Caracterizaciones combinatorias y algebraicas de grafos distancia-regulares

M. A. Fiol[1]

Universitat Politècnica de Catalunya, Departament de Matemàtica Aplicada IV, Barcelona, Catalonia. fiol@ma4.upc.edu

Resumen. Los grafos distancia-regulares aparecen a menudo en el estudio de estructuras matemáticas con un alto grado de simetría y/o regularidad. Un ejemplo bien conocido de tales grafos son los esqueletos de los sólidos platónicos. Desde que fueron propuestos por Norman Biggs, los grafos distancia-regulares han sido caracterizados por numerosos resultados, tanto de carácter combinatorio como algebraico. Como ejemplo del primer caso, sabemos que un grafo es distancia-regular si, y sólo si, el número de caminos de una longitud dada entre dos vértices sólo depende de la distancia entre dichos vértices. En esta charla se van a presentar y comparar las diferentes caracterizaciones conocidas, tanto las más clásicas como las que han sido recientemente descubiertas por el conferenciante y algunos de sus colaboradores. Entre las últimas, cabe destacar el que ya es conocido en la literatura com el 'teorema del exceso espectral'. Este resultado puede considerarse como una caracterización casi-espectral, y afirma que un grafo es distancia-regular si, y sólo si, su exceso espectral (una cantidad calculable a partir de su matriz de adyacencia) es igual a su exceso medio (el número medio de vértices a distancia máxima de cada vértice).

1 Preliminaries

Recordemos primero algunas notaciones y resultados básicos. Para más información sobre teoría espectral de grafos y distancia-regularidad consultar, por ejemplo, [3,5,6,8,10,20,22,23,27]. En este artículo, Γ denota un grafo con conjunto $V = V(G)$, de $n = |V|$ vertices, matriz de adyacencia $\boldsymbol{A}$ y espectro $\mathrm{sp}\,\Gamma = \mathrm{sp}\,\boldsymbol{A} = \{\lambda_0^{m_0}, \lambda_1^{m_1}, \ldots, \lambda_d^{m_d}\}$, donde los distintos autovalores de Γ estan en orden decreciente, $\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_d$, y los supraíndices denotan sus multiplicidades $m_i = m(\lambda_i)$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Entonces, como es bien conocido, λ_0, con multiplicidad $m_0 = 1$, coincide con el radio espectral de $\boldsymbol{A}$, y tiene un autovector (columna) positivo (el *vector de Perron*) $\boldsymbol{\alpha}$, que normalizamos de manera que $\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = n$. Para cada $i = 0, \ldots, d$, la matriz idempotente $\boldsymbol{E}_i$ representa la proyección ortogonal sobre el espacio propio asociado al autovalor λ_i. Denotamos por $\mathrm{dist}(u, v)$ la distancia entre los vértices $u, v \in V$. Entonces, con $\Gamma_i(u) = \{v | \mathrm{dist}(u, v) = i\}$, la *eccentricidad* de un vértice u es $\mathrm{ecc}(u) = \max\{\mathrm{dist}(u, v) | v \in V\}$, y el *diámetro* de Γ es

$D = \text{máx}\{\text{ecc}(u)|u \in V\}$. Para cada $0 \le i \le D$, la *matriz distancia-i* $\boldsymbol{A}_i$ tiene elementos $(\boldsymbol{A}_i)_{uv} = 1$ si $\text{dist}(u, v) = i$, y $(\boldsymbol{A}_i)_{uv} = 0$, en otro caso.

1.1 Polinomios predistancia y números de preintersección

Dado un grafo Γ con espectro indicado anteriormente, los *polinomios predistancia* $p_0, \ldots, p_d$, introducidos por Fiol y Garriga en [25], constituyen una sequencia de polinomios ortogonales con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle_\Gamma = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{d} m_i f(\lambda_i) g(\lambda_i), \tag{1}$$

normalizados de tal manera que $\|p_i\|_\Gamma^2 = p_i(\lambda_0)$ (es conocido que $p_i(\lambda_0) > 0$ para todo $i = 0, \ldots, d$). Algunas propiedades de estos polinomios son las siguientes (ver Cámara, Fàbrega, Fiol, y Garriga [9]):

(a) $p_0 = 1$, $p_1 = x$, y las constantes de la relación de recurrencia de tres términos

$$x p_i = \beta_{i-1} p_{i-1} + \alpha_i p_i + \gamma_{i+1} p_{i+1}, \tag{2}$$

donde $\beta_{-1} = \gamma_{d+1} = 0$, satisfacen $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \lambda_0$ para cada $i = 0, \ldots, d$.

