

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS
TÉCNICOS, JURÍDICOS Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Métricas sobre la robustez de soluciones en el problema TSALB ante la variación del mix de producción

Joaquín Bautista, Manuel Chica, Óscar Cordón, Sergio Damas
(ETSEIB-UPC, ECSC, CITIC-UGR)

OPE-WP.2015/06 (20150524)
(Documento científico-técnico: 20150524)



PROTHIUS

Càtedra Organització Industrial

<http://futur.upc.edu/OPE>

<http://www.prothius.com>

Métricas sobre la robustez de soluciones en el problema TSALB ante la variación del mix de producción

Joaquín Bautista^a, Manuel Chica^b, Óscar Cordon^{b,c}, Sergio Damas^{b*}

^aETSEIB, Universitat Politècnica de Catalunya, 08028 Barcelona, Spain

^bEuropean Centre for Soft Computing, 33600 Mieres, Spain

^cDECSAI and CITIC-UGR, University of Granada, 18071 Granada, Spain

Resumen

Partiendo de la familia de modelos TSALBP (Time and Space Assembly Line Balancing Problem), proponemos diversas funciones para medir la robustez de un equilibrado de línea atendiendo a sus atributos temporales y espaciales. La versión robusta de TSALBP considera un conjunto de escenarios de demanda y presenta funciones que miden el exceso de carga, tanto temporal como espacial, en las estaciones de trabajo de la línea. Dichas funciones pueden emplearse como funciones objetivo en el problema de optimización resultante y como métricas ante un equilibrado de línea concreto; en ambos casos, la nueva versión de TSALBP pone a disposición del decisor nuevas soluciones de equilibrado más eficientes y robustas ante una demanda incierta.

Palabras clave: Optimización Robusta, Equilibrado de líneas de producción, TSALBP, Mix de Producción, Demanda incierta.

1. Introducción

El diseño de una línea de montaje presenta dos vertientes: (1) establecer el número de estaciones de trabajo y decidir qué operaciones se realizarán en cada puesto, y (2) ofrecer una distribución en planta de la instalación que contemple tanto la dimensión de las estaciones (largura y anchura) como los espacios adicionales que se necesitan, a cada orilla de la línea, para facilitar el trabajo de los operarios.

En los países de la OCDE es usual que estas líneas de montaje se empleen para fabricar modelos mixtos. Es decir, estamos hablando de sistemas productivos, orientados al producto, capacitados para ensamblar distintas variantes de un producto, como es el caso de una planta de motores de una compañía de automoción que emplea la misma instalación para fabricar motores de vehículos 4x4, de furgonetas y de camiones, en sus distintas versiones.

El ensamblado de los tipos de producto a los que nos referimos, aunque esté constituido por tareas semejantes con características comunes, requiere, según cada tipo de producto, distintas piezas, distintas maneras de aplicar el trabajo, distintas herramientas y esfuerzo, y distintas habilidades de los operarios. Obviamente, esta distinción se produce entre tipos de producto de una misma familia (v.g. entre dos versiones de la familia 4x4) y es más palpable entre tipos de producto de distintas familias (v.g. entre un tipo de motor de la familia 4x4 y un tipo de motor de la familia

* *Email addresses:* joaquin.bautista@upc.edu (J Bautista), manuel.chica@softcomputing.es (M Chica), oscar.cordon@softcomputing.es (O Cordon), sergio.damas@softcomputing.es (Sergio Damas)

furgonetas). En este caso, el ensamblado de un motor puede requerir la ejecución de unas 400 tareas elementales que, por conveniencia o condicionantes tecnológicos, pueden agregarse en unas 150 operaciones básicas.

Por todo lo anterior, la flexibilidad en la fabricación es una propiedad importante de cara a que las grandes compañías puedan responder a cambios de su entorno económico. Entre dichos cambios está el de la variación de la demanda de sus productos.

Brevemente, una línea de montaje es un sistema productivo constituido por un conjunto de estaciones de trabajo a las que se asigna de manera exclusiva una serie de operaciones o tareas que, para ser completadas, requieren un tiempo de proceso dependiente de la actividad de los operarios y unos espacios para albergar el producto y sus componentes, la instrumentación y los recursos humanos. Dichas tareas son el resultado de dividir la fabricación de un producto complejo en operaciones elementales, dando lugar a un problema, denominado equilibrado de líneas de montaje (ALB: Assembly Line Balancing) (Battaña and Dolgui 2013; Boysen et al. 2008), cuyas soluciones indican cómo distribuir eficientemente dichas operaciones entre las estaciones, cumpliendo lógicamente un conjunto de restricciones.

El problema de equilibrado de líneas en su versión simple (SALBP: Simple Assembly Line Balancing Problem - Scholl and Becker 2006), perteneciente a la familia de problemas ALB, consiste en distribuir óptimamente las operaciones entre las estaciones, respetando las ligaduras de precedencia entre tareas y atendiendo a los criterios de optimización siguientes: minimizar el número de estaciones de trabajo, dado ciclo de fabricación (SALBP-1), o minimizar el ciclo de fabricación, dado un número fijo de estaciones de trabajo (SALBP-2).

Una extensión simple de SALBP que se acerca más a situaciones industriales realistas, es TSALBP (Time and Space Assembly Line Balancing Problem - Bautista and Pereira 2007), que incorpora adicionalmente atributos relacionados tanto con el espacio disponible para distribuir en planta las estaciones de trabajo como con el espacio requerido para ejecutar de forma adecuada las tareas y para albergar los componentes de montaje del producto. TSALBP presenta 8 variantes que se desprenden al considerar 3 criterios de optimización: m (número de estaciones), c (tiempo de ciclo) y A (área lineal de las estaciones). En Chica et al. (2013), los autores emplean por primera vez el concepto de robustez en la variante multiobjetivo TSALBP- m/A frente a un conjunto de planes de demanda de productos, midiendo dicha cualidad sobre soluciones Pareto-óptimas resultantes de la fase de optimización.

En este trabajo proponemos una extensión de TSALBP que incorpora a los modelos matemáticos el concepto y propiedades de solución robusta (Beyer and Sendhoff 2007) mediante restricciones y funciones objetivo. Para ello, tanto las restricciones como las funciones objetivo contienen toda la información de un conjunto de referencia de planes de demanda (también llamados escenarios) que alteran los valores de los atributos temporales y espaciales de las tareas. Esto nos conduce a la definición de funciones de robustez temporal y espacial que miden las sobrecargas de tiempo y de espacio en las estaciones y el grado de factibilidad del conjunto de planes de demanda.

Así, los nuevos modelos puede ser útiles para hallar configuraciones de líneas de montaje más eficientes frente a la variación de la demanda de productos.

2. Robustez en los problemas de equilibrado de líneas

Una forma usual de hallar soluciones robustas en problemas ALB es buscar configuraciones que se ajusten a todos los escenarios posibles o, en su defecto, que ofrezcan un desempeño eficiente en todos ellos (Xu and Xiao 2011; Chica et al. 2013). En esta vía, Simaria et al. (2009) presentan un algoritmo para el equilibrado de una línea flexible en forma de U en la que se mantienen los equipamientos de las estaciones (herramientas, instrumentación), pero el número de operadores puede variar y las tareas pueden reasignarse a los puestos de trabajo en función de la demanda. El trabajo de Dolgui and Kovalev (2012) contiene un modelo robusto para ALB y un programa dinámico que minimiza el tiempo de ciclo de la línea considerando el peor escenario entre los posibles. En Li and Gao (2014), se consideran diversos escenarios representativos para caracterizar la demanda inestable en una línea de modelos mixtos.

Otra forma de considerar la incertidumbre y la robustez en ALB es suponer que los tiempos de proceso de las tareas no son deterministas sino que están contenidos en intervalos de valores y se obtienen a partir de una función de distribución conocida. En esta vía se encuentra el trabajo de Gurevsky et al. (2012), enfocado al SALBP-E, en el que se acotan los tiempos de proceso por intervalos y se busca un compromiso entre la minimización de la función objetivo y los valores de un ratio de estabilidad. El reciente trabajo de Hazir and Dolgui (2013) contiene dos modelos robustos de ALB que consideran la incertidumbre mediante intervalos de valores para los tiempos de proceso de las operaciones.

3. TSALBP sujeto a una demanda incierta

En nuestro ideario, las operaciones en TSALBP presentan una serie de atributos elementales. Dichos atributos, por su distinta naturaleza, los agrupamos aquí en 2 clases o categorías: (1) temporales y (2) espaciales. Estos atributos elementales están vinculados a cada operación básica de forma individual.

Son atributos temporales de una operación: el tiempo de proceso medido a actividad normal y el factor de actividad que se establece para equilibrar la línea. Por su parte, son atributos espaciales de una operación: el área requerida por los operarios para ejecutar cómodamente la operación, las dimensiones de los contenedores de piezas relacionadas con la operación, y el espacio ocupado por herramientas y robots para el montaje.

Los problemas de equilibrado de líneas presentan multitud de variantes; cuando se considera un único tipo de producto, los podemos enunciar así:

- dado un conjunto de operaciones ($J: j = 1, \dots, |J|$) con sus atributos elementales: tiempos de proceso $t_j: j \in J$ y áreas requeridas $a_j: j \in J$,
- dado un conjunto de estaciones de trabajo ($K: k = 1, \dots, |K|$),

- dado un conjunto de ligaduras de precedencia e incompatibilidad entre tareas,
- y dada, finalmente, una serie de restricciones que afectan a los atributos de la línea: número de estaciones (m), tiempo de ciclo (c) y área disponible en cada estación (A),

los problema de equilibrado consisten en asignar todas las operaciones al conjunto de estaciones, respetando todas las restricciones, con el propósito de alcanzar la máxima eficiencia del sistema productivo.

