Las presentes notas son una referencia escrita del curso "Teoria de Sistemes Lineals" que el autor viene impartiendo desde el curso 1994/95 en la Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona de la UPC.

A la elaboración de estas notas han precedido el estudio y la consulta de diversos textos especializados en el tema. En la bibliografía que se incluye al final del texto hemos seleccionado los libros que nos han parecido más significativos. Al lector que desee ampliar conocimientos le recomendamos la consulta de la citada biliografía.

La elaboración de estas notas se ha beneficiado de las discusiones mantenidas durante los cursos precedentes con los profesores Josep Ferrer, Dolors Magret y Xavier Puerta, así como de sus sugerencias y comentarios. A todos ellos y a Rosa Maria Cuevas, que se ha encargado de la realización en lenguaje TeX de las mismas, les expresso mi mayor agradecimiento.

ETSEIB, Septiembre de 2000

Ferran Puerta

Índice

Notaciones

Sea K el cuerpo real o complejo.

1. Convendremos en representar los vectores de K^n mediante matrices columna. Esto es, si $x \in K^n$, escribiremos
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
2. Si $A \in M_{m\times n}(K)$ designaremos, si no hay peligro de confusión, con la misma letra A la aplicación lineal $A : K^n \longrightarrow K^m$ definida por $A(x) = Ax$ (producto).

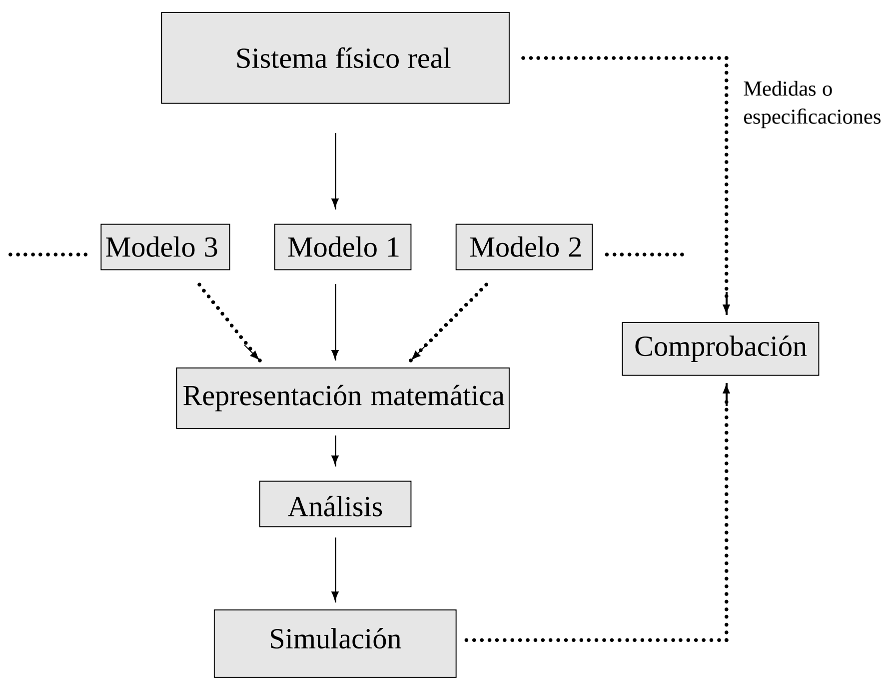
   Cuando sea conveniente distinguir, designaremos esta aplicación lineal por A_a.
3. Si A es una matriz compleja indicaremos por A^* la matriz traspuesta conjugada de A. Por conveniencia de escritura utilizaremos esta misma notación para designar la matriz traspuesta de A, cuando A es real.
4. Si $x_1, \ldots, x_p$ son vectores de un espacio vectorial, indicamos por $[x_1, \ldots, x_p]$ el subespacio vectorial que engendran, esto es, el conjunto de vectores de la forma $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son escalares arbitrarios.
5. En $\mathbb{C}^n$ consideramos el producto hermítico habitual, esto es, si $x, y \in \mathbb{C}$
$$< x, y >= y^* x = \sum_i x_i \overline{y}_i\,.$$
   Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$< x, y >= y^* x = x^* y = \sum_i x_i y_i\,.$$
6. Si $x(t)$ es una función derivable, indicamos indistintamente por $\dot{x}(t)$ o por $\dfrac{dx(t)}{dt}$ su función derivada.
7. En las referencias internas de un capítulo, éste se omite. Así, si nos referimos, por ejemplo, a la proposición (3.2) del capítulo 4, escribiremos simplemente (3.2) si lo hacemos desde el propio capítulo o (4.3.2) si lo hacemos desde otro capítulo.

Capítulo 1

Sistemas lineales

1 Sistemas

De una forma simple el estudio de los sistemas físicos reales puede esquematizarse a través del proceso descrito en el diagrama adjunto



Si aparecen diversos modelos de un sistema real es porque, efectivamente, un mismo sistema físico puede admitir diversas modelizaciones. Por ejemplo:

- Si queremos calcular el impulso y el combustible necesarios para poner un satélite en órbita podemos identificar (modelizar) el satélite como una *partícula* (especificada por su masa, posición y velocidad).

- Una vez está en órbita, para estudiar la orientación de su antena, es necesario modelizar el satélite como un *cuerpo rígido* moviéndose alrededor de su centro de masas.

- Si el satélite es grande y si las maniobras se hacen muy rápidamente quizás se tendría que modelizar como una *estructura flexible* y tener en cuenta sus nodos de vibración elástica.

Por lo tanto, no existe ningún requerimiento de que el modelo se parezca, de algún modo, al sistema real: lo único que se requiere es que, *para el problema que se considere*, el modelo permita hacer predicciones útiles con un coste razonable.
Un modelo de un sistema físico real será llamado simplemente un *sistema*.

2 Variables de entrada, de salida y de estado

Asociado a un sistema existe un conjunto de variables: voltajes eléctricos, corrientes, fuerzas mecánicas, desplazamientos, flujos, temperatures,... que, en general, pueden cambiar con el tiempo. Algunas de estas variables pueden ser modificadas con el fin de producir un determinado efecto sobre otras: las primeras son las *variables de entrada* o estímulos o excitaciones y las segundas *variables de salida* o respuesta. Siempre supondremos que hay un número finito de estas variables.
El conjunto de variables de entrada y salida no están definidos de manera única. No obstante, una vez se han escogido, tenemos una situación definida, según la qual el sistema recibe unos estímulos o entradas y los transforma en unas respuestas o salidas.
Las variables de entrada las notaremos habitualmente por $u_1, \dots, u_m$ y las de salida por $y_1, \dots, y_p$.
Las *variables de estado* son un conjunto de variables que determinan de forma única el estado del sistema, una vez se ha fijado un valor para ellas, en un instante t_0, así como las variables de entrada $u_1(t), \dots, u_m(t)$, para $t \geq t_0$. Supondremos también que son un número finito y las designaremos habitualmente por $x_1, \dots, x_n$.

3 Descripción matemática interna o por las variables de estado de un sistema

3.1 Una forma general (aunque no la más general) de representar matamáticamente un sistema es a través de una ecuación diferencial y una ecuación de salida de la forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned}\right\}$$

donde $x(t)$ es la función (vectorial) que define el estado del sistema, $u(t)$ es la función (vectorial) de entrada o de control y $y(t)$ es la función (vectorial) de salida.

Esta descripción se llama *interna* o *por las variables de estado*, ya que, el conocimiento de la salida o respuesta del sistema bajo los estímulos de la entrada $u(t)$ requiere el conocimiento del estado del sistema.
Nosotros limitaremos el estudio a sistemas que admiten una descripción o representación de la forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad \text{(EE)}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad \text{(ES)}$$

donde A, B, C, D, u son matrices, cuyos elementos son funciones continuas (o continuas a trozos) en $\mathbb{R}$, tales que

$$A(t) \in M_n(\mathbb{R}), \quad B(t) \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad C(t) \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), \quad D(t) \in M_{p\times m}(\mathbb{R}), \quad u(t) \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.
$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ es la *función* (vectorial) *de entrada* o *de control* y u_j, $1 \leq j \leq m$, son las *variables de entrada* o *de control*.
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es la *función* (vectorial) que define el *estado del sistema* y cada una de las x_i, $1 \leq i \leq n$, son *las variables de estado*. Finalmente,
$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ es la *función* (vectorial) *de salida* y las y_h, $1 \leq h \leq p$, son las *variables de salida*.

Para cada $t \in I$, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$ es el correspondiente vector de $\mathbb{R}^m$ y análogamente para $x(t)$, $y(t)$.
La primera ecuación (EE) se llama *ecuación de estado* y es una ecuación (matricial) diferencial lineal, y la segunda ecuación (ES) es una igualdad que da la salida del sistema, a partir del estado y del control y se llama *ecuación de salida*.

3.2 Los sistemas que admiten una representación como la que acabamos de describir se denominan *sistemas lineales*. Si las matrices A, B y C son constantes, el sistema lineal se denomina *invariante en el tiempo*.

Frecuentemente utilizaremos la letra Σ para designar un sistema lineal representado por el par de ecuaciones EE y ES anteriores.
Puesto que las ecuaciones EE y ES quedan caracterizadas por las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ nos referiremos indistintamente al sistema lineal Σ como representado por las ecuaciones EE y ES o por la terna $(A(t), B(t), C(t))$.

Observaciones 3.3

1. Hemos supuesto que el intervalo de definición de las funciones que intervienen en la representación matemática del sistema están definidas en $\mathbb{R}$. En la práctica puede ocurrir que sólo estén definidas en un intervalo de la forma $[t_0, +\infty[$ o $[t_0, t_1]$. Prolongando por cero fuera de estos intervalos estamos en la situación anterior.

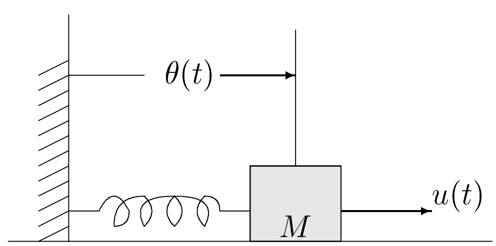
   Asimismo es posible que en la demostración de alguna proposición se exija no sólo la continuidad, sino la diferenciabilidad de las funciones. Esta condición no aparecerá en el enunciado, pero el lector la deberá tener presente en las eventuales aplicaciones.

2. La teoría que desarrollaremos en estas notas es asimismo válida si las funciones a las que nos acabamos de referir tienen valores complejos.

3. En la mayoría de los casos prácticos $D(t)$ es la matriz nula. Así, supondremos desde ahora que $y(t) = C(t)x(t)$. Por otro lado, los cambios necesarios cuando D es no nula en el planteamiento y resolución de las proposiciones que siguen son, en general, obvios.

4 Ejemplos

4.1 Consideremos el sistema mecánico de la figura,



Para pequeñas elongaciones, la ley de Newton dice que

$$M\ddot{\theta}(t) = u(t) - \omega^2\theta(t)\,.$$

Si elegimos:

- variables de estado $x_1(t) = \omega\theta(t)$, $x_2 = \dot{\theta}(t)$
- variables de entrada $u(t) = u(t)$

- variables de salida $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

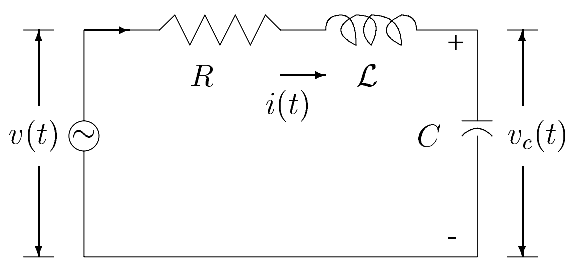
y suponemos $M = 1$, la ecuación anterior és equivalente a

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y(t) = (1,1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Se trata pues de un sistema lineal invariante en el tiempo con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = (1,1)\,.$$

4.2 Consideramos el circuito eléctrico



El estado del sistema queda determinada, por ejemplo, por la corriente $i(t)$ y la tensión a través del condensador $v_c(t)$. Hacemos, pues, la siguiente elección de variables

- variables de estado $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = v_c(t)$
- variables de entrada $u(t) = v(t)$
- variables de salida $y(t) = v_c(t)$

La ecuación de este circuito es

$$\left.\begin{array}{r} v(t) = Ri(t) + \mathcal{L}\dfrac{di(t)}{dt} + v_c(t) \\ i(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt} \end{array}\right\}$$

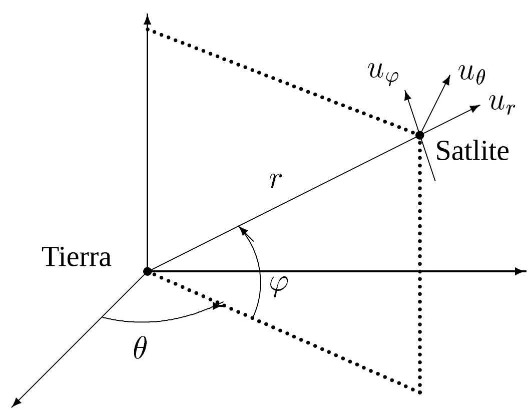
que, de acuerdo con la elección de variables hecha, queda en la forma

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{\mathcal{L}} & -\frac{1}{\mathcal{L}} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{L}} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Se trata, asimismo, de un sistema lineal invariante en el tiempo con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{\mathcal{L}} & -\frac{R}{\mathcal{L}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathcal{L}} \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1).$$

4.3 Consideramos un satélite de masa m en órbita alrededor de la tierra como muestra la figura



La posición del satélite está especificada por las variables $r(t)$, $\theta(t)$ y $\varphi(t)$, y suponemos que la órbita puede ser controlada por tres impulsos ortogonales: $u_r(t)$, $u_\theta(t)$, $u_\varphi(t)$.
Haremos la siguiente selección de variables :

- variables de estado $r(t)$, $\dot{r}(t)$, $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$
- variables de entrada $u_r(t)$, $u_\theta(t)$, $u_\varphi(t)$
- variables de salida $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$

Entonces el sistema puede ser descrito por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + r\dot{\varphi}^2 - \dfrac{k}{r^2} + \dfrac{u_r}{m} \\ \dot{\theta} \\ -2\dfrac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\tan\varphi + \dfrac{u_\theta}{mr\cos\varphi} \\ \dot{\varphi} \\ -\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\varphi - \dfrac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{\dot{r}} + \dfrac{u_\varphi}{mr} \end{pmatrix}$$

$$y = Cx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

donde $x = \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}.$

Nótese que en este caso la ecuación (vectorial) es claramente no lineal. Como veremos más adelante, este sistema se puede aproximar cerca de la posición de equilibrio mediante un sistema lineal, a través de un proceso general llamado linealización.

5 Resolución de la ecuación de estado

Empezamos recordando el siguiente teorema, que garantiza la existencia y unicidad de soluciones de (EE) fijadas unas condiciones iniciales.

Teorema 5.1 *Con las notaciones e hipótesis anteriores, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una única solución $x(t)$ de*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad \text{(EE)}$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = x_0$.

Fijados t_0, x_0 y $u(t)$, denotamos por $\varphi(t, t_0, x_0, u(t))$ la única solución $x(t)$ a que se refiere el teorema anterior.
Vamos a determinar esta solución. Para ello, consideremos la ecuación homogénea asociada a la ecuación anterior (EE),

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \qquad\qquad \text{(EE)}_h$$

Si denotamos por $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_h$) el conjunto de soluciones (EE), (resp. (EE)$_h$) y ξ es una solución particular de (EE), es inmediato comprobar que

$$\mathcal{S} = \xi + \mathcal{S}_h\,.$$

Así pués, empezamos determinando $\mathcal{S}_h$.
Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, $e_k = (0, \ldots, \overset{(k}{1}, \ldots, 0)^*$ y $x_k(t) = (x_{k1}(t), \ldots, x_{kn}(t)^*$ la única solución de (EE)$_h$ tal que $x_k(t_0) = e_k$, $k = 1, \ldots, n$.
Entonces, notaremos $\phi(t, t_0)$ la función matricial

$$\phi(t, t_0) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Proposición 5.2 *Con las notaciones anteriores,* $x(t) = \phi(t, t_0)x_0$ *es la única solución de (EE)*$_h$ *tal que* $x(t_0) = x_0$.

Demostración. En primer lugar vemos que para cualquier $c \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t, t_0)c = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)$$

es solución. En efecto,

$$\frac{d}{dt}(\phi(t, t_0)c) = \sum_k c_k \dot{x}_k(t) = \sum_k c_k A(t) x_k(t) = A(t) \sum_k c_k x_k(t) = A(t)(\phi(t, t_0)c)\,.$$

Por lo tanto, $\phi(t, t_0)x_0$ es solución. Además, $\phi(t_0, t_0) = I_n$, por definición. De aquí,

$$x(t_0) = \phi(t_0, t_0)x_0 = I_n x_0 = x_0.$$

■

Corolario 5.3 *El conjunto de soluciones de (EE)*$_h$ *es*

$$\mathcal{S}_h = \{\phi(t, t_0)x_0;\ x_0 \in \mathbb{R}^n\}\ .$$

La función matricial

$$\phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & \ldots & x_{n2}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

se llama *matriz fundamental* o de *transición de estados* de (EE)$_h$. Obsérvese que, en efecto, si x_0 *es el estado en el instante* t_0, $\phi(t,t_0)x_0$ *es el estado en el instante* t.
La siguiente proposición recoge una propiedad fundamental de la matriz de transición de estados.

Proposición 5.4 *Con las notaciones anteriores* $\phi(t,t_0)$ *es una matriz invertible para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t_1,t_0)$ no es invertible. Ésto equivale a que $x_1(t_1),\ldots,x_n(t_1)$ son linealmente dependientes, es decir,

$$\sum_k \alpha_k x_k(t_1) = 0$$

donde $\alpha_k \neq 0$ para algún k. Entonces, definimos $z(t) = \sum_k \alpha_k x_k(t)$; $z(t)$ es solución de (EE)$_h$ tal que $z(t_1) = 0$ y $z(t_0) \neq 0$, ya que $e_1,\ldots,e_n$ son linealmente independientes. Pero la función nula O es de $\mathcal{S}_h$ y evidentemente, $O(t_1) = 0$. Por lo tanto, $z(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, contradicción. ∎

Corolario 5.5 $\dim \mathcal{S}_h = n$.

Otras propiedades de $\phi(t,t_0)$ se recogen en la siguiente proposición.

Proposición 5.6 *La matriz de transición de estados verifica las propiedades siguientes:*

(i) $\phi(t_0,t_0) = I_n$

(ii) $\phi(t,t_1)\phi(t_1,t_0) = \phi(t,t_0)$

(iii) $\phi(t_1,t_0)^{-1} = \phi(t_0,t_1)$

(iv) $\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t,t_0)) = A(t)\phi(t,t_0)$

(v) $\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t_0,t)) = -\phi(t_0,t)A(t)$

Demostración.

(i) Ya visto.

(ii) $x(t) = \phi(t,t_0)x_0$ es la única solución de (EE)$_h$ con $x(t_0) = x_0$. Sea $x_1 = x(t_1) = \phi(t_1,t_0)x_0$. Entonces, $x(t) = \phi(t,t_0)x_0$ es la única solución de (EE)$_h$ con $x(t_1) = x_1$. Pero $\phi(t,t_1)x_1$ también lo es, por lo tanto

$$\phi(t,t_1)x_1 = \phi(t,t_1)\phi(t_1,t_0)x_0 = \phi(t,t_0)x_0$$

y siendo x_0 arbitrario resulta (ii).

(iii) Inmediata.

(iv) Cálculo directo.

(v) $\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t_0,t)\phi(t,t_0)) = 0$ implica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi(t_0,t) &= -\phi(t_0,t)\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t,t_0))(\phi(t,t_0))^{-1} \\
&= -\phi(t_0,t)A(t)\phi(t,t_0)(\phi(t,t_0))^{-1} \\
&= -\phi(t_0,t)A(t)\,.
\end{aligned}$$

■

Observación 5.7 Si $X(t) \in M_n(\mathbb{R})$ satisface el problema de valor inicial

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)\,, \quad X(t) = I_n\,.$$

Entonces $X(t) = \phi(t,t_0)$.

Ejemplo 5.8 $\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}}_{A(t)} x\,, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vamos a determinar $\phi(t,0)$.

- $k = 1$

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = tx_1 + tx_2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = 2tx_2 & x_2(0) = 0 \end{array}\right\}$$

$x_2 = Ce^{t^2}, \quad x_2(0) = C = 0$. Por lo tanto, $x_2 \equiv 0$.

$\dot{x}_1 = tx_1, \quad x_1(0) = 1$

$x_1 = Ce^{t^2/2}, \quad 1 = C, \quad x_1(t) = e^{t^2/2}$.

Así, para $k = 1$, la solución es $\begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $k = 2$

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, $x_2 = e^{t^2}$ y $\dot{x}_1 = tx_1 + te^{t^2}, \quad x_1(0) = 0$.

$x_1(t) = Ce^{t^2/2} + e^{t^2}$

$C = -1$.

Así, para $k = 2$, la solución es $\begin{pmatrix} -e^{t^2/2} + e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \phi(t, 0) &= \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & -e^{t^2/2} + e^{t^2} \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \\ x(t) &= \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & -e^{t^2/2} + e^{t^2} \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora vamos a encontrar una solución particular de $\mathcal{S}$. Lo haremos por el método de variación de las constantes, es decir, buscamos la solución en la forma

$$x(t) = \phi(t, t_0)k(t)$$

que ha de cumplir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, t_0) \right) k(t) + \phi(t, t_0)\dot{k}(t) = A(t)\phi(t, t_0)k(t) + B(t)u(t)\,.$$

De la anterior proposición, resulta que

$$\dot{k}(t) = \phi(t_0, t)B(t)u(t)$$

de donde

$$k(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + k_1\,.$$

Así pues,

$$\phi(t, t_0)k(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

es una solución particular que se anula en t_0 y entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.9 *La única solución de*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

tal que $x(t_0) = x_0$ *viene dada por*

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \, . \quad (= \phi(t, t_0, x_0, u(t)))$$

5.10 Entonces, la salida $y(t)$ del sistema vendrá dada por

$$y(t) = C(t)\phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \, .$$

6 Sistemas lineales invariantes en el tiempo

6.1 Frecuentemente las matrices A, B y C son funciones constantes, es decir, que no varían con t. Tal como hemos dicho, el sistema lineal se denomina entonces *invariante en el tiempo* y vendrá representado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{(EE)}$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad \text{(ES)}$$

donde A, B y C son matrices constantes.

En este caso, la matriz de transición de estados toma la siguiente forma.

Proposición 6.2 *Si* A *es constante, la matriz de transición de estados de (EE)*$_h$ *es*

$$\phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \, , \qquad t \in \mathbb{R} \, .$$

Demostración. Si A es constante, la solución de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$ viene dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \, ,$$

que ha de coincidir con $\phi(t, t_0)x_0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, de donde resulta la proposición. ■

6.3 Así pues en este caso, la única solución $x(t)$ de (EE) tal que $x(t_0) = x_0$ es

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

y (ES) queda

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \, .$$

7 Cálculo de $e^{A(t-t_0)}$

Vamos a dar tres métodos de cálculo de $e^{A(t-t_0)}$. Para simplificar, denotamos $t - t_0 = \sigma$.

7.1 A través de la forma de Jordan de A.
Si J es la forma reducida de Jordan de A, se tiene

$$J = S^{-1}AS\,, \qquad S \in Gl(n, \mathbb{C})\,.$$

Entonces,

$$e^{\sigma A} = Se^{\sigma J}S^{-1}\,.$$

Ahora bien, si $J = \text{diag}\,(J_1, \ldots, J_r)$, donde J_i son bloques elementales de Jordan correspondientes a los diferentes valores propios de A y a las correspondientes características de Segre, tenemos que

$$e^{\sigma A} = S\text{diag}\,(e^{\sigma J_1}, \ldots, e^{\sigma J_r})S^{-1}\,.$$

Es suficiente, pues, considerar el caso de un bloque elemental de Jordan

$$J_\lambda = \begin{array}{c} \scriptstyle(\delta \\ \begin{pmatrix} \lambda & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

En este caso,

$$e^{\sigma J_\lambda} = e^{\sigma\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \sigma & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \frac{\sigma^2}{2!} & \sigma & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma^{\delta-1}}{(\delta-1)!} & \ldots & \ldots & \ldots & \sigma & 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que toda matriz real puede considerarse como matriz compleja, lo que permite reducirla a la forma de Jordan compleja. Naturalmente la matriz S del cambio de base es también compleja. No obstante, si A es real, su matriz exponencial e^A es asimismo real.

