

Simulación numérica del vertido y consolidación de residuos semi-sólidos industriales y mineros

ANTONIO RODRIGUEZ (*)
ANTONIO HUERTA (*)

RESUMEN. Los residuos semi-sólidos son desechos de diversas actividades productivas con un contenido de agua muy elevado. El tratamiento más común es el vertido en grandes balsas de almacenamiento. La simulación del llenado y de la consolidación con grandes deformaciones plantea serias dificultades debido al carácter altamente no lineal del problema físico y matemático.

Se presentan varios esquemas numéricos existentes para resolver este problema así como algunas modificaciones introducidas para describir mejor las elevadas variaciones con la profundidad de las propiedades del material. Los algoritmos numéricos desarrollados son robustos y verifican la convergencia de los esquemas iterativos, a diferencia de planteamientos más clásicos basados en elegir incrementos de tiempo «suficientemente» pequeños y asumir la convergencia en cada paso.

Se ha elaborado un paquete de programas de ordenador para predecir la magnitud y la velocidad de consolidación unidimensional y pseudo-bidimensional (deformación unidimensional, flujo bidimensional) con grandes deformaciones, acoplando los fenómenos de llenado y consolidación. Puede simularse la vida real del depósito combinando períodos de vertido y períodos de reposo. Se trata pues de una herramienta básica para el diseño de balsas de almacenamiento.

NUMERICAL SIMULATION OF THE POURING AND CONSOLIDATION OF SEMI-SOLID INDUSTRIAL AND MINING RESIDUES

ABSTRACT. Slurries are wastes from various productive activities with a very high water content. The most normal treatment is pouring into large storage pools. The simulation of filling and large strain consolidation poses serious problems as a result of the highly nonlinear nature of the physical and mathematical problem.

Several existing numerical algorithms for solving problem are presented, as well as some modifications made with a view to facilitating a better description of the considerable variations of the material properties with depth. The numerical algorithms developed are robust and verify the convergence of the iterative schemes, as opposed to more traditional approaches based on the selection of time increments that are «short enough» and which take the convergence at each step for granted.

A set of computer programs has been developed to predict the magnitude and rate of large-strain one-dimensional and pseudo bi-dimensional (i.e. one-dimensional strain, bi-dimensional flow) consolidation, coupling filling and consolidation phenomena. The working life of the deposit can be simulated by combining filling and quiescent periods. Consequently, this is a basic tool for the design disposal ponds.

INTRODUCCION

La predicción de la magnitud y la velocidad de densificación es una de las preocupaciones principales en el tratamiento de residuos semi-sólidos de procedencia diversa: lavado de la ganga en la minería, obtención de

aluminio a partir de bauxita, dragado de puertos y ríos, etcétera. Las incógnitas básicas son la capacidad y vida útil de una determinada área de vertido, y la mejora de las propiedades del material a efectos de la reutilización del terreno. Ambos aspectos están íntimamente ligados al proceso de consolidación y los cambios asociados de las propiedades del material.

Se ha desarrollado un paquete de programas de ordenador para predecir la magnitud y el ritmo de consoli-

(*) Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universitat Politècnica de Catalunya.

dación por peso propio con grandes deformaciones durante y después del aporte de material, esto es, acoplando los fenómenos de llenado y de consolidación. Puede simularse numéricamente la vida real del depósito combinando periodos de llenado y periodos de reposo.

Debido al elevado contenido de agua del material sedimentado (el contenido de sólidos varía entre menos de 10 % y 30 %), los consiguientes asentamientos verticales son normalmente extremadamente grandes, más allá del rango que abarcan las teorías de consolidación clásicas con pequeñas deformaciones; deben desarrollarse por tanto modelos no lineales con deformaciones finitas. Puesto que los aspectos físicos y matemáticos son altamente no lineales, los algoritmos numéricos desarrollados verifican la convergencia de los esquemas iterativos, a diferencia de planteamientos más clásicos basados en elegir incrementos de tiempo «suficientemente» pequeños y suponer convergencia en cada paso. De esta forma se ha conseguido eliminar las aberraciones numéricas que aparecen con otros planteamientos y mejorar la solución en la primera mitad del proceso de consolidación. Hay que destacar que, debido a la alternancia entre periodos de vertido y periodos de reposo, es necesaria una buena predicción de la consolidación a corto y medio plazo, porque los resultados obtenidos en un ciclo son las condiciones iniciales para el ciclo siguiente. Este no es el caso de análisis de consolidación clásicos, centrados la mayoría de las veces en las etapas finales de consolidación.

La próxima sección contiene un breve desarrollo de la teoría con deformaciones finitas y una discusión de las relaciones materiales empleadas. A continuación se plantea el problema numérico junto a los distintos algoritmos estudiados y desarrollados. Luego se presentan dos ejemplos unidimensionales y, finalmente, la ampliación bidimensional del problema.

CONSIDERACIONES TEORICAS

La teoría que se presenta aquí se basa en el trabajo original de Gibson et. al. (1), posteriormente ampliado y modificado en (2,3,4,5,6,7), entre otros. Existen dos formulaciones estándar para el planteamiento lagrangiano de la ecuación de consolidación en grandes deformaciones, según se escoja como variable dependiente el índice de poros, e , véase por ejemplo (1,2,4,5,8), o bien la sobrepresión, u , véase (3,9). Aquí se ha preferido esta segunda formulación y se trabaja con el exceso de presión sobre la presión hidrostática, u , como variable dependiente principal del problema. La ecuación unidimensional que resulta es (3):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[- \frac{k}{\gamma_w (1 + e)} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{de}{d\sigma'} \left[\frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0 \quad [1]$$

en la que la coordenada material z viene dada por

$$z(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha'}{1 + e_0(\alpha')} \quad [2]$$

donde α es la coordenada vertical inicial (lagrangiana), e_0 es el índice de poros inicial, k es el coeficiente de permeabilidad, γ_w es el peso específico del agua, t es el tiempo, y σ' y σ'_v son la tensión efectiva y la tensión sumergida respectivamente. La coordenada material, z , puede ser interpretada como la altura de partículas sólidas entre los planos determinados por $\alpha = 0$ y α , que es constante en el tiempo.

La tensión sumergida se define como la diferencia entre la tensión total y la presión hidrostática:

$$\sigma'_v(z,t) = (\gamma_s - \gamma_w) (z_{top}(t) - z) + q_{sur} \quad [3]$$

donde γ_s es el peso específico de los sólidos, q_{sur} es una eventual sobrecarga superficial y z_{top} es la coordenada material correspondiente a la superficie superior del depósito. Puesto que habitualmente se supone que la sobrecarga, q_{sur} , se aplica de forma instantánea, la tensión sumergida, σ'_v , depende del tiempo únicamente a través de z_{top} . Así, las variaciones de la tensión sumergida dependen directamente del aumento de altura total de partículas sólidas, asociado a su vez al vertido de nuevo material. En consecuencia, es precisamente el término $\partial \sigma'_v / \partial t$, en la Ec. [1], el que diferencia los periodos de vertido de los de consolidación en reposo.