Cuando la línea es de modelos mixtos, los atributos elementales dependen de la operación básica y del modelo, por tanto, teniendo en cuenta un conjunto de tipos de producto ($I: i = 1, \dots, |I|$), los valores de los atributos temporales y espaciales adoptan, respectivamente, las formas siguientes: $t_{ji}: j \in J \wedge i \in I$ y $a_{ji}: j \in J \wedge i \in I$.

Por otra parte, las líneas de modelos mixtos deben estar preparadas para atender a diversos planes de demanda de productos que simbolizamos mediante el conjunto de escenarios E , no obstante, lo más común es realizar el equilibrado de la línea en función de un plan de demanda $\varepsilon \in E$, que concretaremos mediante el vector de demanda $\vec{d}_\varepsilon = (d_{1\varepsilon}, \dots, d_{|I|\varepsilon})$ o, alternativamente, mediante el vector mix de producción $\vec{\lambda}_\varepsilon = (\lambda_{1\varepsilon}, \dots, \lambda_{|I|\varepsilon})$ - donde $d_{i\varepsilon}$ es el número de unidades del tipo de producto $i \in I$ contenidas en el plan de demanda $\varepsilon \in E$, y $\lambda_{i\varepsilon}$ es la proporción del modelo $i \in I$ en el plan $\varepsilon \in E$, cumpliéndose: $\vec{\lambda}_\varepsilon = \vec{d}_\varepsilon / D_\varepsilon$ y $D_\varepsilon = \sum_{\forall i} d_{i\varepsilon}$.

En tales condiciones, para efectuar el equilibrado de la línea, los valores de referencia que adoptan los atributos elementales de las operaciones básicas (tiempo de proceso y área lineal requerida) son el resultado de promediar los atributos específicos de los tipos de producto teniendo en cuenta su mix de producción. Por tanto, dado un mix de producción $\vec{\lambda}_\varepsilon (\varepsilon \in E)$, los tiempos de proceso y las áreas lineales de las tareas se determinan como en (1) y (2), respectivamente:

$$\bar{t}_{j\varepsilon} = \sum_{i=1}^{|I|} t_{ji} \lambda_{i\varepsilon}, \forall j \in J \wedge \forall \varepsilon \in E \quad (1)$$

$$\bar{a}_{j\varepsilon} = \sum_{i=1}^{|I|} a_{ji} \lambda_{i\varepsilon}, \forall j \in J \wedge \forall \varepsilon \in E \quad (2)$$

Así, dado un mix de producción de referencia $\vec{\lambda}_{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 \in E)$, se dice que la línea de modelos mixtos está equilibrada cuando todas las tareas del conjunto J han sido repartidas coherentemente entre las estaciones de trabajo del conjunto K . Esto supone que a todo puesto de trabajo $k \in K$ se asigna en exclusiva un grupo de tareas que se denomina carga de trabajo S_k , respetando, en el reparto, todas las restricciones que afectan a las estaciones. Por tanto, se cumple:

$$\bigcup_{k \in K} S_k = J \wedge (S_k \cap S_{k'} = \emptyset, \forall k \neq k') \quad (3)$$

$$\sum_{j \in S_k} \bar{t}_{j\varepsilon_0} \leq c, \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{j \in S_k} \bar{a}_{j\epsilon_0} \leq A, \forall k \in K \quad (5)$$

La condición (3) representa la partición completa del conjunto de tareas J entre las estaciones del conjunto K , y las restricciones (4) y (5) corresponden respectivamente a los límites que establecen el tiempo de ciclo c y el área lineal disponible A sobre el tiempo de proceso y el área lineal requeridos por las tareas asignadas a toda estación.

4. Efectos de una demanda incierta sobre la línea de producción

El sector de automoción OCDE (marco de nuestro estudio) presenta algunas características que condicionan la utilidad de algunos modelos para el equilibrado de líneas. En efecto, los modelos serán útiles si tienen en cuenta:

- (1) Las líneas son de modelos mixtos y los valores de los atributos son resultados de promedios en base a un mix de producción de referencia.
- (2) Las demandas parciales y globales de los productos varían con frecuencia a lo largo del año (en ocasiones cada mes).
- (3) Los regímenes de contratación de las plantillas son poco flexibles lo cual es conveniente para mantener la fidelidad de los trabajadores a la empresa.
- (4) La variación de la demanda de los productos puede obligar a hacer nuevas asignaciones de las tareas a los puestos de trabajo y esto supone un entreno de los operarios que puede durar semanas hasta que se alcanza el régimen permanente después de pasar por las rampas de fabricación en las que siempre hay caídas de producción.

Por lo expuesto, es evidente que un cambio de la demanda de productos, tanto a nivel global como particular, puede causar disonancias entre el trabajo requerido por el departamento de planificación y control de producción y la capacidad de la línea que depende del equilibrado realizado a partir de un mix de producción de referencia. Dichas disonancias pueden dar lugar a cambios en el sistema productivo.

Cuando la demanda global varía respecto a la de referencia, los efectos posibles sobre la línea de producción son:

- (e.1) Incremento del número de estaciones de trabajo con el fin de satisfacer nuevos planes de producción con demandas globales mayores que la de referencia.
- (e.2) Supresión de puestos de trabajo ante una reducción de la demanda global de referencia, evitando así tiempos muertos innecesarios en la línea.

Cuando la demanda global se mantiene constante, pero hay cambios en el mix de producción respecto al de referencia, los efectos posibles sobre la línea de producción y sus estaciones son:

- (e.3) Incremento/decremento del número de puestos de trabajo con el fin de satisfacer/saturar las restricciones temporales y espaciales (4) y (5), manteniendo los valores de referencia del ciclo y del área disponible en cada estación.
- (e.4) Variación de las cargas de trabajo (S_k) en dos estaciones como mínimo, manteniendo fijos el número de puestos de trabajo, el ciclo y el área disponible.

Si atendemos a los aspectos de la gestión de la producción, es evidente que los efectos e.1 y e.2 requieren cambios sustanciales en el sistema productivo.

En efecto, un incremento del número de estaciones de trabajo lleva consigo la incorporación de operarios a la nueva línea; y además, debido a que hay que reconfigurar obligatoriamente todos los puestos de trabajo, será preciso adiestrar durante varias semanas tanto a los operarios recién incorporados como a los veteranos, lo cual se traducirá en una caída de la productividad hasta que se alcance de nuevo el régimen permanente en la línea. También será necesario realizar una nueva distribución en planta que, en este caso, requerirá más espacio. Y, por supuesto, ante una nueva instalación, también será preciso desplazar herramientas, robots, instrumental, estanterías y contenedores, entre otros elementos.

Por su parte, el efecto e.2, la supresión de puestos de trabajo, puede parecer más fácil de gestionar, y esto es cierto desde el punto de vista tecnológico, puesto que bastaría con ampliar los dominios de los nuevos puestos de trabajo. No obstante, la gestión de recursos humanos será más compleja en este caso: adiestramiento de los operarios seleccionados hacia la polivalencia frente a las operaciones de ensamblado y, además, dar una solución legal a los operarios no seleccionados. También en este caso será necesaria una nueva distribución en planta de la línea, aunque de menor envergadura que en el caso anterior.

El efecto e.3 tiene unas consecuencias, desde el punto de vista de la gestión, muy similares a los efectos e.1 y e.2, aunque, el hecho de que la demanda global se mantenga constante y que los valores de los atributos temporales y espaciales sean similares para todos los tipos de producto, conduce a una situación con cambios más leves. Aquí, también, será inevitable el adiestramiento de los operarios y sus consecuencias.

El efecto e.4 es el menos nocivo, no obstante, los operarios deberán ser entrenados para sus nuevos puestos; por tanto, también habrá caída de producción durante las semanas de rampa, hasta que la línea alcance de nuevo el régimen permanente.

En este trabajo, nos centramos en los problemas de gestión derivados de los efectos e.3 y e.4, en cuanto a experiencia computacional, no obstante, los conceptos y formulaciones son extensibles también a los efectos e.1 y e.2.

Proponemos obtener soluciones óptimas robustas y, alternativamente, medir el grado de robustez de soluciones de referencia del problema de equilibrado de líneas. Entendiendo que la robustez de una solución, frente a un conjunto de planes de demanda (E), reside en su capacidad de absorber las variaciones de la demanda. Por consiguiente, un equilibrado es tanto más robusto cuanto menos sean los cambios necesarios para adaptar la línea a cualquier escenario entre los considerados.

5. Incorporando robustez a TSALBP

Para medir la no-robustez de una solución de referencia de equilibrado de línea (ζ_0) en TSALB, frente a un conjunto de planes de demanda (E), proponemos 6 métricas.