7.2 Utilizando la transformada de Laplace.
Sabemos que

$$\frac{d}{d\sigma}(e^{\sigma A}) = e^{\sigma A}A = Ae^{\sigma A}\,.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que si $e^{\sigma A} = (m_j^i(\sigma))_{i,j}$, $\dfrac{d}{d\sigma}(e^{\sigma A}) = \left(\dfrac{d}{d\sigma}(m_j^i(\sigma))\right)_{i,j}$, resulta que

$$s\mathcal{L}(e^{\sigma A}) - I_n = A\mathcal{L}(e^{\sigma A})$$

de donde

$$\mathcal{L}(e^{\sigma A}) = (sI_n - A)^{-1}$$

y

$$e^{\sigma A} = \mathcal{L}^{-1}\left((sI_n - A)^{-1}\right) .$$

7.3 Utilizando funciones de matrices.
Sea $Q(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \ldots (t-\lambda_r)^{d_r}$ el polinomio característico de A, f la función real definida por $f(t) = e^{\sigma t}$ y

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$$

un polinomio tal que

$$\frac{d^k\varphi}{dt}(\lambda_i) = \frac{d^k f}{dt}(\lambda_i)$$

para todo k, y tales que $1 \leq i \leq r$, $0 \leq k \leq \alpha_i' - 1$. Entonces

$$e^{\sigma A} = \varphi(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_{n-1} A^{n-1} .$$

8 Ejemplos

8.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Vamos a calcular $e^{\sigma A}$ por los tres procedimientos descritos.

(i) $Q(t) = (t+1)^2$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\sigma A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sigma} & 0 \\ \sigma e^{-\sigma} & e^{-\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sigma)e^{-\sigma} & -\sigma e^{-\sigma} \\ \sigma e^{-\sigma} & (1-\sigma)e^{-\sigma} \end{pmatrix} .$$

(ii)

$$(sI_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

$$e^{\sigma A} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\frac{s+2}{(s+1)^2} & \mathcal{L}^{-1}\frac{-1}{(s+1)^2} \\ \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+1)^2} & \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sigma)e^{-\sigma} & -\sigma e^{-\sigma} \\ \sigma e^{-\sigma} & (1-\sigma)e^{-\sigma} \end{pmatrix}$$

(iii) $\varphi(t) = a + bt$, $f(t) = e^{\sigma t}$

$$\left.\begin{aligned} f\,(-1) = e^{-\sigma} = a - b \\ f'(-1) = \sigma e^{-\sigma} = b \end{aligned}\right\} \quad a = (1+\sigma)e^{-\sigma}, \quad b = \sigma e^{-\sigma}$$

$$e^{\sigma A} = \varphi(A) = (1+\sigma)e^{-\sigma} I_2 + \sigma e^{-\sigma} A = \begin{pmatrix} (1+\sigma)e^{-\sigma} & -\sigma e^{-\sigma} \\ \sigma e^{-\sigma} & (1-\sigma)e^{-\sigma} \end{pmatrix}$$

Naturalmente, los tres resultados coinciden.

8.2 Por ejemplo la solución $x(t)$ de la ecuación de estado

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

con $x(0) = x_0$ viene dada por

$$x(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix} x_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} -(t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ (1-t+\tau)e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} u(\tau) d\tau\,.$$

8.3 Vamos a resolver la ecuación de estado del ejemplo (4.1). Utilizaremos el primer método para el cálculo de $e^{\sigma A}$. (recomendamos al lector que compruebe el resultado utilizando los otros dos).

$$J = \begin{pmatrix} \omega j & 0 \\ 0 & -\omega j \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad j = \sqrt{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

$$e^{\sigma A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\omega j} & 0 \\ 0 & e^{-\omega j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sigma\omega & \sin\sigma\omega \\ -\sin\sigma\omega & \cos\sigma\omega \end{pmatrix}, \quad \sigma = t - t_0$$

Suponemos $t_0 = 0$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u(t) = 1$, para todo $t \geq 0$. Entonces

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t\omega \\ -\sin t\omega \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-\tau)\omega \\ \cos(t-\tau)\omega \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \cos t\omega \\ -\sin t\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(1-\cos t\omega) \\ \frac{1}{\omega}\sin t\omega \end{pmatrix}$$

es decir,

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t\omega + \frac{1}{\omega}(1-\cos t\omega) \\ -\sin t\omega + \frac{1}{\omega}\sin t\omega \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos t\omega - \sin t\omega + \int_0^t (\sin(t-\tau)\omega + \cos(t-\tau)\omega) d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega}(1 + (\omega - 1)\cos t\omega - \sin \omega t)) \, . \end{aligned}$$

9 Matrices resolvente y de transferencia

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo representado por

$$\dot{y}(x) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

y denotemos por $x(t)$ la única solució de (EE), tal que $x(0) = x_0$.
Sean $\widehat{x}(s) = \mathcal{L}x(t)$, $\widehat{u}(s) = \mathcal{L}u(t)$, $\ldots$ las correspondientes transformaciones de Laplace. (Naturalmente,

$$\mathcal{L}x(t) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}x_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{L}x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \text{etc.)}$$

Entonces, si aplicamos $\mathcal{L}$ a (EE) y (ES), resulta:

$$\begin{aligned} s\widehat{x}(s) &= A\widehat{x}(s) + B\widehat{u}(s) \\ \widehat{y}(s) &= C\widehat{x}(s) \end{aligned}$$

de donde

$$\widehat{x}(s) = (sI_n - A)^{-1}x_0 + (sI_n - A)^{-1}B\widehat{u}(s)$$

para todo s que no sea valor propio de A. Para estos valores de s se tiene pues que

$$\widehat{y}(s) = C(sI_n - A)^{-1}x_0 + C(sI_n - A)^{-1}B\widehat{u}(s) \, .$$

Definición 9.1 *Las matrices*

$$R(s) = (sI_n - A)^{-1}$$

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$

se llaman, respectivamente matriz resolvente *y* matriz de transferencia *(no confundir con la matriz de transferencia de estados* $\Phi(t, t_0)$*).*

Tenemos, pues la relaciones

$$\widehat{x}(s) = R(s)x_0 + R(s)B\widehat{u}(s)$$

$$\widehat{y}(s) = CR(s)x_0 + H(s)\widehat{u}(s)\,.$$

La primera igualdad puede utilizarse para calcular $x(t)$ y la segunda determina la función de salida del sistema, a partir del estado inicial y de la función de entrada.
En particular, si $x_0 = 0$

$$\widehat{y}(s) = H(s)\widehat{u}(s)$$

y, si además $m = p = 1$, es decir si las funciones de entrada y salida son escalares,

$$H(s) = \frac{\widehat{y}(s)}{\widehat{u}(s)}$$

y, en este caso se dice que $H(s)$ es la *función de transferencia*.
Si tenemos en cuenta la expresión de $(sI_n - A)^{-1}$

$$(sI_N - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI_n - A)}\begin{pmatrix} ad(s-a_1^1) & ad(-a_1^2) & \dots & ad(a_1^n) \\ & \dots & & \\ & \dots & & \\ ad(-a_n^1) & ad(-a_n^2) & \dots & ad(s-a_n^n) \end{pmatrix}$$

resulta claro que $H(s)$ es una matriz cuyos elementos son fracciones racionales en la variable s, donde cada numerador tiene grado estrictamente inferior a su denominador. Además $H(s)$ está definida por todos los s que no son valores propios de A.

Ejemplo 9.2 En el ejemplo (4.1) hemos visto que

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1,1)x$$

donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Suponemos $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y vamos a aplicar la metodología descrita anteriormente para obtener $y(t)$:

$$R(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{pmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{pmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2}(1 \quad 1) \begin{pmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s+\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\widehat{x}(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{pmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{pmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \widehat{u}(s)$$

$$\widehat{y}(s) = \frac{s-\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{s+\omega}{s^2+\omega^2}\widehat{u}(s)$$

Si $u(t) = 1$ para todo $t \geq 0$, $\widehat{u}(s) = \dfrac{1}{s}$ y

$$\widehat{y}(s) = \frac{s^2 + s(1-\omega) + \omega}{s^2+\omega^2} = \frac{(1/\omega)}{s} + \frac{\frac{\omega-1}{\omega}s}{s^2+\omega^2} - \frac{\frac{\omega-1}{\omega}\omega}{s^2+\omega^2}$$

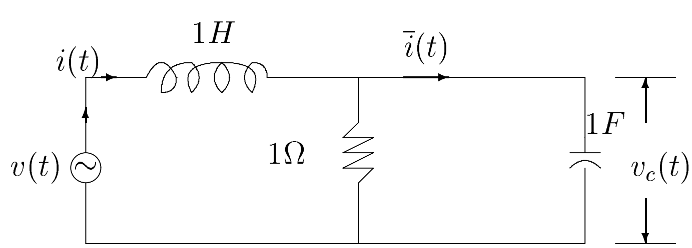
de donde

$$y(t) = \frac{1}{\omega}(1 + (\omega - 1)(\cos\omega t - \sin\omega t))$$

resultado que, naturalmente, coincide con el obtenido en (8.3).

10 Equivalencia algebraica

Consideremos el circuito de la figura adjunta [Ch]



Si tomamos

- variables de estado: $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = v_c(t)$
- variables de entrada: $u(t) = v(t)$

- variables de salida: $y(t) = v_c(t)$

su representación matemática es

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si, con la misma elección de las variables de entrada y salida, elegimos como variables de estado

$$\overline{x}_1(t) = y(t)\,, \qquad \overline{x}_2(t) = \bar{i}(t)$$

la representación matemática del *mismo sistema* resulta ser

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\overline{x}}_1(t) \\ \dot{\overline{x}}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y(t) &= (1 \quad -1) \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Esta última representación se deduce de la anterior a partir de las obvias relaciones

$$\overline{x}_1 = x_1\,, \qquad \overline{x}_2 = x_1 - x_2$$

que matricialmente adoptan la forma

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Si hemos subrayado las palabras *mismo sistema* es porque an ambos casos se trata del mismo circuito y las *variables de entrada y de salida son las mismas*en ambas representaciones. Si, en el mismo circuito tomásemos por ejemplo como variable de salida $\bar{i}(t)$, estaríamos considerando un sistema *distinto*.

Las dos representaciones anteriores anteriores convendremos en decir que son algebraicamente equivalentes. En general,

Definición 10.1 *Dos sistemas lineales Σ y $\overline{\Sigma}$ representados respectivamente por*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}\right\}$$

y

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overline{x}}(t) &= \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t) \\ y(t) &= \overline{C}\overline{x}(t) \end{aligned}\right\}$$

con las mismas variables de entrada y salida, diremos que son algebraicamente equivalentes *si existe una matrix tal que $\overline{x} = Tx$.*

De esta definición se deduce inmediatamente la siguiente proposición.

Proposición 10.2 *Con las notaciones anteriores, Σ y $\overline{\Sigma}$ son algebraicamente equivalentes si y sólo si existe una matrix $T \in Gl(n, \mathbb{C})$ tal que*

$$\overline{A} = TAT^{-1}\,, \qquad \overline{B} = TB\,, \qquad \overline{C} = CT^{-1}\,.$$

Para sistemas lineales no invariantes en el tiempo la definición de equivalencia algebraica es la misma sin más que substituir T por una función continua $T : \mathbb{R} \longrightarrow Gl(n, \mathbb{C})$.
Tal como sugiere el ejemplo anterior, si dos sistemas lineales son algebraicamente equivalentes, cabe esperar que a igualdad de impulsos de entrada sus respuestas sean las mismas. Como veremos ello es así si el estado inicial en ambos casos es el vector nulo.

Proposición 10.3 *Dos sistemas lineales algebraicamente equivalentes tienen la misma matriz de transferencia.*

Demostración. Con las notaciones de la definición 10.1, designaremos por $H(s)$ y $\overline{H}(s)$ las respectivas matrices de transferencia. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{H}(s) &= \overline{C}(sI_n - \overline{A})^{-1}\overline{B} = CT^{-1}(sI_n - TAT^{-1})^{-1}TB = \\ &= C(T^{-1}(sI_n - TAT^{-1})T)^{-1}B = \\ &= C(sI_n - A)^{-1}B = H(s)\,. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

11 Composición de sistemas

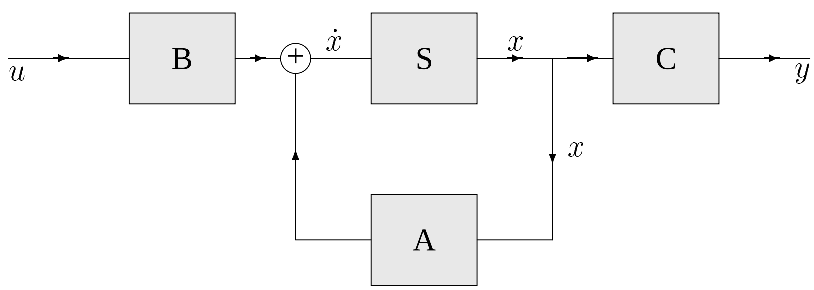
Vamos a encontrar las ecuaciones y la matriz de transferencia de una composición (finita) de sistemas. De hecho, sólo es necesario hacerlo para las que se pueden considerar composiciones elementales básicas, ya que, como veremos, cualquier combinació de sistemas es una combinación de composiciones elementales.

11.1 Notación: Si

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

es un sistema lineal invariante en el tiempo, el diagrama

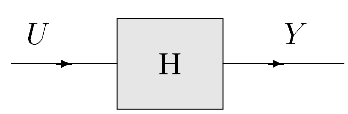


se llama representación por *diagrama de bloques* del sistema.

Si suponemos $x(0) = 0$ (sistema en reposo en el instante inicial), hemos visto que se tiene la relación

$$\widehat{y}(s) = H(s)\widehat{u}(s)$$

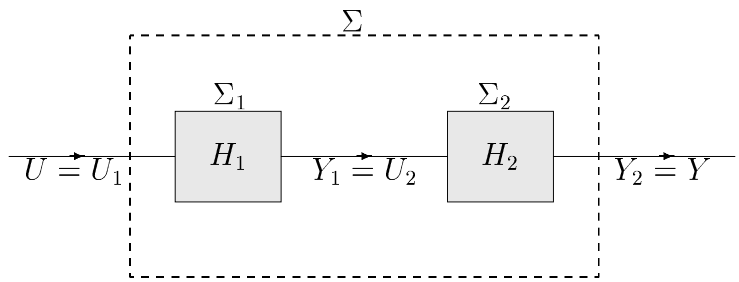
que relaciona las transformaciones de Laplace de las entradas y salidas a través de la matriz de transferencia $H(s)$. Esta relación la indicamos mediante el *diagrama entrada / salida*



donde se ha suprimido la variable s ($U = \widehat{u}(s)$, $Y = \widehat{y}(s)$).
En los casos que se consideran a continuación, nos limitamos a representar los sistemas a través de su diagrama entrada / salida (lo que presupone estados iniciales nulos).

11.2 Composiciones elementales una prueba

1. Serie



(i) Ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 &= C_1x_1 \end{aligned}\right\} \Sigma_1 \qquad \left.\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 &= C_2x_2 \end{aligned}\right\} \Sigma_2 \,.$$

El sistema compuesto Σ tiene como variables de estado $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Substituyendo,

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2y_1 = A_2x_2 + B_1C_1x_1 \,.$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es decir, las matrices que definen el sistema compuesto son

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad C_2)\,.$$

(ii) Matriz de transferencia

$$Y = Y_2 = H_2U_2 = H_2Y_1 = H_2H_1U_1 = H_2H_1U$$

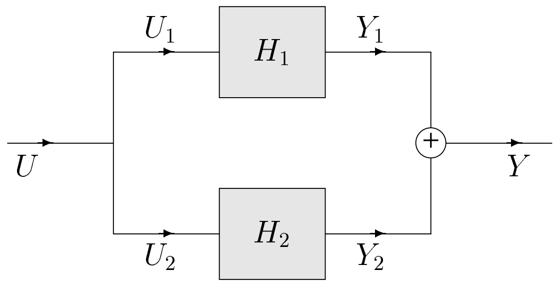
es decir, la matriz de transferencia del sistema compuesto es

$$H = H_2H_1 \,.$$

Obsérvese que si H_1 y H_2 no son funciones escalares, en general, $H_2H_1 \neq H_1H_2$.

En los casos que siguen se mantienen las notaciones. Es decir, A_i, B_i, C_i son las matrices que definen el sistema Σ_i, $i = 1, 2$, y A, B, C las que definen el sistema compuesto y análogamente para las matrices de transferencia.

2. Paralelo



(i) $U = U_1 = U_2,\ Y = Y_1 + Y_2$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u_1\\ y_1 &= C_1x_1\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_2x_2 + B_2u_2\\ y_2 &= C_2x_2\end{aligned}\right\}$$

Variables de estado de la composición $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} U$$

$$y = (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad C_2)\,.$$

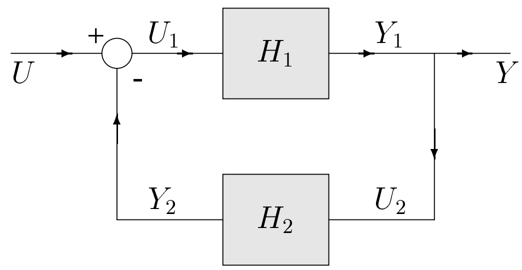
(ii)

$$Y = Y_1 + Y_2 = H_1U_1 + H_2U_2 = (H_1 + H_2)U$$

de donde

$$H = H_1 + H_2\,.$$

3. Realimentación



(i) $U_1 = U - Y_2,\ Y = Y_1 = U_2$.

Entonces, con las notaciones anteriores,

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 = A_1x_1 + B_1u - B_1C_2x_2$$

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1$$

$$Y = Y_1 = C_1x_1$$

es decir

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad 0)\,.$$

(ii)

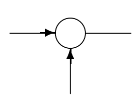
$$Y = Y_1 = H_1U_1 = H_1(U - H_2U_2) = H_1(U - H_2Y)$$

de donde

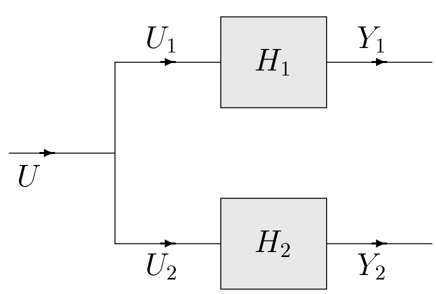
$$Y = (I + H_1H_2)^{-1}H_1U$$

es decir

$$H = (I + H_1H_2)^{-1}H_1\,.$$

Naturalmente, si en el "nudo"  hay $+$, $+$, todo va igual, salvo el signo.

4. Paralelo abierto



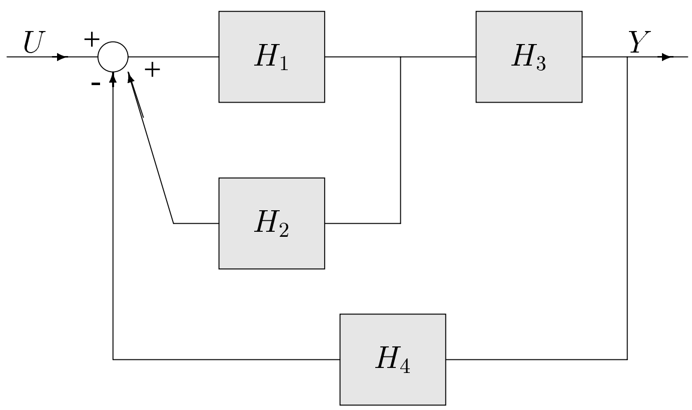
(i) Con las notaciones anteriores es inmediato comprobar que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}.$$

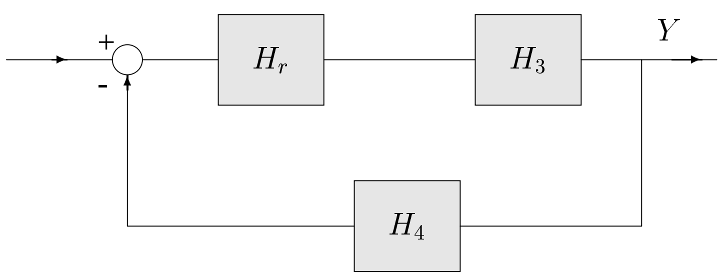
(ii) Análogamente, teniendo en cuenta que $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplos 11.3
1. Calcular la matriz de transferencia del sistema compuesto



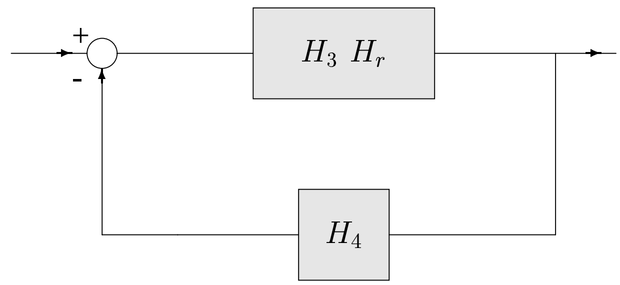
– 1a reducción



donde

$$H_r = (I - H_1 H_2)^{-1} H_1$$

– 2a reducción



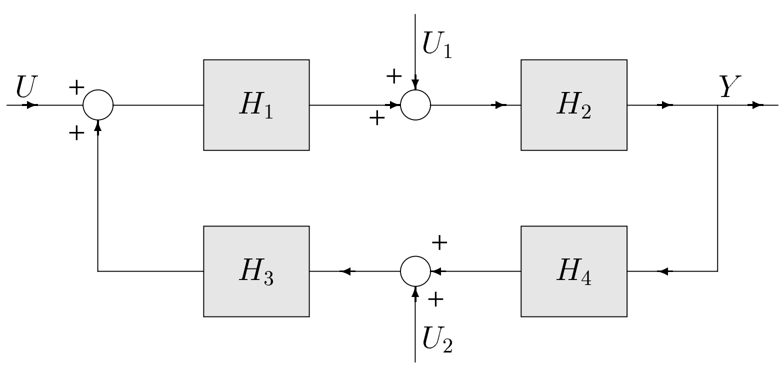
Finalmente,

$$H = (I + H_3(I - H_1H_2)^{-1}H_1H_4)^{-1}H_3(I - H_1H_2)^{-1}H_1$$

Por ejemplo, si $H_1 = 1/s$, $H_2 = 1/(s-1)$, $H_3 = 1/(s-1)$, $H_4 = 2/s$, resulta

$$H = \left(1 + \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{s(s-1)}\right)^{-1}\frac{2}{s^2}\right)^{-1}\frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{s(s-1)}\right)^{-1}\frac{1}{s} = \frac{s}{s^3 - s^2 - s + 2}.$$

2. Consideremos el sistema adjunto en el que todas las entradas y salidas se suponen escalares:



Entonces,

$$H_2(H_1(H_3(U_2 + H_4Y) + U) + U_1) = Y$$

de donde

$$Y = \frac{H_1H_2H_3U_2 + H_1H_2U + H_2U_1}{1 - H_1H_2H_3H_4}$$

Si suponemos que U_1 es una perturbación no deseada y queremos saber su influencia hacemos $U = U_2 = 0$ con lo que

$$\frac{Y}{U_1} = \frac{H_2}{1 - H_1H_2H_3H_4}$$

Esta relación permite calcular el $\lim_{s\to\infty} \dfrac{Y}{U_1}$. Análogamente, si $U_1 = U_2 = 0$

$$\frac{Y}{U} = \frac{H_1H_2}{1 - H_1H_2H_3H_4}\,.$$

12 Linealización

Consideremos un sistema representado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \qquad (EE)\\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \qquad (ES)\end{aligned}$$

donde f y g son funciones vectoriales en general no lineales y que suponemos infinitamente derivables continuas en los correspondientes intervalos de definición.
Sea $\bar{x}(t)$ una solución de EE correspondiente a una entrada $\bar{u}(t)$. Las ecuaciones anteriores nos dicen que

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\\ \bar{y}(t) &= h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\end{aligned}$$

Si la entrada $\bar{u}(t)$ recibe una perturbación $\bar{u}_\delta(t)$ pequeña, por continuidad, la solución $\bar{x}(t)$ y la salida $\bar{y}(t)$ se ven ligeramente perturbadas. Designamos $\bar{x}_\delta(t)$, $\bar{y}_\delta(t)$ las perturbaciones respectivas. Es decir, con la entrada $u + u_\delta$ (hemos suprimido la barra y la t para simplificar la notación), el estado es $x + x_\delta$ y la salida $y + y_\delta$.
Se tendrá, pues

$$\begin{aligned}\dot{x} + \dot{x}_\delta &= f(x + x_\delta, u + u_\delta, t)\\ y + y_\delta &= h(x + x_\delta, u + u_\delta, t)\end{aligned}$$

Entonces, desarrollando por Taylor en $(x(t), u(t), t)$, tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} + \dot{x}_\delta &= f(x, u, t) + J_x f(x, u, t)x_\delta + J_u f(x, u, t)u_\delta + \dots\\ y + y_\delta &= h(x, u, t) + J_x h(x, u, t)x_\delta + J_u h(x, u, t)u_\delta + \dots\end{aligned}$$

lo que nos dice que si las perturbaciones u_δ, x_δ son bastante pequeñas, pueden considerarse aproximadamente como las soluciones de

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_\delta = J_x f(x, u, t)x_\delta + J_u f(x, u, t)u_\delta\\ y_\delta = J_x h(x, u, t)x_\delta + J_u h(x, u, t)u_\delta\end{aligned}\right\} \Sigma_\delta$$

donde $J_x f(x, u, t)$, $J_u f(x, u, t)$, ... son las correspondientes matrices jacobianas, esto es,

$$J_x f(x, u, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, u, t) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x, u, t) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x, u, t)\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x, u, t) & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x, u, t)\end{pmatrix}$$

$$J_u f(x,u,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(x,u,t) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(x,u,t) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(x,u,t) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(x,u,t) & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}(x,u,t) \end{pmatrix}$$

y análogamente para $J_x h$, $J_u h$, y

$$x_\delta = \begin{pmatrix} x_{\delta_1} \\ \vdots \\ x_{\delta_n} \end{pmatrix}, \qquad u_\delta = \begin{pmatrix} u_{\delta_1} \\ \vdots \\ u_{\delta_m} \end{pmatrix}.$$

Definición 12.1 *El sistema lineal Σ_δ se denomina* linealización *del sistema inicial alrededor de $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$.*

Un caso particular importante es cuando $\bar{x}(t) = x_e$ y $\bar{u}(t) = u_e$ son constantes. Obsérvese que, entonces, x_e y u_e satisface la ecuación

$$0 = f(x_e, u_e, t)\,, \qquad t \geq t_0$$

se sice que x_e es un *estado de equilibrio* del sistema, correspondiente a la entrada u_e.