La resolución de la Ec. [1] pasa por la especificación de condiciones de contorno e iniciales. Se han considerado tres condiciones de contorno: borde drenado, borde impermeable y gradiente de sobrepresión a través del depósito. La condición inicial es la distribución inicial de sobrepresiones en profundidad.

También es necesario escoger relaciones de estado apropiadas entre el índice de poros y el coeficiente de permeabilidad, y entre el coeficiente de permeabilidad y el índice de poros. Los programas de ordenador desarrollados incluyen varias expresiones propuestas para estas dos relaciones, véase (6,10). Las medidas experimentales disponibles para residuos semi-sólidos sugieren un comportamiento altamente no lineal y el empleo de funciones potenciales para las relaciones $e-\sigma'$ y $k-e$.

Un serio inconveniente de las relaciones de compresibilidad $e-\sigma'$ habituales es que una tensión efectiva nula implica un índice de poros infinito. Para evitar este problema sin cambiar la relación de compresibilidad y respetando el concepto físico de que la tensión sumergida y la sobrepresión son nulas en la superficie drenada, la tensión efectiva se redefine como:

$$\sigma' = \sigma'_v - u + \sigma'_0 \quad [4]$$

donde σ'_0 se obtiene introduciendo el índice de poros inicial, e_0 , en la relación de compresibilidad. La validez

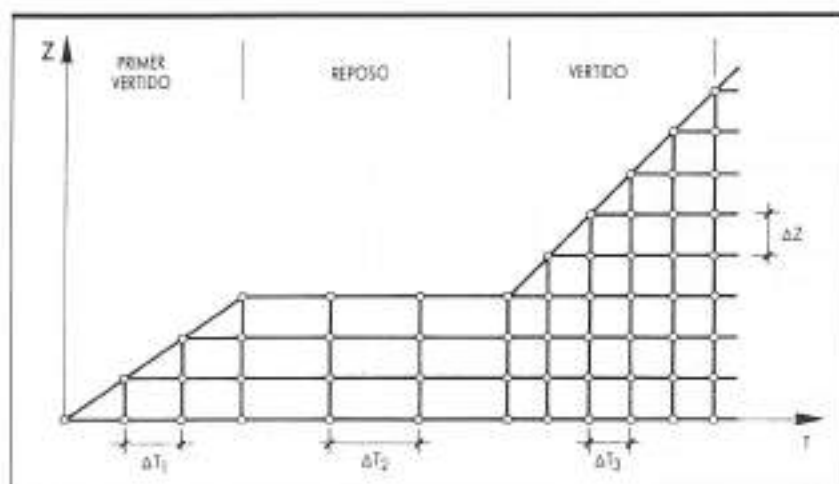


FIGURA 1. Discretización del dominio un nodo añadido por paso de tiempo.

de este artificio se discute en (11) para un problema estacionario de consolidación por filtración; además, un análisis de sensibilidad efectuado con los programas desarrollados permite concluir que la influencia de σ'_0 en el asentamiento es despreciable y se mantiene por debajo del 5 % para las distribuciones usuales de las propiedades materiales, como se avanzaba ya en (11). Este resultado es físicamente esperable puesto que el índice de poros inicial, que representa el límite —algo arbitrario— entre sedimentación y consolidación, es normalmente muy alto, véase (10), y esto implica una σ'_0 pequeña. Otras posibles redefiniciones de la tensión efectiva como

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma'_0 & \text{si } \sigma_b - u \leq \sigma'_0 \\ \sigma' &= \sigma_b - u & \text{si } \sigma_b - u > \sigma'_0 \end{aligned} \quad [5]$$

llevan a situaciones irreales en la parte superior del depósito, con distribuciones constantes de índice de poros y permeabilidad y por consiguiente sin consolidación.

La presencia de arena en la mezcla puede tratarse fácilmente suponiendo que la fase arcillosa controla el comportamiento mecánico y de flujo de la muestra; en las relaciones materiales se utiliza un índice de poros de la mezcla arcillosa (volumen de poros dividido entre volumen de arcilla) en lugar del índice de poros clásico (volumen de poros dividido entre volumen de sólidos).

Finalmente, es muy importante destacar que los coeficientes $k/(1+e)$ y $de/d\sigma'$ de la Ec. [1] dependen en última instancia de la sobrepresión, u . Tanto la permeabilidad como la compresibilidad presentan variaciones tan grandes durante el proceso de consolidación que estos coeficientes no pueden ser considerados constantes, ni siquiera de forma aproximada. En consecuencia, la ecuación parabólica [1] es claramente altamente no lineal.

ESQUEMAS NUMERICOS

Para la resolución de la Ec. [1] se ha elegido un esquema implícito en diferencias finitas por su estabilidad. En cualquier caso, la mayoría de las conclusiones alcanzadas son independientes del método numérico en concreto y pueden generalizarse a otras técnicas como por ejemplo al método de los elementos finitos.

La forma adimensional de la Ec. [1] viene dada por

$$p \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[q \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad [6]$$

donde se utilizan los mismos símbolos para las variables adimensionales con el objeto de simplificar las expresiones. Los coeficientes p y q en la Ec. [6] pueden interpretarse como la compresibilidad y la permeabilidad adimensionales; son por tanto funciones de u .

Después de la discretización, el sistema de ecuaciones es no lineal y viene dado por

$$A(u^{n+1})u^{n+1} = u^n + f \quad [7]$$

donde u^{n+1} y u^n son los vectores de sobrepresión en los instantes t^{n+1} y t^n , respectivamente, A es una matriz tridiagonal cuyos coeficientes son función de p y q (esta función depende del esquema en diferencias utilizado), y f es el vector de valores nodales del incremento de la tensión sumergida para periodos de vertido ($f=0$ en las etapas de consolidación en reposo).

En primer lugar se comenta la discretización del dominio puesto que aparecen dificultades durante las fases de llenado, especialmente en la zona superior del depósito. A continuación se presentan varios métodos de resolución de la Ec. [7], una tarea que no resulta

nada fácil debido al comportamiento altamente no lineal del problema.

DISCRETIZACION DEL DOMINIO

Se utiliza el método de las diferencias finitas; en consecuencia, es necesario discretizar las dos variables independientes, el tiempo (t) y el espacio (z). Durante los períodos de llenado se vierte nuevo material y puesto que se emplean coordenadas lagrangianas (la malla espacial sigue a las partículas), se introducen nodos nuevos en la discretización espacial.

La figura 1 muestra una discretización del dominio clásica, (3), en la que se añade un nodo por paso de tiempo durante las etapas de vertido. Esta es una técnica común y sencilla en la que el ritmo de vertido es el incremento espacial dividido por el incremento de tiempo (recuérdese que z es la altura de partículas sólidas). Sin embargo, la fuerte dependencia entre ambos incrementos es algunas veces un serio inconveniente.

Los problemas de consolidación por peso propio presentan variaciones de la permeabilidad y la compresibilidad con la profundidad extremadamente altas en la zona superior del depósito. Esto hace necesaria una malla espacial muy fina para capturar los cambios en las propiedades materiales, puesto que se emplea interpolación lineal (dos nodos por estrato «vertido»). Los pasos de tiempo correspondientes son normalmente muy pequeños y el coste de computación claramente antieconómico.