Parámetros y variables:

- c, Δ_c Tiempo de ciclo de referencia y tiempo de proceso adicional en toda estación $k \in K$. Se define ventana temporal así: $c + \Delta_c$
- A, Δ_A Área lineal disponible y área lineal adicional en toda estación $k \in K$. Se define ventana espacial así: $A + \Delta_A$
- $\bar{t}_{j\epsilon}$ Tiempo de proceso promedio de la tarea $j \in J$ en función del mix de productos en el plan de demanda $\epsilon \in E$ – ecuación (1) -
- $\bar{a}_{j\epsilon}$ Área lineal promedio requerida por la tarea $j \in J$ en función del mix de productos en el plan de demanda $\epsilon \in E$ – ecuación (2) -
- x_{jk} Variable binaria que adopta el valor 1 si la tarea $j \in J$ se asigna a la estación $k \in K$, y vale 0 en caso contrario.
- $y_{k\epsilon}^c$ Variable binaria que adopta el valor 1 si el tiempo de la carga de la estación $k \in K$, correspondiente al plan de demanda $\epsilon \in E$ y a la configuración de referencia ζ_0 de la línea, es mayor que el tiempo de ciclo – i.e. $t_\epsilon(S_k) > c$ – y vale 0 en caso contrario.
- $y_{k\epsilon}^A$ Variable binaria que adopta el valor 1 si el área lineal de la carga de la estación $k \in K$, según el plan de demanda $\epsilon \in E$ y la configuración de referencia ζ_0 de la línea, es mayor que el área lineal disponible – i.e. $a_\epsilon(S_k) > A$ – y vale 0 en caso contrario.
- Y^c Variable entera que representa el número de veces que $t_\epsilon(S_k) > c$ ($\forall \epsilon \in E, \forall k \in K$), es decir: $Y^c = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{k \in K} y_{k\epsilon}^c$
- Y^A Variable entera que representa el número de veces que $a_\epsilon(S_k) > A$ ($\forall \epsilon \in E, \forall k \in K$), es decir: $Y^A = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{k \in K} y_{k\epsilon}^A$

Métricas:

- (m.1) Proporción de planes del conjunto E que no pueden ser satisfechos por la solución ζ_0 , debido a la limitación del tiempo de ciclo c .

$$g_c^1 = \frac{1}{|E|} \sum_{\epsilon=1}^{|E|} \max_{k \in K} y_{k\epsilon}^c \quad (6)$$

- (m.2) Proporción de estaciones con sobrecarga de trabajo. Es decir, proporción de estaciones de la línea con tiempo de carga mayor que el tiempo de ciclo c de la solución ζ_0 .

$$g_c^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{|K|} \max_{\epsilon \in E} y_{k\epsilon}^c \quad (7)$$

- (m.3) Tiempo de sobrecarga de la línea, medido en proporción al tiempo de proceso adicional de la solución ζ_0 , que se genera por satisfacer todos los planes del conjunto E.

$$g_c^3 = \frac{1}{\Delta_c Y^c} \sum_{\epsilon=1}^{|E|} \sum_{k=1}^{|K|} (\max\{0, \sum_{j=1}^{|J|} \bar{t}_{j\epsilon} x_{jk} - c\}) \text{ si } Y^c > 0, \text{ si_no: } g_c^3 = 0 \quad (8)$$

- (m.4) Proporción de planes del conjunto E que no pueden ser satisfechos por la solución ζ_0 , debido a la limitación del área lineal disponible A .

$$g_A^1 = \frac{1}{|E|} \sum_{\varepsilon=1}^{|\varepsilon|} \max_{k \in K} y_{k\varepsilon}^A \quad (9)$$

(m.5) Proporción de estaciones que requieren un área lineal mayor que el área lineal disponible A de la solución ζ_0 .

$$g_A^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{|K|} \max_{\varepsilon \in E} y_{k\varepsilon}^A \quad (10)$$

(m.6) Área lineal por defecto, medida en proporción al área lineal adicional de la solución ζ_0 , que se precisa para satisfacer todos los planes del conjunto E .

$$g_A^3 = \frac{1}{\Delta_A Y^A} \sum_{\varepsilon=1}^{|\varepsilon|} \sum_{k=1}^{|K|} (\max\{0, \sum_{j=1}^{|J|} \bar{a}_{j\varepsilon} x_{jk} - A\}) \text{ si } Y^A > 0, \text{ si_no: } g_A^3=0 \quad (11)$$

Adicionalmente, nuestra propuesta (Chica et al. 2016) permite optimizar m , c y A , mediante modelos multiobjetivo, teniendo en cuenta la limitación de las proporciones de no-robustez indicadas anteriormente.

Obviamente, se puede hacer corresponder el conjunto de métricas de no-robustez m.1 a m.6 con sus complementos a 1 (i.e. $r = 1 - g$), para establecer un sistema de medida de la robustez de una configuración de línea. Sean por tanto:

$$r_c^1 = 1 - \frac{1}{|E|} \sum_{\varepsilon=1}^{|\varepsilon|} \max_{k \in K} y_{k\varepsilon}^c \quad (12)$$

$$r_c^2 = 1 - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{|K|} \max_{\varepsilon \in E} y_{k\varepsilon}^c \quad (13)$$

$$r_c^3 = 1 - \frac{1}{\Delta_c Y^c} \sum_{\varepsilon=1}^{|\varepsilon|} \sum_{k=1}^{|K|} (\max\{0, \sum_{j=1}^{|J|} \bar{t}_{j\varepsilon} x_{jk} - c\}) \text{ si } Y^c > 0, \text{ si_no: } r_c^3=1 \quad (14)$$

$$r_A^1 = 1 - \frac{1}{|E|} \sum_{\varepsilon=1}^{|\varepsilon|} \max_{k \in K} y_{k\varepsilon}^A \quad (15)$$

$$r_A^2 = 1 - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{|K|} \max_{\varepsilon \in E} y_{k\varepsilon}^A \quad (16)$$

$$r_A^3 = 1 - \frac{1}{\Delta_A Y^A} \sum_{\varepsilon=1}^{|\varepsilon|} \sum_{k=1}^{|K|} (\max\{0, \sum_{j=1}^{|J|} \bar{a}_{j\varepsilon} x_{jk} - A\}) \text{ si } Y^A > 0, \text{ si_no: } r_A^3=1 \quad (17)$$

Centrándonos en un conjunto de planes E , con demanda global constante y distintas mezclas de productos, las métricas m.1 a m.6 proporcionan información para tomar decisiones en la gestión de la producción.

En efecto, m.1 y m.4 indican el número de veces que habrá que intervenir para cambiar las características temporales y espaciales de la línea. Son métricas que alertan sobre posibles ajustes que deberán programarse fuera de turno o en fines de semana; en

cualquier caso, dichos ajustes generarán pérdidas de producción hasta que se alcance el régimen permanente en la línea.

Las métricas $m.2$ y $m5$ sirven para evidenciar qué estaciones son problemáticas atendiendo a sus atributos temporales y espaciales.

Por una parte, $m.2$ indica qué estaciones, bajo las condiciones de ζ_0 , necesitan más tiempo para satisfacer los planes de producción contenidos en E . La gestión de la producción puede ofrecer aquí las siguientes soluciones: (1) mejorar los tiempos de proceso de las operaciones implicadas recurriendo al Departamento de Métodos y Tiempos; (2) solicitar al Departamento de Diseño del Producto piezas alternativas que requieran menos tiempo durante el montaje; y (3) marcar un ritmo de trabajo a los operarios superior a la actividad normal (Bautista et al, 2015) desde el departamento de Control de Producción, dentro de los límites establecidos por la ley y los convenios laborales.

Por su parte, $m.5$ indica qué estaciones, bajo las condiciones de ζ_0 , necesitan más espacio para satisfacer todos los planes de producción. En este caso, la gestión de la producción podrá adoptar las siguientes medidas: (1) reducir el área lineal requerida por las piezas y operaciones implicadas recurriendo al Departamento de Logística Interna de Materiales; (2) solicitar al Departamento de Diseño del Producto piezas alternativas de menor tamaño; y (3) considerar ventanas espacio-temporales en las estaciones (Bautista et al, 2012) y marcar, si es necesario, un ritmo de trabajo por encima de la actividad normal (Bautista et al, 2015).

Finalmente, las métricas $m.3$ y $m.6$ proporcionan cotas inferiores del tiempo y el área lineal a reducir o aumentar, respecto a los valores de ζ_0 , para satisfacer los planes del conjunto E .

6. Ejemplo prototipo

Datos y condiciones

Para mostrar la forma de evaluar la robustez (no-robustez) de una solución frente a un conjunto de planes de demanda en un entorno industrial, se ha tomado como caso de estudio una línea de producción de motores de la planta de Nissan Motor Ibérica (NMISA) localizada en Barcelona.

En dicha línea se fabrican hasta 9 tipos de motor distintos (p_1, \dots, p_9) con diferentes destinos y características de ensamblado: los tres primeros tipos de motor son para vehículos 4x4; los tipos p_4 y p_5 son para furgonetas (vans); y los cuatro últimos tipos tienen por destino los camiones comerciales (trucks) de tonelaje medio. En condiciones de equilibrio de demanda (idéntica demanda para los 9 tipos de motor) y un tiempo de ciclo de 3 minutos, la línea consta de 21 estaciones en serie con una longitud media de 4 metros cada una.

El número de tareas elementales para la fabricación de un motor asciende a 380. Para simplificar el problema, dichas tareas se han agrupado en 140 operaciones. El Anexo I recoge los tiempos de proceso de las operaciones ($j = 1, \dots, 140$), para cada tipo de motor (p_1, \dots, p_9).

Lógicamente, la demanda de motores no es siempre homogénea en el tiempo ni idéntica para los 9 tipos de motor. Este hecho supone que la línea, aunque mantenga una capacidad de producción diaria de 270 unidades, deberá ser capaz de adaptarse a diferentes programas de producción en base a las demandas parciales de cada tipo de motor. Dicho de otro modo, el mix de producción diario de los 270 motores no tiene por qué mantenerse constante, lo que suscita el estudio del equilibrado de la línea ante distintos escenarios de la demanda.

Para el caso que nos ocupa, se ha empleado un tiempo de ciclo $c=180$ s, que permite fabricar 270 motores durante una jornada efectiva de 13 horas y media distribuidas equitativamente en dos turnos de trabajo. En cuanto a los escenarios, se han seleccionado 7 planes de demanda distintos para un día de trabajo (ver Tabla 1), entre un conjunto de 23 ejemplares (escenarios) agrupados en 7 categorías (ver Anexo II).