Ejemplos 12.2
1. (**Satélite**). Como hemos visto en la descripción matemática para el satélite, ésta es no lineal (ver (4.3)).
Observemos que si $r_0^3 w^2 = h$, entonces $r = r_0$, $\theta = wt$ y $\varphi = 0$ son una solución si $u_r = u_\varphi = u_\theta = 0$ (el satélite gira en órbita circular de radio r_0 y velocidad angular w).
Si el satélite se desvía de la órbita, hemos de hacer actuar los impulsos u_r, u_θ y u_φ para volverlo a su órbita inicial. Esto se hace perturbando u_r, u_θ y $u\varphi$ de su estado inicial $(0,0,0)$.
Sabemos que para pequeñas perturbaciones, x_δ y u_δ satisfacen un sistema lineal. Vamos a encontrarlo.
Ahora $\bar{x} = (r_0, 0, wt, w, 0, 0)$ y $\bar{u} = (0,0,0)$. Por tanto,

$$J_x f(\bar{x}, \bar{u}, t) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w^2 + \frac{2k}{r_0^3} & 0 & 0 & 2wr_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2w}{r_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$J_u f(\bar{x}, \bar{u}, t) \;=\; \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr_0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{mr_0} \end{array}\right)$$

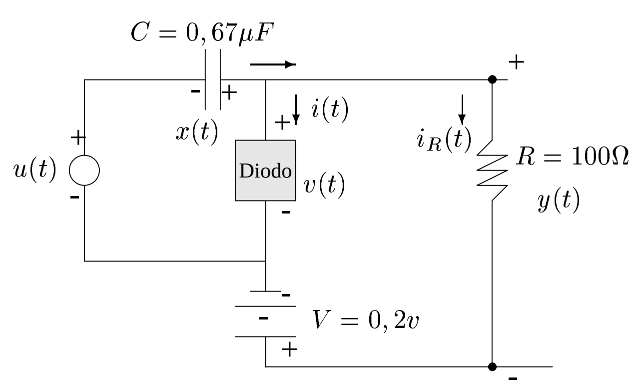
Obsérvese que las ecuaciones que describen el estado del sistema se descomponen en dos partes independientes (se dice dos *sistemas lineales desacoplados*)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3w^2 & 0 & 0 & 2wr_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2w}{r_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}$$

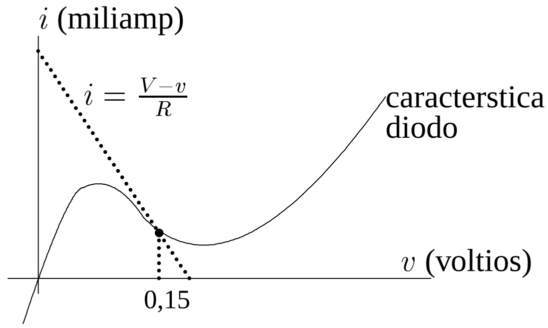
y

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mr_0} \end{pmatrix} u_\theta$$

2. (Túnel diodo [FH]). Consideremos el circuito



en el que la característica del diodo viene dada por



$$i = p(v)$$

Variable de estado $x(t)$: tensión condensador
Entrada: $u(t)$ (tensión)
Salida: $y(t)$ (tensión)
Entonces,

$$\begin{aligned} C\dot{x} &= -i - i_R = -p(v) - i_R \\ y &= Ri_R \\ v &= u + x \\ Ri_R &= v - V = u + x - V \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = -\dfrac{1}{C}p(u-x) - \dfrac{u+x-V}{RC} := f(x,u) \\[2ex] y = u + x - V := h(x,u) \end{array}\right\}$$

Claramente, es una descripción no lineal.
Suponemos $u = 0$. Entonces, el sistema anterior tiene una solución constante:

$$u(t) = u^* = 0\,.$$

Si $x = x^*$ es tal que $0 = -\dfrac{1}{C}p(x^*) - \dfrac{x^* - V}{RC}$, entonces:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= 0\,\text{volt}\,, \qquad x^*(t) = 0,15\,\text{volt (gráfico)} \\ \dot{x}^*(t) &= 0\,\text{volt}\,, \qquad y^*(t) = -0,05\,\text{volt} \quad \text{es solución} \end{aligned}$$

Si perturbamos ligeramente la entrada $u^* = 0$ a $u^*_\delta(t)$, x y y también se perturban ligeramente: $x^*_\delta(t)$, $y^*_\delta(t)$. Entonces la linealización del sistema anterior alrededor de la solución anterior es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= -10x^4 x_\delta(t) - 10^4 x_\delta(t) \\ y_\delta(t) &= x_\delta(t) + u_\delta(t) \end{aligned}$$

$\left(p'(x^*) = -\dfrac{1}{300}\Omega\right)$.

Capítulo 2

Controlabilidad y observabilidad

1 Controlabilidad

Definición 1.1 *Sea* $\sum$ *un sistema lineal representado por*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (EE)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \qquad\qquad (ES)$$

Se dice que $\sum$ *o que el par* $(A(t), B(t))$ *es* controlable en el intervalo $[t_0, t_1]$*,* $t_0 < t_1$*, si para cualquier* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ *existe* $u(t)$ *(que, en general, dependerá de* t_0*,* t_1*,* x_0 *y* x_1*) tal que la solución* $x(t)$ *de* (EE) *correspondiente a* $u(t)$ *tal que* $x(t_0) = x_0$ *verifica también que* $x(t_1) = x_1$*.*

Vamos a ver como este problema de naturaleza trascendente, tiene una traducción algebraica simple. La matriz de la siguiente definición juega un papel esencial

Definición 1.2 *Sea* $\phi(t, t_0)$ *la matriz fundamental de* $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$*. Entonces definimos* $W(t_0, t_1)$ *por*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \tau)B(\tau)^\top \phi(t_0, \tau)^\top \, d\tau \, .$$

La matriz $W(t_0, t_1) \in M_n(\mathbb{R})$ *se llama* matriz gramiana de controlabilidad.

Teorema 1.3 *Con las notaciones anteriores,* $(A(t), B(t))$ *es controlable en* $[t_0, t_1]$ *si y sólo si* $W(t_0, t_1)$ *es invertible.*

Demostración. Supongamos $(A(t), B(t))$ controlable en $[t_0, t_1]$. Esto es equivalente a decir que cualesquiera que sean x_0 y x_1, existe $u(t)$ tal que

$$x_1 = \phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau) \, d\tau \, .$$

Esta igualdad equivale a que

$$\phi(t_0,t_1)x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau\,.$$

Puesto que $\phi(t_0,t_1)$ es invertible, el primer miembro es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$, por tanto si definimos $M : C_0([0,+\infty[,\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mediante

$$M(u) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau\,,$$

está claro que $(A(t),B(t))$ es controlable en $[t_0,t_1]$ si y sólo si Im $M = \mathbb{R}^n$. Entonces, el teorema resulta inmediatamente del lema siguiente.

Lema 1.4 Im $M =$ Im $W(t_0,t_1)$.

Demostración.

a) Sea $v \in$ Im W (para simplificar la notación escribimos $W = W(t_0,t_1)$). Se tendría que $v = Wz$, $z \in \mathbb{R}^n$. Si definimos

$$u(t) = B(t)^*\phi(t_0,t)^*z\,,$$

entonces,

$$M(u) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0,\tau)B(\tau)B(\tau)^*\phi(t_0,\tau)^*z\, d\tau = W(t_0,t_1)z = v$$

es decir, Im $W \subset$ Im M.

b) Sea ahora $v \in$ Im M. Entonces, existe $\bar{u}(t)$ tal que

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\, d\tau\,.$$

Como Im $W =$ (Nuc $W)^\perp$ por ser W simétrica, para ver que $v \in$ Im W hemos de ver que $< v, w >= 0$ para todo $w \in$ Nuc W. Ahora bien, siendo

$$0 = w^*Ww = \int_{t_0}^{t_1} w^*\phi(t_0,\tau)B(\tau)B(\tau)^*\phi(t_0,\tau)^*w\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \parallel w^*\phi(t_0,\tau)B(\tau) \parallel^2\, d\tau$$

resulta que $w^*\phi(t_0,\tau)B(\tau) = 0$ para todo $\tau \in [t_0,t_1]$. Por lo tanto,

$$< v, w >= w^*v = \int_{t_0}^{t_1} w^*\phi(t_0,\tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)\, d\tau = 0$$

como queríamos probar. ■

Del proceso seguido en la demostración del teorema anterior se deriva el siguiente método de estudio de la controlabilidad.

1.5 Algoritmo.

1. Calcular $\phi(t, t_0)$.
2. Determinar $W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \tau)B(\tau)B(\tau)^*\phi(t_0, \tau)^*\, d\tau \quad (= W)$
3. Calcular rang $W = r$.

   Si $r \neq n$, (A, B) no es controlable.

   Si $r = n$, (A, B) es controlable. Sigue a 4.
4. Obtener $w = \phi(t_0, t_1)x_1 - x_0$.
5. Determinar z tal que $Wz = w$.
6. La función de control $u(t)$ es

$$u(t) = B(t)^*\phi(t_0, t)^*z = B(t)^*\phi(t_0, t)^*W^{-1}(\phi(t_0, t_1)x_1 - x_0)\,.$$

Observación 1.6 Teniendo en cuenta que $w^*Ww \geq 0$ para todo w, el teorema anterior se puede enunciar en la forma siguiente:
$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ *es controlable* en $[t_0, t_1]$ *si y sólo si* $W(t_0, t_1)$ *es una matriz simétrica definida positiva*.

Proposición 1.7 *La condición de controlabilidad es invariante por cambios lineales (constantes) de las variables de estado.*

Demostración. Resulta de comprobar que si $\phi(t, t_0)$ es la matriz fundamental de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, y $\bar{x} = S^{-1}x$ donde $S \in Gl(n, \mathbb{R})$, entonces, $S^{-1}\phi(t, t_0)S$ es la matriz fundamental de $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}(t)\bar{x}(t)$ donde $\bar{A}(t) = S^{-1}A(t)S$. ∎

2 Controlabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo

Supongamos ahora que el sistema lineal es invariante en el tiempo. Entonces, la condición de controlabilidad es más simple. Se formula a partir de la definición siguiente

Definición 2.1 *Sea* $\dot{x} = Ax + Bu$ *con* A *y* B *matrices constantes. Entonces la matriz*

$$K = (B \quad AB \ \ldots \ A^{n-1} \quad B) \in M_{n\times nm}(\mathbb{R})$$

se llama matriz de controlabilidad *del sistema o del par* $(A\ B)$.

Recordemos que si A es constante, se tiene que $\phi(t_0, \tau) = e^{(t_0-\tau)A}$. Por tanto, en este caso,

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_0-\tau)A} B^* e^{(t_0-\tau)A^*} d\tau \quad (= W)\,.$$

Teorema 2.2 *Con las notaciones e hipótesis precedentes, el par* $(A\ B)$ *es controlable en* $[t_0, t_1]$ *si y sólo si* rang $K = n$ *(máximo).*

La demostración de este teorema resultará de los lemas siguientes.

Lema 2.3 *Sea* $W_c = KK^*$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \text{Nuc}\, W(t_0, t_1) &= \text{Nuc}\, W_c \\ \text{Im}\, W(t_0, t_1) &= \text{Im}\, W_c \end{aligned}$$

Demostración. Como que W y W_c son simétricas, se tiene

$$\mathbb{R}^n = \text{Nuc}\, W \perp \text{Im}\, W = \text{Nuc}\, W_c \perp \text{Im}\, W_c\,.$$

Por tanto, es suficiente probar que Nuc $W =$ Nuc W_c.
a) Sea $v \in$ Nuc W. Entonces,

$$0 = v^* W v = \int_{t_0}^{t_1} v^* e^{(t_0-\tau)A} B B^* e^{(t_0-\tau)A^*} v\, dv = \int_{t_0}^{t_1} \parallel B^* e^{(t_0-\tau)A^*} v \parallel^2\ dv\,,$$

de donde resulta que

$$B^* e^{(t_0-\tau)A^*} v = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in [t_0, t_1]\,.$$

Derivando sucesivamente, obtenemos

$$B^* A^* e^{(t_0-\tau)A^*} v = 0\,,\ B^*(A^*)^2 e^{(t_0-\tau)A^*} v = 0\,,\ \ldots$$

y haciendo $\tau = t_0$, resulta

$$B^* v = B^* A^* v = B^*(A^*)^2 v = \ldots = B^*(A^*)^k v = 0$$

para todo entero $k \geq 0$. Es decir

$$\begin{aligned} v &\in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}\, B^*(A^*)^k = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}\, (A^k B)^* = \bigcap_{k=0}^{n-1} (\text{Im}\, A^k B)^* = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}\, A^k B \right)^* = (\text{Im}\, K)^* = \text{Nuc}\, K^*\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $K^* v = 0$ y $W_c v = 0$. Así pues, Nuc $W \subset$ Nuc W_c.

b) $v \in \text{Nuc}\, W_c$ implica $K^* v = 0$ ($v^* K K^* v = 0$), es decir, $B^* v = 0, \ldots, B^*(A^*)^{n-1} v = 0$ o, lo que es equivalente,

$$v^* A^k B = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq k \leq n-1\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(t) A^k$$

resulta

$$\begin{aligned} v^* W &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_k \beta_k(t_0 - \tau) A^k \right) B B^* e^{(t_0-\tau)A^*} d\tau = \\ &= \sum_k \int_{t_0}^{t_1} v^* \beta_k(t_0 - \tau) A^k B B^* e^{(t_0-\tau)A^*} d\tau = 0\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $Wv = (v^\top W)^* = 0$ y $v \in \text{Nuc}\, W$. ■

Lema 2.4 Im $W_c =$ Im K.

Demostración. Teniendo en cuenta que Nuc $K^* =$ Nuc KK^* ($KK^* v = 0$ implica $v^* K K^* v = \| K^* v \| = 0$), resulta que

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}\, K \perp \text{Nuc}\, K^* = \text{Im}\, K \perp \text{Nuc}\, W_c = \text{Im}\, W_c \perp \text{Nuc}\, W_c\,.$$

Entonces, Im $K =$ Im W_c. ■

Demostración del Teorema. Resulta inmediatamente de los lemas anteriores:

$$\text{Im}\, W(t_0, t_1) = \text{Im}\, W_c = \text{Im}\, K\,.$$

■

Observación 2.5

(i) Nótese que la condición rang $K = n$ es independiente del intervalo $[t_0, t_1]$. Así, si un sistema lineal invariante en el tiempo es controlable en un intervalo, lo es en todos. Se dice que el sistema es *completamente controlable*. Naturalmente, la correspondiente función de control sigue dependiendo de t_0 y t_1 (además de x_0, x_1).

(ii) La condición de controlabilidad es *genérica*, esto es si $(A\ B)$ es controlable, lo es asimismo todo par que resulte de perturbar ligeramente las matrices A y B.

2.6 El algoritmo para estudiar la controlabilidad para sistemas invariantes en el tiempo es pues el siguiente (hemos supuesto $t_0 = 0$ y escribimos $t_1 = \top$)

1. Calcular $K = (B \quad AB \ \ldots \ A^{n-1} \quad B)$.

2. Calcular rang $K = r$.

Si $r < n$, $(A\ B)$ no es controlable.

Si $r = n$, $(A\ B)$ es controlable. Sigue a 3.

3. Obtener $w = e^{-\top A}x_1 - x_0$.
4. Determinar z tal que $Wz = w$.
5. Determinar $W(0, \top) = \displaystyle\int_0^{\top} e^{-A\tau}BB^*e^{-A^*\tau}\, d\tau$.
6. La función de control $u(t)$ es
$$u(t) = B^*e^{-A^*t}z\,.$$

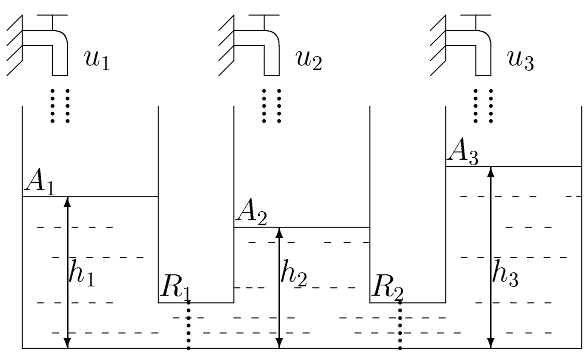
Observación 2.7 Hemos visto que la condición de controlabilidad es invariante por cambios lineales de las variables de estado. En el caso que el sistema sea invariante en el tiempo, la comprobación es inmediata. En efecto, si $\bar{x} = Sx$ con S invertible, sabemos que $\bar{A} = S^{-1}AS$ y $\bar{B} = S^{-1}B$. Por tanto,

$$\bar{K} = (\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B}\ \ldots\ \bar{A}^{n-1}B) = S^{-1}(B \quad AB\ \ldots\ A^{n-1}B)$$

que tiene el mismo rang que K, ya que S es invertible.

Ejemplos 2.8

(i) [SB] Consideremos el modelo de un sistema físico descrito en la figura adjunta



Bajo hipótesis convenientes, las ecuaciones de continuidad para cada depósito conducen al siguiente sistema en el que A_i son las áreas de la superficie de líquidos, h_i las alturas de líquido, $i = 1, 2, 3$ y R_1, R_2 constantes

$$\left.\begin{aligned}
A_1\frac{dh_1}{dt} &= -\frac{h_1 - h_2}{R_1} + u_1 \\[2ex]
A_2\frac{dh_2}{dt} &= \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2 - h_3}{R_2} + u_2 \\[2ex]
A_3\frac{dh_3}{dt} &= \frac{h_2 - h_3}{R_2} + u_3
\end{aligned}\right\}$$

Supongamos que (por ejemplo) se verifican las relaciones siguientes

$$A_1 = A_3 = \frac{2}{3}A_2\,, \quad A_2 = 1\,, \quad R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$$

y escribimos $x_i = h_i$, $i = 1, 2, 2$.

Entonces el sistema anterior queda en la forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \\ 0 & & \alpha_3 \end{pmatrix} u$$

donde α_1, α_2, α_3 son constantes > 0.

La matriz de controlabilidad es

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \vdots & -3\alpha_1 & 3\alpha_2 & 0 & \vdots & 15\alpha_1 & -21\alpha_2 & 6\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \vdots & 2\alpha_1 & -4\alpha_2 & 2\alpha_3 & \vdots & -14\alpha_1 & 28\alpha_2 & -14\alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \vdots & 0 & 3\alpha_2 & -3\alpha_3 & \vdots & 6\alpha_1 & -21\alpha_2 & 15\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Vamos a considerar 3 casos:

(a) $u_2 = u_3 = 0$.

(b) $u_1 = u_3 = 0$.

(c) $u_1 = u_2 = 0$.

(a) $k_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -3\alpha_1 & \vdots \\ 0 & 2\alpha_1 & \vdots \\ 0 & 0 & -6\alpha_1 \end{pmatrix}$ tiene rang 3: el sistema es controlable.

(b) $k_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha_2 & -21\alpha_2 \\ \alpha_2 & -4\alpha_2 & 28\alpha_2 \\ 0 & 3\alpha_2 & -21\alpha_2 \end{pmatrix}$ tiene rang 2: el sistema no es controlable.

(c) $k_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6\alpha_3 \\ 0 & 2\alpha_3 & -14\alpha_3 \\ \alpha_3 & -3\alpha_3 & 15\alpha_3 \end{pmatrix}$ tiene rang 3: el sistema es controlable.

Es decir, en el primer y tercer caso, fijadas unas alturas iniciales, un tiempo T y unas alturas finales, es posible graduar los caudales u_1, u_2, u_3 de forma que, efectivamente, transcurrido el tiempo T, las alturas finales sean las fijadas (Nótese que las funciones $u_i(t)$ pueden tomar valores negativos!.)

(ii) Con las notaciones de (1.4.3) vamos a estudiar la controlabilidad del satélite. Puesto que utilizamos las ecuaciones linealizadas, es claro que el estudio será válido solamente para estados convenientemente próximos al de equilibrio.

Supongamos para simplificar notación que $r_0 = 1$ y $m = 1$.

Observemos que $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ es controlable.

Entonces, teniendo en cuenta la naturaleza desacoplada de las ecuaciones, es suficiente estudiar la controlabilidad del par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3w^2 & 0 & 0 & 2w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2w & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de controlabilidad es

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 0 & 2w & \vdots & -w^2 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 2w & \vdots & -w^2 & 0 & \vdots & 0 & -2w^3 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & -2w & 0 & \vdots & 0 & -4w^2 \\ 0 & 1 & \vdots & -2w & 0 & \vdots & 0 & -4w^2 & \vdots & 2w^3 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene rang 4. Así pues, el sistema es controlable.

Supongamos ahora que el cohete u_θ se avería y queremos ver si podemos controlar el satélite con el impulsor u_r. Es decir, hacemos $u_\theta = 0$, con lo que la matriz de controlabilidad K_1 es

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -w^2 \\ 1 & 0 & -w^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2w & 0 \\ 0 & -2w & 0 & -2w^2 \end{pmatrix}$$

que tiene rango < 4. Así pues la trayectoria no se puede controlar con u_r solamente.