Si se introducen varios nodos por estrato «vertido» (por paso de tiempo), como muestra la figura 2, se re-

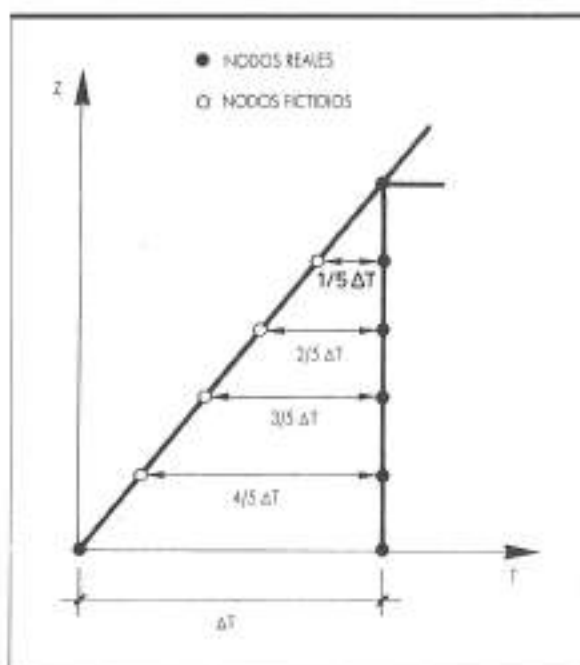


FIGURA 2. Técnica de varios nodos por estrato depositado.

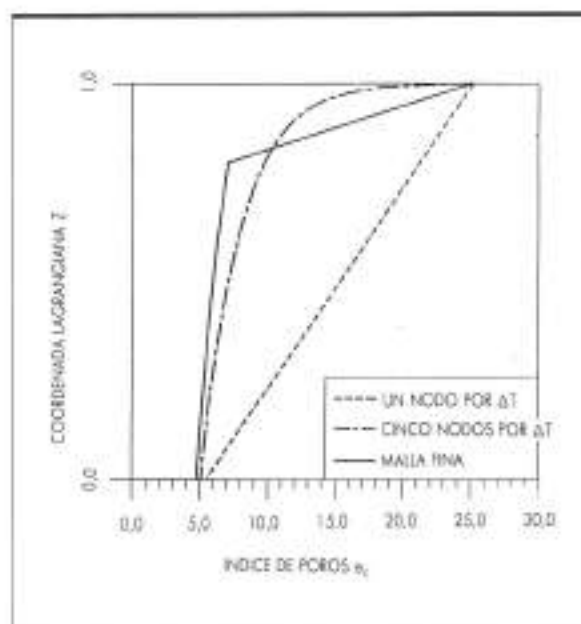


FIGURA 3. Comparación entre las técnicas de uno y varios nodos.

producen mejor las elevadas variaciones de compresibilidad y permeabilidad siendo además ambas discretizaciones (t y z) independientes entre sí. Para ilustrar este punto, la figura 3 presenta las distribuciones de índice de poros después del primer paso de tiempo de un período inicial de vertido sobre un lecho impermeable. Como es de esperar, con cinco nodos por incremento de tiempo se obtiene una curva mucho más parecida a la solución «exacta» (con una malla muy fina) que con un único nodo.

El área bajo la distribución del índice de poros está directamente relacionada con la profundidad del depósito. La sobreestimación de e de la discretización con un nodo por paso de tiempo lleva a una subestimación de los asentamientos. Por el contrario, con la técnica de varios nodos desarrollada se compensan las áreas y por tanto se predicen los asentamientos mucho más exactamente. Este es un aspecto importante, tal como se observa claramente en los ejemplos.

LINEALIZACION DEL PROBLEMA

Para resolver el sistema no lineal de ecuaciones algebraicas [7], los planteamientos clásicos (3), linealizan el problema evaluando la matriz A para u^n conocido, en lugar de u^{n+1} incógnita; es decir, se supone que $A(u^{n+1}) = A(u^n)$. Físicamente, esto significa que las propiedades materiales llevan un retraso de un paso de tiempo respecto a la solución (recuérdese que A es función de la compresibilidad y la permeabilidad adimensionales). Esta interpretación física sugiere los problemas que el método va a presentar, puesto que durante las primeras etapas de consolidación se producen grandes

variaciones en las propiedades materiales. La Ec. [7] se reduce a un sistema *lineal* de ecuaciones algebraicas

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}^n)\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{f} \quad [8]$$

que puede resolverse fácilmente para cada paso de tiempo.

Esta técnica presenta como principal ventaja que su implementación resulta muy sencilla, pero tiene también serios inconvenientes. Las hipótesis básicas son que el incremento de tiempo es suficientemente pequeño y que incrementos de tiempo pequeños provocan modificaciones despreciables de \mathbf{A} . En consecuencia, sólo entonces puede suponerse que las dos matrices $\mathbf{A}(\mathbf{u}^{n+1})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{u}^n)$ son, aproximadamente, iguales. Obviamente, este método puede exigir pasos de tiempo antieconómicos. Además hay que destacar que con la linealización no se impone la convergencia de la solución. Este método requiere, por tanto, usuarios experimentados que juzguen a partir de los resultados finales (evolución de los asentamientos, distribuciones de índice de poros o sobrepresión en profundidad, etc.) cuando el incremento de tiempo empleado es suficientemente pequeño y se ha alcanzado la convergencia. En conclusión, la linealización del problema es, a pesar de su sencillez a nivel computacional, una técnica peligrosa para resolver la Ec. [7].

TECNICAS ITERATIVAS

Para resolver el sistema no lineal de ecuaciones deben implementarse técnicas iterativas estándar. Hay un gran número de métodos de resolución de la Ec. [7] que se basan en el esquema general definido por

$$\mathbf{u}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{u}_k^{n+1} - \left[\mathbf{C}(\mathbf{u}_k^{n+1}) \right]^{-1} \cdot \left[\mathbf{A}(\mathbf{u}_k^{n+1})\mathbf{u}_k^{n+1} - (\mathbf{u}_k^n + \mathbf{f}) \right] \quad [9]$$

donde el subíndice k es un contador de iteraciones y \mathbf{C} es una matriz elegida arbitrariamente. La convergencia del esquema se alcanza cuando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas a \mathbf{u}^{n+1} así como el vector residual, $\left[\mathbf{A}(\mathbf{u}_k^{n+1})\mathbf{u}_k^{n+1} - (\mathbf{u}_k^n + \mathbf{f}) \right]$, son menores que una tolerancia predeterminada.

De hecho, la expresión elegida para \mathbf{C} permite clasificar la técnica numérica empleada y determina el orden de convergencia del método. Por consiguiente, la elección \mathbf{C} es importante y debe hacerse cuidadosamente, en base al coste computacional (almacenamiento y tiempo de C.P.U.). La mayoría de las técnicas habituales toman \mathbf{C} como la matriz jacobiana \mathbf{J} , o una aproximación a ella. La matriz jacobiana de este problema puede escribirse como

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1} \quad [10]$$

El primer método implementado consiste en la siguiente aproximación a la matriz jacobiana: $\mathbf{C} = \mathbf{A}$. Este método de orden uno es de hecho el conocido «método iterativo de punto fijo», que puede escribirse como

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_k^{n+1})\mathbf{u}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{f} \quad [11]$$

y se eligió porque su implementación en un programa de ordenador linealizado es muy sencilla. El coste de computación en cada paso de tiempo aumenta porque hay que construir y resolver la Ec. [11], en cada instante t^{n+1} , para cada iteración ($k+1$), hasta la convergencia. Sin embargo, el coste de computación total disminuye respecto a la técnica de linealización porque los pasos de tiempo pueden ser mayores.