Familia	Motor	E_01	E_02	E_03	E_06	E_09	E_12	E_18
4x4	p_1	30	30	10	50	70	24	60
	p_2	30	30	10	50	70	23	60
	p_3	30	30	10	50	70	23	60
Vans	p_4	30	45	60	30	15	45	30
	p_5	30	45	60	30	15	45	30
Trucks	p_6	30	23	30	15	8	28	8
	p_7	30	23	30	15	8	28	8
	p_8	30	22	30	15	7	27	7
	p_9	30	22	30	15	7	27	7
	Total	270	270	270	270	270	270	270

Tabla 1: Planes de demanda, según tipo de motor (p_1, \dots, p_9), seleccionados para evaluar la robustez de configuraciones de línea.

Obviamente, cada mix de producción conduce a un conjunto de valores del tiempo de proceso medio ponderado de las 140 tareas. Por ejemplo, la operación $j = 13$ presenta unos tiempos de proceso iguales a 1620, 1575, 1470, 1350, 1425, 1530, 1500, 1380 y 1650 (cs) para los tipos de motor p_1 a p_9 , respectivamente; por su parte, las demandas correspondientes a dichos motores según el plan E_12 son: 24, 23, 23, 45, 45, 28, 28, 27 y 27 unidades; por tanto, el tiempo de proceso medio ponderado de la operación $j = 13$ es 1483 cs en el plan E_12, frente a 1532 cs en el plan E_09. El Anexo III recoge los valores de los tiempos de proceso ponderados de las 140 operaciones de montaje en función de los 7 planes de demanda seleccionados.

Resultados

Para ilustrar la aplicación de las métricas de robustez al ejemplo prototipo, se han seleccionado 4 configuraciones de la línea (ver tablas 2 a 5) obtenidas mediante dos algoritmos de optimización multiobjetivo (Chica et al 2016). Las 4 configuraciones ($j \in S_k$: asignación de tareas a estaciones) corresponden a una línea con 18 puestos de trabajo con un tiempo ciclo de referencia de 18000 cs y un área disponible por estación de 555 cm. Para conseguir las configuraciones 1 y 2 (tablas 2 y 3) se ha utilizado un algoritmo NSGA-II convencional, sin tener en cuenta en la aplicación el concepto de robustez; por su parte, para las configuraciones 3 y 4 (tablas 4 y 5) se ha empleado un IDEA adaptativo que incorpora mecanismos para tratar la robustez en el TSALBP

insertada en el modelo mediante función objetivo y restricciones. Los tiempos de carga ($t_\varepsilon(S_k) \ \varepsilon \in E, k \in K$) de las estaciones, $k = 1, \dots, 18$, para las configuraciones de línea, $\zeta_0 = 1, \dots, 4$, se recogen en las tablas 6 a 9, respectivamente. Las áreas lineales de carga ($a_\varepsilon(S_k) = a(S_k) \ \varepsilon \in E, k \in K$), que no dependen del mix de producción en este trabajo, no superan en ningún caso los 555 cm.

k	$j \in S_k : \text{carga de las estaciones}$												
1	1	3	10	13									
2	4	5	6	8	11	12							
3	9	14	15	16	17	18	19	21					
4	7	20	22	23	24	25	26	27	28				
5	2	29	30	31	32	34	36						
6	33	35	37	38	39	40	41	43					
7	42	44	45	46	47	48	49	52					
8	50	51	53	54	55	56	57	59	60	63			
9	58	61	62	64	65	66	67	70					
10	68	69	71	72	73	74	79						
11	75	76	77	78	80	81	82	83	84	86			
12	85	87	88	89	90	91	92	99					
13	93	94	95	96	98	100	101	103					
14	102	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
15	116	117	118	119	120	121							
16	122	123	124	125	126	128	129	131					
17	97	127	130	132	133	134	135	136	138				
18	137	139	140										

Tabla 2: Configuración 1 ($\zeta_0 = 1$) ofrecida por NSGA-II convencional sin considerar robustez. Parámetros: $m = 18, c = 18000 \text{ cs}, A = 552 \text{ cm}, \Delta_c^{max} = 900 \text{ cs}, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon \in \{2,3,6,9,12,18\}$

k	$j \in S_k : \text{carga de las estaciones}$												
1	1	3	5	7	11								
2	4	8	9	10	12	13	14						
3	15	16	17	18	19	20	21	26					
4	6	22	23	24	25	27	28	29					
5	2	30	31	32	35	36							
6	33	34	37	38	39	40	41	42					
7	43	44	45	46	47	48	49	54	60				
8	50	51	52	53	55	56	57	58	59				
9	61	62	63	64	65	66	67	70					
10	68	69	71	72	73	74	75						
11	76	77	78	79	80	81	82	83	84	86			
12	85	87	88	89	90	91	92	99					
13	98	100	101	102	103	104	106						
14	93	94	105	108	109	110	111	112	113	114	115	116	
15	95	96	107	117	118	119	120	121					
16	97	122	123	124	125	128	131	132	134				
17	126	127	129	135	136	137	138	139					
18	130	133	140										

Tabla 3: Configuración 2 ($\zeta_0 = 2$) ofrecida por NSGA-II convencional sin considerar robustez. Parámetros: $m = 18, c = 18000 \text{ cs}, A = 550 \text{ cm}, \Delta_c^{max} = 900 \text{ cs}, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon \in \{2,3,6,9,12,18\}$

k	$j \in S_k : \text{carga de las estaciones}$												
1	1	7	8	9	11								
2	3	4	5	10	13	14							
3	6	12	16	17	19	20	21						
4	15	18	22	23	24	25	26	27	28				
5	2	29	30	31	32	34	36						
6	33	35	37	38	39	40	41	43					
7	42	44	45	46	47	48	49	59	60				
8	50	51	52	53	54	55	56	57	58				
9	61	62	63	64	65	66	67	70					
10	68	69	71	72	73	74	75						
11	76	77	78	79	80	81	82	83	84	86			
12	85	87	88	89	90	91	92	99					
13	93	94	95	96	98	100	101	103					
14	102	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
15	116	117	118	119	120	131							
16	121	122	123	128	132	134	135	136					
17	97	124	125	126	127	129	137	138	139				
18	130	133	140										

Tabla 4: Configuración 3 ($\zeta_0 = 3$) ofrecida por IDEA adaptativo considerando robustez en objetivo. Parámetros: $m = 18, c = 18000 \text{ cs}, A = 552 \text{ cm}, \Delta_c^{max} = 900 \text{ cs}, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon \in \{2,3,6,9,12,18\}$

k	$j \in S_k : \text{carga de las estaciones}$												
1	1	3	7	10	11								
2	4	5	8	9	13	14	18						
3	6	12	15	16	17	20							
4	22	23	24	25	28	29	30	31	32	34			
5	2	33	35	36	37	38							
6	39	40	41	42	43	44	45						
7	46	47	48	49	52	53	54	55	56				
8	50	51	57	58	59	60	61	62					
9	63	64	65	66	67	68	69	71	72				
10	70	73	74	75	76	77	78						
11	21	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89		
12	19	26	90	91	92	98							
13	27	94	95	99	100	101	102	103	104	108	109	110	111
14	107	112	113	114	115	116	117	118					
15	105	106	119	120	121	122	123	124					
16	79	93	128	131	132	134	135	136					
17	96	97	125	126	127	129	137	138	139				
18	130	133	140										

Tabla 5: Configuración 4 ($\zeta_0 = 4$) ofrecida por IDEA adaptativo considerando robustez en objetivo. Parámetros: $m = 18, c = 18000 \text{ cs}, A = 550 \text{ cm}, \Delta_c^{max} = 900 \text{ cs}, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon \in \{2,3,6,9,12,18\}$

k	$t_1(S_k)$	$t_2(S_k)$	$t_3(S_k)$	$t_6(S_k)$	$t_9(S_k)$	$t_{12}(S_k)$	$t_{18}(S_k)$	$\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c [\Delta_c]$
1	12500	12440	12376	12506	12570	12438	12508	-
2	18000	18011	17867	18157	18301	17960	18234	4 [301]
3	17600	17541	17533	17549	17558	17557	17525	-
4	16400	16428	16455	16400	16373	16427	16400	-
5	16000	16012	16101	15926	15837	16039	15888	-
6	14000	13954	13968	13940	13927	13974	13911	-
7	17500	17546	17529	17559	17575	17528	17590	-
8	16500	16518	16547	16489	16460	16522	16484	-
9	16500	16497	16623	16371	16245	16539	16307	-
10	17000	16974	16938	17013	17050	16968	17019	-
11	13500	13529	13590	13470	13409	13538	13454	-
12	18000	17963	17952	17977	17988	17973	17964	-
13	17500	17464	17349	17583	17697	17433	17622	-
14	17500	17512	17477	17547	17581	17495	17570	-
15	18000	17962	17898	18025	18090	17953	18039	3 [90]
16	18000	17997	18073	17921	17845	18026	17881	2 [73]
17	18000	18033	18030	18037	18040	18023	18055	6 [55]
18	16500	16574	16610	16533	16496	16567	16551	-
c_{max}	18000	18033	18073	18157	18301	18026	18234	18301

Tabla 6: Tiempos de carga (cs), $t_{\varepsilon}(S_k)$: $\varepsilon \in \{1,2,3,6,9,12,18\}$, para la configuración 1 ($\zeta_0 = 1$) de la línea – ver Tabla 2 – Número de planes no satisfechos, $\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c$, y tiempo de ciclo adicional Δ_c .