Por el contrario, si $u_r = 0$, se tiene que

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2w & 0 \\ 0 & 2w & 0 & -2w^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4w^2 \\ 1 & 0 & -4w^2 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 4 y por tanto se tiene controlabilidad en este caso.

Insistimos en la naturaleza local del estudio efectuado.

3 Sistemas no controlables. Subsistema controlable

Sea $\sum$ un sistema lineal invariante en el tiempo representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

y supongamos que su matriz de controlabilidad K tiene rang $r < n$. Entonces sabemos que $\sum$ no es controlable. Vamos a ver que $\sum$ contiene un "subsistema" controlable. De forma más precisa tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *Con las notaciones anteriores supongamos que la matriz de controlabilidad K de $(A\ B)$ tiene* rang $r < n$. *Entonces existe una matriz S invertible tal que*

$$\bar{A} = S^{-1}AS = \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{A}_{22} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c} \bar{B}_1 \\ \hline 0 \end{array}\right), \quad \bar{C} = CS = (\bar{C}_1, \bar{C}_2)$$

con $\bar{A}_{11} \in M_r(\mathbb{R})$, $\bar{A}_{12} \in M_{r\times(n-r)}(\mathbb{R})$, $\bar{A}_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{R})$, $\bar{B}_1 \in M_{r\times m}(\mathbb{R})$ y $\bar{C}_1 \in M_{p\times r}(\mathbb{R})$. Además

(i) El par $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$ es controlable

(ii) Las matrices de transferencia de (A, B, C) y $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ coinciden.

Demostración. Sea $K_a : (\mathbb{R}^m)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal asociada naturalmente a K (ver notaciones), $(v_1, \ldots, v_r)$ una base de Im K_a y $v = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ obtenida por ampliación de la anterior. Sea S la matriz de esta base en la base ordinaria. Si

$A_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $B_a : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $C_a = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son las aplicaciones lineales asociadas de forma natural a A, B, y C, sean $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ las matrices de A_a, B_a y C_a tomando en $\mathbb{R}^n$ la base $(v_1, \ldots, v_n)$. Puesto que A, B, C son las matrices respectivas de A_a, B_a y C_a en las bases ordinarias, sabemos que

$$\bar{A} = S^{-1}AS\,, \qquad \bar{B} = S^{-1}B\,, \qquad \bar{C} = CS\,.$$

Vemos que Im K_a es invariante por A_a. Si $y \in$ Im K_a, será

$$y = (B \quad AB \ldots A^{n-1}B) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix}, \quad i = 1 \ldots n\,.$$

Por tanto, $y = Bx_1 + ABx_2 + \ldots + A^{n-1}Bx_n$, de donde

$$A_a(y) = Ay = ABx_1 + A^2Bx_2 + \ldots + A^nBx_n$$

y aplicando Cayley-Hamilton resulta que $A_a(y) \in$ Im K_a.
Asimismo, las columnas de $\bar{B}$ son las componentes de las columnas de B (que lo son de K) en la base v. De aquí resulta que $\bar{A}$, $\bar{C}$ y $\bar{C}$ tienen la forma indicada del teorema.
Entonces

(i) Si $\overline{K}$ es la matriz de controlabilidad del par $(\overline{A}, \overline{B})$, se tendrá que

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 & \bar{A}_{11}\bar{B}_1 & \ldots & \bar{A}_{11}^{n-1}\bar{B}_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \end{matrix} \,,$$

y la matriz de controlabilidad de $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$ es

$$\bar{K}_1 = (\bar{B}_1 \quad \bar{A}_{11}\bar{B}_1 \ldots \bar{A}_{11}^{r-1}\bar{B}_1)\,.$$

Nuevamente por Cayley-Hamilton, rang $\bar{K}_1 =$ rang $\bar{K} =$ rang $K = r$ (la segunda igualdad, por la independencia de la controlabilidad respecto de los cambios lineales de variables de estado: ver 2.7).

(ii) Finalmente, si $\bar{H}(s)$ es la matriz de transferencia de $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ y $\bar{H}_1(s)$ es la matriz de transferencia de $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ tenemos,

$$H(s) \;=\; \bar{H}(s) = (\bar{C}_1\bar{C}_2) \begin{pmatrix} sI - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \; (\bar{C}_1\bar{C}_2) \begin{pmatrix} (sI - \bar{A}_{11})^{-1} & (sI - \bar{A}_{11})^{-1}\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_{22})^{-1} \\ 0 & (sI - \bar{A}_{22})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{H}_1(s) \quad \blacksquare$$

Definición 3.2 *El sistema lineal representado por*

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \bar{A}_{11}\xi + \bar{B}_1 \\ \eta &= \bar{C}_1\xi\end{aligned}$$

donde $\xi = \begin{pmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_r\end{pmatrix}$ *son las* r *primeras componentes de* $\bar{x} = S^{-1}x$, $\begin{pmatrix}\bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_r\end{pmatrix}$*, se llama* subsistema controlable de $\sum$.

Recuérdese que $\bar{x} = S^{-1}x$ son las componentes del vector x en la base $(v_1, \ldots, v_n)$.

4 Subespacio de controlabilidad

Mantenemos las notaciones y hipótesis del apartado anterior.
Según hemos visto, el espacio de estados del subsistema controlable de $\sum$ es precisamente el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, Im K_a. En efecto, $\bar{x} = S^{-1}x$ son las componentes del vector x en la base $(v_1, \ldots, v_n)$. Por tanto, teniendo en cuenta que Im $K_a = [v_1, \ldots, v_r]$, $\xi_1, \ldots, \xi_r$ son las componentes en la base $(v_1, \ldots, v_r)$ de los vectores de Im K_a.
Entonces, si x_0, x_1 son dos vectores arbitrarios de Im K_a y escribimos $x_0 = \alpha_{01}v_1 + \ldots + \alpha_{0r}v_r$, $x_1 = \alpha_{11}v_1 + \ldots + \alpha_{1r}v_r$, como que $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$ es controlable, existe $u(t)$ tal que la solución de

$$\dot{\xi}(t) = \bar{A}_{11}\xi(t) + \bar{B}_1 u(t)$$

tal que $\xi(t_0) = \begin{pmatrix}\alpha_{01} \\ \vdots \\ \alpha_{0r}\end{pmatrix}$ verifica $\xi(t_1) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1r}\end{pmatrix}$.

Definimos

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix}\xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_r(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi(t) \\ 0\end{pmatrix}$$

y tendremos

(i) $\bar{x}(t)$ es solución de $\cdot\bar{x}(t) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t)$ ya que

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

(ii) $\bar{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{0i} v_i = x_0, \bar{x}(t_1) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{1i} v_i = x_1.$

Hemos probado pues el siguiente resultado

Proposición 4.1 *Sea K la matriz de controlabilidad de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Entonces para cualquier $t_0 < t_1$ y $x_0, x_1 \in$ Im K_a, existe un control $u(t)$ tal que la solución $x(t)$ de la ecuación anterior que verifica $x(t_0) = x_0$, también verifica $x(t_1) = x_1$.*

Esto justifica la

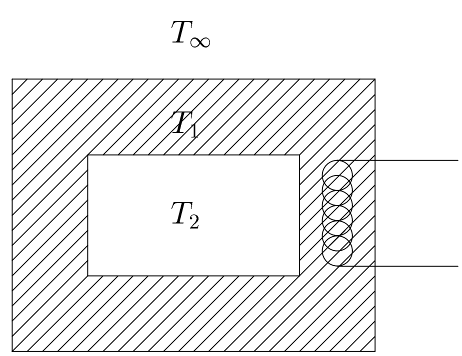
Definición 4.2 *El subespacio vectorial* Im $K_a \subset \mathbb{R}^n$ *se llama* subespacio de controlabilidad *de* $\sum$*, o de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$.*

Naturalmente, el sistema es controlable si y sólo si Im $K_a = \mathbb{R}^n$.

5 Observabilidad

5.1 Para introducir la idea de sistema observable consideramos el ejemplo siguiente:

Un horno eléctrico como el de la figura adjunta [BC]



La temperatura interior T_2 se controla variando la potencia térmica $q(t)$ aportada a través de las paredes del horno, mediante el uso de una resistencia eléctrica.
Sea c_1 la capacidad calorífica de las paredes del horno y c_2 la de su carga interior; a_1 y a_2 las áreas de la superficie interior y exterior de las paredes del horno, y h_1, h_2 los coeficientes respectivos de transferencia térmica de las superficies citadas.

Supongamos para cualquier instante t, una distribución uniforme de temperaturas, y que la velocidad de pérdida de calor o potencia térmica disipada es proporcional al área y a la diferencia de temperaturas entre la pared correspondiente y su entorno.
Las ecuaciones diferenciales que verifican las temperaturas T_∞ del exterior, $T_1(t)$ de las paredes y $T_2(t)$ del interior son las siguientes,

$$\begin{aligned} c_1 T_1'(t) &= a_2 h_2 (T_\infty - T_1) + a_1 h_1 (T_2 - T_1) + q(t) \\ c_2 T_2'(t) &= a_1 h_1 (T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Si tomamos como variables de estado las diferencias de temperatura $x_1 = T_1 - T_\infty$, $x_2 = T_2 - T_\infty$, las ecuaciones anteriores se escriben de la forma $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1h_1 + a_2h_2}{c_1} & \dfrac{a_1h_1}{c_1} \\ \dfrac{a_1h_1}{c_2} & -\dfrac{a_1h_1}{c_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(t) = q(t).$$

Tomamos como función de salida $y(t) = x_1(t)$, diferencia de temperaturas entre las paredes del horno y el exterior. Entonces, la ecuación (ES) es

$$y(t) = (1 \quad 0)x(t)\,,$$

es decir, $C = (1 \quad 0)$, $D = 0$.
Está claro que puede existir una dificultad o imposibilidad de medir directamente la temperatura interior T_2. Pues bien, el sistema es observable en $[t_0, t_1]$ si la temperatura interior T_2 es, en el instante t_0, determinable a partir de $u(t)$ y $y(t)$, es decir, a partir del conocimiento de las funciones de control o entrada y de salida durante el intervalo $[t_0, t_1]$.
Después de esta introducción damos de forma precisa la definición

Definición 5.2 *Sigui $\sum$ un sistema lineal representado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

Diremos que $\sum$ es observable *en $[t_0, t_1]$ si cualquier que sea el estado inicial $x_0 = x(t_0)$, queda determinado de forma única por el conocimiento de $u(t)$ y $y(t)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.*

Como veremos, esta propiedad es invariante por cambios lineales de las variables de estado.
Vamos a obtener una caracterización de esta condición a partir de las matrices $A(t)$ y $C(t)$.
Sabemos que, si $\phi(t, t_0)$ es la matriz fundamental de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, se tiene que

$$y(t) = C(t)\phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\,.$$

Por tanto,

$$C(t)\phi(t,t_0)x_0 = y(t) - C(t)\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\,.$$

Entonces $\sum$ es observable en $[t_0, t_1]$ si

$$C(t)\phi(t,t_0)x_0 = C(t)\phi(t,t_0)x_0'$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$ implica $x_0 = x_0'$. Es decir, si definimos una aplicación lineal

$$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow C_\circ([t_0,t_1], \mathbb{R}^p)$$

por

$$N(x)(t) = C(t)\phi(t,t_0)x\,, \quad t \in [t_0, t_1]$$

tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.3 *Con las notaciones anteriores,* $\sum$ *es observable en* $[t_0, t_1]$ *si y sólo si* Nuc $N = \{0\}$.
*(*Nuc $N = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ C(t)\phi(t,t_0)x = 0$ *para todo* $t \in [t_0, t_1]\}$*)*

Observaciones 5.4

(i) Nótese que el hecho que $\sum$ sea observable *no depende de* $u(t)$. Es decir, si $\sum$ es observable, el estado inicial x_0 queda determinado aplicando una entrada *cualquiera* $u(t)$ durante el intervalo $[t_0, t_1]$ y calculando la salida $y(t)$ a lo largo de este mismo intervalo.

(ii) De la definición de observabilidad no resultaba aparente que esta condición sólo depende de las matrices $A(t)$, $C(t)$. La proposición anterior pone de manifiesto que ello es así, de ahí que en lo sucesivo y de forma análoga a la controlabilidad diremos indistintamente que $\sum$ es observable, o que lo es el par $(A(t), C(t))$.

Si hacemos un cambio lineal de variables de estado definido por $S \in \mathrm{G}\ell(n,\mathbb{R})$, $C(t)$ se transforma en $C(t)S$ y $\phi(t,t_0)$ en $S^{-1}\phi(t,t_0)S$. Entonces, la proposición anterior nos da inmediatamente la

Proposición 5.5 *La condición de observabilidad es invariante por cambios lineales (constantes) de las variables de estado.*

5.6 Como veremos a continuación esta condición de observabilidad es equivalente a la controlabilidad de un sistema lineal asociado a $\sum$. En efecto, denotamos por $\sum_d$ el sistema lineal representado por

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -A(t)^*z(t) + C(t)^*v(t)\\ w(t) &= B(t)^*z(t)\end{aligned}$$

El sistema $\sum_d$ se llama *dual* de $\sum$.
Sea M la aplicación de $C_0([0,+\infty[,\, \mathbb{R}^m)$ en $\mathbb{R}^n$ definida por

$$M(v) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(\tau,t_0)^* C(\tau)^* v(\tau) d\tau \,.$$

Lema 5.7 Nuc $N = (\text{Im } M)^\perp$ *(ortogonal de* Im M*).*

Demostración. Si $r \in \text{Im } M$ y $s \in \text{Nuc } N$,

$$< r, s >= r^* s = \int_{t_0}^{t_1} v(\tau)^* \underbrace{C(\tau)\phi(\tau,t_0)s\, d\tau}_{N(s)(\tau)} = 0$$

por tanto, Nuc $N \subset (\text{Im } M)^\perp$. Sea ahora $s \in R^n$ tal que $r^* s = 0$ para todo $r \in \text{Im } M$. Entonces,

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} v(\tau)^* C(\tau)\phi(\tau,t_0)s\, d\tau$$

para todo $v(\tau)$. Eligiendo $v(t) = C(t)\phi(t,t_0)s$, tendremos

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} s^*\phi(\tau,t_0)^* C(\tau)^* C(\tau)\phi(\tau,t_0)s\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \parallel C(\tau)\phi(\tau,t_0)s \parallel^2\, d\tau$$

de donde

$$C(\tau)\phi(\tau,t_0)s = 0 \quad \text{para todo} \quad \tau \in [t_0,t_1]$$

es decir, $s \in \text{Nuc } N$. Esto prueba la inclusión contraria. ■

Lema 5.8 *Sea $\phi_a(t,t_0)$ la matriz fundamental de $\dot z(t) = A(t)^* z(t)$. Se verifica que*

$$\phi_a(t,t_0) = \phi(t_0,t)^* \,.$$

($\phi(t,t_0)$ es la matriz fundamental de $\dot x(t) = A(t)x(t)$)

Demostración.

$$\frac{d}{dt}(\phi(t_0,t)^*) = \left(\frac{d}{dt}\phi(t_0,t)\right)^* = -(\phi(t_0,t)A(t))^* = -A(t)^*\phi(t_0,t)^* \,.$$

■

Según hemos visto al estudiar la controlabilidad, $\sum_d$ es controlable en $[t_0,t_1]$ si la imagen de la aplicación lineal

$$u(\tau) \longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \phi_a(t_0,\tau)C(\tau)^* u(\tau)\, d\tau$$

es $\mathbb{R}^n$ (lema 1.4). Pero $\phi_a(t_0,\tau) = \phi(\tau,t_0)^*$, por tanto esta aplicación coincide con la aplicación M introducida en la sección 1. Entonces tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \sum \quad \text{observable en} \quad [t_0,t_1] &\iff \text{Nuc } N = \{0\} \iff \\ &\iff \text{Im } M = \mathbb{R}^n \\ &\iff \sum_d \quad \text{controlable en} \quad [t_0,t_1] \end{aligned}$$

Hemos demostrado pues, el siguiente teorema

Teorema 5.9 *$\sum$ es observable en $[t_0, t_1]$ si y sólo si $\sum_d$ es controlable en $[t_0, t_1]$.*

5.10 La matriz

$$W_a(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(\tau, t_0)^* C(\tau)^* C(\tau) \phi(\tau, t_0)\, d\tau$$

es la matriz gramiana de controlabilidad de $\sum_d$. Esta matriz se llama *matriz gramiana de observabilidad de* $\sum$ y la notamos como $M(t_0, t_1)$. Es decir,

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(\tau, t_0)^* C(\tau)^* C(\tau) \phi(\tau, t_0)\, d\tau\,.$$

Corolario 5.11 *$\sum$ es observable en $[t_0, t_1]$ si y sólo si $M(t_0, t_1)$ es invertible.*

6 Sistemas invariantes en el tiempo

Sea $\sum$ un sistema lineal invariante en el tiempo representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

El sistema dual $\sum_d$ viene representado por

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A^* z(t) + C^* v(t) \\ w(t) &= B^* z(t) \end{aligned}$$

y su matriz de controlabilidad es por tanto

$$(C^* \quad -C^* A^* \quad C^*(A^*)^2 \ldots \pm C^*(A^*)^{n-1}) = \begin{pmatrix} C \\ -AC \\ A^2 C \\ \vdots \\ \pm A^{n-1} C \end{pmatrix}^*$$

Hemos visto que $\sum$ es observable en $[t_0, t_1]$ si y sólo si $\sum_a$ es controlable en $[t_0, t_1]$. Ello sugiere introducir la siguiente

Definición 6.1 *La matriz*

$$L = \begin{pmatrix} C \\ AC \\ \vdots \\ A^{n-1} C \end{pmatrix}$$

se denomina matriz de observabilidad *de* $\sum$ *o del par* $(A\ C)$.

Puesto que el rango de una matriz coincide con el de su transpuesta, de 5.9 se deduce el siguiente resultado

Teorema 6.2 $\sum$ *es observable en* $[t_0, t_1]$ *si y sólo si* rang $L = n$.

Observación 6.3 Análogamente a (2.5), si $\sum$ es invariante en el tiempo y es observable en $[t_0, t_1]$ lo es en cualquier intervalo. Se dice entonces que $\sum$ es *completamente observable*.

6.4 Nótese que, en este caso, si $t_0 = 0$

$$M(t_1) = \int_0^{t_1} e^{\tau A^*} C^* C e^{\tau A}\, d\tau\ .$$

Para el cálculo de x_0 podemos tomar cualquier $u(t)$. Por ejemplo $u(t) = 0$!. Entonces, de

$$Ce^{tA} x_0 = y(t)$$

resulta

$$\int_0^{t_1} e^{\tau A^*} C^* C e^{\tau A} x_0\, d\tau = \int_0^{t_1} e^{\tau A^*} C^* y(\tau)\, d\tau$$

de donde (suponiendo $\sum$ observable)

$$x_0 = M(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{\tau A^*} C^* y(\tau)\, d\tau\ .$$

Obsérvese que, en este caso, si $M(t_1)$ es invertible para un $t_1 > 0$, también lo es *para todo* $t_1 > 0$.

6.5 Análogamente a (2.7) se tiene que si L y $\overline{L}$ son, respectivamente, las matrices de observabilidad de $(A\ C)$ y $(\overline{A}, \overline{C})$, donde $\overline{A} = S^{-1}AS$ y $\overline{C} = CS$, entonces rang $L =$ rang $\overline{L}$.

7 Ejemplos.

7.1 Volvamos al ejemplo del horno y supongamos que las constantes son tales que

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, siendo $C = (1 \quad 0)$ resulta que la matriz de observabilidad es

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

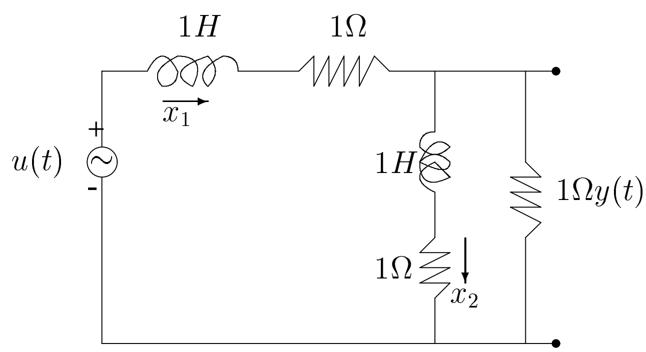
que tiene rang 2. Así pues, el sistema es observable. El estado inicial resulta de la fórmula anterior:

$$x(0) = M(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{\tau \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y(\tau)\, d\tau$$

donde

$$\begin{aligned} M(t_1) &= \int_0^{t_1} e^{\tau \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0) e^{\tau \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}} d\tau = \\ &= \int_0^{t_1} e^{\tau \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\tau \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}} d\tau \end{aligned}$$

7.2 Consideremos el siguiente circuito [Ch]:



De

$$\begin{cases} u = \dot{x}_1 + x_1 + y \\ y = \dot{x}_2 + x_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

resulta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_1 + x_2 + u = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

es decir,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = (1 \quad -1)$$

$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rang 2 y no es observable. En efecto,

$$\begin{aligned} y(t) &= ce^{At}x_0 = (1 \quad -1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_0 2 \end{pmatrix} = \\ &= (x_{01}-x_{02})e^{-3t} \qquad \text{(hemos hecho } u(t)=0\text{).} \end{aligned}$$

La salida depende de $x_{01} - x_{02}$, por tanto *el estado inicial no es observable*.

7.3 En la linealización del ejemplo del satélite, hemos visto que (suponiendo $r_0 = 1$)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3w^2 & 0 & 0 & 2w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2w & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

donde $x = \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

Supongamos que r y θ se pueden medir. Entonces podemos considerar como salida (r, θ) o sea (x_1, x_3). Por tanto

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$L = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3w^2 & 0 & 0 & 2w \\ 0 & -2w & 0 & 0 \\ 0 & -w^2 & 0 & 0 \\ -6w^3 & 0 & 0 & -4w^2 \end{pmatrix}$$

que tiene rang 4 y por tanto el sistema es completamente observable.
Supongamos que solamente r es medible. En este caso

$$C_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

y

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3w^2 & 0 & 0 & 2w \\ 0 & -w^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con rang } L_1 < 4$$

y $\sum$ no es observable con esta salida.
Si, por el contrario, θ es medible,

$$C_2 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

y

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2w & 0 & 0 \\ -6w^3 & 0 & 0 & -4w^2 \end{pmatrix}$$

que tiene rang 4 y por tanto con esta salida el sistema es observable. Esto significa que si medimos $\theta(t)$ a lo largo de un intervalo $[0, t_1]$, podemos conocer el estado del sistema, en el instante 0, es decir, $r(0)$, $\dot{r}(0)$, $\theta(0)$ y $\dot{\theta}(0)$. (Siempre naturalmente que las variaciones de r, $\dot{r}$, θ y $\dot{\theta}$ sean pequeñas, única situación en la cual la linealización es válida.)