En algunos problemas, especialmente durante períodos de vertido y debido al comportamiento altamente no lineal, el esquema no converge o lo hace de forma muy lenta. Este resultado puede parecer negativo, pero proporciona una valiosa información: el paso del tiempo es demasiado grande para la tolerancia prescrita. Evidentemente, el mismo paso de tiempo en un programa linealizado conduciría a resultados incorrectos sin ningún indicador de ello.

Con el objetivo de solventar este problema se ensayaron diversas mejoras: aceleración de Aitken, subdivisión de los pasos de tiempo, etc. No resultaron satisfactorias, porque ninguna de estas técnicas de aceleración de la convergencia fue suficientemente eficaz y robusta debido al comportamiento extremadamente no lineal del problema.

En consecuencia, se utiliza el método Newton-Raphson completo para evitar las dificultades citadas para algunos de los casos estudiados. Se trata de un método de segundo orden en el que la matriz de iteración, \mathbf{C} , se toma igual a la matriz jacobiana, \mathbf{J} . Como se muestra en la Ec. [10], hay que calcular las derivadas de los coeficientes de \mathbf{A} respecto a \mathbf{u}_k^{n+1} para evaluar \mathbf{J} . La dependencia de estos coeficientes respecto a \mathbf{u} puede escribirse como,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(p, q) \quad [12a]$$

$$p = p(\sigma') \quad [12b]$$

$$q = q(e, k) \quad [12c]$$

$$k = k(e) \quad [12d]$$

$$e = e(\sigma') \quad [12e]$$

$$\sigma' = \sigma'(u) \quad [12f]$$

Estas ecuaciones sugieren una modificación del programa de ordenador, que debe tener una organización estructurada y modular. Esto es, cada ecuación [12] representa un módulo donde se calculan las funciones deseadas y sus derivadas correspondientes. Al final del proceso se obtienen los coeficientes de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{J} . De esta forma, resulta relativamente simple introducir posteriores modificaciones en el programa. Por

ejemplo, si se cambia el esquema en diferencias, sólo cambia el módulo asociado a la Ec. [12a] y sus derivadas; si se ensayan nuevas relaciones materiales, basta modificar las Ecs. [12d], [12e] y sus derivadas, siempre sin necesidad de alterar la estructura general del programa. El conocimiento de las expresiones analíticas de las Ecs. [12] y sus derivadas hace del Newton-Raphson completo un método óptimo en comparación con otros esquemas de alto orden de convergencia que no evalúan J explícitamente, como los métodos Quasi-Newton.

Este esquema de segundo orden alcanza la convergencia en pocas iteraciones y para tolerancias muy pequeñas, del orden de 10^{-6} . Obviamente, el coste de computación por iteración es mayor debido a la evaluación de las derivadas. En los esquemas lineales y no lineales de primer orden, la construcción de A consume aproximadamente el 70 % del tiempo de C.P.U. mientras su resolución sólo lleva el 30 % restante; aquí se calculan dos matrices en cada iteración, luego el coste por iteración casi se dobla. Sin embargo, en general es menos caro que otras técnicas debido a la importante reducción en el número de iteraciones necesarias para la convergencia (tres o cuatro iteraciones durante la primera etapa de consolidación para tolerancias de 10^{-4}). Debe destacarse que, como es de esperar, las soluciones obtenidas al verificar convergencia son idénticas para cualquier método. Esto prueba la consistencia de las técnicas empleadas y la unicidad de la solución.

Finalmente se presenta un ejemplo sencillo pero ilustrativo del comportamiento extremadamente no lineal de la Ec. [7] y se muestra la importancia de una aproxi-

mación inicial adecuada. Como en el ejemplo anterior, se estudia el primer paso de tiempo de la primera etapa de vertido sobre un lecho impermeable. La superficie superior es drenada y por tanto, si se añade un nodo por paso de tiempo, hay una única incógnita: la sobrepresión, u , en el fondo. El sistema de ecuaciones no lineales [7] se reduce ahora a una ecuación y puede representarse al residuo frente a u , véase figura 4. Como se ve en la figura, existe una única solución en el rango físicamente admisible de u . Sin embargo, también puede verse que existen considerables dificultades numéricas en la resolución de este problema, debido a la existencia de una segunda «solución» exterior al dominio y a la forma de la curva. La técnica desarrollada, que usa como aproximación inicial la solución en el paso anterior, hace la primera iteración con el esquema de orden 1 y luego emplea el método de segundo orden, convergiendo en pocas iteraciones (menos de 5 para tolerancias inferiores a 10^{-4}) para todos los casos estudiados.

EJEMPLOS UNIDIMENSIONALES

Para mostrar la aplicabilidad de los programas de ordenador desarrollados y las ventajas de los esquemas numéricos no lineales, se muestran dos ejemplos ilustrativos.

El primer ejemplo es el problema clásico (12) de consolidación por peso propio de una columna de suelo partiendo de condiciones iniciales uniformes (índice de poros constante en profundidad). Esta condición no se encuentra nunca en la realidad, pero representa ensayos de laboratorio en tanques donde el llenado es «instantá-

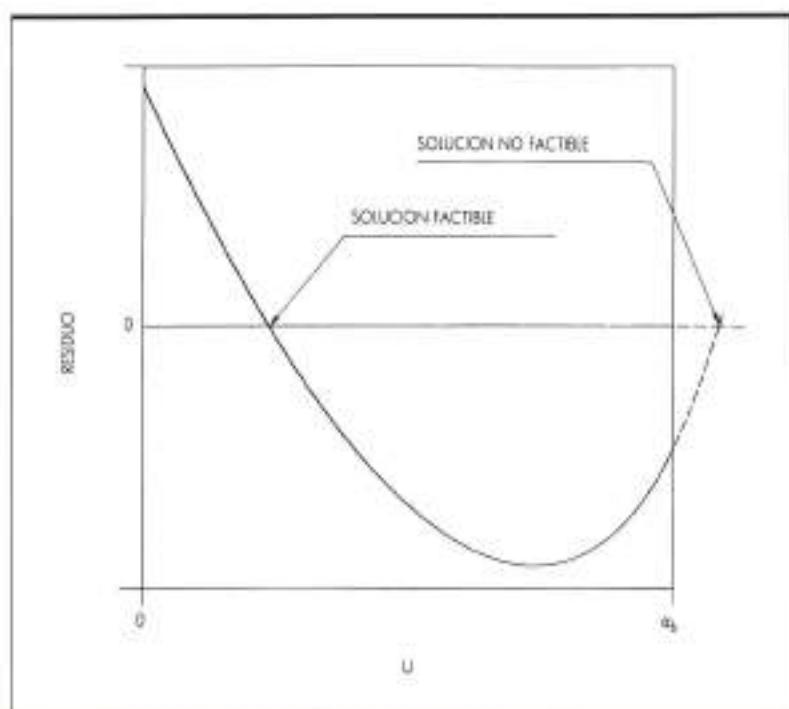


FIGURA 4. Gráfica residuo-sobrepresión para un análisis de vertido con un grado de libertad.

