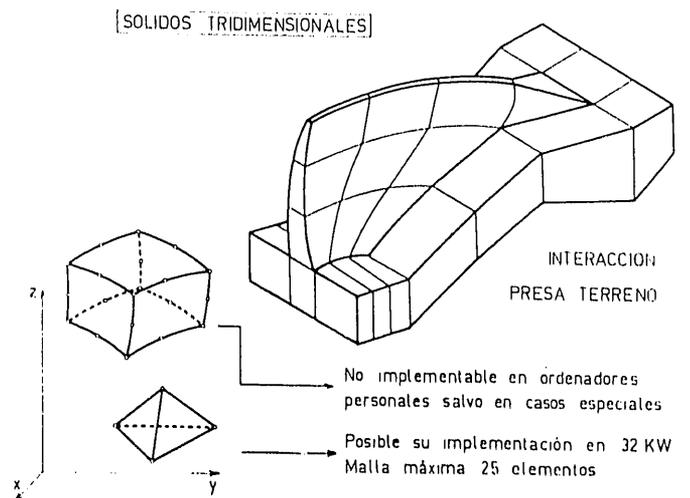


Fig. 20.

6. CONCLUSIONES: FUTURO DE LOS ORDENADORES PERSONALES EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS POR EL MEF

Hemos visto brevemente en este artículo cuales son las posibilidades que a nuestro juicio tienen hoy en día los ordenadores de pequeño tamaño (16 y 32 KW) en el cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. La mayor parte de los programas de los que aquí se ha hecho mención se han desarrollado con fines de su utilización en ordenadores de pequeña capacidad de memoria, muy recientemente. Es por esto, que las cifras que se han ofrecido en los apartados 1-8 tienen que tomarse como *orientativas* y susceptibles de ser modificables, como de hecho seguro que ocurrirá, (o está ya ocurriendo), en un próximo futuro cuando se perfeccionen las técnicas de programación y la estructura del funcionamiento de los ordenadores, campos ambos que están en continuo y acelerado desarrollo.

Se habrá advertido que no se han dado cifras indicativas de tiempo de cálculo para los distintos tipos de estructuras comentados. No se ha hecho así por ser el tiempo de cálculo una magnitud que depende en gran manera del tipo de ordenador en donde se ejecute el programa. No ocurre lo mismo con las cifras de la capacidad de las distintas subrutinas, pues ésta es una cifra más standard e intercambiable entre diferentes marcas de ordenador. Además, con relación al tiempo de cálculo, hay que añadir que en él incide en gran manera la adecuada optimización del programa, de forma que, para esquemas de programas similares, detalles como la organización interna de las operaciones dentro de cada subrutina, o los de elegir el procedimiento de integración numérica o el método de solución del sistema de ecuaciones adecuado, afectan sensiblemente el tiempo de ejecución.

Para dar una idea más concreta de lo anterior, y como colofón de este trabajo, vamos a presentar unas cifras de tiempos de ejecución de un mismo programa de ordenador, en distintas versiones para un mismo problema, y podremos observar las grandes diferencias entre la versión del programa optimizada y la no optimizada. Se trata de un programa para cálculo de puentes curvos o rectos por el método de la banda finita. El diagrama de flujo de dicho programa se mostró en la figura 16.

Del mismo programa se realizaron cuatro versiones que a continuación se diferencian en forma esquemática.

Versión 1

PUMENT: Ninguna optimización de las operaciones dentro de las subrutinas. Nueva solución del sistema de ecuaciones para cada estado de carga, por el método Frontal (10) (46). Uso de numerosos archivos de trabajo temporales.

Versión 2

TRAPID: Como PUMENT pero modificando el método de solución de ecuaciones de forma que todos los estados de carga se resuelvan a la vez.

Versión 3

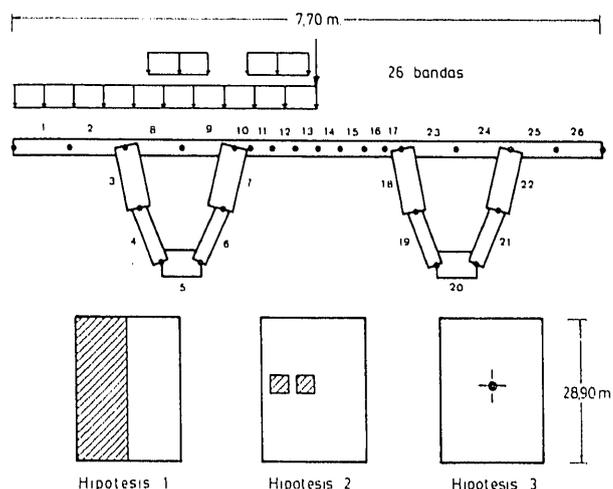
SUPERI: Como TRAPID pero con optimización al máximo de las operaciones dentro de cada subrutina eliminando las innecesarias y sustituyendo el método Frontal por el de Gauss.