k	$t_1(S_k)$	$t_2(S_k)$	$t_3(S_k)$	$t_6(S_k)$	$t_9(S_k)$	$t_{12}(S_k)$	$t_{18}(S_k)$	$\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c [\Delta_c]$
1	16000	15918	15879	15962	16001	15932	15941	-
2	16000	15977	15905	16053	16125	15958	16078	-
3	15600	15565	15532	15597	15631	15565	15597	-
4	17900	17958	17921	17988	18025	17928	18036	2 [36]
5	14500	14502	14579	14429	14352	14528	14391	-
6	14500	14474	14491	14457	14440	14489	14436	-
7	18000	18058	18050	18064	18072	18038	18097	6 [97]
8	15000	14987	14979	14997	15005	14989	14995	-
9	17500	17507	17662	17350	17194	17557	17276	-
10	16500	16482	16456	16510	16536	16478	16514	-
11	14000	14021	14071	13973	13923	14029	13958	-
12	18000	17963	17952	17977	17988	17973	17964	-
13	18000	17987	17918	18060	18130	17962	18089	3 [130]
14	18000	17941	17834	18048	18155	17924	18072	3 [155]
15	17000	17009	16973	17047	17083	16995	17070	-
16	17000	17030	17088	16976	16917	17039	16961	-
17	18000	17957	17888	18022	18091	17950	18035	3 [91]
18	17500	17618	17737	17492	17372	17626	17491	-
c_{max}	18000	18058	18050	18064	18155	18038	18097	18155

Tabla 7: Tiempos de carga (cs), $t_{\varepsilon}(S_k)$: $\varepsilon \in \{1,2,3,6,9,12,18\}$, para la configuración 2 ($\zeta_0 = 2$) de la línea – ver Tabla 3 – Número de planes no satisfechos, $\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c$, y tiempo de ciclo adicional Δ_c .

k	$t_1(S_k)$	$t_2(S_k)$	$t_3(S_k)$	$t_6(S_k)$	$t_9(S_k)$	$t_{12}(S_k)$	$t_{18}(S_k)$	$\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c [\Delta_c]$
1	15000	14924	14836	15015	15103	14920	15021	-
2	15500	15466	15438	15500	15528	15465	15497	-
3	17800	17821	17732	17908	17997	17783	17963	-
4	16200	16210	16225	16188	16172	16215	16185	-
5	16000	16012	16101	15926	15837	16039	15888	-
6	14000	13954	13968	13940	13927	13974	13911	-
7	17000	17042	17045	17039	17036	17031	17059	-
8	16000	16011	15992	16031	16050	16001	16046	-
9	17500	17507	17662	17350	17194	17557	17276	-
10	16500	16482	16456	16510	16536	16478	16514	-
11	14000	14021	14071	13973	13923	14029	13958	-
12	18000	17963	17952	17977	17988	17973	17964	-
13	17500	17464	17349	17583	17697	17433	17622	-
14	17500	17512	17477	17547	17581	17495	17570	-
15	17500	17487	17502	17472	17457	17497	17458	-
16	17500	17506	17424	17592	17674	17476	17636	-
17	18000	17956	17948	17960	17967	17969	17941	-
18	17500	17618	17737	17492	17372	17626	17491	-
c_{max}	18000	17963	17952	17977	17997	17973	17964	18000

Tabla 8: Tiempos de carga (cs), $t_{\varepsilon}(S_k)$: $\varepsilon \in \{1,2,3,6,9,12,18\}$, para la configuración 3 ($\zeta_0 = 3$) de la línea – ver Tabla 4 – Número de planes no satisfechos, $\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c$, y tiempo de ciclo adicional Δ_c .

k	$t_1(S_k)$	$t_2(S_k)$	$t_3(S_k)$	$t_6(S_k)$	$t_9(S_k)$	$t_{12}(S_k)$	$t_{18}(S_k)$	$\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c [\Delta_c]$
1	17000	16939	16872	17009	17076	16936	17012	-
2	17500	17421	17351	17495	17564	17424	17490	-
3	17600	17627	17546	17707	17788	17590	17761	-
4	16400	16432	16516	16348	16264	16449	16322	-
5	15500	15493	15482	15508	15519	15493	15510	-
6	15000	14988	15036	14936	14888	15009	14906	-
7	17000	17036	17038	17031	17030	17028	17049	-
8	17000	17019	17185	16855	16689	17067	16781	-
9	16000	16007	16075	15936	15868	16030	15905	-
10	14500	14499	14405	14598	14693	14464	14645	-
11	16500	16528	16612	16445	16360	16547	16417	-
12	16500	16433	16364	16511	16581	16428	16513	-
13	16000	15978	15851	16106	16233	15942	16158	-
14	16000	15966	15923	16010	16052	15960	16014	-
15	18000	17992	17984	17999	18006	17993	17998	1 [6]
16	17000	17022	16980	17068	17109	17001	17099	-
17	18000	17956	17957	17951	17950	17973	17929	-
18	17500	17618	17737	17492	17372	17626	17491	-
c_{max}	18000	17992	17984	17999	18006	17993	17998	18006

Tabla 9: Tiempos de carga (cs), $t_{\varepsilon}(S_k)$: $\varepsilon \in \{1,2,3,6,9,12,18\}$, para la configuración 4 ($\zeta_0 = 4$) de la línea – ver Tabla 5 – Número de planes no satisfechos, $\sum_{\varepsilon} y_{k\varepsilon}^c$, y tiempo de ciclo adicional Δ_c .

A la vista de las tablas 6 a 9 podemos afirmar:

- (1) Las configuraciones $\zeta_0 = 1$ y 2 son *quasi-robustas* en métrica m.3: los tiempos de proceso adicionales (301 cs para $\zeta_0 = 1$ y 155 cs para $\zeta_0 = 2$) al tiempo de ciclo (18000 cs), podrán ser asumidos por los operarios dentro de la legalidad trabajando a un ritmo por encima de la actividad normal ($\alpha^N = 1$). En efecto, para el caso $\zeta_0 = 1$, será suficiente emplear un factor de actividad máximo $\alpha_k^{max} = 1.017\hat{2}$ en las estaciones $k = 2,15,16,17$ (con cuello de botella en la estación $k = 2$) para satisfacer todas las restricciones temporales; mientras que para el caso $\zeta_0 = 2$, atendiendo al requerimiento máximo impuesto por la estación $k = 14$, el factor de actividad deberá adoptar el valor $\alpha_k^{max} = 1.0086\hat{1}$ en las estaciones $k = 4,7,13,14,17$.
- (2) La configuración $\zeta_0 = 3$ es *fuertemente-robusta* en todas sus métricas: se satisfacen todas las restricciones temporales y espaciales y, por tanto, no será preciso hacer cambios en la línea de producción ante la variación de la demanda establecida por los planes del conjunto E.
- (3) La configuración $\zeta_0 = 4$ es *robusta* en métrica m.3: bastará incrementar muy levemente el factor de actividad de los operarios de la estación $k = 15$ para recuperar las 6 cs adicionales al tiempo de ciclo requeridas por el plan $\varepsilon = 9$; esto es: $\alpha_k^{max} = 1.000\hat{3}$ en $k = 15$.

Como resumen, la tabla 10 recoge los valores de las métricas para las 4 configuraciones de línea ($\zeta_0 = 1,2,3,4$) frente a los 6 planes $\varepsilon \in \{2,3,6,9,12,18\}$ a partir del plan referente $\varepsilon_0 = 1$.

	$r_c^1 (g_c^1)$	$r_c^2 (g_c^2)$	$r_c^3 (g_c^3)$	$r_A^1 (g_A^1)$	$r_A^2 (g_A^2)$	$r_A^3 (g_A^3)$
$\zeta_0 = 1$	0 (1)	0.78 (0.22)	0.91 (0.09)	1 (0)	1 (0)	1 (0)
$\zeta_0 = 2$	0 (1)	0.72 (0.28)	0.93 (0.07)	1 (0)	1 (0)	1 (0)
$\zeta_0 = 3$	1 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)
$\zeta_0 = 4$	0.83 (0.17)	0.94 (0.06)	0.99 (0.01)	1 (0)	1 (0)	1 (0)

Tabla 10: Valoración según métricas de robustez - $r(g)$ - de 4 configuraciones de línea ($\zeta_0 = 1, \dots, 4$). Caso: $m = 18, c = 18000$ cs, $A = 555$ cm, $\Delta_c^{max} = 900$ cs, $\Delta_A^{max} = 50$ cm, $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon \in \{2,3,6,9,12,18\}$.

7. Comentarios finales

Es evidente que el alcance de este trabajo tiene sus limitaciones. En efecto, nuestra propuesta resultará útil cuando se den las siguientes circunstancias:

- (1) El sistema productivo quede representado por una línea de modelos mixtos. Los modelos presenten valores distintos en alguno o en todos sus atributos temporales y espaciales.