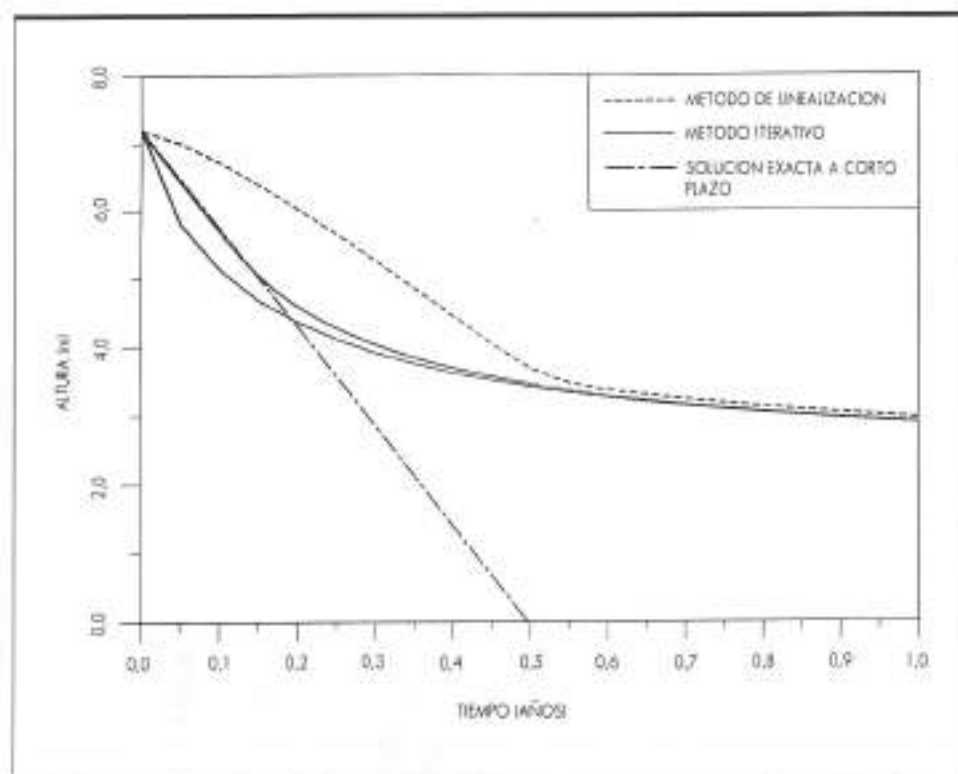


FIGURA 5. Gráfica altura del depósito-tiempo. Consolidación en reposo.

neo» en comparación con la disipación de sobrepresión. Las ecuaciones constitutivas son:

$$e = 4.674 (\sigma')^{-0.22}$$

$$k = 3.358 \times 10^{-7} \frac{(e)^{5.571}}{1 + e} \quad [13]$$

donde σ' es en T/m^2 (10^2 kPa) y k en $m/día$. Los parámetros empleados son los de un ensayo considerado en (12). La malla espacial se compone de 101 nodos, y se simula la consolidación durante un año.

En la figura 5 se comparan diversas curvas asentamiento-tiempo. Se presentan tres análisis: modelo lineal con 20 pasos de tiempo (línea discontinua), modelo iterativo con 20 pasos de tiempo (línea continua), y modelo iterativo con 1.000 pasos de tiempo (línea continua). El modelo lineal subestima claramente el asentamiento y tiene un cambio de curvatura que no existe en la realidad, mientras el modelo no lineal lleva a resultados similares a los del análisis con 1.000 pasos de tiempo. La línea recta que representa el comportamiento teórico exacto inicial [ritmo de consolidación constante, véase (8)], se ajusta bien a las dos soluciones no lineales a pesar de los grandes incrementos de tiempo utilizados aquí [20 pasos de tiempo por año supone un incremento casi 350 veces mayor que el empleado en (8)].

La figura 6 ilustra una comparación entre las leyes de índice de poros a los tres meses obtenidas con ambas técnicas. La solución lineal sobreestima el índice de po-

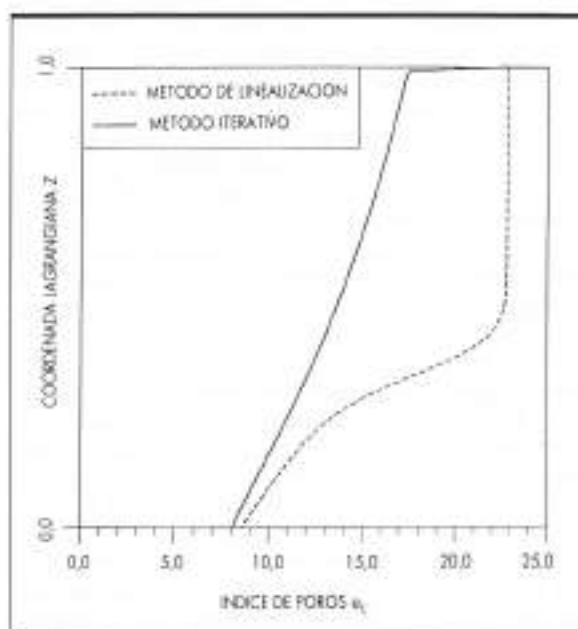


FIGURA 6. Comparación entre distribuciones de índice de poros lineal y no lineal después de tres meses de consolidación en reposo.

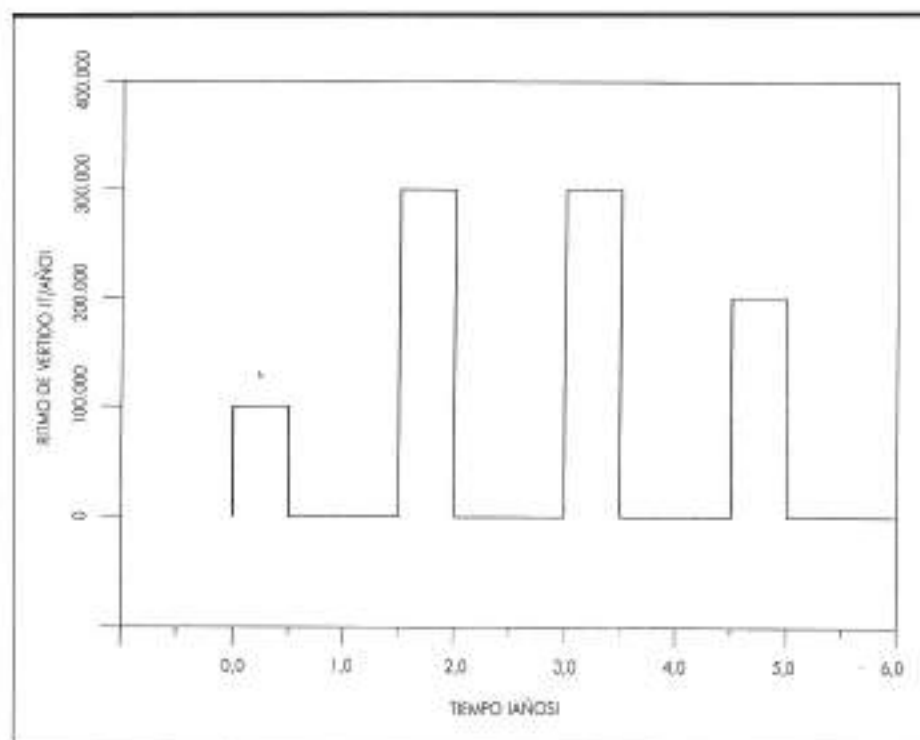


FIGURA 7A. Secuencia de períodos de vertido y de reposo.

ros en la zona superior, donde se mantienen las condiciones iniciales. Una iteración, con el paso de tiempo empleado, no basta para modelar los importantes cambios en el índice de poros.