Versión 4

SUPERR: Como TRAPID, pero volviendo a la solución Frontal eliminando *todos* los archivos de trabajo temporales.

En la figura 21 se muestra un ejemplo de un puente de losa y vigas en V, analizado con los cuatro programas y donde se ha detallado los tiempos de ejecución de cada uno de los grupos de subrutinas principales del programa de la figura 16 (sin incluir la subrutina de suma final de los armónicos y salida de resultados ADD). Se aprecia en dicha figura la gran reducción en el tiempo total de cálculo que la última versión optimizada, SUPERR, supone con respecto a la inicial (aproximadamente *cuatro* veces más rápida)". No queremos entrar en más detalles sobre este problema particular sino considerarlo simplemente como otro indicativo de la gran influencia que una adecuada preparación de un programa tiene tanto en lo que respecta a las necesidades de capacidad del mismo como en cuanto al tiempo de cálculo.

Ambos factores son, creemos, la clave del éxito de un programa y los que condicionan que su implementación en un ordenador personal sea posible y rentable. El gran esfuerzo



Subrutina/Programa	PUENT 1	TRAPID	SUPER 1	SUPERR
STIFFB	9' 6"	9' 6"	2' 35"	2' 35"
LOADF	8"	20"	5"	10"
FRONT	28' 46"	15' 50"	19' 35"	7' 40"
SIRFB	7' 04"	7' 5"	1' 20"	1' 20"
TOTAL	45' 4"	32' 21"	23' 38"	11' 45"

Tiempos de solución para 5 armónicos

Fig. 21.—Puentes simplemente apoyados de dos vigas. Discretización en 26 bandas. Hipótesis de carga y tiempos de ejecución para cuatro versiones diferentes del mismo programa.

que se está invirtiendo hoy en día en ambas direcciones nos permiten ser optimistas sobre la posibilidad real de analizar estructuras de una cierta complejidad en pequeños ordenadores.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer al Gabinete Técnico de Caminos, Edificios y Obras, S. A. por su colaboración en la obtención de los resultados de tiempos de ordenador del ejemplo correspondiente a la figura 21.

Asimismo, se agradecen la desinteresada ayuda del ingeniero Heinz Hossdorf de Basilea (Suiza) por la cesión del ordenador Hewlett-Packard 2.100 A en el que se ha implementado la mayor parte de los programas citados en este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) CHEUNG, Y. K.: «The Finite Strip Method in Structural analysis». Pergamón, 232 págs., 1976.
- (2) CONNOR, J. C., y BREBBIA, C. A.: «Finite Element Techniques for Fluid Flow». Butterworth, London, 1976.
- (3) COOK, R. D.: «Concepts and Applications of Finite Element Analysis». Wiley, New York, 1974.
- (4) DESAI, C. S.: «Elementary Finite Element Method», Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- (5) DESAI, C. S., y ABEL, J. F.: «Introduction to The Finite Element Method». Van Nostrand-Reinhold, New York, 1972.
- (6) FENNER, R. T.: «Finite Element Methods for Engineers». McMillan, London, 1975.
- (7) GALLAGHER, R. H.: «Finite Element Analysis Fundamentals». Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- (8) HINTON, E., y OWEN, D. R. J.: «Introduction to finite element computations». Pineridge Press, Swansea, U. K, 1980.
- (9) HUEBNER, K. H.: «Finite Element Method for Engineers», Wiley, New York, 1975.
- (10) IRONS, B. M., y AHMAD, S.: «Techniques of Finite Elements». Ellis Horwood, Chinchester, England, 1979.
- (11) MARTIN, H. C., y CAREY, G.: «Introduction to Finite Element Analysis». McGraw-Hill, New York, 1973.
- (12) MITCHELL, A. R., y WAIT, R.: «The Finite Element Method in Partial Differential Equations». Wiley, London, 1977.
- (13) NATH, B.: «Fundamentals of Finite Elements for Engineers». Athlone Press, London, 1974.
- (14) NORRIE, D. H., y DE VRIES, G.: «Finite Element Method: Fundamentals and Applications». Academic Press, New York, 1973.
- (15) NORRIE, D. H., y DE VRIES, G.: «An Introduction to Finite Element Analysis». Academic Press, New York, 1978.
- (16) ODEN, J. T.: «Finite Elements of Nonlinear Continua». McGraw-Hill, New York, 1972.
- (17) ODEN, J. T., y REDDY, J. N.: «An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements». Wiley, New York, 1976.
- (18) OÑATE, E.: «Comparison of Finite Strip Methods for the Analysis of Box Girder Bridges». University College of Swansea, País de Gales, Septiembre, 1976.
- (19) HINTON, E. WOOD, R., y OÑATE, E.: «A Preliminary Report in Bridge Deck Analysis». University College of Swansea, País de Gales, mayo, 1976.
- (20) OÑATE, E.: «El Método de la banda finita. Aplicación a puentes de cajón». Escuela de Ingenieros Industriales, Terrasa, mayo, 1977.
- (21) OÑATE, E.: «El método de la banda finita para el cálculo de puentes». Revista Hormigón y Acero, n.º 124, 1977.
- (22) OÑATE, E.: «Comparación entre las formulaciones de la banda finita con y sin inclusión de la deformación por cortante para análisis de puentes». Monografía del Instituto Torroja, diciembre, 1980.
- (23) OÑATE, E., y SUAREZ, B.: «An unified formulation for the analysis of bridges, plates and axisymmetric shells using the linear Mindlin strip element». Computers and structures (próxima publicación).
- (24) ROBINSON, J.: «Integrated Theory of Finite Element Methods». Wiley, London, 1973.