(b) El valor de p_d en λ_0 es:

$$p_d(\lambda_0) = n \left(\sum_{i=0}^{d} \frac{\pi_0^2}{m_i \pi_i^2} \right)^{-1}, \tag{3}$$

donde $\pi_i = \prod_{j \ne i} |\lambda_i - \lambda_j|$, para $i = 0, \ldots, d$.

(c) $H = p_0 + p_1 + \cdots + p_d$ es el *polinomio de Hoffman* que caracteriza la regularidad de Γ a través de la condición $H(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}$, donde $\boldsymbol{J}$ denota la matrix todo 1's (ver Hoffman [30]).

A partir de los polinomios predistancia, definimos los *números de preintersección* ξ_{ij}^h [13] como los coeficientes de Fourier de $p_i p_j$ en términos de la base $\{p_h\}_{0 \le h \le d}$, es decir,

$$\xi_{ij}^h = \frac{\langle p_i p_j, p_h \rangle_\Gamma}{\|p_h\|_\Gamma^2} = \frac{1}{n p_h(\lambda_0)} \sum_{r=0}^{d} m(\lambda_r) p_i(\lambda_r) p_j(\lambda_r) p_h(\lambda_r). \tag{4}$$

Notar que, en particular, los coeficientes de la relación de recurrencia (2) son $\alpha_i = \xi_{1,i}^i$, $\beta_i = \xi_{1,i+1}^i$, y $\gamma_i = \xi_{1,i-1}^i$. Como era de esperar, cuando Γ es distancia-regular, los polinomios predistancia y los números de preintersección resultan ser, respectivamente, los *polinomios distancia*, que evaluados en $\boldsymbol{A}$ dan las matrices distancia $p_i(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}_i$, y que satisfacen

$p_i(\lambda_0) = k_i = \Gamma_i(u)$ para todo $u \in V$ e $i = 0, \ldots, D$; y los *números de intersección* $p_{ij}^k = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)|$, donde $\mathrm{dist}(u,v) = k$. Para un grafo cualquiera, decimos que el número p_{ij}^k está *dien definido* cuando los números $p_{ij}^k(u,v) = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)|$ son idénticos para todos los pares de vértices u, v a distancia k, y, en particular, escribimos $a_i = p_{1,i}^i$, $b_i = p_{1,i+1}^i$, y $c_i = p_{1,i-1}^i$.

2 Caracterizaciones combinatorias

Los dos resultados siguientes dan caracterizaciones puramente combinatorias de la distancia-regularidad.

Teorema 1. *Un grafo Γ con diámetro D es distancia-regular si y sólo si se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

(a) *Dados dos vértices u, v a distancia $k = \mathrm{dist}(u,v)$, el número de vértices*

$$p_{ij}^k(u,v) = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)|$$

sólo depende de i, j, k. Entonces $p_{ij}^k(u,v) = p_{ij}^k$ són los llamados números de intersección. (*Es decir, los p_{ij}^k's estan bien definidos*).

(b) *Dados dos vértices u, v a distancia $k = \mathrm{dist}(u,v)$, $0 \le k \le D$, los números*

$$c_k(u,v) = |\Gamma_{k-1}(u) \cap \Gamma(v)|, \; a_k(u,v) = |\Gamma_k(u) \cap \Gamma(v)|, \; b_k(u,v) = |\Gamma_{k+1}(u) \cap \Gamma(v)|$$

sólo dependen de k, en cuyo caso los denotamos por c_k, a_k y b_k, respectivamente. (Es decir, a_k, b_k y c_k estan bien definidos).

Teorema 2 ([33,23,13]). *Un grafo Γ con diámetro D es distancia-regular si y sólo si se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

(a) *Para cada número no negativo ℓ, el número $a_{uv}^{\ell} = (\boldsymbol{A}^{\ell})_{uv}$ de recorridos de longitud ℓ entre dos vértices u, v sólo depende de $k = \mathrm{dist}(u,v)$.*

(b) *Γ es regular y, para cada $\ell \in \{k, k+1\}$, $\ell \le D$, el número a_{uv}^{ℓ} de recorridos de longitud ℓ entre dos vértices u, v sólo depende de $k = \mathrm{dist}(u,v)$.*