- (2) La elaboración de cualquier modelo requiera una tecnología media-alta en las instalaciones de fabricación y unos conocimientos técnicos prácticos por parte de los operarios (mecánica, electricidad, electrónica, robótica, etc.). Además, el ensamblado del producto sea complejo y requiera adiestramiento y especialización de los operarios, y los valores del tiempo de ciclo de la línea sean grandes (comprendidos entre 0.5' y 15').
- (3) Los productos sean de grandes dimensiones (motores, carrocerías, vehículos, etc.), con una lista de materiales compleja. Por este motivo, el área lineal disponible en todas las estaciones deberá adaptarse a los modelos (de 3 m a 10 m), intentando evitar largos desplazamientos de los operarios.
- (4) Los componentes sean pesados y de grandes dimensiones, por lo que se requiera espacio, a ambas orillas de la línea, para contenedores, estanterías, herramientas y utillajes y robots de asistencia al montaje del producto. Por ello, cualquier cambio de configuración de la línea, en cuanto a cargas de las estaciones, obligará a la recolocación de dichos elementos asistentes.
- (5) La demanda de los productos sea variable, teniendo en cuenta que, aunque la demanda global de los productos se mantenga constante, el mix de producción podrá variar en plazos comprendidos entre 3 y 13 semanas. Por ello, conviene tener en cuenta distintos escenarios para la demanda a la hora de realizar un equilibrado de la línea de productos mixtos.
- (6) Los tiempos de proceso y las áreas requeridas por las operaciones de ensamblado se asumen como deterministas. De manera que los valores de los atributos del equilibrado son la media ponderada de los atributos temporales y espaciales de las operaciones, teniendo en cuenta un mix de producción de referencia. Por ello, una configuración de línea que sea válida para un escenario de la demanda puede ser inapropiada para otro escenario.

Contrariamente, nuestra propuesta será innecesaria en los siguientes casos:

- (1) Sistema productivo orientado al proceso.
- (2) Un solo tipo producto con variantes muy similares.
- (3) Demanda estable.
- (4) Tiempos de ciclo muy cortos que requieran poco adiestramiento de los operarios.
- (5) Producto con una lista de materiales simple.
- (6) Productos y componentes de pequeñas dimensiones y ligeros.
- (7) Baja presencia de elementos fijos, herramientas y utillajes y robots de asistencia en las estaciones de trabajo, o que la recolocación de todos ellos no suponga esfuerzo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido subvencionada por el Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España a través de los proyectos PROTHIUS-III (DPI2010-16759) y SOCOVIFI2 (TIN2012-38525-C02-01/02, TIN2014-57497), incluyendo fondos FEDER.

Referencias

- Battaia, O., Dolgui, A., 2013. A taxonomy of line balancing problems and their solution approaches. *International Journal of Production Economics* 142, 259–277.
- Bautista, J., Alfaro, R., Batalla, C., 2015. Modeling and solving the mixed-model sequencing problem to improve productivity. *International Journal of Production Economics* 161, 83–95.
- Bautista, J., Cano, A., Alfaro, R., 2012. Models for MMSP-W considering Workstation dependencies: A case study of Nissan's Barcelona plant. *European Journal of Operational Research* 223, 669–679.
- Bautista, J., Pereira, J., 2007. Ant algorithms for a time and space constrained assembly line balancing problem. *European Journal of Operational Research* 177, 2016–2032.
- Beyer, H., Sendhoff, B., 2007. Robust optimization - a comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, 3190–3218.
- Boysen, N., Fliedner, M., Scholl, A., 2008. Assembly line balancing: Which model to use when? *International Journal of Production Economics* 111, 509–528.
- Chica, M., Bautista, J., Cordon, O., Damas, S. 2016. A multiobjective model and evolutionary algorithms for robust time and space assembly line balancing under uncertain demand. *Omega* 58, 55-68.
- Chica, M., Cordon, O., Damas, S., Bautista, J., 2013. A robustness information and visualization model for time and space assembly line balancing under uncertain demand. *International Journal of Production Economics* 145, 761– 772.
- Dolgui, A., Kovalev, S., 2012. Scenario based robust line balancing: Computational complexity. *Discrete Applied Mathematics* 160, 1955–1963.
- Gurevsky, E., Battaia, O., Dolgui, A., 2012. Balancing of simple assembly lines under variations of task processing times. *Annals of Operations Research* 201, 265–286.
- Hazir, Ö., Dolgui, A., 2013. Assembly line balancing under uncertainty: Robust optimization models and exact solution method. *Computers & Industrial Engineering* 65, 261–267.
- Li, J., Gao, J., 2014. Balancing manual mixed-model assembly lines using overtime work in a demand variation environment. *International Journal of Production Research* 52, 3552–3567.
- Scholl, A., Becker, C., 2006. State-of-the-art exact and heuristic solution procedures for simple assembly line balancing. *European Journal of Operational Research* 168, 666–693.
- Simaria, A.S., Zanella de Sá, M., Vilarinho, P.M., 2009. Meeting demand variation using flexible u-shaped assembly lines. *International Journal of Production Research* 47, 3937–3955.
- Xu, W., Xiao, T., 2011. Strategic robust mixed model assembly line balancing based on scenario planning. *Tsinghua Science & Technology* 16, 308–314.

Anexo I

Tiempos de proceso (en centésimas de segundo –cs- a actividad normal) de las 140 operaciones de montaje según el tipo de motor (p_1, \dots, p_9).

j	Código	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
1	50100	6480	6120	6000	5400	5880	5520	6300	6600	5700
2	50110	7875	6900	7350	7500	7650	8100	7125	6750	8250
3	50120	1840	1800	2000	1960	1900	2160	2100	2040	2200
4	50500	6300	6000	6480	6120	5520	5880	5400	6600	5700
5	50501	1900	1960	1840	2000	2100	2040	1800	2160	2200
6	50600	6600	6300	6000	5880	6120	6480	5400	5520	5700
7	50800	4410	4275	4950	4860	4050	4140	4590	4500	4725
8	50900	980	900	1050	1080	950	1100	920	1000	1020
9	51000	2000	1960	1900	1800	2040	1840	2160	2100	2200
10	51200	2760	3240	3000	3300	2940	2850	3060	2700	3150
11	51400	1650	1380	1530	1500	1350	1575	1620	1470	1425
12	51401	1350	1650	1470	1575	1500	1425	1530	1380	1620
13	51600	1620	1575	1470	1350	1425	1530	1500	1380	1650
14	51800	980	900	1020	950	1000	1100	920	1050	1080
15	52000	840	760	864	880	816	784	736	800	720
16	52010	880	840	800	784	816	720	760	864	736
17	52200	7200	8160	8400	8000	7840	7600	8640	7360	8800
18	52400	4400	4080	3600	3680	3920	4320	4200	4000	3800
19	52600	550	490	500	525	475	460	450	510	540
20	52610	490	550	450	540	500	475	460	525	510
21	52650	525	500	550	460	540	510	475	490	450
22	52700	756	665	735	714	630	686	770	644	700
23	52710	756	686	665	630	770	700	714	735	644
24	52720	2760	3150	3000	2940	3240	3060	3300	2700	2850
25	52730	2760	2700	3240	3300	3150	3060	2940	2850	3000
26	52750	510	550	500	475	460	490	525	450	540
27	52760	500	525	540	475	510	450	460	490	550
28	52800	3060	3150	2700	3000	2940	3300	2760	3240	2850
29	52820	920	1100	900	950	1050	980	1080	1000	1020
30	52900	1425	1650	1380	1530	1470	1575	1350	1620	1500
31	52901	980	920	950	1080	1000	900	1050	1100	1020
32	53050	1425	1530	1575	1380	1500	1470	1350	1650	1620
33	53100	3000	3060	3300	2760	2850	2700	3150	3240	2940
34	53200	1000	1100	900	1080	1050	980	950	920	1020
35	53300	450	510	540	525	460	475	490	550	500
36	53301	2750	2375	2250	2550	2625	2300	2500	2700	2450
37	53400	1530	1620	1500	1425	1575	1470	1350	1650	1380
38	53600	540	500	550	460	525	450	475	510	490
39	53630	450	500	540	475	525	510	550	460	490
40	53650	460	475	525	490	510	540	500	550	450

$j = 1, \dots, 40$ de 140

j	Código	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
41	54000	5880	5700	5520	6600	5400	6480	6300	6000	6120
42	54100	1650	1620	1350	1575	1470	1380	1425	1530	1500
43	54120	1500	1470	1620	1530	1425	1350	1575	1650	1380
44	54200	2750	2625	2375	2450	2300	2550	2700	2500	2250
45	54210	2250	2700	2550	2500	2750	2300	2450	2375	2625
46	54230	490	450	540	500	550	525	460	475	510
47	54240	3430	3220	3850	3675	3780	3325	3500	3150	3570
48	54250	3780	3220	3150	3675	3430	3850	3325	3570	3500
49	54260	540	550	525	475	460	500	490	510	450
50	54270	1530	1500	1650	1350	1470	1380	1425	1575	1620
51	54280	2450	2750	2300	2500	2700	2250	2625	2550	2375
52	54290	3240	3150	2760	3000	2850	3060	3300	2700	2940
53	54300	1620	1350	1530	1380	1650	1500	1425	1575	1470
54	54310	1500	1620	1470	1650	1575	1530	1380	1350	1425
55	54320	2000	1900	2160	2040	1800	2200	1840	1960	2100
56	54330	980	1100	950	900	1000	920	1080	1020	1050
57	54370	950	1050	900	920	1020	1080	980	1100	1000
58	54500	1960	1840	2000	2160	2100	2040	1800	1900	2200
59	54501	500	450	475	460	540	510	490	550	525
60	54520	2200	1900	1960	2040	1840	1800	2160	2000	2100
61	54700	4140	4050	4500	4275	4950	4725	4860	4410	4590
62	54720	2760	2700	3060	3240	3150	3000	2850	2940	3300
63	54800	2940	2760	2850	3150	3300	3060	3240	3000	2700
64	54820	1050	950	900	1100	1020	920	1000	1080	980
65	55050	490	500	475	510	540	450	550	460	525
66	55200	1050	1100	1080	950	980	920	1000	900	1020
67	55250	1650	1425	1530	1380	1350	1575	1470	1500	1620
68	55300	6000	5400	6120	6300	5700	5880	6480	5520	6600
69	55350	1020	1050	1100	1080	980	950	920	1000	900
70	55400	2850	3240	3060	2700	2940	3150	3000	3300	2760
71	55500	1100	980	1050	900	1000	950	1020	1080	920
72	55540	900	920	1000	1080	950	1100	1020	1050	980
73	55800	3680	4400	4320	3920	4200	3800	3600	4000	4080
74	55900	2500	2450	2700	2375	2250	2750	2300	2550	2625
75	56000	950	1000	1050	900	1100	980	1080	920	1020
76	56020	950	980	900	1080	1050	1020	920	1100	1000
77	56100	1650	1620	1425	1575	1530	1350	1380	1500	1470
78	56200	1380	1650	1620	1575	1530	1470	1350	1500	1425
79	56220	1425	1500	1650	1530	1350	1575	1470	1620	1380
80	56300	1000	920	900	1100	1050	980	1080	1020	950
81	56400	920	980	1020	1080	1000	950	1050	1100	900
82	56401	920	1100	900	980	1050	950	1080	1000	1020
83	56420	1840	2000	1800	1960	1900	2160	2040	2200	2100
84	56430	1100	1050	900	1020	980	920	1080	950	1000
85	56440	2040	2200	1840	1900	1960	1800	2100	2160	2000
86	56500	2450	2700	2375	2750	2300	2250	2550	2500	2625
87	56600	2000	1800	2160	2200	1900	1840	2040	1960	2100
88	56700	1530	1470	1380	1575	1500	1425	1650	1350	1620
89	56750	1960	1900	2100	2160	2200	2040	2000	1800	1840
90	56760	3300	2760	2940	2700	3060	2850	3240	3150	3000