Cabe destacar que, tal como se esperaba, ambos métodos convergen a las condiciones finales que pueden evaluarse analíticamente. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que, debido a la alternancia entre períodos de llenado y de consolidación en reposo, es necesario describir correctamente la consolidación a corto y medio plazo, porque los resultados obtenidos después de un ciclo son las condiciones iniciales para el siguiente.

Manejando adecuadamente los programas puede simularse cualquier secuencia de etapas de llenado y reposo. Para ilustrar la versatilidad de los programas de ordenador y su aplicabilidad a la predicción de la vida útil y capacidad de un depósito, se presenta un problema compuesto de cuatro fases de llenado y consolidación en reposo. Los períodos de vertido duran medio año y los de reposo uno. Se han supuesto tres ritmos de vertido distintos: 100×10^6 kg/año (llenado inicial), 300×10^6 kg/año (segundo y tercer ciclos), y 200×10^6 kg/año (último ciclo), véase figura 7a.

La figura 7b presenta las variaciones de altura en el tiempo para distintos esquemas numéricos. Se comparan los esquemas lineal y no lineal con un paso de tiempo de 10 días. Se observa claramente que el planteamiento lineal sobrestima la profundidad necesaria del depósito, mientras que el esquema no lineal con cinco nodos por paso de tiempo converge claramente a la línea de

puntos y rayas calculadas con un esquema no lineal y un paso de tiempo de un día.

AMPLIACION PSEUDO-BIDIMENSIONAL

El planteamiento lagrangiano de la consolidación con grandes deformaciones en el caso unidimensional es un modelo aceptable para el comportamiento global de una balsa de almacenamiento típica. Sin embargo, cuando se acelera la consolidación con drenes verticales, o cuando ésta se produce en zanjas estrechas, la solución final se ve claramente influenciada por efectos bidimensionales. Al igual que para la consolidación clásica con pequeñas deformaciones, la Ec. [1] puede extenderse a flujo bidimensional y deformación vertical [13], ya sea en coordenadas cartesianas o cilíndricas. Cuando se emplea una referencia cartesiana la ecuación resultante es

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{k_z}{\gamma_w (1+e)} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + (1+e) \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{de}{d\sigma'} \left[\gamma_b \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0 \quad [14]$$

donde z es la coordenada horizontal, y k_x y k_z son, respectivamente, las permeabilidades horizontal y vertical, cuya razón se supone constante. Puesto que no se admi-

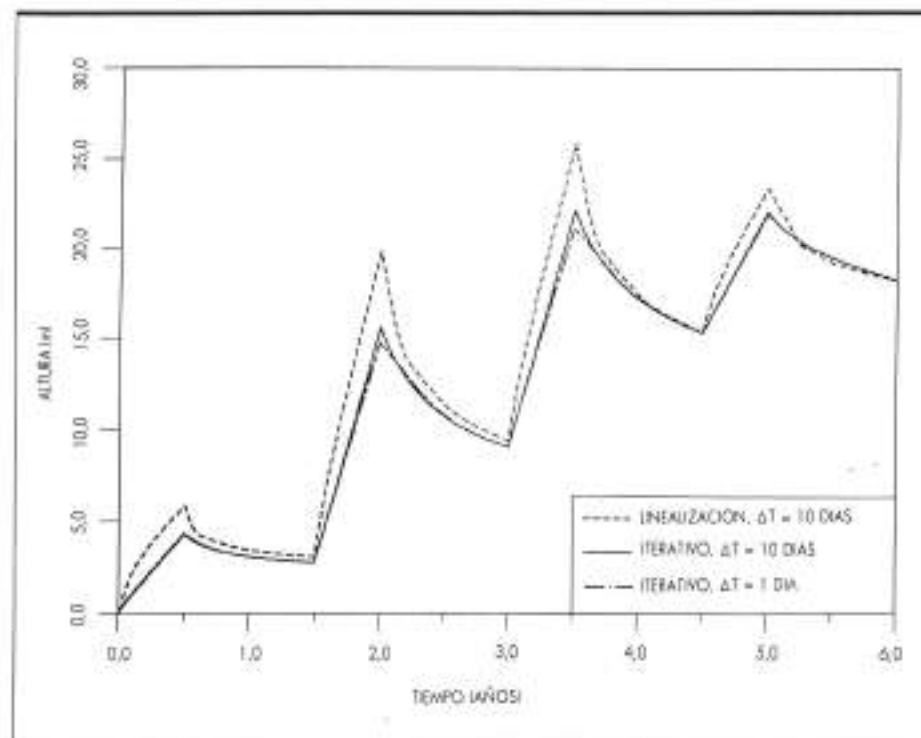


FIGURA 7B. Comparación entre distintos esquemas en la simulación de la predicción de las necesidades de almacenamiento y vida útil.

te deformación horizontal, x coincide simultáneamente con la referencia lagrangiana y euleriana. Nótese que el segundo término de la Ec. [14] introduce los efectos bidimensionales, y que es también no lineal. Por consiguiente, el carácter no lineal de la Ec. [1] se acentúa en esta nueva ecuación.

Se han implementado las mismas condiciones de contorno, constantes en el tiempo, que para el análisis unidimensional (drenado, impermeable, gradiente de sobrepresión prescrito). En consecuencia, el método del paso fraccionado («split-step method»), que trata independientemente ambas derivadas espaciales y requiere la especificación de las condiciones de contorno cada «medio» paso, se presenta como la técnica más simple y eficaz de resolver la Ec. [14]. La independencia entre ambas coordenadas espaciales permite reproducir para cada una de ellas los esquemas no lineales unidimensionales previamente desarrollados. Por tanto, la ampliación del programa de ordenador es muy sencilla y la mayoría de las conclusiones alcanzadas en el análisis unidimensional son directamente aplicables aquí. También se asegura la convergencia, en pocos pasos si en la primera iteración se utiliza el método de punto fijo y en las siguientes, hasta convergencia, el esquema de segundo orden (Newton-Raphson).