(c) *Γ es regular, bipartito, y $a_{uv}^{(\ell)} = a_i^{(\ell)}$ para $\ell = i \le D-2$ y algunas constantes $a_i^{(\ell)}$.*

3 Caracterizaciones algebraicas

Usando las matrices distancia, los Teoremas 1 y 2 pueden enunciarse de la forma siguiente:

Teorema 3. *Un grafo Γ con diámetro D es distancia-regular si, y sólo si, se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

(*a*) *El producto de matrices distancia satisface*

$$A_iA_j = \sum_{k=0}^{D} p_{ij}^k A_k \qquad (0 \le i,j \le D)$$

para algunas constantes p_{ij}^k *(los números de intersección).*

(*b*) *Las matrices distancia satisfacen la siguiente relación de recurrencia:*

$$AA_k = b_{k-1}A_{k-1} + a_kA_k + c_{k+1}A_{k+1} \qquad (0 \le k \le D)$$

para algunas constantes a_k*,* b_k *y* c_k *(con* $b_{-1} = c_{D+1} = 0$*).*

(*c*) *Las potencias de la matriz de adyacencia* A *sumplen:*

$$A^\ell \circ A_i = a_i^{(\ell)} A_i \qquad (0 \le i,\ell \le d)$$

para algunas constantes $a_i^{(\ell)}$.

Por otra parte, resulta que

$$\mathcal{A} = \mathbb{R}_d[A] = \mathrm{span}\{I, A, A^2, \ldots, A^d\}$$

es un álgebra con el producto ordinario de matrices y bases ortogonales $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ y $\{p_0(A), p_1(A), \ldots, p_d(A)\}$, denominada *álgebra de adyacencia.* Por otra parte,

$$\mathcal{D} = \mathrm{span}\{I, A, A_2, \ldots, A_D\}$$

constituye un álgebra con el producto de Hadamard "$\circ$"de matrices, definido por $(X \circ Y)_{uv} = (X)_{uv}(Y)_{uv}$. Llamamos a $\mathcal{D}$ el $\circ$*-algebra de distancia.* Notar que, cuando Γ es regular, $I, A, J \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ ya que $J = H(A) = \sum_{i=0}^{D} A_i$. Así, $\dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}) \ge 3$ siempre que Γ no sea un grafo completo (en este caso excepcional, $J = I + A$).

Una caracterización clásica de la distancia-regularidad que usa dichas álgebras es la siguiente:

Teorema 4 ([5,6]). *Un grafo* Γ *regular con* $d+1$ *autovalores distintos, diámetro* $D = d$*, álgebra de adyacéncia* $\mathcal{A}$ *y* $\circ$*-álgebra de distancia* $\mathcal{D}$ *es distancia-regular si, y sólo si, se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

(*a*) $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

(*b*) $\dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}) = d + 1$.

En el siguiente resultado, que constitute una formulación equivalente al teorema anterior, p_{ji} y q_{ij} son constantes:

Teorema 5 ([5,6]). *Un grafo* Γ *regular con* $d+1$ *autovalores distintos, diámetro* $D = d$*, e idempotentes* $E_0, \ldots, E_d$ *es distancia-regular si y sólo si se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

$(a)\, \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{E}_j = p_{ji} \boldsymbol{E}_j, \quad i, j = 0, 1, \ldots, d(= D).$
$(b)\, \boldsymbol{E}_j \circ \boldsymbol{A}_i = q_{ij} \boldsymbol{A}_i, \quad i, j = 0, 1, \ldots, d.$

Cuando se cumples las condiciones (a), Los polinomios predistancia resultan ser los *polinomios distancia* que satisfacen $p_i(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, d$ (ver, por ejemplo, Bannai y Ito [3]). Además, para grafos en general que no cumplen necesariamente $D = d$, las condiciones (a) son una caracterización de los llamados *grafos distancia-polinomiales*, introducidos por Weichsel [34] (ver también Beezer [4] y Dalfó, van Dam, Fiol, Garriga y Gorissen [12]). Esto es equivalente a $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ (pero no necesariamente $\mathcal{D} = \mathcal{A}$); es decir, cada matriz distancia $\boldsymbol{A}_i$ es un polinomio (no necesariamente p_i) en $\boldsymbol{A}$. En contraste con esta situación, la condición (b) es equivalente a $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ y, por tanto, a $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ (lo cual implica $d = D$) ya que $\dim \mathcal{A} \geq D + 1 = \dim \mathcal{D}$.