8 Sistemas no observables. Subsistema observable

De forma análoga al caso de un sistema no controlable, si la matriz de observabilidad L de un sistema lineal invariante en el tiempo representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

tiene rang $r < n$ y se tiene el siguiente resultado, que podemos considerar dual de (3.1)

Teorema 8.1 *Si* rang $L = r < n$ *existe* $T \in \mathrm{G}\ell(n, \mathbb{R})$ *tal que*

$$\begin{aligned} \overline{A} &= T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{pmatrix} \\ \overline{B} &= T^{-1}B = \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} \\ \overline{C} &= CT = (\overline{C}_1 \quad 0) \end{aligned}$$

con $\overline{A}_{11} \in M_r(\mathbb{R})$, $\overline{A}_{21} \in M_{(n-r)\times r}$, $\overline{A}_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{R})$, $\overline{B}_1 \in M_{r\times m}(\mathbb{R})$, $\overline{C}_1 \in M_{p\times r}(\mathbb{R})$. *Además,*

(i) El par $(\overline{A}_{11}, \overline{C}_1)$ *es completamente observable.*

(ii) Las matrices de transferencia de (A, B, C) *y* $(\overline{A}_{11}, \overline{B}_1, \overline{C}_1)$ *coinciden.*

Demostración. Si $L = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ y Nuc $L_a = N$ con $\dim \mathrm{Nuc}\, L = n - r = \ell > 0$, sea $(v_1, \ldots, v_\ell)$ base de N y $u_1, \ldots, u_r$ tal que $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_\ell)$ es base de $\mathbb{R}^n$.
Nótese que $x \in N$ si y sólo si $CA^i x = 0$ para $0 \leq i \leq r-1$. De aquí resulta fácilmente que N es A_a-invariante (Cayley-Hamilton), por tanto si S es la matriz de la base $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_\ell)$ en la base ordinaria se tendrá que

$$\overline{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = (\overline{B}_1, \overline{B}_2)$$

$\overline{C} = (\overline{C}_1 \quad 0)$ ya que $\overline{C} = CS = (\underbrace{Cu_1 \ldots Cu_r}_{\overline{C}_1} \underbrace{Cv_1}_{=0} \ldots \underbrace{Cv_\ell}_{=0})$

(i) Si $\overline{L}$ es la matriz de observabilidad de $(\overline{A}\ \overline{C})$, se tiene que $\overline{L} = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 & 0 \\ \overline{C}_1\overline{A}_{11} & 0 \\ \vdots & \\ \overline{C}_1\overline{A}_{11}^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces, aplicando nuevamente Cayley-Hamilton y la igualdad rang $\overline{L} =$ rang $\overline{L}^*$ resulta que $\overline{L}_1 = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 \\ \overline{C}_1\overline{A}_{11} \\ \vdots \\ \overline{C}_1\overline{A}_{11}^{r-1} \end{pmatrix}$ tiene rango r.

(ii) Si $\overline{H}(s)$ es la matriz de transferencia de $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ y $\overline{H}_1(s)$ la matriz de transferencia de $(\overline{A}_{11}, \overline{B}_1, \overline{C}_1)$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\overline{H}(s) &= (\overline{C}_1 \quad 0)\begin{pmatrix} sI - \overline{A}_{11} & 0 \\ -\overline{A}_{21} & sI - \overline{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} = \\
&= (\overline{C}_1 \quad 0)\begin{pmatrix} (sI - \overline{A}_{11})^{-1} & 0 \\ (sI - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{21}(sI - \overline{A}_{22})^{-1} & (sI - \overline{A}_{22})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} = \\
&= (\overline{C}_1(sI - \overline{A}_{11})^{-1} \quad 0)\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} = \overline{C}_1(sI - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{B}_1 = \overline{H}_1(s)\,.
\end{aligned}$$

■

8.2 Con las notaciones anteriores (y de forma análoga a 4) notemos que si $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}$, $(\overline{x} = S^{-1}x)$

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{x}}_1 &= \overline{A}_{11}\overline{x}_1 + \overline{B}_1 u \\
y &= \overline{C}_1\overline{x}_1
\end{aligned}$$

y no depende de $\overline{x}_2$. Estas variables no son observables pero $\overline{x}_1$ son completamente observables. El sistema lineal definido por las ecuaciones anteriores se denomina *subsistema observable* del inicial.

9 Descomposición de Kalman

9.1 Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo $\sum$ representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

y recordemos que

$$K = (B \quad AB \dots A^{n-1}B)\,, \qquad L = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

son, respectivamente, las matrices de controlabilidad y observabilidad de $\sum$. Denotamos $R(K) = \mathrm{Im}\, K$, $N(L) = \mathrm{Nuc}\, L$ y definimos $\sum_{c0}$, $\sum_{c\phi}$, $\sum_{\not c0}$, $\sum_{\not c\phi}$ de forma que:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{c\phi} & = & R(K) \cap N(L) \\ \sum_{c\phi} & \oplus & \sum_{c0} = R(K) \\ \sum_{c\phi} & \oplus & \sum_{\not c\phi} = N(L) \\ \sum_{c0} & \oplus & \sum_{c\phi} \oplus \sum_{\not c0} \oplus \sum_{\not c\phi} = \mathbb{R}^n \end{array}$$

Entonces, si tomamos como base de $\mathbb{R}^n$ una reunió de bases de cada subespacio $\sum_{c0}$, $\sum_{c\phi}$, ... y S es la matriz de esta base en la ordinaria, sabemos que las matrices A, B y C se transforman en

$$\overline{A} = S^{-1}AS\,, \qquad \overline{B} = S^{-1}B\,, \qquad \overline{C} = CS\,.$$

Entonces, teniendo en cuenta que los subespacios $\sum_{c\phi}$, $\sum_{c\phi} \oplus \sum_{c0}$ y $\sum_{c\phi} \oplus \sum_{\not c0}$ son A-invariantes, la matriz de $\overline{A}$ tendrá la forma:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & 0 & \overline{A}_{13} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \overline{A}_{23} & \overline{A}_{24} \\ 0 & 0 & \overline{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A}_{43} & \overline{A}_{44} \end{pmatrix}$$

la de $\overline{B}$,

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Nótese Im } B \subset R(K) = \textstyle\sum_{c\phi} \oplus \sum_{\not c0})$$

y

$$\overline{C} = (\overline{C}_1 \quad 0 \quad \overline{C}_3 \quad 0) \qquad (C(N(L)) = 0)$$

verificándose que:

(i) $(\overline{A}_{11}, \overline{B}_1, \overline{C}_1)$ es controlable, observable y tiene la misma matriz de transferencia que $\sum$.

(ii) $\left(\begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}, (\overline{C}_1 \quad 0)\right)$ es controlable.

(iii) $\left(\begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{13} \\ 0 & \overline{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\overline{C}_1 \quad \overline{C}_3)\right)$ es observable.

(iv) $\left(\begin{pmatrix} \overline{A}_{33} & 0 \\ \overline{A}_{43} & \overline{A}_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\overline{C}_3 \quad 0)\right)$ es completamente incontrolable.

(No se puede alcanzar ninguno de sus estados no nulos).

Definición 9.2 *La descomposición anterior de las matrices A, B, y C se denomina* descomposición de Kalman *de* $\sum$.

Ejemplo 9.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R(K) &= [(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1), (1 \quad 0 \quad 1 \quad -1), (1 \quad 0 \quad -2 \quad 1)] \\ N(L) &= [(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0), (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)] \\ N(L) \cap R(K) &= [(2 \quad 0 \quad 1 \quad 0), (0 \quad 0 \quad -2 \quad 0)] = \textstyle\sum_{c\phi} \end{aligned}$$

$$\textstyle\sum_{c0} = [(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)], \qquad \sum_{\not{c}\phi} = \{0\}, \qquad \sum_{\not{c}0} = [(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)]$$

$$(\underbrace{\overset{v_1}{(1\quad 0\quad 0\quad 1)}}_{\sum_{c0}},\underbrace{\overset{v_2}{(2\quad 0\quad 1\quad 0)},\overset{v_3}{(0\quad 0\quad -2\quad 0)}}_{\sum_{c\phi}},\underbrace{\overset{v_4}{(0\quad 1\quad 0\quad 0)}}_{\sum_{\not c0}})$$

$$S=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&0&1\\0&1&-2&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{c|cc|c}-1&0&0&0\\ \hline 1&1&0&1/2\\ 0&1&1&1/4\\ \hline 0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\overline{A}_{11}=(-1)\,,\qquad \overline{A}_{13}=2$$

$$\overline{A}_{21}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \overline{A}_{22}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\qquad \overline{A}_{23}=\begin{pmatrix}1/2\\1/4\end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_{33}=1$$

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \overline{B}_1=1\,,\qquad \overline{B}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overline{C}=(1\quad 0\quad 0\quad 1)\,,\qquad \overline{C}_1=(1)\,,\qquad \overline{C}_3=(1)$$

(i) $((-1),(1),(1))$ controlable y observable.

(ii) $\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},(1\quad 0\quad 0)\right)$ controlable no observable.

(iii) $\left(\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},(1\quad 1)\right)$ observable no controlable.

(iv) $(1\quad 0\quad 1)$ completamente incontrolable.

Capítulo 3

Estabilidad

En el estudio de la estabilidad de sistemas distinguiremos dos casos. En el primero se trata de estudiar la evolución del estado del sistema en un entorno de uno de sus puntos de equilibrio en ausencia de impulsos externos o entradas, esto es, $u = 0$, y en el segundo, la evolución de la salida en presencia de excitaciones externas, es decir cuando $u \neq 0$. Nos referiremos a los sistemas con entrada nula como *sistemas autónomos*.

1 Estabilidad de sistemas autónomos

Diversas posibilidades surgen al analizar el comportamiento del estado de un sistema cuando se aleja de un punto de equilibrio. Nosotros nos limitaremos a considerar tres posibilidades. Puesto que no supone ninguna complicación añadida, daremos las definiciones para una representación matemática de la ecuación de estado del sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)\,.$$

En ausencia de impulsos externos, es decir si $u(t) = 0$ para todo t, sea x_e un punto de equilibrio, esto es

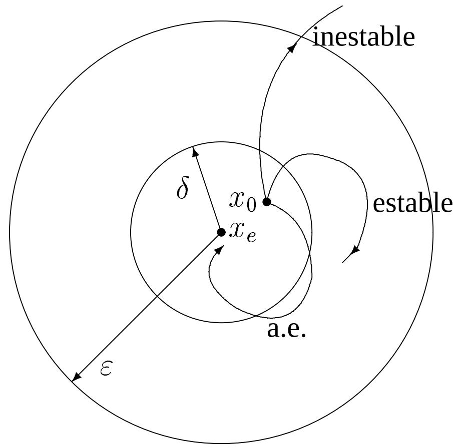
$$f(x_e, 0, t) = 0\,, \quad \text{para todo} \quad t\,.$$

Definición 1.1 *1. Se dice que x_e es* estable *en t_0 si para todo $\varepsilon > 0$ (convenientemente pequeño), existe $\delta > 0$ tal que si $\| x_0 - x_e \| < \delta$ entonces $\| x(t) - x_e \| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$ ($x(t)$ es la única solución de $\dot{x} = f(x, 0, t)$ tal que $x(t_0) = 0$).*

2. Se dice que x_e es asintóticamente estable *si es estable y existe $\gamma > 0$ tal que si $\| x_0 - x_e \| < \gamma$, entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$.*

3. Si x_e no es estable se dice que es inestable.

La figura adjunta ilustra las definiciones anteriores



A partir de ahora consideraremos sistemas autónomos lineales, esto es, representados por

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \tag{1}$$

Observemos que para tales sistemas los puntos de equilibrio x_e en t_0 son aquellos para los cuales

$$A(t)x_e = 0\,, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0\,.$$

Evidentemente, 0 es siempre un punto de equilibrio, y si $A(t_0)$ es invertible, 0 será el único punto de equilibrio en un entorno de t_0.
La siguiente proposición caracteriza los puntos estables y asintóticamente estables.

Proposición 1.2 *Sea $\Phi(t, t_0)$ la matriz de transición de estados de (1) y x_e un punto de equilibrio en t_0. Entonces,*

(i) *x_e es estable si y sólo si existe k, que en general dependerá de t_0, tal que*

$$\parallel \Phi(t, t_0) \parallel \leq k\,, \tag{2}$$

para todo $t \geq t_0$.

(ii) *x_e es asintóticamente estable si $\Phi(t, t_0)$ verifica la acotación anterior y además*

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, t_0) = 0\,.$$

Demostración.

(i) Sabemos que $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ y que $x_e = \Phi(t, t_0)x_e$ para todo $t \geq t_0$. Por tanto,

$$\parallel x(t) - x_e \parallel = \parallel \Phi(t, t_0)(x_0 - x_e) \parallel \leq \parallel \Phi(t, y_0) \parallel \parallel x_0 - x_e \parallel \ .$$

Entonces, si se verifica (2)

$$\parallel x(t) - x_e \parallel \leq k \parallel x_0 - x_e \parallel$$

de donde resulta fácilmente que x_e es estable.

Para el recíproco, supongamos que x_e es estable y que no se verifica (2). Esto equivale a que existe, al menos, un elemento de la matriz $\Phi(t,t_0)$ que es una función no acotada. Sea $\Phi(t,t_0)_{ij}$ este elemento. Entonces si tomamos x_0 tal que $x_0 - x_e$ tenga todos las componentes nulas excepto la j-ésima, que vale $\delta/2$, resulta que la i-ésima componente de $\Phi(t,t_0)x_0 - x_e = \Phi(t,t_0)(x_0 - x_e)$ es una función no acotada y por tanto x_e no puede ser estable, en contra de la hipótesis.

(ii) Ejercicio para el lector. ■

De la proposición anterior resulta inmediatamente el siguiente resultado

Corolario 1.3 *Con las notaciones anteriores*

(i) x_e *es estable si y sólo si existe* k *tal que para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n$,

$$|\Phi(t,t_0)_{i,j}| \leq k\,, \quad \textit{para todo} \quad t \geq t_0\,.$$

(ii) x_e *es asintóticamente estable si se cumple (i) y además* $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t,t_0)_{ij} = 0$ *para todo* i, j, $1 \leq i, j \leq n$.

Observación 1.4 Nótese que las condiciones de estabilidad y estabilidad asintótica de un sistema lineal sólo dependen de $\Phi(t,t_0)$ y por tanto, *son independientes de* $x_0 = x(t_0)$.

Supongamos ahora que $A(t)$ es una matriz constante ($= A$). Según sabemos, en este caso se tiene que

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}\,.$$

Con las notaciones de (1.7.1), si J es la forma reducida de Jordan de A y escribimos $t - t_0 = \sigma$, resulta que es suficiente estudiar el comportamiento, cuando $t \geq t_0$ y cuando $t \to \infty$, de los bloques

$$e^{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\sigma^2}{2!} & \sigma & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{\sigma^{\delta-1}}{(\delta-1)!} & \dots & & \sigma & 1 \end{pmatrix}$$

donde λ es un vector propio (real o complejo) de A. Si $\lambda = \alpha + i\beta$, sabemos que

$$e^{\lambda\sigma} = e^{\alpha\sigma}(\cos\beta\sigma + i\sin\beta\sigma)\,.$$

Nótese que el carácter de acotado cuando $t \geq t_0$ o el límite cuando $t \to \infty$ del bloque anterior, depende sólo de la parte real de λ, $Re\lambda = \alpha$ y del tamaño del bloque si $\alpha = 0$, pero no de t_0. Resulta entonces inmediata la siguiente proposición.

Proposición 1.5 *Sea x_e un punto de equilibrio en t_0 de $\dot{x}(t) = Ax(t)$.*

(i) x_e es estable si y sólo si para todo valor propio λ de A es $Re\lambda \leq 0$ y si $Re\lambda = 0$, $\delta = 1$.

(ii) x_e es asintóticamente estable si y sólo si para todo valor propio λ de A, es $Re\lambda < 0$.

Puesto que la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación $\dot{x}(t) = Ax(t)$ depende de los valores propios de A, diremos en lo sucesivo que A *es estable* (resp. *asintóticamente estable*) si los valors propios de A verifican la condición (1) (resp. la condición (2)).

2 El criterio de Routh-Hurwitz

Para aplicar los criterios de estabilidad que se han dado en el apartado anterior es necesario conocer la situación en el plano complejo de la parte real de las raíces de un polinomio. En esta sección vamos a dar un criterio para determinar si dicha parte real está en el semiplano $Re\lambda < 0$ de $\mathbb{C}$. Es fácil obtener condiciones necesarias. En efecto, sea

$$\varphi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\,, \quad a_0 > 0 \tag{3}$$

un polinomio con *coeficientes reales* y sean λ_i, $1 \leq i \leq k$ las raíces reales y $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $1 \leq j \leq \ell$, las raíces complejas (no reales).
Entonces

$$\varphi(\lambda) = a_0(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}(\lambda-\mu_1)^{q_1}(\lambda-\bar{\mu}_1)^{q_1}\ldots(\lambda-\mu_\ell)^{q_{ell}}(\lambda-\bar{\mu}_\ell)^{q_\ell} =$$

$$= a_0(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}(\lambda^2-2\alpha_1\lambda+\alpha_1^2+\beta_1^2)^{q_1}\ldots(\lambda^2-2\alpha_\ell\lambda+\alpha_\ell^2+\beta_\ell^2)^{q_\ell}$$

de donde se deduce que si

$$\lambda_i < 0\,, \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{y}$$

$$\lambda_j < 0\,, \quad 1 \leq j \leq \ell$$

todos los coeficientes de $\varphi(\lambda)$ son positivos.
Se dice que el polinomio (1) es un *polinomio de Hurwitz* si todas sus raíces tienen la parte real negativa (< 0).
Acabamos de ver que *una condición necesaria para que un polinomio sea Hurwitz es que todos sus coeficientes sean positivos* (> 0).
Esta condición no es suficiente. Por ejemplo, $\lambda^2 + 1$, $\lambda^3 + \lambda^2 + 11\lambda + 51$ tienen sus coeficientes positivos y no es Hurwitz (compruébelo en lector).
El criterio que enunciaremos a continuación establece condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio sea Hurwitz. Para su enunciado debemos fijar las siguientes notaciones:

Si $\varphi(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_5 & \ldots \\
a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_7 & \ldots \\
b_1 & b_3 & b_5 & \ldots & \ldots & \ldots \\
c_1 & c_3 & c_5 & \ldots & \ldots & \ldots \\
d_1 & d_3 & d_5 & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

en el que los elementos b_i, c_i, d_i, $\ldots$ se obtienen a partir de las dos filas respectivamente anteriores, a través de

$$b_1 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_3 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad b_5 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_3 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}, \quad c_5 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_7 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1}\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad d_3 = -\frac{1}{c_1}\begin{vmatrix} b_1 & b_5 \\ c_1 & c_5 \end{vmatrix}, \quad d_5 = -\frac{1}{c_1}\begin{vmatrix} b_1 & b_7 \\ c_1 & c_7 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

con el convenio de añadir ceros a cada fila para hacer posible el cálculo, y donde el número de filas es igual a $n+1$. Dicho diagrama se denomina *diagrama de Routh* del polinomio $\varphi(\lambda)$. Por ejemplo, si $\varphi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 5$ se obtiene:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 3 & 5 & & 0 & \ldots \\
2 & 4 & 0 & & 0 & \ldots \\
1 & 5 & 0 & \ldots & & \\
-6 & 0 & & & & \\
5 & 0 & & & &
\end{array}$$

Teorema 2.1 (Routh)[1] *El número de raíces de $\varphi(\lambda)$ que tienen parte real >0 es igual al número de cambios de signo de la primera columna $(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots)$ de su diagrama de Routh.*

Corolario 2.2 *Un polinomio $\varphi(\lambda)$ es Hurwitz si y sólo si los $n+1$ elementos de la primera columna de su diagrama de Routh son todos positivos (>0).*

Así, el polinomio del ejemplo anterior tiene dos raíces cuya parte real es positiva y, por tanto, no es estable.

Observación 2.3 Todos los elementos de una fila pueden multiplicarse por una constante positiva, sin que ello afecte al resultado del test. Este hecho permite simplificar a menudo la obtención del diagrama de Routh.

Por ejemplo, si

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda^4 + 5\lambda^3 + 5\lambda^3 + 2\lambda + 1\,,$$

obtenemos

$$\begin{array}{rrrl}
2 & 5 & 1 & \\
5 & 2 & 0 & \\
21 & 5 & & \text{(multiplicando por 5)} \\
17 & & & \text{(multiplicando por 21)} \\
5 & & &
\end{array}$$

Por tanto, $\varphi(\lambda)$ es un polinomio estable.

Otro criterio de estabilidad debido a Hurwitz, se obtiene a partir del cálculo de los menores principales de la siguiente matriz H asociada al polinomio

$$\varphi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

[1] Una demostración puede hallarse en [G] ó [Ch].

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_{n-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & a_n & \dots \end{pmatrix}$$

En esta matriz las dos primeras filas son, respectivamente, la segunda y la primera fila del diagrama de Routh y el resto de filas se obtienen a partir de las dos primeras por traslación a la derecha y añadiendo ceros a la izquierda tal como se muestra en la descripción anterior de matriz. La matriz H es $n \times n$ y cada fila se completa, si es necesario, con ceros a la derecha. Denotamos por Δ_i el i-ésimo menor principal de H, esto es

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ \dots & \quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Se tiene entonces el siguiente resultado

Proposición 2.4 (Hurwitz) *Con las notaciones anteriores, el polinomio $\varphi(\lambda)$ es Hurwitz si y sólo si $\Delta_1 > 0$ para $i = 1 \dots n$.*

Si lo aplicamos a los ejemplos anteriores tendremos

1. $\varphi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 5$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 5$, $\Delta_3 = -1 < 0$. Por tanto $\varphi(\lambda)$ no es estable.

2. $\varphi(\lambda) = 2\lambda^4 + 5\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 1$

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 21$, $\Delta_3 = 17$, $\Delta_4 = 17$. Por tanto $\varphi(\lambda)$ es estable.

Observación 2.5 Existen otros criterios (Liénard-Chipart, Agastre,...) así como refinamientos de los anteriores en el caso en que aparezcan ceros. El lector interesado puede consultar [FH], [S] así como la bibliografía allí recomendada.

3 El método de Lyapunov

Para el estudio de la estabilidad de sistemas autónomos que hemos desarrollado anteriormente, se requería el conocimiento de la solución de la correspondiente ecuación diferencial. El método que expondremos a continuación, debido a Lyapunov (1892), no precisa de este requisito.

Consideremos el sistema autónomo representado por la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{4}$$

y supongamos que x_e es un punto de equilibrio. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x_e \in \Omega$.

Definición 3.1 *Una función $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice de Lyapunov si*

(i) V es continua en Ω y tiene derivadas parciales continuas.

(ii) $V(x) > V(x_e)$ para todo $x \in \Omega$.

(iii) Para cualquier solución $x(t)$ de (4) contenida en Ω, $V(x(t))$ es una función no creciente (monótona decreciente).

Teorema 3.2

(i) Supongamos que existe una función de Lyapunov V en la región

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ \ \| x - x_e \| < \varepsilon_0\,, \quad \varepsilon > 0\}\,.$$

Entonces x_e es un punto de equilibrio estable.

(ii) Si se cumple (i) y V es tal que $V(x(t))$ es estrictamente decreciente, *salvo si $x(t) = x_e$, entonces la estabilidad es asintótica.*

Demostración. (i) Sea ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ y

$$M = \min\{V(x)\,;\ \ \| x - x_e \| = \varepsilon_1\}$$

el cual existe ya que V es continua y $\| x - x_e \| = \varepsilon_1$ es compacto. Además $M = V(x_1)$ para algún x_1 tal que $\| x_1 - x_e \| = \varepsilon_1$. Consideremos ahora el conjunto

$$W = \{x \in \Omega\,;\ \ V(x) < M\,,\ \ \| x - x_e \| < \varepsilon_1\}\,.$$

W es un abierto ya que V es continua y $x_e \in W$ por definición de V. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$W \supset \{x \in \Omega\,;\ \ \| x - x_e \| < \delta\} = B_\delta(x_e)\,.$$

Entonces, si $x_o \in B_\delta(x_e)$, y $x(t)$ es la única solución de (4) tal que $x(0) = x_0$ vamos a ver que $\| x(t) - x_e \| < \varepsilon_1$ para todo $t > 0$, con lo cual habremos probado (i). En efecto, supongamos por el contrario que existe $t_1 > 0$ tal que $\| x(t_1) - x_e \| \geq \varepsilon_1$. Por continuidad de la solución, existirá $t_2 > 0$ tal que $\| x(t_2) - x_e \| = \varepsilon_1$ y $\| x(t) - x_e \| < \varepsilon_1$ para todo t, $t_0 \leq t < t_2$. Entonces, se tiene, por un lado que $M \leq V(x(t_2))$ por definición de M, pero teniendo en cuenta que V es una función de Lyapunov resulta que $V(x(t_2)) \leq V(x_0) < M$ ya que $x_0 \in W$, lo cual es contradictorio.