$j = 41, \dots, 90$ de 140

j	Código	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
91	56800	1900	2200	1800	1960	2000	2040	1840	2100	2160
92	56880	2700	2625	2250	2450	2550	2300	2500	2750	2375
93	56900	1080	1100	1020	920	980	1000	900	950	1050
94	56920	510	540	500	450	525	475	490	550	460
95	56940	2200	2040	2000	2100	1800	1840	1900	1960	2160
96	57000	980	900	1020	1080	1050	1100	950	1000	920
97	57050	500	510	490	550	475	460	450	540	525
98	57100	7360	8640	8400	7840	7600	8160	7200	8800	8000
99	57120	3060	2850	3240	2760	2700	3150	3000	2940	3300
100	57150	900	980	920	1100	1020	1000	1080	1050	950
101	57160	1020	900	1050	950	1100	980	1080	920	1000
102	57200	1900	2200	2100	2160	1960	1800	2040	2000	1840
103	57210	2850	3300	3240	3000	2760	2940	3150	2700	3060
104	57250	540	450	510	550	475	460	525	490	500
105	57300	3150	3000	2760	3060	3240	2700	3300	2940	2850
106	57301	2300	2500	2550	2700	2450	2375	2625	2750	2250
107	57400	450	490	550	475	525	460	510	500	540
108	57450	500	490	550	540	450	460	525	475	510
109	57500	550	450	510	460	500	540	475	490	525
110	57505	475	500	510	525	540	550	490	450	460
111	57510	1080	1000	1100	920	1050	980	900	1020	950
112	57520	920	1050	1000	1020	950	980	1080	1100	900
113	57530	1380	1575	1620	1350	1470	1650	1425	1530	1500
114	57540	2040	2100	1900	1960	1840	2200	1800	2000	2160
115	57550	2160	2100	1840	1900	1960	2000	1800	2040	2200
116	57700	4050	4725	4950	4140	4275	4860	4590	4500	4410
117	57900	2000	1800	1840	2100	2160	1960	1900	2040	2200
118	57950	2500	2550	2700	2750	2625	2375	2300	2250	2450
119	58000	2550	2300	2700	2500	2250	2750	2375	2450	2625
120	58050	2100	2040	1840	1900	2000	1800	2200	2160	1960
121	58200	4725	4140	4950	4410	4275	4500	4590	4050	4860
122	58201	1470	1425	1530	1620	1500	1650	1350	1380	1575
123	58250	950	1080	1000	900	980	1050	920	1100	1020
124	58300	950	980	1050	1020	1080	1000	920	900	1100
125	58310	1900	1800	2000	1960	2100	2040	2200	1840	2160
126	58350	3240	2760	2940	2700	3150	3000	3060	2850	3300
127	58351	920	1050	950	900	1020	1080	1100	1000	980
128	58400	2250	2450	2550	2700	2375	2300	2625	2500	2750
129	58500	3240	3060	3000	3150	2760	3300	2850	2700	2940
130	58900	3000	3150	2700	3240	2940	2760	3060	3300	2850
131	59000	4400	3680	3600	4200	4000	3920	4080	3800	4320
132	59100	2550	2625	2450	2300	2700	2250	2375	2500	2750
133	59300	2700	2250	2300	2500	2750	2625	2550	2375	2450
134	59320	2200	2040	2160	2100	1960	1840	1900	1800	2000
135	59340	1575	1530	1470	1425	1650	1620	1350	1500	1380
136	59400	2200	2000	1960	1840	2100	1900	2040	1800	2160
137	59500	2760	3060	3300	2850	3000	2700	3240	3150	2940
138	59510	2940	3150	2760	3060	2850	3000	3300	2700	3240
139	59600	1530	1500	1575	1470	1380	1425	1620	1350	1650
140	59900	13200	11400	11040	12240	12960	12600	11760	10800	12000

$j = 91, \dots, 140$ de 140

Anexo II

Planes de demanda/producción (unidades) de los tipos de motor (p_1, \dots, p_9) durante una jornada de 13 horas y media dividida en 2 turnos. Los planes se han agrupado en 7 categorías.

Ejemplar	4x4			Vans		Trucks				Total
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	
E_01	30	30	30	30	30	30	30	30	30	270
E_02	30	30	30	45	45	23	23	22	22	270
E_03	10	10	10	60	60	30	30	30	30	270
E_04	40	40	40	15	15	30	30	30	30	270
E_05	40	40	40	60	60	8	8	7	7	270
E_06	50	50	50	30	30	15	15	15	15	270
E_07	20	20	20	75	75	15	15	15	15	270
E_08	20	20	20	30	30	38	38	37	37	270
E_09	70	70	70	15	15	8	8	7	7	270
E_10	10	10	10	105	105	8	8	7	7	270
E_11	10	10	10	15	15	53	53	52	52	270
E_12	24	23	23	45	45	28	28	27	27	270
E_13	37	37	36	35	35	23	23	22	22	270
E_14	37	37	36	45	45	18	18	17	17	270
E_15	24	23	23	55	55	23	23	22	22	270
E_16	30	30	30	35	35	28	28	27	27	270
E_17	30	30	30	55	55	18	18	17	17	270
E_18	60	60	60	30	30	8	8	7	7	270
E_19	10	10	10	90	90	15	15	15	15	270
E_20	20	20	20	15	15	45	45	45	45	270
E_21	60	60	60	15	15	15	15	15	15	270
E_22	20	20	20	90	90	8	8	7	7	270
E_23	10	10	10	30	30	45	45	45	45	270

Descripción:

- *Categoría-1*: el ejemplar E_01 presenta idéntica demanda para los 9 tipos de motor (30 unidades por tipo).
- *Categoría-2*: el ejemplar E_02 presenta idéntica demanda para las tres familias de tipo de motor: 4x4, vans y trucks (90 unidades por familia).
- *Categoría-3*: los ejemplares E_03, E_04 y E_05 representan situaciones en las que la demanda de una de las familias de tipo de motor es baja y la de las otras dos es alta e idéntica.
- *Categoría-4*: los ejemplares E_06, E_07 y E_08 representan situaciones en las que la demanda de una de las familias de tipo de motor es alta y la de las otras dos es mediana e idéntica.
- *Categoría-5*: los ejemplares E_09, E_10 y E_11 representan situaciones en las que la demanda de una de las familias de tipo de motor es alta y la de las otras dos es baja e idéntica.
- *Categoría-6*: los ejemplares E_12 a E_17 representan situaciones en las que las demandas por familias siguen una progresión aritmética.

- *Categoría-7*: los ejemplares E_18 a E_23 representan situaciones en las que las demandas por familias siguen una progresión geométrica.

