



JORNADA DE PRESENTACIÓ DE RESULTATS DELS PROJECTES DE MILLORA DE LA DOCÈNCIA

**Tutor expert per a l'aprenentatge de la resolució de problemes d'Àlgebra,  
basat en tecnologia TCP-IP**

*Sergi Nadal, M.Àngels Puigví.*

**Departament de Matemàtica Aplicada III**

sergi@serginadal.org, m.angels.puigvi@upc.edu

Tipus d'ajut rebut: DURSI\_2003MQD 00109, UPC i ETSECCPB

**Resum**

Disseny de sistemes (tutors experts) que ensenyen a l'estudiant a resoldre problemes, que el van guiant en funció de les decisions preses i assenyalen els errors i les aplicacions. S'ha donat especial importància a la comprensió del "mètode de càlcul". Per exemple a l'hora de trobar la inversa d'una matriu no pretenem que l'estudiant ens doni directament el resultat, sinó que usant el recurs de les operacions elementals de fila les utilitzi directament en el sistema fins assolir el resultat desitjat. En tot aquest procés pretenem que es familiaritzi amb la metodologia, sàpiga perquè l'aplica i a on vol arribar.

S'ha assolit un potent sistema capaç d'ajudar a l'usuari a aprendre a fer problemes-tipus de tot un seguit de famílies (10 per ser exactes) relacionades amb l'Àlgebra Lineal.

**Paraules clau**

Aprenentatge "fet a mida".

**EL PROJECTE**

**1. Introducció**

Alguns dels objectius de l'assignatura d'Àlgebra són:

- a) aconseguir que els estudiants entenguin què es demana en un problema
- b) que coneguin de quines eines disposen per atacar-lo
- c) que avaluin quins procediments són millors,
- d) que han de tenir cura amb el rigor matemàtic i ser conscients i aprendre dels seus errors
- e) adonar-se de quan el problema ja està resolt i veure'n implicacions.

Tot això, que correspon a part de la tasca d'un professor que està seguint el seu treball, és el que pretenem que facin els assistents experts que hem dissenyat i dels que l'estudiant podrà disposar a qualsevol hora.

Aquest projecte s'està aplicant a l'assignatura d'Àlgebra i Geometria de la fase Selectiva de la titulació d'Enginyers de Camins, durant el segon quadrimestre del curs 2005-2006. És una assignatura obligatòria de primer curs anual de 12 crèdits.

Durant el curs 2000-2001 vàrem posar en marxa un projecte d'innovació docent en l'assignatura d'Àlgebra de primer curs de la titulació d'Enginyers de Camins: ALGWEB. Es tractava d'una intranet docent amb continguts interactius i un laboratori virtual que permetia fer un seguiment personalitzat. En els cursos següents s'han ampliat els continguts, especialment els interactius.

El projecte que presentem aquí s'ha desenvolupat en el marc d'ALGWEB però amb entitat independent. El punt feble de l'estudiant de fase Selectiva és el fet de que li és difícil trobar la metodologia per resoldre problemes. Això és precisament el que volem treballar en aquest projecte. La pretensió ha estat crear un assistent que el vagi guiant i li comenti els errors.

## 2. Descripció

S'han desenvolupat les unitats següents:

- Taules de veritat.
- Demostracions per inducció.
- Càlcul de matrius esglaonades reduïdes per files.
- Càlcul de matrius inverses.
- Resolució de sistemes lineals.
- Càlcul del nucli i de la imatge d'aplicacions lineals.
- Projectió ortogonal sobre un subespai.
- Càlcul de determinants.
- Reducció d'endomorfismes i matrius.
- Teoremes espectrals i aplicacions.