- (25) OÑATE, E.: «Users Guide for MSFIST and KFIST, finite strip programs for the analysis of boxgirder». International Report CR/91/76. Civil Engineering Dpt. University College of Swansea, noviembre, 1976.
- (26) OÑATE, E.: «Manual para PLACAT. Programa para cálculo de placas delgadas y gruesas por el método de los elementos finitos». Publicación interna, Cátedra de Estructuras, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Barcelona, junio, 1980.
- (27) ZIENKIEWICZ, O. C.; BAUER, J., y OÑATE, E.: «A simple and efficient element for axisymmetric shells». International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, n.º 10, 1545-1559, 1977.
- (28) OÑATE, E.; HINTON, E., y GLOVER, N.: «Methods to Improve the performance of Ahmad shell elements». Publicado en la recopilación de la II Conferencia Internacional sobre Numerical Modelling, Escuela de Ingenieros Industriales, Madrid, septiembre, 1978.
- (29) OÑATE, E., y ZIENKIEWICZ, O. C.: «Some Problems in the Analysis of thin shells using isoparametric shell elements». Publicado en la recopilación de las comunicaciones de World Congress on Shell and Spatial Structures, 20th Anniversary of the IASS, Madrid, septiembre, 1979.
- (30) OÑATE, E.: «Users Guide to Program AXISHELL Finite element program for Axisymmetric elastic shells under axisymmetric loading using linear elements». Publicación interna O/R341/79. Civil Engineering Dpt. University College of Swansea, enero, 1979.
- (31) OÑATE, E.: «Users manual for SHELLK. Computer program for the analysis of smooth or branched shell structures». Publicación interna C/R/345/79. Civil Engineering Dpt. University College of Swansea, enero 1979.
- (32) OWEN, D. R. J., y HINTON, E.: «Finite Elements in Plasticity: Teory and Practice». Pineridge Press, Swansea, U. K., 1980.
- (33) PINDER, G. F., y GRAY, W. G.: «Finite Elements in Subsurface Hydrology». Academic Press, New York, 1979.
- (34) ROCKEY, K. C.; EVANS, H. R.; GRIFFITHS, D. W., y NETHERCOT, D. A.: «Finite Element Method-A Basic Introduction». Crosby Lockwood, London, 1975.
- (35) SEGERLIND, L. J.: «Applied Finite Element Analysis». Wiley, New York, 1976.
- (36) STRANG, W. G., y FIX, G. J.: «An Analysis of the Finite Element Method». Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- (37) SUAREZ, B.: «La formulación de bandas finitas de Reissner Mindlin para análisis de placas, puentes, y láminas de revolución». Tesis Doctoral. E.T.S. Ing. Caminos, Barcelona, 1982.
- (38) TAYLOR, C., y HUGHES, T. J.: «Finite Element Programming of the Navier Stokes Equation». Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980.
- (39) TONG, P., y ROSSETTOS, J. N.: «Finite-Element Method: Basic Technique and Implementation». MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1977.
- (40) WACHSPRESS, E. L.: «A Rational Finite Element Basis». Academic Press, New York, 1975.
- (41) ZIENKIEWICZ, O. C.: «The Finite Element Method». Editorial Reverté, Barcelona, 1980.
- (42) COURANT, R.: «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration». Bull. Amer. Maths. Soc. 49, 1-43, 1943.
- (43) ARGYRIS, J. H., y KELSEY, S.: «Energy Theorems and Structural Analysis». Butterworth Sci. Publ. 1960.
- (44) TURNER, M.; CLOUGH, R.; MARTIN, H., y TOPP, L.: «Stiffness and deflection analysis of complex structures». J. Aeronaut. Sci. 23, 805-823, 1956.
- (45) CLOUGH, R. W.: «The finite element method in plane stress analysis». ASGE, J. Struc. Div. Proc. 2nd Conf. Electronic Computation, 345-378, 1960.
- (46) HINTON, E., y OWEN, D. R. J.: «Finite Element Programming». Academic Press, London, 1977.
- (47) LOO, Y. C., y CUSENS, A. R.: «The Finite Strip Method in Bridge Engineering». VIEWPOINT, 220 págs. 1978.
- (48) CHEUNG, Y. K.: «The finite strip method in structural analysis». Pergamon Press, 1976.