Anexo III

Tareas precedentes, tiempos de proceso ponderados (en centésimas de segundo –cs- a actividad normal) y área lineal requerida (cm) de las operaciones de ensamblado de motores, según planes de demanda del conjunto $E = \{1,2,3,6,9,12,18\}$

j	Tareas precedentes	\bar{t}_{j1}	\bar{t}_{j2}	\bar{t}_{j3}	\bar{t}_{j6}	\bar{t}_{j9}	\bar{t}_{j12}	\bar{t}_{j18}	a_j
1	--	6000	5956	5876	6038	6118	5944	6056	300
2	3, 31	7500	7503	7544	7460	7418	7518	7440	200
3	1	2000	1978	2011	1946	1913	1996	1918	50
4	3, 5	6000	5990	5902	6081	6169	5963	6120	100
5	1	2000	1999	2033	1967	1932	2010	1949	50
6	4, 5	6000	6026	5933	6117	6210	5988	6176	150
7	1	4500	4495	4480	4513	4528	4491	4518	100
8	1	1000	1001	1009	993	985	1003	989	50
9	1	2000	1982	1993	1973	1963	1991	1959	50
10	1	3000	3020	3027	3013	3007	3015	3020	50
11	1	1500	1490	1479	1499	1510	1490	1500	50
12	11	1500	1505	1511	1500	1495	1505	1500	50
13	1	1500	1486	1463	1509	1532	1483	1513	100
14	1, 13	1000	993	1002	984	975	998	976	50
15	9, 10, 11, 13, 14	800	810	806	814	817	805	820	100
16	9, 10, 11, 13, 14	800	803	791	816	828	798	823	50
17	9, 10, 11, 13, 14	8000	7980	8000	7960	7940	7991	7940	100
18	9, 10, 11, 13, 14	4000	3970	3950	3988	4009	3976	3984	50
19	9, 10, 11, 13, 14	500	501	497	505	509	499	508	50
20	9, 10, 11, 13, 14	500	503	505	501	499	503	501	50
21	9, 10, 11, 13, 14	500	502	494	510	517	499	515	50
22	26, 27	700	697	690	704	712	696	706	50
23	26, 27	700	700	699	701	702	700	701	50
24	26, 27	3000	3014	3027	2998	2986	3014	2999	50
25	26, 27	3000	3029	3072	2986	2943	3034	2979	50
26	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21	500	496	488	504	512	495	506	50
27	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21	500	500	494	508	514	498	511	50
28	22, 23, 24, 25	3000	2992	3000	2985	2977	2998	2977	100
29	28	1000	998	1006	990	982	1001	985	50
30	29	1500	1498	1503	1494	1489	1500	1491	100
31	6, 7, 8, 30	1000	1002	1020	985	967	1007	977	0
32	31	1500	1490	1484	1497	1503	1491	1495	50
33	32	3000	2977	2930	3025	3072	2968	3037	100
34	32	1000	1011	1014	1007	1004	1008	1011	50
35	36	500	499	498	499	499	499	499	50
36	32	2500	2510	2529	2494	2475	2514	2490	100
37	32, 35	1500	1504	1489	1519	1534	1497	1529	0
38	33, 34, 36, 37	500	501	492	511	520	498	516	50
39	33, 34, 36, 37	500	500	501	499	498	500	498	50
40	33, 34, 36, 37	500	499	503	495	491	501	492	50

$j = 1, \dots, 40$ de 140

j	Tareas precedentes	\bar{t}_{j1}	\bar{t}_{j2}	\bar{t}_{j3}	\bar{t}_{j6}	\bar{t}_{j9}	\bar{t}_{j12}	\bar{t}_{j18}	a_j
41	38, 39, 40	6000	5976	6067	5883	5793	6016	5826	50
42	38, 39, 40	1500	1507	1496	1518	1529	1501	1527	150
43	38, 39, 40	1500	1499	1488	1509	1519	1495	1514	150
44	41, 42, 43	2500	2487	2454	2519	2552	2481	2529	50
45	41, 42, 43	2500	2520	2528	2514	2506	2515	2520	50
46	44, 45	500	504	507	500	497	504	500	50
47	46	3500	3538	3551	3525	3513	3529	3538	50
48	46	3500	3499	3538	3460	3422	3514	3441	50
49	42, 43	500	498	484	511	525	494	517	50
50	47, 48, 49	1500	1489	1467	1513	1536	1485	1519	50
51	47, 48, 49	2500	2517	2522	2511	2505	2513	2517	0
52	47, 48, 49	3000	2993	2972	3011	3032	2990	3018	0
53	47, 48, 49	1500	1502	1503	1502	1501	1502	1502	0
54	47, 48, 49	1500	1522	1518	1524	1527	1513	1537	0
55	47, 48, 49	2000	1988	1978	1999	2009	1989	1998	0
56	47, 48, 49	1000	992	987	998	1004	993	997	0
57	50, 51, 52, 53, 54, 55, 56	1000	992	1001	984	975	998	975	50
58	57, 59, 60	2000	2016	2044	1989	1960	2020	1982	50
59	41	500	498	506	490	483	501	485	0
60	42, 43	2000	1991	1982	2001	2010	1992	2001	50
61	57, 58	4500	4497	4585	4408	4320	4528	4362	100
62	61	3000	3018	3079	2959	2899	3032	2938	50
63	57	3000	3026	3083	2967	2909	3038	2951	50
64	57	1000	1007	1021	994	980	1009	990	50
65	61, 62, 63, 64	500	503	508	498	493	504	497	0
66	61, 62, 63, 64	1000	1001	975	1026	1051	992	1039	50
67	66	1500	1480	1462	1499	1517	1481	1498	50
68	65, 67	6000	5987	6036	5938	5889	6008	5907	150
69	68	1000	1010	994	1025	1041	1001	1038	50
70	67	3000	2974	2949	2999	3025	2974	2999	100
71	68	1000	995	979	1011	1027	992	1017	50
72	68	1000	998	1017	978	959	1005	968	50
73	71, 72	4000	4020	3984	4059	4095	3999	4087	150
74	68, 69, 70, 73	2500	2473	2447	2499	2524	2473	2498	50
75	74	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	50
76	74	1000	1006	1027	985	964	1011	977	100
77	75	1500	1514	1497	1531	1548	1504	1546	50
78	79	1500	1513	1501	1525	1537	1504	1538	50
79	74	1500	1492	1481	1503	1514	1491	1505	50
80	76, 77, 78	1000	1008	1030	985	963	1013	978	50
81	76, 77, 78	1000	1004	1015	994	984	1006	991	100
82	80, 81	1000	1000	1009	991	982	1003	987	0
83	82	2000	1978	2011	1946	1913	1996	1918	50
84	83	1000	1001	996	1006	1012	1000	1010	0
85	75, 84	2000	1990	1979	2003	2014	1989	2003	50
86	82	2500	2504	2504	2506	2507	2502	2508	50
87	82	2000	2007	2014	2000	1993	2007	2000	50
88	84	1500	1503	1517	1489	1475	1507	1483	25
89	88	2000	2030	2043	2015	2001	2025	2023	50
90	88	3000	2980	2973	2987	2993	2985	2980	50

$j = 41, \dots, 90$ de 140

j	Tareas precedentes	\bar{t}_{j1}	\bar{t}_{j2}	\bar{t}_{j3}	\bar{t}_{j6}	\bar{t}_{j9}	\bar{t}_{j12}	\bar{t}_{j18}	a_j
91	85, 86, 87, 88	2000	1993	2003	1985	1975	1998	1977	50
92	89, 90, 91	2500	2501	2494	2510	2517	2499	2514	50
93	92	1000	997	974	1020	1043	990	1030	50
94	89, 90, 91	500	499	494	505	511	498	508	50
95	94	2000	1998	1971	2026	2052	1990	2038	50
96	93, 95, 99	1000	1008	1022	994	981	1010	992	50
97	93, 95, 99	500	502	503	501	500	501	502	50
98	92	8000	7962	7908	8021	8074	7952	8028	0
99	89, 90, 91	3000	2959	2929	2989	3020	2963	2984	0
100	98, 99	1000	1005	1028	981	957	1011	971	50
101	98, 99	1000	1004	1008	999	995	1004	999	50
102	100, 101	2000	2016	1999	2033	2050	2004	2049	50
103	100, 101	3000	2991	2944	3037	3084	2978	3056	50
104	102, 103	500	502	503	501	501	502	502	0
105	106	3000	3023	3040	3005	2988	3022	3008	50
106	100, 101	2500	2508	2528	2489	2469	2511	2483	50
107	100, 101, 104	500	500	501	499	498	500	498	0
108	100, 101, 104	500	500	496	505	509	499	507	0
109	108	500	497	495	499	501	497	499	50
110	108	500	505	508	502	499	505	503	0
111	11, 109	1000	1002	983	1022	1041	995	1032	0
112	11, 109	1000	997	999	994	992	998	992	0
113	108	1500	1487	1474	1500	1512	1487	1500	50
114	113	2000	1984	1975	1994	2003	1986	1991	0
115	113	2000	1990	1977	2005	2018	1989	2007	0
116	111, 112, 114, 115	4500	4459	4418	4497	4537	4458	4496	100
117	118	2000	2011	2056	1968	1923	2022	1951	50
118	116	2500	2538	2523	2553	2568	2520	2580	0
119	116	2500	2481	2469	2493	2505	2483	2489	0
120	119	2000	1991	1990	1992	1992	1994	1988	50
121	105, 107, 117, 120	4500	4483	4442	4523	4565	4476	4535	150
122	121	1500	1508	1519	1497	1486	1509	1496	50
123	122	1000	991	984	997	1003	991	996	50
124	123	1000	1008	1013	1003	998	1006	1004	0
125	124	2000	1997	2029	1964	1933	2009	1947	100
126	125	3000	2986	2988	2984	2982	2992	2976	50
127	126	1000	991	997	985	980	996	978	50
128	117, 12	2500	2499	2527	2472	2444	2508	2457	50
129	126	3000	3002	2968	3034	3068	2991	3052	50
130	127, 128, 129	3000	3010	3031	2991	2970	3014	2985	75
131	117, 12	4000	4008	4046	3970	3931	4020	3954	50
132	131	2500	2502	2491	2516	2528	2497	2523	100
133	130	2500	2515	2546	2481	2450	2522	2473	50
134	132	2000	2016	1977	2055	2094	1998	2083	50
135	134	1500	1509	1503	1514	1520	1504	1521	50
136	135	2000	1999	1981	2017	2035	1994	2026	50
137	136	3000	2991	2974	3007	3023	2987	3011	50
138	136	3000	2989	3001	2976	2963	2997	2964	50
139	137, 138	1500	1491	1476	1505	1520	1489	1508	100
140	133, 139	12000	12093	12160	12020	11953	12091	12033	0

$j = 91, \dots, 140$ de 140