Teorema 6 ([27,22,12]). *Un grafo Γ regular con $d+1$ autovalores distintos, diáametro $D = d$, e idempotentes $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_d$ es distancia-regular si y sólo si se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

$(a)\, \boldsymbol{A}_i = p_i(\boldsymbol{A})$ *para* $i = 0, 1, \ldots, D(= d)$
$(b)\, \boldsymbol{A}_d \in \mathcal{A}$.
$(c)\, \boldsymbol{A}_d = p_d(\boldsymbol{A})$.
$(d)\, \boldsymbol{A}_i = p_i(\boldsymbol{A})$ *para* $i = d-2, d-1$.
$(e)\, \Gamma$ *es bipartito y* $\boldsymbol{A}_i = p_i(\boldsymbol{A})$ *para* $i = d-3, d-2$.
$(f)\, \Gamma$ *es bipartito y* $\boldsymbol{A}_i = p_i(\boldsymbol{A})$ *para* $i = d-4, d-2$.
$(g)\, \boldsymbol{E}_j \in \mathcal{D}$ *para* $j = 1, d$.
$(h)\, \Gamma$ *es bipartito y* $\boldsymbol{E}_1 \in \mathcal{D}$.
$(i)\, \boldsymbol{A}^\ell \circ \boldsymbol{A}_i \in \mathcal{D}$ *para* $\ell = i, i+1$ *y* $i \leq d-1$.

Notar que, como muestran los resultados anteriores, las condiciones para tener distancia-regularidad pueden ser relajadas si asumimos que el grafo es bipartito, obteniéndose así caracterizaciones más 'económicas'.

4 Caracterizaciones espectrales

Un tema central en la teoría espectral de grafos es el estudio de hasta que punto el espectro de un grafo lo determina unívocamente o, al menos, algunas de sus características, ver [29,16,17]. En particular se ha prestado una atención especial a la formulación de caracterizaciones espectrales o cuasi-espectrales de la distancia-regularidad. En este contexto, existen tres clasees de condiciones que nos permiten concluir que un grafo conexo Γ es distancia-regular. A saber:

(A) El espectro de Γ satisface unas determinadas condiciones.
(B) Γ es coespectral con un grafo distancia-regular que satisface unas determinadas condiciones combinatorias.
(C) Γ satisface unas determinadas condiciones espectrales y combinatorias.

En realidad, las clases (B) y (C) estan estrechamente relacionadas, en el sentido de que la condición sobre Γ de ser coespectral con un grafo distancia-regular implica que el espectro de Γ satisface unas condiciones bien definidas.

Algunos resultados dentro de cada categoría son los siguientes:

(a1) Un grafo conexo Γ es distancia-regular si es regular (una propiedad que puede ser determinada a partir del espectro) y tiene $d = 3$ autovalores distintos. (Folclore, ver por ejemplo Godsil [28]). Ejemplo: El grafo de Petersen.

(a2) El 'teorema del cuello impar': Un grafo conexo Γ es distancia-regular si tiene $d+1$ autovalores distintos y cuello impar (es decir, el ciclo más corto de longitud impar) $2d+1$, (éste también puede ser deducido a partir del espectro). (Ver Van Dam y Haemers [18], Lee y Weng [32], y Van Dam y Fiol [14]). Ejemplo: Los 'cubos plegados', tal como el grafo de Clebsch.

(b1) Si el grafo Γ es coespectral con el grafo del dodecaedro o del icosahedro, entonces Γ es tal grafo. (Ver Brouwer y Haemers [7]).

(b2) Un grafo Γ es distance-regular si es cospectral con un grafo distancia-regular graph con diámetro d y números de intersección $c_1 = \cdots = c_{d-1} = 1$ (ver Van Dam y Haemers [15]). Ejemplo: El grafo de Coxeter.

(c1) Un grafo conexo y regular Γ con $d+1$ autovalores distintos es r-antipodal y distancia-regular si, y sólo si, su distancia-d grafo esta constituido por copias disjuntas del grafo completo K_r, con r determinado por el spectro. (See Fiol [21]). Examplo: El grafo de Klein.

(c2) El 'teorema del exceso espectral': Un grafo conexo y regular Γ es distancia-regular si, y sólo si, su 'exceso espectral' (un número que puede ser calculado a partir del espectro) es igual a su 'exceso medio' (la media de los números de vértices a distancia máxima de cada vértice). (Ver Fiol y Garriga [25], o Van Dam [11], y Fiol, Gago, y Garriga [24] para demostraciones cortas del resultado).