(ii) Con las notaciones anteriores, hay que probar que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_e$, donde $x(0) = x_0 \in B_\delta(x_e)$. Denotaremos $\varphi(t;\xi)$ la única solución de (4) tal que $\varphi(0;\xi) = \xi$. Así, $x(t) = \varphi(t;x_0)$. Supongamos que no se cumple lo anterior. Puesto que $\overline{B_\delta(x_e)}$ es compacto, existe una sucesión $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ con $\lim t_k = \infty$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_k;x_0) = y$ con $y \neq x_e$.

Puesto que V es continua, $\lim\limits_{k\to\infty} V(\varphi(t_k : x_0)) = V(y)$. Asimismo y puesto que V decrece estrictamente a lo largo de los trayectorias, se tendrá que $V(\varphi(t_k;x_0)) > V(y)$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. Por análogo motivo, si $\eta > 0$, $V(\varphi(\eta;y)) < V(y)$. Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} V(\varphi(\eta + t_k;x_0)) = \lim_{k\to\infty} V(\varphi(\eta;\varphi(t_k;x_0))) = V(\varphi(\eta;y)) < V(y)\,.$$

Así pues, existe $\ell > 0$ tal que $V(\varphi(\eta + t_\ell;x_0)) < V(y)$ y si p es tal que $t_p > 1 + t_\ell$, se tendrá que

$$V(\varphi(t_p;x_0)) < V(\varphi(\eta + t_\ell;x_0)) < V(y)\,,$$

lo que es contradictorio. ∎

4 Funciones de Lyapunov para sistemas lineales invariantes en el tiempo

Consideremos el sistema lineal autónomo definido por

$$\dot{x}(t) = Ax(t)\,. \tag{5}$$

Entonces para cada matriz simétrica definida positiva definimos la siguiente función

$$V(x) = x^* M x\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

y supongamos que el punto de equilibrio x_e es el origen (si $x_e \neq 0$, entonces se define $V(x) = (x - x_e)^t M(x - x_e)$). V es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que verifica

(i) V es continua en $\mathbb{R}^n$ con derivadas parciales continuas.

(ii) V tiene un único mínimo absoluto en 0 (definición de M).

(iii) Si $x(t)$ es una solución de (5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \frac{d}{dt}(x(t)^* M x(t)) = \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^* Mx(t) + x(t)^* M \frac{d}{dt}x(t) = \\ &= x(t)^* A^* M x(t) + x(t)^* M A x(t) = -x(t)^* Q x(t) \end{aligned}$$

donde $-Q = A^*M + MA$.

La matriz Q es simétrica y si es definida positiva $V(x(t))$ será estrictamente decreciente, por lo que 0 será un punto de equilibrio asintóticamente estable.
Esta discusión conduce a considerar la llamada *ecuación de Lyapunov*:

$$A^*M + MA + Q = 0 \tag{6}$$

en la que los datos son A y Q y la incógnita M. Del razonamiento anterior concluimos la siguiente

Proposición 4.1 *Si para una matriz simétrica Q definida positiva, la ecuación de Lyapunov (6) tiene solución, el punto de equilibrio de (5) es asintóticamente estable.*

El recíproco también es cierto. De forma más general, se tiene el siguiente resultado

Proposición 4.2 *Supongamos que A es una matriz asintóticamente estable (a.e.). Entonces*

$$M = \int_0^\infty e^{A^*\tau} Q e^{A\tau}\, d\tau$$

es la única solución de la ecuación de Lyapunov

$$A^*M + MA + Q = 0\,.$$

Demostración. En primer lugar observamos que la integral anterior es convergente gracias a que A es a.e. En efecto, si J es la forma de Jordan de A, sabemos que existe S invertible tal que $A = SJS^{-1}$. Entonces $e^{A\tau} = Se^{J\tau}S^{-1}$ y $e^{A^*\tau} = S^{*-1}e^{J^*\tau}S^*$ y el cálculo de la integral anterior se reduce a integrar términos de la forma $\int_0^\infty e^{(\alpha+i\beta)\tau}p(\tau)d\tau$ donde $p(\tau)$ es un polinomio y $\alpha < 0$ (nótese que al sumar dos valors propios con parte entera negativa tenemos un complejo igualmente con parte entera negativa), y es sabido que tales integrales son convergentes.
Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (A^*e^{A^*\tau}Qe^{A\tau} + e^{A^*\tau}Qe^{A\tau}A)\,d\tau + Q &= \int_0^\infty \frac{d}{d\tau}\left(e^{A^*\tau}Qe^{A\tau}\right)d\tau + Q = \\ &= \left(e^{A^*\tau}Qe^{A\tau}\right)_0^\infty + Q = -Q + Q = 0\end{aligned}$$

y por tanto M es solución.
Para demostrar que es única, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\phi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\longrightarrow A^*M + MA\end{aligned}$$

ϕ es lineal y puesto que para cualquier Q, existe M tal que $\phi(M) = -Q$, resulta que ϕ es exhaustiva. Pero siendo iguales las dimensiones de los espacios vectoriales de salida y de llegada (son el mismo!) sabemos que ϕ es inyectiva y por tanto biyectiva. ■

Observación 4.3 La biyectividad de la apliación ϕ es un conocido resultado de álgebra lineal que puede probarse de la forma siguiente.

De forma más general, y sin que se complique la demostración, definamos $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ mediante

$$\phi(M) = BM + MA$$

donde B y A son matrices dadas de $M_n(\mathbb{R})$. Se verifica entonces el siguiente lema.

Lema 4.4 *Si λ_i, μ_i, $1 \le i \le n$ son los valores propios de A y B, respectivamente, se tiene que $\lambda_i + \mu_j$, $1 \le i, j \le n$ son los valores propios de ϕ.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ tales que $A^*x = \lambda_i x$, $By = \mu_j y$ (recordamos que representamos los vectores de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ por matrices columna y que A y A^* tienen los mismos valores propios).
Entonces

$$\phi(yx^*) = Byx^* + yx^*A = \mu_j yx^* + \lambda_i yx^* = (\mu_j + \lambda_i)yx^*$$

es decir, $\lambda_i + \mu_j$ es un valor propio de ϕ.
Sea ahora η un valor propio de ϕ. Hemos de ver que es de la forma $\eta = \lambda + \mu$ donde λ y μ son valors propios de A y B respectivamente. Por definición, existe $M \neq 0$ tal que

$$\phi(M) = BM + MA = \eta M$$

o bien

$$(\eta I_n - B)M = MA\,.$$

Ahora bien, tal como se demuestra en el lema siguiente $\eta I_n - B$ y A tienen un valor propio común. Esto es, existe λ tal que

$$Ax = \lambda x\,, \qquad x \neq 0$$

$$(\eta I_n - B)y = \lambda y\,, \qquad y \neq 0$$

de donde

$$By = (\eta - \lambda)y$$

lo que nos dice que $\eta - \lambda = \mu$ es un valor propio de B. Puesto que $\eta = \lambda + \mu$ el lema está probado. ■

Lema 4.5 *Si X, Y son matrices tales que $XM = MY$ y $M \neq 0$, X e Y tienen al menos un valor propio común.*

Demostración. Si $Yy = \mu y$, $XMy = MYy = \mu My$. Si $My \neq 0$, μ es un valor propio de X. Si $My = 0$,

$$M(Y - \mu I)y = MYy - \mu My = XMy - \mu My = 0$$

$$M(Y - \mu I)^2 y = M(Y - \mu I)z \quad \text{con} \quad z = (Y - \mu I)y\,, \quad Mz = 0$$

con lo que

$$M(Y - \mu I)^2 y = 0\,,$$

y en general (inducción) $M(Y - \mu I)^k y = 0$, para todo entero $k \geq 0$.
Esto nos dice que si $My = 0$, M anula todos los vectores de la cadena de Jordan que finaliza en el vector propio y. Puesto que $M \neq 0$, debe existir algún vector propio u de Y, de una base de Jordan de $\mathbb{C}^n$ respecto de Y tal que $Mu \neq 0$, con lo que el lema queda probado. ■
Como aplicación del lema 4.4 veamos que si $B = A^*$, y A es a.e., ϕ es inyectiva. En efecto, los valores propios de ϕ son de la forma $\lambda + \mu$ con λ y μ valores propios de A (y de A^* que son los mismos). Pero $Re(\lambda + \mu) = Re\lambda + Re\mu < 0$. Esto nos dice que 0 no es valor propio de ϕ y por tanto que es inyectiva y por análogo razonamiento al utilizado en la proposición anterior, ϕ es biyectiva.
La proposición siguiente es una consecuencia de las proposiciones 4.1 y 4.2. Incluiremos una demostración autónoma que no utiliza el teorema 3.2.

Proposición 4.6 *Todos los valores propios de A tienen la parte real negativa o equivalentemente, los puntos de equilibrio de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ son asintóticamente estables si y sólo si para cualquier matriz Q simétrica definida positiva, la ecuación*

$$A^*M + MA + Q = 0 \tag{7}$$

tiene una solución M simétrica definida positiva.

Demostración. Si A es a.e. ya hemos visto que la ecuación de Lyapunov tiene solución única para toda Q. Solo falta ver que si $Q > 0$, M es asimismo > 0. Pero esto es inmediato a partir de la definición de M por

$$M = \int_0^\infty e^{A^*\tau} Q e^{A\tau}\, d\tau\,.$$

Recíprocamente, si $M > 0$ es una solución de (7) con $Q > 0$ y λ es un valor propio de A, sea $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= x^*A^*Mx + x^*MAx + x^*Qx = \\ &= \overline{\lambda} x^*Mx + \lambda x^*Mx + x^*Qx\,. \end{aligned}$$

Pero, $x^*Mx > 0$ y $x^*Qx > 0$ por hipótesis. Por tanto,

$$2Re\lambda = -\frac{x^*Qx}{x^*Mx} < 0$$

con lo que A es a.e. ■

Observación 4.7 Los resultados de esta sección siguen siendo válidos si todas las matrices son complejas, con la única precaución de substituir simétrica por hermítica y tener en cuenta que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ los valores propios de A^* (conjugada y traspuesta) son los complejos conjugados de los de A. Obsérvese que en todo caso si $Re\lambda < 0$ se cumple que $Re\overline{\lambda} < 0$.

5 Estabilidad entrada–salida

Hasta ahora hemos estudiado la estabilidad de un sistema en lo que afecta a la evolución del estado del sistema en un entorno conveniente de los puntos de equilibrio. Tiene asimismo interés estudiar un tipo de estabilidad que considera la evolución de la salida en función de la evolución de la entrada y que de forma precisa recogemos en la siguiente definición. Nos limitaremos a considerar sistemas lineales.

Definición 5.1 *Un sistema lineal se dice* estable entrada–salida *si para condiciones iniciales nulas una entrada acotada implica una salida acotada. Más precisamente, sabemos que la salida $y(t)$ de un sistema lineal Σ representado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)u(t) \end{aligned}$$

viene dada, si $x_0 = 0$, por

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} C(t)\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau \, .$$

Entonces se dice que el sistema Σ es estable entrada–salida si, siempre que existe k_1 tal que $\| u(t) \| \leq k_1$, para todo $t \geq t_0$, existe asimismo k_2 tal que $\| y(t) \| \leq k_2$, para todo $t \geq t_0$.

Observación 5.2 Nosotros hemos traducido "estabilidad entrada–salida" la definición que en inglés aparece como "input–output stability" o "bounded–input, bounded–output stability"o más brevemente BIBO stability. Puesto que, a nuestro conocimiento, el lector que desee ampliar conocimientos deberá acudir mayoritariamente a textos escritos en inglés, para facilitar su lectura sobre el tema de la estabilidad, nosotros nos referiremos en lo que sigue a "estabilidad entrada–salida" como estabilidad BIBO.

Proposición 5.3 *Con las notaciones anteriores designemos por $T(t,\tau) = (t_{ij}(t,\tau))$ la matriz del integrando*

$$T(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\, .$$

Entonces Σ es BIBO estable si y sólo si existe $k > 0$ tal que

$$\int_{t_0}^{t} |t_{ij}(t,\tau)\, d\tau \leq k$$

para todo $t \geq t_0$ y para todo i,j, $1 \leq i,j \leq n$.

Demostración. (si) Supongamos que $\| u(t) \| \leq k_1$ para todo $t \geq t_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\| y(t) \| &\leq \int_{t_0}^{t} \| T(t,\tau)u(\tau) \| \; d\tau \leq \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \| T(t,\tau) \| \| u(\tau) \| \; d\tau \leq k_1 \int_{t_0}^{t} \| T(t,\tau) \| \; d\tau \leq \\
&\leq k_1 \max \int_{t_0}^{t} |t_{ij}(t,\tau)|\, d\tau \leq k_1 k
\end{aligned}$$

(sólo si) Supongamos que existen i_0, j_0 y y_N tales que para todo $N > 0$

$$\int_{t_0}^{t} |t_{i_0 j_0}(t_N,\tau)|\, d\tau > N\, .$$

Sea $u(t)$ la entrada definida por

$$u_{j_0}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t_{i_0 j_0}(t_N,\tau) \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad t_{i_0 j_0}(t_N,\tau) < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
y_{i_0}(t_N) &= \int_{t_0}^{t_N} \sum_j t_{i_0 j_0}(t_N,\tau) u_j(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_N} t_{i_0 j_0}(t_N,\tau) u_{j_0}(\tau)\, d\tau = \\
&= \int_{t_0}^{t_N} |t_{i_0 j_0}(t_N,\tau)|\; d\tau > N
\end{aligned}$$

esto es, una entrada acotada produce una salida no acotada. ■

Para sistemas invariantes en el tiempo y al igual que sucedía en el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio, la BIBO estabilidad puede determinarse directamente a partir de la matriz A.

En efecto, si el sistema es invariante en el tiempo,

$$T(t,\tau) = Ce^{(t-\tau)A}B$$

y la condición de la proposición anterior equivale a que

$$\int_{t_0}^{t} |t_{ij}(t-\tau)| d\tau \leq k$$

o, lo que es lo mismo,

$$\int_0^t |t_{ij}(\sigma)| d\sigma \leq k$$

para todo $t > 0$ y $1 \leq i,j \leq n$, es decir

$$(*) \qquad \int_0^\infty |t_{ij}(\sigma)| d\sigma \leq k\,, \quad 1 \leq i,j \leq n\,.$$

Obsérvese ahora lo siguiente,

(i) $t_{ij}(\sigma)$ es el elemento (i,j) de la matriz $Ce^{\sigma A}B$ que será por tanto de la forma $\sum_k p_k(\sigma) e^{\lambda_k \sigma}$ donde $p_k(\sigma)$ es un polinomio en σ y λ_k son valores propios (complejos) de A.

(ii) La transformada de Laplace $\widehat{t}_{ij}(s)$ de $t_{ij}(\sigma)$ será por tanto una suma de términos de la forma $\dfrac{\beta}{(s-\lambda)^\ell}$ donde β es constante y λ es un valor propio de A.

(iii) La transformada de Laplace de $Ce^{\sigma A}B$ es $C(sI_n - A)^{-1}B$ y coincide con la matriz $(\widehat{t}_{ij}(s))$.

Entonces si el sistema es BIBO estable, puesto que

$$\begin{aligned}
|\widehat{t}_{ij}(s)| &\leq \int_0^\infty |t_{ij}(\sigma)| e^{-\alpha\sigma} d\sigma \quad \text{donde} \quad \alpha = Res \\
&\leq \int_0^\infty |t_{ij}(\sigma)| d\sigma\,, \quad \text{si} \quad \alpha \geq 0\,, \\
&\leq k
\end{aligned}$$

resulta que los polos de $\widehat{t}_{ij}(s)$ están en el semiplano $Res < 0$.
Recíprocamente, si se cumple esta condición, $h_{ij}(\sigma)$ tendrá la forma descrita en (i) con $Re\lambda_k < 0$ y por tanto se tendrá la acotación (*) anterior.
Hemos demostrado pues el siguiente resultado.

Proposición 5.4 *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal invariante en el tiempo sea BIBO estable es que cada elemento h_{ij} de su matriz de transferencia sea finito para $Res \geq 0$ (o equivalentemente que sus polos estén en $Res < 0$).*

Observación 5.5 Si todos los valores propios de A (ceros de $\det(sI_n - A) = 0$) están en $Res < 0$, el sistema es BIBO estable, pero puede ocurrir que se cumpla la condición de la proposición aunque A tenga algún valor propio en $Res \geq 0$. En efecto, los elementos $h_{ij}(s)$ de $C(sI_n - A)^{-1}B$ son funciones racionales y es posible que algún cero del denominador (valor propio de A) se cancele con el numerador, por ejemplo si

$$h_{ij}(s) = \frac{(s+1)(s^2+1)}{(s+1)(s-1)(s-3)^2}$$

-1 no es un polo de $h_{ij}(s)$.

Es decir,

Corolario 5.6 *Si el sistema (lineal invariante en el tiempo) es asintóticamente estable, también será BIBO estable.*

Capítulo 4

Realización de sistemas

1 Realización de sistemas lineales invariantes en el tiempo

Sea Σ un sistema lineal invariante en el tiempo representado por

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

donde, como es habitual $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$.
Si suponemos $x(0) = 0$, hemos visto que

$$\widehat{y}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B\widehat{u}(s)$$

donde $\widehat{y}(s)$ y $\widehat{u}(s)$ son las transformadas de Laplace de $y(t)$ y $u(t)$, respectivamente.
La matriz

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$

es la llamada matriz de transferencia (ver (1.9.1)). Es una *matriz racional propia*, lo que significa que sus elementos son fracciones racionales $\dfrac{d_j^i(s)}{e_j^i(s)}$ tales que grado $d_j^i(s) <$ grado $e_j^i(s)$.
Esto equivale a decir que $\lim\limits_{s\to\infty} H(s) = 0$, o brevemente, $H(\infty) = 0$.
El problema que planteamos es el recíproco del proceso anterior. Esto es:

Definición 1.1 *Sea $R(s)$ una matriz racional propia de tipo $p\times m$, esto es $R(s) \in M_{p\times m}(\mathbb{R}(s))$ tal que $R(\infty) = 0$*[1].
Llamaremos realización *de $R(s)$ a toda terna (A, B, C) on $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ tal que*

$$C(sI_n - A)^{-1}B = R(s)\,.$$

[1] $\mathbb{R}(s)$ es el conjunto de fracciones racionales en la variable s

Nótese que si (A, B, C) es una realización de $R(s)$, toda terna correspondiente a un sistema lineal que se obtenga a partir de (A, B, B) por cambios lineales de las variables de estado, $(S^{-1}AS, S^{-1}B, CS)$ es asimismo una realización de $R(s)$.
Nótese asimismo que el número de variables de entrada y salida de cualquier realización es m y p, respectivamente, pero que el número de variables de estado de una realización no queda determinado a través de la definición. Tendrá sentido que nos planteemos como determinar una realización con el mínimo número de dichas variables. Volveremos sobre este tema más adelante.

2 Realización controlable estándar

Sea $R(s)$ una matriz racional propia de tipo $p \times m$ y $p(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_{r-1}s^{r-1} + s^r$ el mínimo común múltiplo de los denominadores de los elementos de $R(s)$. Entonces se tendrá la igualdad,

$$p(s)R(s) = R_0 + R_1 s + \ldots + R_{r-1}s^{r-1}$$

donde $R_i \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$. Por ejemplo, si

$$R(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{s-1}{s^2+2} & \dfrac{1}{s-1} \\ \dfrac{s}{s^2-1} & \dfrac{1}{s^2} & \dfrac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$p(s) = s^2(s^2-1) = -s^2 + s^4$ y

$$\begin{aligned} p(s)R(s) &= \begin{pmatrix} s(s^2-1) & s(s-1)^2 & s^2(s+1) \\ s^3 & s^2-1 & s^2(s-1) \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{R_0} + s\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_1} + s^2\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{R_2} + s^3\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_3}. \end{aligned}$$

Proposición 2.1 *Con las notaciones anteriores, sea*

$$A = \begin{pmatrix} O_m & I_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \ldots & O_m \\ \ldots & & & & \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & I_m \\ -p_0 I_m & -p_1 I_m & -p_2 I_m & \ldots & -p_{r-1} I_m \end{pmatrix} \in M_{mr}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} O_m \\ \vdots \\ O_m \\ I_m \end{pmatrix} \in M_{mr\times m}(\mathbb{R}), \qquad C = (R_0 \dots R_{r-1}) \in M_{p\times mr}(\mathbb{R}).$$

Entonces (A, B, C) *es una realización de* $R(s)$*. Además esta realización es controlable y se denomina,* realización controlable estándar.

Demostración. Hemos de probar en primer lugar que $C(sI_n - A)^{-1}B = R(s)$, donde $n = mr$. Sea $X = (sI_n - A)^{-1}B$ y escribamos $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}$ con $X_i \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, r$. Entonces $sI_n - AX = B$, esto es

$$\begin{pmatrix} sI_m & -I_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & sI_m & -I_m & \dots & O_m \\ \dots & & & & \\ O_m & \dots & & sI_m & -I_m \\ p_oI_m & p_1I_m & \dots & & (s + p_{r-1}I_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_m \\ O_m \\ \vdots \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix}$$

de donde resulta

$$X_2 = sX_1$$
$$X_3 = sX_2 = s^2X_1$$
$$\dots$$
$$X_r = sX_{r-1} = s^{r-1}X_1$$
$$p_0X_1 + p_1X_2 + \dots + p_{r-1}X_r + sX_r = I_m$$

con lo que, aplicando las igualdades anteriores

$$(p_0 + p_1s + \dots + p_{r-1}s^{r-1} + s^r)X_1 = I_m .$$

Así,

$$X_1 = \frac{1}{p(s)}I_m , \quad X_2 = \frac{s}{p(s)}I_m , \quad \dots , \quad X_r = \frac{s^{r-1}}{p(s)I_m} .$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
C(sI_n - A)^{-1}B &= (R_0, \dots, R_{r-1}) \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p(s)} I_m \\ \dfrac{s}{p(s)} I_m \\ \vdots \\ \dfrac{s^{r-1}}{p(s)} I_m \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{p(s)}(R_0 + R_1 s + \dots + R_{r-1}s^{r-1}) = R(s)
\end{aligned}
$$

como queríamos probar.
Para ver que es controlable, es suficiente observar que

$$
(B \quad AB \ \dots \ A^{r-1}B \ \dots \ A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} O_m & \dots & O_m & I_m & * & \dots \\ O_m & \dots & I_m & * & & \\ \dots & & & & & \\ I_m & * & \dots & & & \end{pmatrix}
$$

tiene rango $mr = n$ cualesquiera que sean los elementos denotados por $*$. ■

Ejemplo 2.2 Sea $R(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{s-1} \end{pmatrix}$, $\quad (m = 1,\ p = 2)$. Entonces

$$
p(s) = s(s-1) = -s + s^2\,, \quad p_0 = 0\,, \quad p_1 = -1\,, \quad R = 2
$$

$$
p(s)R(s) = \begin{pmatrix} s-1 \\ s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_0} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{R_1}
$$

Por tanto

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

es la realización controlable estándar de $R(s)$. Compruebe el lector como ejercicio que

$$
C(sI_2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{s-1} \end{pmatrix}
$$

y que $(A \quad B)$ es controlable.

3 Realización observable estándar

Mantenemos las notaciones del apartado anterior. En este caso, si $R(s)$ es una matriz racional propia de tipo $p \times m$, efectuamos un desarrollo en serie formal en potencias de $\frac{1}{s}$:

$$R(s) = \frac{1}{s}L_0 + \frac{1}{s^2}L_1 + \ldots + \frac{1}{s^r}L_{r-1} + \ldots$$

donde $L_i \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$. Ilustrémoslo con un ejemplo. Si $R(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{s+1}{s^3+1} \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \ldots \\ \frac{s+1}{s^3+1} &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^5} - \frac{1}{s^6} + \frac{1}{s^8} + \ldots \end{aligned}$$

con lo que

$$R(s) = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

y

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Recordemos que $p(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_{r-1}s^{r-1} + s^r$ es el mínimo común múltiplo de los denominadores de $R(s)$.