Per a cada unitat s'han treballat els següents aspectes:

- Desenvolupament conceptual
- Desenvolupament estructural
- Implementació tècnica
- Confecció de fitxers auxiliars
- Verificacions i correccions

### 3. Resultats

En el desenvolupament de la primera família, les **taules de veritat**, s'han assolit per complet els objectius fixats. L'estudiant pot introduir una proposició qualsevol, complimentar la taula i el sistema l'informa de quan hi ha errors, encara que no li marca on són exactament, l'estudiant els ha de trobar. L'única limitació que es posa en el sistema és que la taula de la proposició tingui com a màxim 16 files, de manera que la seva manipulació sigui raonable. De totes maneres, en el cas de voler treballar amb una proposició molt gran, l'estudiant sempre pot fer l'exercici d'organitzar-la en blocs.

En el cas de les **demostracions per inducció** l'esquema de treball s'ha complicat molt més ja que no ens ha estat possible fer una casuística general. Hem treballat en detall un cas particular representatiu del mètode: la demostració del binomi de Newton.

Les quatre famílies següents i també la de determinants s'han desenvolupat com es pretenia. En cada cas, l'usuari disposa d'un ventall d'exemples, en tria un i el manipula en pantalla sota la supervisió del sistema. Quan apareixen bifurcacions en les opcions que pot prendre, si n'agafa una d'incorrecta el sistema li explica perquè està malament. Si vol, també pot accedir a explicacions resumides de la teoria, i si no se'n surt de cap manera, també pot accedir als exemples resolts en pdf.

La **reducció d'endomorfismes i matrius** ha estat una família especialment complexa de desenvolupar. Hi ha moltes ramificacions i és, amb diferència, el tema que ens ha portat més feina. Vam establir un mecanisme lògic de funcionament intern del sistema que fos capaç d'incloure qualsevol altra situació prevista en les altres famílies. Basat en un seguiment lineal d'arbre de decisions, qualsevol procés havia de tenir un fil de seguiment únic, i qualsevol ramificació havia d'acabar retornant a aquest fil. Amb aquesta família això no va ser possible dur-ho a terme en un 100%, ja que la situació del problema planteja de per si dues situacions ben diferenciades, amb final diferent: un endomorfisme pot diagonalitzar, o no, cas en el que triangula (dels exemples proposats no n'hi ha cap que no trianguli, per poder-ho reduir a aquestes dues úniques situacions). Així doncs, pensant que aquesta família seria la més complexa de desenvolupar, es va fer una excepció en el "fil únic", deduint que la resta de famílies no tindrien aquesta bifurcació. I així va ser en les famílies relacionades amb les operacions elementals de fila i columna (**matriues esglaonades, sistemes, inverses, determinants i nuclis i imatges d'aplicacions**). Totes aquestes famílies tenien un esquema ben senzill, comparat amb l'anterior família: a partir d'una matriu, un cop establert l'objectiu i enfocant el principi, es tracta de fer operacions elementals per arribar a la solució. Com a màxim, arribats al final del procés es raona en quina situació ens trobem (si el sistema és compatible o no, quina és la solució, etc.). Per aquest motiu, i per compensar aquest nivell inferior de complexitat, s'ha volgut desenvolupar una eina que fos molt potent i alhora útil per a la realització de tots els exemples relacionats. Així, aquesta eina permet que l'usuari pugui decidir quines operacions fa, i dur-les a terme com si les escrigués en un full. El sistema li va mostrant cada pas realitzat, i ell pot tornar a decidir quines seran

les següents operacions. La interfase és àgil i senzilla. Consisteix en una barra horitzontal superior que conté tots els elements que cal per poder dur a terme cap operació. Si el nombre d'operacions decidides és elevat, i cal desplaçar la pàgina en vertical, el sistema trasllada automàticament la barra horitzontal i la desplaça junt amb la pàgina, per poder-la sempre tenir a la vista.

Només una d'aquestes famílies porta a una bifurcació de decisió, que és la dels **Nuclis i Imatges** d'una aplicació. Com que el que es demana és calcular el Nucli i la Imatge, i és indistint començar per una cosa o per una altra, aquí ja apareix la bifurcació. Donat que la programació d'aquesta era costosa, vam optar al final per imposar que primer es resolgués una cosa i després l'altra. Pedagògicament, no suposa cap contrarietat fer-ho d'aquesta manera, i en canvi, a nivell de programació suposa un estalvi important de recursos.