Se muestra a continuación la influencia de drenes verticales, de 0,15 metros de diámetro y 3 metros de separación, en el análisis de consolidación por peso propio de una columna de suelo, en condiciones iniciales uni-

formes, anteriormente presentado. La figura 8 muestra la altura del depósito según el radio para diferentes instantes y técnicas numéricas (como en el problema unidimensional, se toman 20 pasos de tiempo). Se comparan los análisis lineal (líneas discontinuas) y no lineal (líneas continuas) para $t = 0$, $t = 1$ mes, $t = 3$ meses, $t = 6$ meses, y $t = 12$ meses.

De nuevo, la solución lineal subestima los asentamientos durante las primeras etapas de consolidación; esto es particularmente cierto lejos del dren, donde la situación es casi unidimensional. Sin embargo, en el caso bidimensional esto implica una sobreestimación del gradiente horizontal de sobrepresión y una desviación del mecanismo de consolidación respecto al comportamiento real: la consolidación horizontal es más importante que la consolidación vertical durante la primera fase de consolidación. Esto explica la menor altura del depósito cerca del dren calculada con la técnica de linealización, después de un mes. La solución no lineal, por el contrario, reproduce los resultados obtenidos con un paso de tiempo mucho menor. La figura 9 presenta las distribuciones de sobrepresión e índice de poros en diferentes instantes calculados con los esquemas desarrollados. Lejos del dren se observa un comportamiento similar al obtenido en el análisis unidimensional, mientras que la influencia del dren, obviamente más importante en las primeras etapas de consolidación, induce grandes gradientes de sobrepresión localizados junto a él.

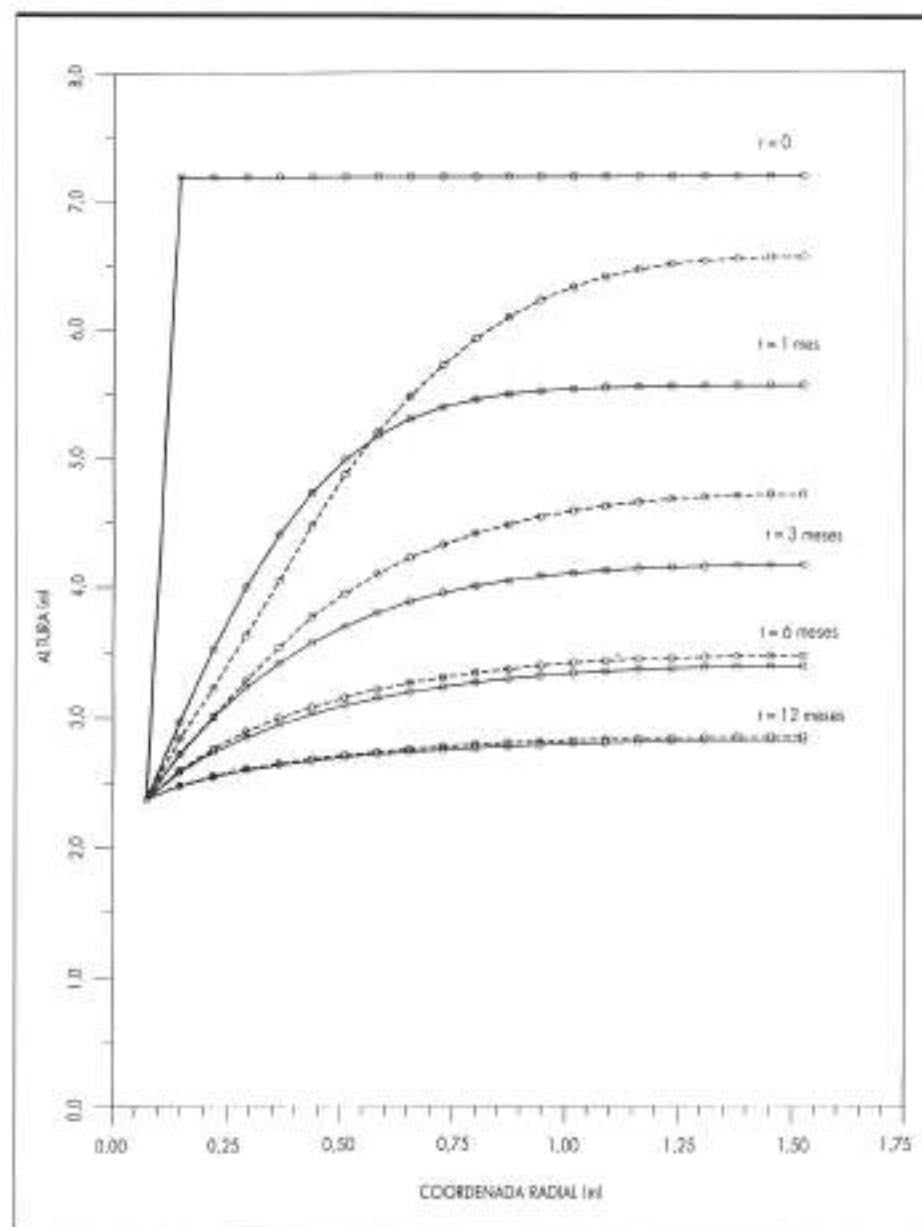


FIGURA 8. Comparación entre un análisis lineal (líneas continuas) y un análisis no lineal (líneas discontinuas) de consolidación radial para $t=0$, $t=1$ mes, $t=3$ meses, $t=6$ meses, y $t=12$ meses.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un paquete de programas de ordenador para resolver problemas de consolidación con grandes deformaciones y vertido de residuos semi-sólidos. Puede analizarse prácticamente cualquier secuencia de periodos de llenado, con ritmo variable, y periodos de consolidación en reposo, con o sin sobrecarga; también puede estimarse el efecto de una fracción arenosa en la mezcla. Los programas pueden emplearse fácilmente en un ordenador personal. Así, estos programas de ordenador son muy útiles para el diseño de balsas de almacenamiento y el análisis de estrategias alternativas de tratamiento.

Dentro de los límites y el alcance de este estudio, pueden apuntarse las siguientes conclusiones:

1. Una tensión efectiva no nula, σ'_0 , en la superficie drenada superior del depósito es, como se avanzaba en (11), también necesaria para problemas transitorios; su influencia es, a efectos prácticos, despreciable en residuos semi-sólidos.

2. Deben modelarse con precisión las variaciones extremadamente grandes del índice de poros y del coeficiente de permeabilidad en la zona superior del depósito; la técnica propuesta de varios nodos por paso de tiempo es mucho más eficiente para el análisis de vertido que la técnica clásica con un solo nodo.