Proposición 3.1 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} O_p & I_p & O_p & \ldots & O_p \\ O_p & O_p & I_p & \ldots & O_p \\ \ldots & & & & \\ O_p & O_p & O_p & \ldots & I_p \\ -p_0 I_p & -p_1 I_p & & \ldots & -p_{r-1} I_p \end{pmatrix} \in M_{pr}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{r-1} \end{pmatrix} \in M_{pr\times m}(\mathbb{R}), \qquad C = (I_p O_p \ldots O_p) \in M_{p\times pr}(\mathbb{R}).$$

Entonces (A, B, C) *es una realización de* $R(s)$. *Además esta realización es observable y se denomina* realización observable estándar.

Demostración. Como en el caso anterior hemos de comprobar la igualdad

$$C(sI_n - A)^{-1}B = R(s)\,, \quad n = pr\,.$$

El desarrollo en serie formal de $(sI_n - A)^{-1}$ da

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots$$

con lo que

$$C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{s}CB + \frac{1}{s^2}CAB + \frac{1}{s^3}CA^2B + \dots$$

teniendo en cuenta las definiciones de A, B, C obtenemos

$$CB = L_0\,, \quad CAB = L_1\,, \quad CA^2B = L_2\,,\ \dots\,,\ CA^{r-1}B = L_{r-1}\,.$$

Así pues, si designamos $CA^iB = T_i$ para $i \geq r$,

$$C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{s}L_0 + \frac{1}{s^2}L_1 + \dots + \frac{1}{s^r}L_{r-1} + \frac{1}{s^{r+1}}T_r + \dots$$

Las r primeros términos coinciden con los de $R(s)$. Veamos que también coinciden los restantes. Ello resultará de la igualdad

$$p_0I_n + p_1A + \dots + p_{r-1}A^{r-1} + A^r = 0$$

que demostramos a continuación.
Nótese que si en la matriz A es $p = 1$, la igualdad anterior es el teorema de Cayley-Hamilton. En general se razona así. Por definición de producto de Kronecker de matrices (ver apéndice B) se tiene

$$A = I_p \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & -1 \\ -p_0 & -p_1 & \dots & & -p_{r-1} \end{pmatrix}}_{A_0}$$

Entonces $p(A_0) = 0$ (Cayley-Hamilton) ya que el polinomio característico de A_0 es $p(s)$ y

$$\begin{aligned} p(A) &= p_0I_n + p_1(I_p \otimes A_0) + \dots + p_{r-1}(I_p \otimes A_0)^{r-1} + (I_p \otimes A_0)^r = \\ &= I_p \otimes (p_0I_r + p_1A_0 + \dots + p_{r-1}A_0^{r-1} + A_0^r) = \\ &= I_p \otimes p(A_0) = 0 \end{aligned}$$

(se ha utilizado la proposición B.2), con lo que se ha probado la igualdad en cuestión.
Entonces

$$Cp(A)B = p_0CB + p_1CAB + \ldots + p_{r-1}CA^{r-1}B + CA^rB = 0\,.$$

Por otro lado,

$$p(s)R(s) = (p_0 + p_1s + \ldots + p_{r-1}s^{r-1} + s^r)\left(\frac{1}{s}L_0 + \frac{1}{s^2}L_1 + \ldots\right)$$

y teniendo en cuenta la definición de $p(s)$, en el producto del segundo miembro deberán ser nulos los coeficientes de $\dfrac{1}{s^i}$ para $i \geq 1$. Es decir,

$$\text{Coeficiente de } \frac{1}{s}: \; p_0L_0 + p_1L_1 + \ldots + p_{r-1}L_{r-1} + L_r = 0$$

$$\text{Coeficiente de } \frac{1}{s^2}: \; p_0L_1 + p_1L_2 + \ldots + p_{r-1}L_r + L_{r+1} = 0$$

$\ldots$

Entonces, puesto que $CA^iB = L_i$ para $o \leq i \leq r-1$ de las igualdades anteriores se obtiene que $T_i = CA^iB = L_i$ para todo entero $i \geq 0$, con lo que

$$C(sI_n - A)^{-1}B = R(s)$$

y queda probado que es realización.
La demostración de que es observable es análoga a la de la realización controlable estándar y la dejamos para el lector. ■

Ejemplo 3.2 Obtener la realización observable estándar del ejemplo 2.2: $R(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$.

$$R(s) = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots$$

Así pues

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

con lo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compruebe el lector como ejercicio que

$$C(sI_4 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

y que es observable.

4 Realización minimal. Grado de McMillan de $R(s)$

Las proposiciones anteriores demuestran que cualquier matriz racional propia admite una realización (de hecho, más de una). Obsérvese que el número de variables de estado es distinto (mr y pr) por lo que tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.1 *Un entero positivo k se denomina* grado de McMillan *de $R(s)$ si k es el menor número de variables de estado de cualquier realización de $R(s)$.*

Vamos a continuación a describir un método de obtención de k que consistirá precisamente en encontrar explícitamente una realización minimal.
Si $R(s) = \frac{1}{s}L_0 + \frac{1}{s^2}L_1 + \frac{1}{s^3}L_2 + \dots$ es el desarrollo en serie formal de potencias de $\frac{1}{s}$ (ver realización observable estándar) escribimos

$$H_i = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & \dots & L_i \\ L_! & L_2 & \dots & L_{i+1} \\ \vdots & & & \\ L_i & L_{i+1} & \dots & L_{2i} \end{pmatrix}, \quad i \geq 0\,.$$

Como veremos el grado de McMillan de $R(s)$ es el rango de H_{r-1}.
Se tiene el lema siguiente

Lema 4.2 *Sea (A, B, C) una realización cualquiera de $R(s)$ con n variables de estado, es decir $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\textit{rang}\ H_{r-1} \leq n\,.$$

Demostración. El desarrollo en serie formal de potencias de $\frac{1}{s}$ de $(sI_n - A)^{-1}$ es como se ha visto

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots$$

con lo que, de la igualdad

$$C(sI_n - A)^{-1}B = R(s)$$

resultan las igualdades

$$CB = L_0\,, \quad CAB = L_1, \dots\,, \quad CA^iB = L_i\,, \quad \dots$$

Entonces, de la igualdad

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix} (B \quad AB \;\dots\; A^{r-1}B) = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & \dots & L_{r-1} \\ L_1 & L_2 & \dots & \\ \dots & \dots & & \\ L_{r-1} & \dots & \dots & L_{2r-2} \end{pmatrix}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \text{rang}\, H_{r-1} &= \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix} (B \quad AB \;\dots\; A^{r-1}B) \leq \\ &\leq \min \left\{ \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix},\ \text{rang}\, (B \quad AB \;\dots\; A^{r-1}B) \right\} \leq n\,. \end{aligned}$$

■

Es suficiente pues probar que existe una realización de $R(s)$ que tiene precisamente rang H_{r-1} variables de estado.
Sea (A, B, C) la realización observable estándar. Entonces,

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_p \end{pmatrix} = I_{pr}$$

y sea

$$n_1 = \text{rang}\, (B \quad AB \;\dots\; A^{r-1}B)\,.$$

Por ser la realización observable estándar, sabemos que

$$p_0 I + p_1 A + \ldots + p_{r-1} A^{r-1} + A^r = 0$$

de donde resulta

$$-A^r B = p_0 B + p_1 AB + \ldots + p_{r-1} A^{r-1} B$$

con lo que

$$n_1 = \text{rang}\,(B \quad AB \; \ldots \; A^{r-1}B) = \text{rang}\,(B \quad AB \; \ldots \; A^r B)\,.$$

Asimismo y puesto que

$$-A^{r+1}B = p_0 AB + p_1 A^2 B + \ldots + p_{r-1} A^r B = q_0 B + q_1 AB + \ldots + q_{r-1} A^{r-1} B$$

se tendrá

$$n_1 = \text{rang}\,(B \quad AB \; \ldots \; A^{r+1}B)$$

y, reiterando el razonamiento, obtenemos

$$n_1 = \text{rang}\,(B \quad AB \; \ldots \; A^{n-1}B)$$

donde $n = pr$. Así pues

$$\begin{aligned} \text{rang}\, H_{r-1} &= \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix} (B \quad AB \; \ldots \; A^{r-1}B) = \text{rang}\, I_n (B \quad AB \; \ldots \; A^{r-1}B) = \\ &= \text{rang}\,(B \quad AB \; \ldots \; A^{n-1}B) = n_1\,. \end{aligned}$$

Entonces, el subsistema controlable de (A, B, C) será una realización de $R(s)$ (recuérdese que tiene la misma matriz de transferencia) con n_1 variables de estado y por tanto será minimal. En resumen,

Proposición 4.3 *Sea (A, B, C) la realización observable estándar de $R(s)$ y $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ el subsistema controlable de (A, B, C). Entonces $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ es una realización minimal de $R(s)$ y si $\overline{A} \in M_{n_1}(\mathbb{R})$ se tiene que el grado de McMillan de $R(s)$ es $n_1 =$ rang H_{r-1}.*

Observación 4.4 La realización minimal $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ es controlable y observable. A continuación veremos que estas dos condiciones caracterizan las realizaciones minimales por lo que otra forma de obtener una realización minimal es calcular el subsistema observable de la realización controlable estándar.

Ejemplo 4.5 Determinar una realización minimal de

$$R(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{s}{s^2-1} \\ -\dfrac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

Con las notaciones anteriores:

$$p(s) = s^1 - 1\,, \quad r = 2\,, \quad p_0 = -1\,, \quad p_1 = 0\,, \quad pm = 1\,, \quad p = 2\,.$$

La realización observable estándar es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de controlabilidad K es

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 2. Por lo tanto, no es controlable. Para determinar el (de hecho un) subsistema controlable tomamos

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad CS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde resulta que

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \overline{B}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad \overline{C}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

es una realización minimal de $R(s)$.

Proposición 4.6 *Una realización (A,B,C) de $R(s)$ es minimal si y sólo si (A,B) es controlable y (A,C) es observable.*

Demostración. (si) Sean K y L las matrices de controlabilidad y observabilidad de (A,B) y (A,C), respectivamente y sea $(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$ una realización de $R(s)$ con $\overline{A}\in M_{\overline{n}}(\mathbb{R})$, $\overline{B}\in M_{\overline{n}\times m}(\mathbb{R})$, $\overline{C}\in M_{p\times\overline{n}}(\mathbb{R})$. Como que

$$C(sI_n-A)^{-1}B=\overline{C}(sI_{\overline{n}}-\overline{A})^{-1}\overline{B}$$

se tienen las igualdades

$$CA^iB=\overline{C}\,\overline{A}^i\overline{B},\qquad i=0,1,2,\dots$$

Entonces

$$LK=\begin{pmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{pmatrix}(B\quad AB\ \dots\ A^{n-1}B)=\underbrace{\begin{pmatrix}\overline{C}\\\overline{C}\,\overline{A}\\\vdots\\\overline{C}\,\overline{A}^{n-1}\end{pmatrix}}_{L_1}\underbrace{(\overline{B}\quad\overline{A}\,\overline{B}\ \dots\ \overline{A}^{n-1}\overline{B})}_{K_1}=L_1K_1$$

L y K tienen rang n. Por lo tanto LK tiene rang n:

$$\mathbb{R}^{m\times n}\xrightarrow{K}\mathbb{R}^n\xrightarrow{L}\mathbb{R}^{q\times n}$$

ya que Im $K=\mathbb{R}^n$ y Nuc $L=\{0\}$, por tanto $\dim LK(\mathbb{R}^{m\times n})=\dim L(\mathbb{R}^n)=n$. Puesto que $LK=L_1K_1$ será rang $L_1K_1=n$. Ahora bien, de

$$\mathbb{R}^{m\times n}\xrightarrow{K_1}\mathbb{R}^{\overline{n}}\xrightarrow{L_1}\mathbb{R}^{p\times n}$$

resulta que

$$\text{rang } L_1K_1=\dim L_1K_1(\mathbb{R}^{m\times n})\leq\dim L(\mathbb{R}^{\overline{n}})\leq\overline{n}\,.$$

Así pues $n\leq\overline{n}$ con lo que (A,B,C) es minimal.
(sólo si) Si $(A\ B)$ no es controlable, sabemos que existe un subsistema controlable con la misma matriz de transferencia, de donde resulta que (A,B,C) no es minimal. El razonamiento es análogo si (A,C) no es observable. ■

De la demostración de existencia de realización minimal se deduce que ésta no es única (ver también observación 4.4).
No obstante, existe una relación entre todas las realizaciones minimales que las caracteriza: todas son algebraicamente equivalentes, tal como se demuestra en la siguiente proposición

Proposición 4.7 *Sea $R(s)$ una matriz racional propia. Entonces (A, B, C) y (A', B', C') son realizaciones minimales de $R(s)$ si y sólo si son algebraicamente equivalentes, esto es si existe una matriz invertible P tal que*

$$A' = PAP^{-1}\,, \qquad B' = PB\,, \qquad C' = CP^{-1}\,.$$

Demostración. Ya hemos visto en (1.10.3),que si(A, B, C) y (A', B', C') son algebraicamente equivalentes tienen la misma matriz de transferencia. Por tanto si una es minimal también lo será la otra.
Recíprocamente, supongamos que ambas son minimales. Entonces, puesto que ambas ternas son realizaciones de $R(s)$ se tienen las igualdades

$$CA^iB = C'A'^iB'\,, \qquad i \geq 0$$

y puesto que ambas son minimales los tamaños de A y A' y por tanto de B y B', y de C y C', son iguales, respectivamente. Así pues si, como antes, denotamos K, L, K', L' las respectivas matrices de controlabilidad y observabilidad, se tendrán las igualdades

$$LK = L'K'\,, \qquad LAK = L'A'K'\,.$$

Asimismo, por ser ambas controlables y observables (proposición 4.6)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{m\times n} \arrow[r, shift left, "K"] \arrow[r, shift right, "K'"'] & \mathbb{R}^{n} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, shift right, "L'"'] & \mathbb{R}^{p\times n} \end{tikzcd}$$

K, K', L y L' tienen rango máximo. Entonces

(i) $LK = L'K'$ implica $L'^*LK = L'^*L'K'$ de donde

$$K' = \underbrace{((L'^*L')^{-1}L'^*L)}_{P}K \quad \text{y de aquí} \quad B' = PB\,.$$

(ii) Análogamente, $L' = LKK^*(K'K^*)^{-1}$. Pero,

$$(L'^*L')^{-1}L'^*LKK^*(K'K^*)^{-1} = (L'^*L')^{-1}L'^*L'K'K^*(K'K^*)^{-1} = I_n\,.$$

Por tanto $KK^*(K'K^*)^{-1} = P^{-1}$ y $L' = LP^{-1}$, de donde $C' = CP^{-1}$.

(iii) Finalmente, de $LAK = L'A'K'$ obtenemos

$$L'^*LAKK^* = L'^*L'A'K'K^*$$

de donde

$$\underbrace{(L'^*L')^{-1}L'^*L}_{P}\,A\,\underbrace{KK^*(K'K^*)^{-1}}_{P^{-1}} = A'$$

esto es

$$A' = P\,A\,P^{-1}\,,$$

lo que completa la demostración. ■

Acabamos con un método de obtención de realización minimal en un caso particular.

Proposición 4.8 *Sean $b_{ij}(s)$ los denominadores de $R(s)$ y supongamos que sólo tienen raíces simples $s_1 \dots s_p$. Definimos*

$$K_j = \lim_{s\to s_j}(s-s_j)R(s)\,, \quad j = 1\dots p$$

y sea $r_j = \text{rang}\,K_j$. Si L_j y M_j son matrices de tipo $q\times r_j$ y $r_j \times m$, respectivamente, tales que $\text{rang}\,L_j = \text{rang}\,M_j = r_j$ *y*

$$K_j = L_jM_j\,, \qquad 1\le j\le p\,,$$

entonces, una realización minimal de $R(s)$ es

$$A = \begin{pmatrix} s_1I_{r_1} & & & \mathbf{O} \\ & s_2I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & s_pI_{r_p} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}, \quad C = (L_1 \ \dots \ L_p)\,.$$

Demostración. Descomponiendo cada elemento de $R(s)$ $\dfrac{a_{ij}(s)}{b_{ij}(s)}$ en fracciones simples,

$$R(s) = \frac{1}{s-s_1}R_1 + \dots + \frac{1}{s-s_p}R_p$$

donde precisamente $R_j = K_j$

$$\frac{a_{ij}(s)}{b_{ij}(s)} = \frac{\alpha_{ij}^1}{s-s_1} + \dots + \frac{\alpha_{ij}^p}{s-s_p}\,, \quad \alpha_{ij}^\ell \in \mathbb{R}$$

resulta

$$R(s) = \frac{1}{s-s_1}(\alpha_{ij}^1) + \dots + \frac{1}{s-s_p}(\alpha_{ij}^p)$$

con lo que
$$\lim_{s\to s_\ell}(s-s_\ell)R(s)=(\alpha^\ell_{ij})\,.$$
Esto es
$$R(s)=\frac{1}{s-s_1}K_1+\ldots+\frac{1}{s-s_p}K_p\,.$$
Entonces,
$$\begin{aligned}
C(sI-A)^{-1}B &= C\text{diag}\left(\frac{1}{s-s_1}I_{r_1},\ldots,\frac{1}{s-s_p}I_{r_p}\right)B=\\
&= C\begin{pmatrix}\frac{1}{s-s_1}M_1\\ \vdots\\ \frac{1}{s-s_p}M_p\end{pmatrix}=\sum_j\frac{1}{s-s_j}L_jM_j=\\
&= \sum_j\frac{1}{s-s_j}K_j=R(s)\,.
\end{aligned}$$

Por tanto, es realización.
Para probar que es minimal, demostraremos que es controlable y observable. Por definición, se tiene la igualdad
$$(B\quad AB\ \ldots\ A^{n-1}B)=\begin{pmatrix}M_1 & s_1M_1 & \ldots & s_1^{n-1}M_1\\ \ldots & & & \\ M_p & s_pM_p & \ldots & s_p^{n-1}M_p\end{pmatrix}.$$

Hay que probar que esta matriz tiene rango máximo. Lo haremos por inducción sobre p. Para $p=1$ es evidente. Así pues supongamos que la matriz del segundo miembro tiene rango máximo para $p-1$. Puesto que el número de filas es $r_1+\ldots+r_p$ $(=n)$ y el número de columnas es $m\times n$, basta probar que las filas son linealmente independientes.

Designemos $M_i=\begin{pmatrix}m_{i1}\\ \vdots\\ m_{ir_i}\end{pmatrix}$, $i=1,\ldots,p$ donde $m_{i1},\ldots,m_{ir_i}$ son las filas de M_i y sean $\lambda_{11},\ldots,\lambda_{pr_p}$ escalares tales que
$$\begin{aligned}
&\lambda_{11}(m_{11},s_1m_{11},\ldots,s_1^{n-1}m_{11})+\ldots+\lambda_{1r_1}(m_{1r_1},s_1m_{1r_1},\ldots,s_1^{n-1}m_{1r_1})+\\
&\ldots\\
+\ &\lambda_{p1}(m_{p1},s_pm_{p1},\ldots,s_p^{n-1}m_{p1})+\ldots+\lambda_{pr_p}(m_{pr_p},s_pm_{pr_p},\ldots,s_p^{n-1}m_{pr_p})=0
\end{aligned}$$

Esto equivale a que

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{11}m_{11}+\ldots+\lambda_{1r_1}m_{1r_1}+\ldots+\lambda_{p1}m_{p1}+\ldots+\lambda_{pr_p}m_{pr_p} &= 0 \\ s_1\lambda_{11}m_{11}+\ldots+s_1\lambda_{1r_1}m_{1r_1}+\ldots+s_p\lambda_{p1}m_{p1}+\ldots+s_p\lambda_{pr_p}m_{pr_p} &= 0 \\ \ldots \\ s_1^{n-1}\lambda_{11}m_{11}+\ldots+s_1^{n-1}\lambda_{1r_1}m_{1r_1}+\ldots+s_p^{n-1}\lambda_{p1}m_{p1}+\ldots+s_p^{n-1}\lambda_{pr_p}m_{pr_p} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicamos la primera igualdad por s_p y le restamos la segunda, por s_p^2 y le restamos la tercera, por s_p^{n-1} y le restamos la última. Se tendrán las igualdades siguientes

$$\begin{aligned} &(s_p-s_1)\lambda_{11}m_{11}+\ldots+(s_p-s_1)\lambda_{1r_1}m_{1r_1}+\ldots+(s_p-s_{p-1})\lambda_{p-1,1}m_{p-1,1}+\ldots \\ &\qquad \ldots+(s_p-s_{p-1})\lambda_{p-1,r_{p-1}}m_{p-1,r_{p-1}}=0 \\ &\ldots \\ &(s_p^{n-1}-s_1^{n-1})\lambda_{11}m_{11}+\ldots+(s_p^{n-1}-s_1^{n-1})\lambda_{1r_1}m_{1r_1}+\ldots \\ &\qquad \ldots+(s_p^{n-1}-s_{p-1}^{n-1})\lambda_{p-1,1}m_{p-1,1}+\ldots+(s_p^{n-1}-s_{p-1}^{n-1})\lambda_{p-1,r_{p-1}}m_{p-1,r_{p-1}}=0\,. \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción los coeficientes de $m_{11},\ldots,m_{1r_1},\ldots,m_{p-1,1},\ldots,m_{p-1,r_{p-1}}$ deben ser nulos y siendo $s_1 \neq s_j$ si $i \neq j$, resulta que debe ser

$$\lambda_{11}=\ldots=\lambda_{1r_1}=\ldots=\lambda_{p-1,1}=\ldots=\lambda_{p-1,r_{p-1}}=0\,.$$

Entonces

$$\lambda : p1m_{p1}+\ldots+\lambda_{pr_p}m_{pr_p}=0$$

lo que implica $\lambda_{p1}=\ldots=\lambda_{pr_p}=0$, con lo que la matriz de controlabilidad tiene rango máximo. La observabilidad se prueba de forma totalmente análoga. ■

Ejemplo 4.9 Determinar una realización minimal de

$$R(s)=\frac{25+7}{s^2-5s+6}\,.$$

Puesto que $s^2-5s+6=(s-2)(s-3)$ podemos aplicar la proposición 4.8. Con las notaciones de esta proposición se tiene

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s\to 2}\frac{2s+7}{s-3}=-11\,, &\qquad r_1=1 \\ K_2 &= 13\,, & r_2=1 \end{aligned}$$

tomamos

$$L_1 = \frac{1}{\alpha}K_1\,, \quad \alpha \neq 0\,, \quad M_1 = \alpha$$
$$L_2 = \frac{1}{\beta}K_2\,, \quad \beta \neq 0\,, \quad M_2 = \beta$$

con lo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{11}{\alpha}, \frac{13}{\beta} \end{pmatrix}$$

es una realización minimal de $R(s)$.
Otra realización minimal puede obtenerse a partir, por ejemplo, de la realización observable estándar. Compruebe el lector que ésta és

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en este caso, esta realización es minimal ya que tiene el mismo número de variables de estado que l anterior (que es minimal).
Entonces la proposición 4.7 nos dice que estas dos realizaciones son algebraicamente equivalentes. Vamos a determinar la matriz S invertible de cambio de variables de estado cuando $\alpha = \beta = 1$. S deberá ser tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}S$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 13 \end{pmatrix}S\,.$$

Si escribimos $S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, las dos últimas igualdades nos dan

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2x + 17y \\ 1 &= 2z + 17t \\ 1 &= -11x + 13z \\ 0 &= -11y + 13t \end{aligned}\right\}$$

de donde...
En este caso, es más rápido obtener S como base de vectores propios (de hecho la inversa). En efecto, puesto que $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonal, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ tendrá 2 y 3 como valores propios con vectores propios respectivos

$$v_1 = (\lambda, 2\lambda) \quad \lambda \neq 0\,, \qquad v_2 = (\mu, 3\mu) \quad \mu \neq 0\,.$$

Entonces

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 2\lambda & 3\mu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\lambda} & -\dfrac{1}{\lambda} \\ -\dfrac{2}{\mu} & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix}\,.$$

Puesto que $S^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix}$ obtenemos $\lambda = -11$ y $\mu = 13$. Comprobemos que, efectivamente, se satisface la última igualdad:

$$(-11 \quad 13)\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{11} & \dfrac{1}{11} \\ -\dfrac{2}{13} & \dfrac{1}{13} \end{pmatrix} = (1 \quad 0)\,!$$

Capítulo 5

Realimentación de estado

1 Realimentación de estado

1.1 Sea Σ el sistema lineal invariante en el tiempo representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Si substituimos la entrada $u(t)$ por

$$u(t) = \tau(t) + Fx(t)$$

donde $F \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ se dice que ha efectuado una *realimentación de estado* (la nueva entrada $r(t)$ es la anterior $u(t)$ más un "múltiplo" del estado: $-Fx(t)$).
El nuevo sistema, que denotamos Σ_r, vendrá representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BF)x(t) + Br(t) \\ y &= Cx(t) \end{aligned}$$

y de acuerdo con la anterior definición, diremos que se ha obtenido a partir de Σ a través de una realimentación de estado definida por F.