Los resultados conocidos de clase (B) vienen recogidos en el siguiente resultado:

Teorema 7 ([8]). *Si G es un grafo distancia-regular con diámetro $D = d$, cuello g, y satisface una de las propiedades siguientes, entonces, cada grafo Γ cospectral con G es tambien distance-regular, y tiene los mismos números de intersección que G.*

(i) $g \geq 2d-1$,
(ii) $g \geq 2d-2$ *y G es bipartito,*
(iii) $g \geq 2d-2$ *y* $c_{d-1}c_d < -(c_{d-1}+1)(\lambda_1 + \cdots + \lambda_d)$,
(iv) G es un grafo 'odd' generalizado [31], esto es, $a_1 = \cdots = a_{d-1} = 0$, $a_d \neq 0$,
(v) $c_1 = \cdots = c_{d-1} = 1$,
(vi) G es el grafo del dodecaedro, o del icosaedro,
(vii) G es el grafo 'coset' del código de Golay ternario extendido,

(viii) es el grafo de Ivanov-Ivanov-Faradjev.

Los casos (*i*), (*iv*), y (*vi*) (Ejemplo (b1)) son debidos a Brouwer y Haemers [7]. Los casos (*ii*), (*iii*), (*v*) (Ejemplo (b2)), y (*vii*) fueron demostrados por Van Dam y Haemers [15], mientras que el caso (*viii*) fue probado por Van Dam, Haemers, Koolen, y Spence [19]. Tal como se menciona en el texto de Brouwer y Haemers [8], (*ii*) es un caso especial de (*iii*), los ciclos C_n y los grafos fuertemente regulares ($d = 2$) son consequencia de (*i*), y los grafos bipartitos distancia-regulares ($d = 3$) son un caso especial de (*ii*). Un ejemplo de (*iii*) es el grafo 'coset' del código de Golay binario doblemente truncado; ejemplos de (*iv*) son los grafos 'odd' y los cubos plegados, y un ejemplo de (*v*) es el grafo línea del grafo de Petersen.

Los dos primeros resultados del Theorem 7 pueden ser generalizados como resultados de clase (A). (La condición de ser bipartito es deducible a partir del espectro por la condición $\lambda_d = -\lambda_0$):

Teorema 8 ([1]). *Un grafo regular Γ, con $d+1$ autovalores distintos y cuello g, es distance-regular si se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

(a) $g \geq 2d-1$,
(b) $g \geq 2d-2$ *y* Γ *es bipartito.*

Asimismo, el siguiente resultado corresponde a la versión de clase (A) del Theorem 7(*v*) y a su contrapartida para grafos bipartitos. (Recuérdese que los números de preintersección estan determinados por el espectro del grafo.)

Teorema 9 ([1]). *Sea Γ un grafo regular con $d+1$ autovalores distintos y números de preintersección $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$. Entonces, Γ es distancia-regular si se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:*

(a) $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{d-1} = 1$.
(b) Γ *es bipartito y* $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{d-2} = 1$.

Para terminar, enunciamos formalmente el 'teorema del exceso espectral' como ejemplo de resultado de clase (C):

Teorema 10 ([25,11,24]). *Sea Γ un grafo conexo y regular con $d+1$ autovalores distintos, exceso espectral $p_d(\lambda_0)$ (dado por (3)) y exceso medio $\overline{k}_d = \frac{1}{n}\sum_{u\in V}|\Gamma_d(u)|$. Entonces Γ es distancia-regular si, y sólo si,*

$$\overline{k}_d = p_d(\lambda_0).$$

Agradecimientos. Investigación subvencionada por el Ministerio de Ciencia e Innovación y el 'European Regional Development Fund' en el marco del proyecto MTM2011-28800-C02-01, y por l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca en el proyecto 2009SGR1387.

Referencias

[1] A. Abiad, C. Dalfó, and M.A. Fiol, Algebraic characterizations of regularity properties in bipartite graphs, *European J. Combin.* **34** (2013) 1223–1231 (Special Issue in memory of Yahya Ould Hamidoune).

[2] A. Abiad, C. Dalfó, E.R. van Dam, and M.A. Fiol, On some spectral and quasi-spectral characterizations of distance-regular graphs, *Electro. J. Algebra*, submitted (2013).

[3] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, London, 1974, 1984.

[4] R.A. Beezer, Distance polynomial graphs, in *Proceedings of the Sixth Caribbean Conference on Combinatorics and Computing, Trinidad, 1991*, 51–73.