La família on es veu més clarament la linealitat del fil de seguiment és la de les **Projeccions Ortogonals**, ja que es basa en establir un mecanisme per anar calculant els elements que integren una fórmula concreta. Aquí, les pistes falses han estat especialment difícils de trobar, perquè només intenten fer sortir a l'usuari de la fórmula concreta, que ja coneix, de manera que és fàcilment identificable el moment en que ens allunyem de la mateixa.

En canvi, la família que presenta un ventall més ampli de bifurcacions (insalvables) és la de la Classificació d'**Operadors Ortogonals**. Això és així ja que, d'entrada, el problema té un plantejament ben diferent depenent de si estem en R2 o en R3. Si estem en R2, només podem tenir una Rotació o una Simetria Axial. Si és una rotació cal calcular l'angle de gir, ben diferent de si es tracta d'una simetria axial, on només s'ha de calcular l'eix de simetria. Però la cosa es complica de forma ben diferent si estem en R3, ja que aquí, les dues grans divisions entre simetries i rotacions tenen diverses alternatives més. Per exemple, si tenim una rotació, cal buscar l'eix de gir i l'angle. Però si tenim una simetria, cal primer saber si serà una simetria especular (i llavors calcular el pla de simetria), o si es tracta d'una simetria rotacional (i llavors calcular tant el pla com l'eix i l'angle de la rotació associada, que no es calculen de la mateixa manera que en el cas de la rotació simple). Tot això ha motivat que s'hagi hagut de fer un esforç considerable en aquesta família, per poder-hi encabir tots els casos (tots els exemples proposats inclouen tot el ventall de possibilitats). A més, les mateixes pistes que en un cas són certes, segons el cas són falses, cosa que ha obligat a fer variable el caràcter de cada pista (quan a la majoria de famílies no és així).

La idea del **Magatzem** se'ns va ocórrer sobre la marxa, pensant que cada exemple realitzat no havia d'aparèixer al desplegable d'exemples, perquè ja s'havia fet (i així evitem que es repeteixi la realització d'un mateix exemple). Però llavors, com podíem accedir a aquests exemples ja fets? Aquí va aparèixer la idea d'emmagatzemar-los en algun racó accessible per l'usuari de forma diferenciada, amb una doble finalitat: per una banda saber quants i quins exemples ja porta fets, i per una altra, tenir un entorn des d'on accedir als mateixos.

#### 4. Conclusions

Fruit del treball i l'esforç realitzat, han aparegut solucions i esquemes possibles, que no es van tenir en compte en la realització del projecte, alguns dels quals molt interessants a l'hora de ser implementats en algunes famílies (noves vies de discussió, nous exemples representatius, altres enfocaments d'una mateixa metodologia,...).

A més, ja previst inicialment, el motor desenvolupat fins ara ha de servir, no només per ensenyar a aprendre metodologia, sinó per extreure conclusions del seu ús. Només així es pot millorar l'eina i intentar-la **personalitzar per a cada usuari** (que és on hi ha la clau de l'èxit). En aquesta línia ens proposem confeccionar una Capa d'Anàlisi que permeti reconèixer el perfil d'usuari en base a les seves interaccions amb el Tutor XP. Més endavant (en fases successives) el Tutor XP serà capaç de prendre determinacions en funció d'aquest anàlisi. Aquestes determinacions o accions aniran orientades a optimitzar la metodologia exposada, actuant de forma personalitzada per a cada usuari, permetent així, un **aprenentatge "fet a mida"**.

#### 5. Referències/Més informació

ALGWEB: eines interactives per a l'autoaprenentatge de l'àlgebra.

Maria Àngels Puigví Burniol

Premi 2001 a la Qualitat en la Docència Universitària

Consell Social

UPC