Proposición 1.2 *Con las notaciones anteriores, Σ es controlable si y sólo si Σ_r lo es.*

La proposición resulta inmediatamente del siguiente resultado

Lema 1.3 Im $(B \quad AB \ \dots \ A^qB) =$ Im $(B \quad (A+BF)B \ \dots \ (A+BF)^qB)$ *para todo* $q \geq 1$.

Demostración. Inducción sobre q.
Para $q = 1$ es evidente.

Supongamos la igualdad cierta para q, $q \geq 1$, y veamos que también lo es para $q+1$

$$\begin{aligned}
\text{Im}\,(B \quad AB \ \ldots \ A^qB) &= \sum_{h=0}^{q} \text{Im}\ A^hB = \sum_{h=0}^{q-1} \text{Im}\ A^hB + \text{Im}\ A^qB = \\
&= \sum_{h=0}^{q-1} \text{Im}\ (A+BF)^hB \ \text{(hipótesis de inducción)} + \text{Im}\ A^qB
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$\text{Im}\,(B \quad (A+BF)B \ \ldots \ (A+BF)^qB) = \sum_{h=0}^{q} \text{Im}\ A^hB + \text{Im}\ (A+BF)^qB\,.$$

Entonces, puesto que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(A+BF)^qBx &= (A+BF)(A+BF)^{q-1}Bx = \\
&= (A+BF)\sum_{h=0}^{q-1} A^hBy_h \ \text{(hipótesis de inducción)} = \\
&= \sum_{h=0}^{q-1} A^{h+1}By_h + BF\left(\sum_{h=0}^{q-1} A^hBy_h\right) \in \sum_{h=0}^{q} \text{Im}\ A^hB
\end{aligned}$$

resulta que

$$\text{Im}\,(B \quad (A+BF)B \ \ldots \ (A+BF)^qB) \subset \text{Im}\,(B \quad AB \ \ldots \ A^qB)\,.$$

Para probar la igualdad contraria es suficiente observar que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
A^qBx &= AA^{q-1}Bx = A\left(\sum_{h=0}^{q-1}(A+BF)^hBy_h\right) = \\
&= (A+BF-BF)\left(\sum_{h=0}^{q-1}(A+BF)^hBy_h\right) \in \sum_{h=0}^{q}(A+BF)^hB\,.
\end{aligned}$$

■

2 Asignación de valores propios por realimentación de estado

Una de las aplicaciones más interesantes de la realimentación de estado es que permite estabilizar un sistema controlable, como se deduce del siguiente teorema, para cuyo enunciado introducimos la siguiente definición. Un conjunto de n complejos $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (no necesariamente distintos) se dice que es *cerrado por conjugación* si $\Lambda = \{\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n\}$, esto es, si para cada $\lambda \in \Lambda$ se cumple asimismo que $\overline{\lambda} \in \Lambda$.
Para la demostración del teorema precisamos de la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Sea (A,b) un par controlable, donde b es una matriz columna ($m=1$). Existe una matriz invertible T tal que*

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El par $(\overline{A}, \overline{b})$ se denomina *forma canónica de controlabilidad* de (A,b).
Demostración. Sea t la última fila de la inversa de la matriz de controlabilidad $(b \quad Ab \ \dots \ A^{n-1}b)$.
Veamos que $t,\ TA,\ \dots,\ tA^{n-1}$ son linealmente independientes.
Si

$$\alpha_0 t + \alpha_1 tA + \ldots + \alpha_{n-1} tA^{n-1} = 0\,,$$

multiplicando por la derecha por b resulta

$$\alpha_0 tb + \alpha_1 tAb + \ldots + \alpha_{n-1} tA^{n-1}b = 0\,,$$

y por definición de t,

$$tb = tAb = \ldots = tA^{n-2}b = 0\,, \qquad tA^{n-1}b = 1$$

luego debe ser $\alpha_{n-1} = 0$.
Reiterando el razonamiento obtenemos que el resto de coeficientes $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ deben ser todos nulos.
Pues bien, la matriz

$$T = \begin{pmatrix} t \\ tA \\ \vdots \\ tA^{n-1} \end{pmatrix}$$

verifica las condiciones de la proposición. En efecto, si escribimos $t^{-1} = (c_1 \ \dots \ c_n)$ (c_i columna i-ésima) se tendrá

$$\begin{pmatrix} tc_1 & \dots & tc_n \\ tAc_1 & \dots & tAc_n \\ \vdots & & \\ tA^{n-1}c_1 & \dots & tA^{n-1}c_n \end{pmatrix} = I_n$$

es decir

$$tA^{k-1}c_\ell = \delta_{k\ell}\,, \qquad 1 \le k,\ell \le n$$

con lo que

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} t \\ tA \\ \vdots \\ tA^{n-1} \end{pmatrix} (Ac_1 \;\dots\; Ac_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{y} = Tb = \begin{pmatrix} tb \\ tAb \\ \vdots \\ tA^{n-1}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como se quería demostrar. ∎

Teorema 2.2 *Si* (A,B) *es controlable y* Λ *es un conjunto cerrado por conjugación arbitrario, existe* $F \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *tal que* $A+BF$ *tiene* Λ *como conjunto de sus valores propios.*

Nota. En el enunciado de este teorema al igual que sucedía en el estudio de la estabilidad, $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de $A \in M_n(\mathbb{R})$ si $Ax = \lambda x$ con $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$.

Demostración. Dividimos la demostración en dos partes. En la primera se prueba el teorema para $m = 1$ y en la segunda para m entero arbitrario (≥ 0) por reducción al caso anterior.

• *Caso* $m = 1$. Esto es $B = b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Tal como hemos probado en 2.1 existe una matriz invertible T tal que

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces se trata de determinar $\overline{k} = (\overline{k}_1 \ldots \overline{k}_n)$ tal que $\overline{A} + \overline{bk}$ tenga $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ por valores propios. Puesto que

$$\overline{A} + \overline{bk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ a_0 + \overline{k}_1 & \ldots & \ldots & & a_{n-1} + \overline{k}_n \end{pmatrix}$$

resulta que el polinomio característico de esta matriz es

$$Q(t) = t^n - (a_{n-1} + \overline{k}_n)t^{n-1} + \ldots - (a_0 + \overline{k}_1)$$

el cual debe ser igual a $(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$. Entonces la igualdad

$$t^n - (a_{n-1} + \overline{k}_n)t^{n-1} - \ldots - (a_0 + \overline{k}_1) = (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$$

permite determinar los valores de $\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n$.
Sea $k = \overline{k}T$. Puesto que

$$\overline{A} + \overline{bk} = TAT^{-1} + TbkT^{-1} = T(A + bk)T^{-1}\,,$$

la matriz $A + bk$ tiene los mismos valores propios que $\overline{A} + \overline{bk}$, con lo que el teorema queda probado si $m = 1$.
• *Caso* $m > 1$. Precisamos del siguiente resultado.

Lema 2.3 *Si* (A, B) *es controlable y* b *es una columna no nula cualquiera de* B*, existe* K_1 *tal que* $(A + BK_1,\, b)$ *es controlable.*

Veamos como a partir de este lema se prueba que el teorema es cierto para $m > 1$.
En efecto, si (A, B) es controlable, aplicando el lema anterior existe K_1 tal que $(A + BK_1,\, b)$ es controlable, donde b es una columna no nula de B. Entonces, puesto que estamos ahora en el caso anterior ($m = 1$), existe k_2 tal que Λ es el conjunto de valores propios de $A + BK_1 + bk_2$. Si K_2 es una matriz tal que $bk_2 = BK_2$ (por ejemplo, si $b = b_1$, primera columna de B, $K_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ya que $(b_1 \;\; b_2 \;\; \ldots \;\; b_m) \begin{pmatrix} k_2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 k_2$).
La realimentación de estado F del teorema es pues

$$F = K_1 + K_2\,.$$

Demostración (del lema). Dividiremos la demostración en varios pasos
(i) Designemos $b_1, \ldots, b_m$ las columnas de B y sea

$$K = (b_1, Ab_1, \ldots, A^{n-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{n-1}b_2, \ldots, b_m, Ab_m, \ldots, A^{n-1}b_m)$$

una reordenación por columnas de la matriz de controlabilidad de (A, B).
Puesto que K tiene rango máximo n, podemos elegir n columnas linealmente independientes. Reordenando, si es preciso, las columnas de B, las n columnas linealmente independientes (l.i.) se eligen así: Sea
$r_1 \geq 1$ tal que

$$b_1, Ab_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1, \quad \text{son l.i., y} \quad b_1, Ab_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1 \quad \text{son l.d.}$$

$r_2 \geq 1$ tal que

$$b_1, Ab_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{r_2-1}b_2 \quad \text{son l.i., y} \quad b_1, \ldots, A^{r_2-1}b_2 \quad \text{son l.d.}$$

$\ldots$
$r_q \geq 1$ tal que $r_1 + \ldots + r_q = n$

$$b_1, Ab_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1, \ldots, b_q, Ab_q, \ldots, A^{r_q-1}b_q \quad \text{son l.i.}$$

Nótese que si se han reordenado las columnas de B, hay que reordenar de forma evidente las componentes de la entrada u a fin de que Bu no se altere.
(ii) Sea $P = (b_1, Ab_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1, \ldots, b_q, Ab_q, \ldots, A^{r_q-1}b_q)$, que es una matriz $n \times n$ invertible y si $k_1 = r_1$, $k_2 = r_1 + r_2, \ldots, k_{q-1} = r_1 + \ldots + r_{q-1}$, E es la matriz $m \times n$ definida así,

$$E = \left(\begin{array}{ccccccc} & \left.\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}2 & & \left.\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\}3 & & \left.\begin{matrix}0\\0\\\vdots\\1\end{matrix}\right\}q & \\ \mathbf{0} & \begin{matrix}0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix} & \mathbf{0} \\ & k_1 & & k_2 & & k_{q-1} & \end{array}\right)$$

esto es, E tiene m filas y n columnas y todas las columnas son nulas excepto las $k_1, k_2, \ldots, k_{q-1}$ que tienen 1 en las filas $2, 3, \ldots, q$ y el resto ceros.

(iii) Entonces $b = b_1$ y $K_1 = EP^{-1}$ verifican las condiciones del lema, es decir que $(A+BK_1, b)$ es controlable. Para probarlo conviene hacer algunas observaciones previas.
(iv) Por definición de P y E se tienen, si $0 \leq j \leq r_1 - 2$,

$$BK_1A^jb_1 = BEP^{-1}A^jb_1 = BEe_{j+1} = 0 \quad \text{y} \quad BK_1A^{r_1-1} = BEe_{r_1} = B\varepsilon_2 = b_2\,.$$

Análogamente,

$$BK_1A^hb_2 = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq h \leq r_2 - 2 \quad \text{y} \quad BK_1A^{r_2-1}b_2 = BEe_{k_2} = B\varepsilon_3 = b_3$$

etc...
(v) Asimismo, por definición de P se tiene que
$A^{r_1}b_1$ es una combinación lineal de $b_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1$
$A^{r_2}b_2$ es una combinación lineal de $b_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1, b_2, \ldots, A^{r_2-1}b_2$
...
y por tanto si $s \geq r_j$, A^sr_j es una combinación lineal de $b_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1, \ldots, b_j, \ldots, A^{r_j-1}b_j$.
Probaremos que $(A + BK_1, b)$ es controlable, demostrando la igualdad

$$[b_1, (A + BK_1)b_1, \ldots, (A + BK_1)^{j-1}b_1] = [\underbrace{b_1, Ab_1, \ldots, A^{r_1-1}b_1, \ldots, b_h, Ab_h, \ldots, A^{i_h}b_h}_{j}]\,,$$

$i_h < r_h$, para todo j, $1 \leq j \leq n$. (recordemos que [...] significa subespacio engendrado). Utilizaremos inducción sobre j.
Para $j = 1$ es evidente. Supongamos la igualdad anterior cierta para un $j \geq 1$. Entonces

$$(A + BL_1)^jb_1 = (A + BK_1)((A + BK_1)^{j-1}b_1) = (A + BK_1)v$$

donde v es una combinación lineal de $b_1, Ab_1, \ldots, A^{i_h}b_h$.
Distinguiremos dos casos:

a) $i_h < r_h - 1$. Entonces Av será una combinación lineal de $b_1, \ldots, b_h, \ldots, A^{i_h+1}b_h$ y BK_1v lo será de $b_1, \ldots, b_h$. (iv)

b) $i_h = r_h - 1$. En este caso Av será una combinación lineal de $b_1, \ldots, b_h, \ldots, A^{r_h-1}b_h$ (v), y BK_1v lo será de $b_1, \ldots, b_{h+1}$. (iv)

En ambos casos se tiene que la igualdad en cuestión se cumple para $j + 1$. Haciendo $j = n$ queda probado que

$$\text{rang}\,[b_1, (A + BK_1)b_1, \ldots, (A + BK_1)^{n-1}b_1] = n$$

lo que finaliza la demostración de la proposición. ∎

3 Ejemplos

3.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\Lambda = \{-1, -i+i, -1-i\}$.

Para determinar la realimentación procedemos como en 2.1 para $m = 1$.
Determinación de la matriz de controlabilidad:

$K(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 y por tanto el par $(A \quad b)$ es controlable.

Determinación de la forma canónica de controlabilidad:

$$K(A,b)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} (= \overline{A}), \quad Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (= \overline{b})$$

$\overline{k} = (a \quad b \quad c)$ ha de ser tal que

$$\overline{A} + \overline{bk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6+b & 5+c \end{pmatrix}$$

tenga Λ por valores propios. Esto es

$$\begin{aligned} t^3 - (5+c)t^2 - (-6+b)t - a &= (t+1)(t+1-i)(t+1+i) = \\ &= (t+1)(t^2+2t+2)\,. \end{aligned}$$

De esta igualdad resulta

$$a = -2\,, \qquad b = 2\,, \qquad c = -8\,.$$

Entonces $k = \overline{k}T = \left(16, -24, \frac{50}{3}\right)$ es tal que $A + bk$ tiene Λ por conjunto de valores propios.

3.2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \Lambda = \{-1, 1, 2\}.$

Escribamos la matriz de controlabilidad de (A, B) en la forma

$$K(A,B) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 \end{array} \end{array}$$

rang $K(A, B) = 3$ y por tanto (A, B) es controlable.
Podemos tomar $b = b_1$ y vamos a determinar K_1 tal que $(A + BK_1, b)$ sea controlable.
Con las notaciones de 2.1 para $m > 1$, tendremos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{esto es} \quad r_1 = 3 \ (= k_1)\,, \quad q = 1$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = EP^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinación de k_2 tal que $A + BK_1 + bk_2$ tenga Λ por conjunto de valores propios:

$$C(A + BK_1, b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y procediendo como en el ejemplo anterior

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Denotemos $A + BK_1 = A_1$. Entonces

$$\overline{A}_1 = TA_1T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y (compruébelo el lector) que $\overline{k} = (-5 \quad 1 \quad 0)$ y $k_2 = \overline{k}T = \left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$, con lo que

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es la realimentación que hace que $A + BF$ tenga valores propios -1, 1 y 2.

Apéndice A

Norma de matrices

Sea A una matriz compleja (en particular real) $n \times n$. Esto es $A \in M_n(\mathbb{C})$ y designemos asimismo por A, como ya se ha indicado, la aplicación definida por

$$A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$A(x) = Ax$ (producto). Recuérdese que hemos convenido en representar los vectores de $\mathbb{C}^n$ por matrices columna y que consideramos en $\mathbb{C}^n$ el producto hermítico habitual.
Entonces al definir una norma de A caben dos posibilidades: considerar A como matriz o como endomorfismo. El contexto dejará claro si se trata de uno u otro caso.

Definición A.1 *Si* $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$, *definimos*

$$\parallel A \parallel_\infty = \max\{|a^i_j|,\ 1 \leq i,j \leq n\}$$

Que, efectivamente, la definición anterior es una norma lo prueba el siguiente resultado, cuya demostración elemental, dejamos para el lector.

Proposición A.2 *La aplicación* $A \longmapsto \parallel A \parallel_\infty$ *verifica las siguientes propiedades*

(i) $\parallel A \parallel_\infty \geq 0$.

(ii) $\parallel A \parallel_\infty = 0$ *implica* $A = 0$.

(iii) $\parallel \lambda A \parallel = |\lambda| \parallel A \parallel, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

(iv) $\parallel A + B \parallel_\infty \leq \parallel A \parallel_\infty + \parallel B \parallel_\infty$.

(v) $\parallel AB \parallel_\infty \leq n \parallel A \parallel_\infty \parallel B \parallel_\infty$.

Consideremos ahora A como aplicación lineal.

Definición A.3 *Si* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *definimos*

$$\| A \| = \max\{\| Ax \| \,,\ \| x \| = 1\}\,.$$

(Nótese que A es continua, que $\{x\,;\ \| x \| = 1\}$ es compacto, y que la aplicación $x \longmapsto \| x \|$ es continua, con lo que efectivamente existe el máximo anterior).
Análogamente a $\| \quad \|_\infty$ se tiene

Proposición A.4 *La aplicación* $A \longmapsto \| A \|$ *verifica las propiedades siguientes*

(i) $\| A \| \geq 0$.

(ii) $\| A \| = 0$ *implica* $A = 0$.

(iii) $\| \lambda A \| = |\lambda| \ \| A \|$.

(iv) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$.

(v) $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

Demostración. (i), (ii) y (iii) son evidentes. (iv) resulta inmediatamente de la desigualdad $\| (A+B)x \| \leq \| Ax \| + \| Bx \|$. Finalmente (v) resulta de la proposición siguiente, ya que

$$\| ABx \| = \| A(Bx) \| \leq \| A \| \| Bx \| \leq \| A \| \| B \| \| x \| \ .$$

■

Proposición A.5 *Con las notaciones anteriores,*

(i) $\| Ax \| \leq \| A \| \| x \|$ *para todo* $x \in \mathbb{C}^n$.

(ii) $\| Ax \| \leq k \| x \|$ *para todo* $x \in \mathbb{C}^n$ *implica* $\| A \| \leq k$.

Demostración.

(i) (i) Si $x = 0$, es evidente. Supongamos $x \neq 0$. Entonces

$$\| Ax \| = \left\| \| x \| \, A \frac{x}{\| x \|} \right\| = \| x \| \left\| A \frac{x}{\| x \|} \right\| \leq \| x \| \| A \| \ .$$

(ii) Sea $x \neq 0$. Entonces

$$\left\| A \frac{x}{\| x \|} \right\| = \frac{1}{\| x \|} \| Ax \| \leq k\,.$$

Por tanto, $\| A \| \leq k$. ■

Veamos, por último que $\| \quad \|$ y $\| \quad \|_\infty$ son equivalentes. De forma precisa:

Proposición A.6 *Si* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *se verifican las desigualdades siguientes*

$$k_1 \| A \|_\infty \leq \| A \| \leq k_2 \| A \|_\infty$$

donde k_1 *y* k_2 *son escalares positivos.*

Demostración. Sea $A = (a_j^i)_{1 \leq i,j \leq n}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\| Ax \| &= \left\| \left(\sum_i a_i^1 x^i, \ldots, \sum_i a_i^n x^i \right) \right\| \leq \\
&\leq \left| \sum_i a_i^1 x^i \right| + \ldots + \left| \sum_i a_i^n x^i \right| \leq \\
&\leq \sum_i |a_i^1| \, |x^i| + \ldots + \sum_i |a_i^n| \, |x^i| \leq \\
&\leq \| x \| \left(\sum_i |a_i^1| + \ldots + \sum_i |a_i^n| \right) \leq \\
&\leq 2n \| A \|_\infty \| x \|
\end{aligned}$$

de donde, por A.5(ii), $\| A \| \leq 2n \| A_\infty \|$, con lo que la segunda desigualdad queda probada. Para demostrar la primera es suficiente observar que para todo $1 \leq i, j \leq n$,

$$|a_j^i| \leq \sqrt{|a_j^1|^2 + \ldots + |a_j^n|^2} = \| Ae_j \| \leq \| A \| \; .$$

■

Nota A.7 Existen otras definiciones posibles para la norma de A. Por ejemplo

(i) $\| A \|_1 = \sum_{i,j} |a_j^i|$.

(ii) $\| A \|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$.

Asimismo en la definición A.3 puede substituirse la condición $\| x \| = 1$ por $\| x \| \leq 1$.
Se puede probar que todas son normas equivalentes en el sentido que precisa la proposición A.6.

Apéndice B

Producto de Kronecker

Definición B.1 *Sean* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ *y* $B \in M_{p\times q}(\mathbb{C})$. *Se denomina* producto de Kronecker *de* A *y* B *la matriz* $mp \times nq$ *definida por*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & a_2^1 B & \dots & a_n^1 B \\ a_1^2 B & \dots & \dots & a_n^2 B \\ \vdots & & & \\ a_1^m B & a_2^1 B & \dots & a_n^m B \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & -3 & -1 \\ -4 & 8 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 & 2 \\ -6 & 12 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Proposición B.2 El producto de Kronecker de matrices verifica, entre otras las siguientes propiedades

(i) $(\lambda A) \otimes B = A \otimes (\lambda B)$.

(ii) $(A + A') \otimes B = A \otimes B + A' \otimes B$.

$$A \otimes (B + B') = A \otimes B + A \otimes B'.$$

(iii) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.

donde $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B, B' \in M_{p\times q}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n\times r}(\mathbb{C})$, $D \in M_{q\times s}(\mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. (i) y (ii) son evidentes. En cuanto a (iii) es suficiente observar que el elemento (i, j) de $(A \otimes B)(X \otimes D)$ viene dado por

$$(a^i_1 B)(c^1_j D) + \ldots `(a^i_n N)(c^n_j D) = (a^i_1 c^1_j + \ldots + a^i_n c^n_j) BD \,,$$

que no es más que el elemento (i, j) de $AC \otimes BD$. ■

La siguiente propiedad permite reescribir ecuaciones lineales matriciales en la forma habitual de los sistemas de ecuaciones lineales. En efecto, el lector puede comprobar que la ecuación $AX = B$, donde A es $m \times n$ y B es $m \times p$, es equivalente a la ecuación

$$(A \otimes I_p)x = b \,,$$

donde $x = (x^1_1 \ldots x^1_p \ldots x^n_1 \ldots x^n_p)^*$, $\quad b = (b^1_1 \ldots b^1_p \ldots b^m_1 \ldots b^m_p)^*$.

Bibliografía

[BC] S. Barnett, R.G. Camaron, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Oxford UP, 1985.

[CD] Frank M. Callier, Charles A. Desoer, *Linear System Theory*, Springer Verlar, 1991.

[Ch] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt Reinhart and Winston, 1970.

[FH] Thomas E. Fortman, Konrad L. Hitz, *An Introduction to Linear Control System*, Marcel Decker, 1977.

[G] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, vol. II, Chelsea, 1959.

[S] Philip E. Sarachik, *Principles of Linear Systems*, Cambridge UP, 1997.

[SB] Ferenc Szidarovszky, A. Terry Bahill, *Linear System Theory*, CRC Press, 1997.

[W] W. Murray Wonham, *Linear Multivariable Control. A Geometric Approach*, Springer Verlag, 1984.