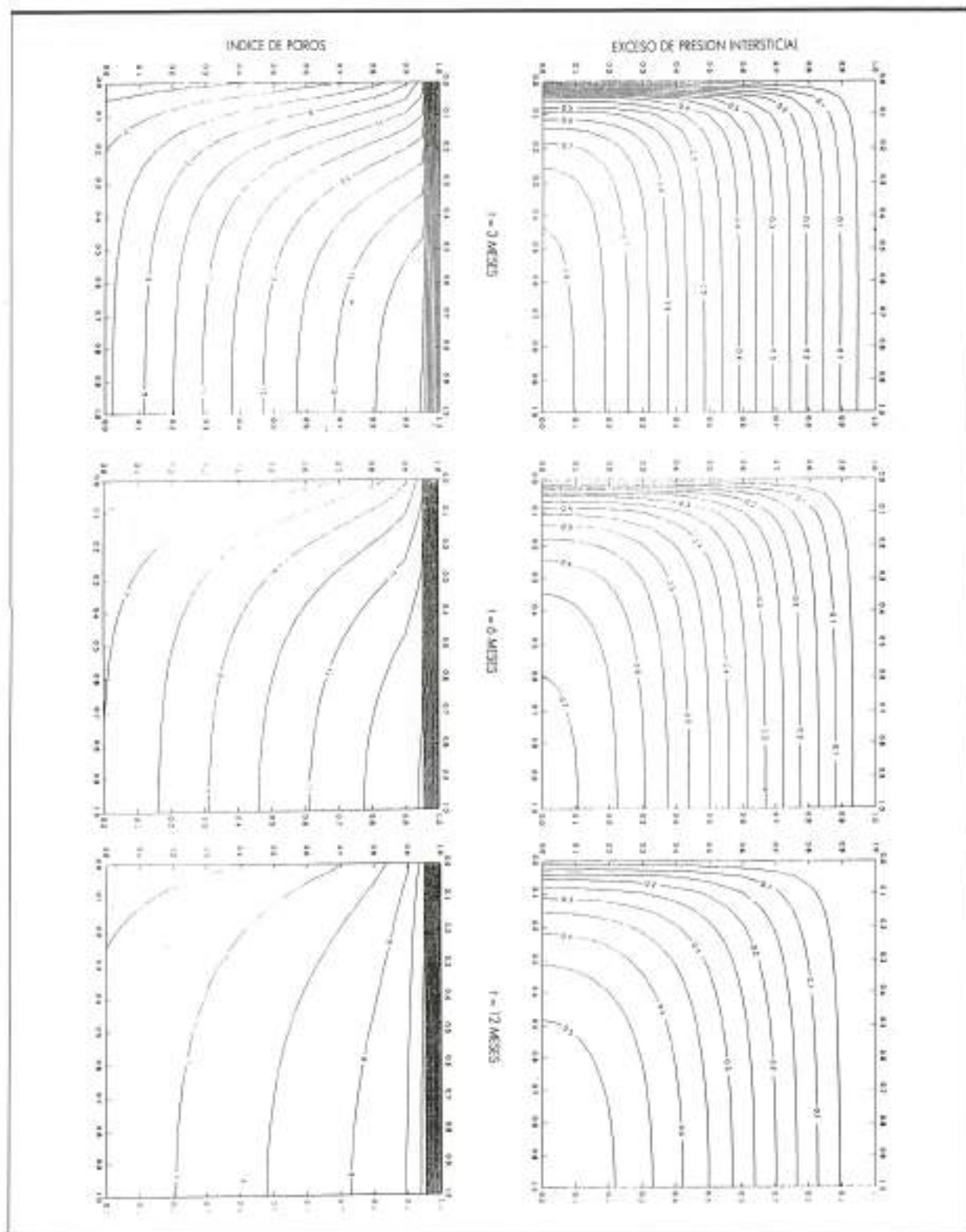


FIGURA 9. Distributions de sobrepresión e índice de poros después de $t = 3$ meses, $t = 6$ meses y $t = 12$ meses de consolidación radical con grandes deformaciones.

3. Puesto que el problema es altamente no lineal desde un punto de vista físico y numérico, deben emplearse métodos no lineales en lugar del clásico método de linealización; este último no garantiza la convergencia, puede llevar a pasos de tiempo antieconómicos y, en general, sobreestima el índice de poros, subestimando por tanto el asentamiento y la resistencia (factor importante si se prevé la reutilización del terreno).

4. Es necesario un método no lineal de segundo orden (Newton-Raphson), que resulta un algoritmo robusto y eficiente, para asegurar la convergencia; sin embargo, se recomiendan también una buena aproximación inicial a la solución y una primera iteración con el método del punto fijo.

5. En la ampliación bidimensional se acentúan los aspectos no lineales; sin embargo, el método del paso partido permite la generalización de las técnicas unidimensionales, y se obtienen resultados satisfactorios con el algoritmo no lineal desarrollado.

REFERENCIAS

- GIBSON, R. E.; ENGLAND, G. L., y HUSSEY, M. H. L. (1967). «The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. I. Finite nonlinear consolidation of thin homogeneous layers». *Geotechnique*, vol. 17, pp. 261-273.
- MONTE, J. L., y KRIZEK, R. J. (1976). «One-Dimensional Mathematical Model for Large-Strain Consolidation». *Geotechnique*, vol. 26, núm. 3, pp. 495-510.
- SOMOGYI, F. (1979). «Analysis and prediction of phosphatic clay consolidation: implementation package, technical report». Florida Phosphatic Clay Research Project, Lakeland, Fla.
- SCHIFFMAN, R. L. (1980). «Finite and Infinitesimal Strain Consolidations». *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, vol. 106, núm. GT2, pp. 203-207.
- GIBSON, R. E.; SCHIFFMAN, R. L., y CARGILL, K. W. (1981). «The Theory of One-Dimensional Consolidation of Saturated Clays. II. Finite Nonlinear Consolidation of Thick Homogeneous Layers». *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 18, pp. 280-293.
- KRIZEK, R. J., y SOMOGYI, F. (1984). «Perspectives on Modelling Consolidation of Dredged Materials». *Proceedings of the Symposium on Sedimentation/Consolidation Models, ASCE, San Francisco, California*, pp. 296-332.
- SCHIFFMAN, R. L.; PANE, V., y SUNARA, V. (1984). «Sedimentation and Consolidations». *Proceedings of the Symposium on Sedimentation/Consolidation Models, ASCE, San Francisco, California*, pp. 57-121.
- FELDKAMP, J. R. (1989). «Numerical Analysis of One-Dimensional Nonlinear Large-Strain Consolidation by the Finite Element Method». *Journal of Porous Media*, vol. 4, pp. 239-257.
- KOPPULA, S. D., y MORGENSTERN, (1982). «On the Consolidation of Sedimenting Clays». *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 19, pp. 260-268.
- CARRIER, W. D.; BROMWELL, L. G., y SOMOGYI, F. (1983). «Design Capacity of Slurried Mineral Waste Ponds». *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, vol. 109, núm. GT5, pp. 699-716.
- HUERTA, A.; KRIEGSMANN, G. A., y KRIZEK, R. J. (1988). «Permeability and Compressibility of Slurries From Seepage-Induced Consolidations». *Journal of Geotechnical Engineering, ASCEE*, vol. 114, núm. 5, pp. 614-627.
- Symposium on Consolidation and Disposal of Phosphatic and Other Waste Clays. (1987). Department of Civil Engineering, University of Florida, Gainesville, Florida. Sponsored by the Florida Institute of Phosphate Research, Bartow, Florida.
- SOMOGYI, F.; CARRIER, W. D.; LAWYER, J. E., y BECKMAN, J. F. (1984). «Waste Phosphatic Clay Disposal in Mine Cuts». *Proceedings of the Symposium on Sedimentation/Consolidation Models, ASCE, San Francisco, California*.