[5] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974, second edition, 1993.

[6] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.

[7] A.E. Brouwer and W.H. Haemers, The Gewirtz graph: An exercise in the theory of graph spectra, *European J. Combin.* **14** (1993) 397–407.

[8] A.E. Brouwer and W.H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer, 2012; available online at `http://homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipm/`.

[9] M. Cámara, J. Fàbrega, M.A. Fiol, and E. Garriga, Some families of orthogonal polynomials of a discrete variable and their applications to graphs and codes, *Electron. J. Combin.* **16(1)** (2009), #R83.

[10] D.M. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of Graphs. Theory and Application*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, second edition, 1982.

[11] E.R. van Dam, The spectral excess theorem for distance-regular graphs: a global (over)view, *Electron. J. Combin.* **15(1)** (2008), #R129.

[12] C. Dalfó, E.R. van Dam, M.A. Fiol, E. Garriga, and B.L. Gorissen, On almost distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. A* **118** (2011), no. 3, 1094–1113.

[13] C. Dalfó, M.A. Fiol, and E. Garriga, Characterizing (ℓ, m)-walk-regular graphs, *Linear Algebra Appl.* **433** (2010), no. 9, 1821–1826.

[14] E.R. van Dam and M.A. Fiol, A short proof of the odd-girth theorem, *Electron. J. Combin.* **19(3)** (2012) #P12.

[15] E.R. van Dam and W.H. Haemers, Spectral characterizations of some distance-regular graphs, *J. Algebraic Combin.* **15** (2002) 189–202.

[16] E.R. van Dam and W.H. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum?, *Linear Algebra Appl.* **373** (2003) 241–272.

[17] E.R. van Dam and W.H. Haemers, Developments on spectral characterizations of graphs, *Discrete Math.* **309** (2009) 576–586.

[18] E.R. van Dam and W.H. Haemers, An odd characterization of the generalized odd graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **101** (2011) 486–489.

[19] E.R. van Dam, W.H. Haemers, J.H. Koolen, and E. Spence, Characterizing distance-regularity of graphs by the spectrum, *J. Combin. Theory Ser. A* **113** (2006) 1805–1820.

[20] E.R. van Dam, J.H. Koolen, and H. Tanaka, Distance-regular graphs, manuscript (2012), available online at `http://lyrawww.uvt.nl/~evandam/files/drg.pdf`.

[21] M.A. Fiol, An eigenvalue characterization of antipodal distance-regular graphs, *Electron. J. Combin.* **4** (1997), no. 1, #R30.

[22] M.A. Fiol, On pseudo-distance-regularity. *Linear Algebra Appl.* **323** (2001), 145–165.

[23] M.A. Fiol, Algebraic characterizations of distance-regular graphs, *Discrete Math.* **246** (2002), 111–129.

[24] M.A. Fiol, S. Gago, and E. Garriga, A simple proof of the spectral excess theorem for distance-regular graphs, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), no. 9, 2418–2422.

[25] M.A. Fiol and E. Garriga, From local adjacency polynomials to locally pseudo-distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **71** (1997), 162–183.

[26] M.A. Fiol and E. Garriga, On the algebraic theory of pseudo-distance-regularity around a set, *Linear Algebra Appl.* **298** (1999), 115–141.

[27] M.A. Fiol, E. Garriga, and J.L.A. Yebra, Locally pseudo-distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **68** (1996), 179–205.

[28] C.D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, NewYork, 1993.

[29] W.H. Haemers, Distance-regularity and the spectrum of graphs, *Linear Algebra Appl.* **236** (1996) 236–278.

[30] A.J. Hoffman, On the polynomial of a graph, *Amer. Math. Monthly* **70** (1963) 30–36.

[31] T. Huang and C. Liu, Spectral characterization of some generalized odd graphs, *Graphs Combin.* **15** (1999) 195–209.

[32] G.-S. Lee and C.-W. Weng, The spectral excess theorem for general graphs, *J. Combin. Theory, Ser. A* **119** (2012) 1427–1431.

[33] P. Rowlinson, Linear algebra, in *Graph Connections* (L.W. Beineke and R.J. Wilson, eds.), Oxford Lecture Ser. Math. Appl., Vol. 5, 86–99, Oxford Univ. Press, New York, 1997.

[34] P.M. Weichsel, On distance-regularity in graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **32** (1982) 156–161.