Index

Geometria sintètica

1.– *Setembre 1993*

Demostreu les següents propietats que es compleixen en un triangle qualsevol :

1. Les medianes d'un triangle el divideixen en 6 parts d'igual àrea.
2. La recta que uneix un vèrtex qualsevol amb el punt mitjà d'una mediana determina en el costat oposat dos segments en proporció 2:1.

2.– *Maig 1994*

Sigui ABC un triangle i P un punt sobre el segment AC. Suposem que $\widehat{ABP} = \widehat{PBC} = \widehat{A}$ i $\widehat{C} = 2\widehat{A}$. Proveu:

1. $AB/BC = (\sqrt{5}+1)/2$
2. $\cos\frac{\pi}{5} = (\sqrt{5}+1)/4$
3. $\cos\frac{2\pi}{5} = (\sqrt{5}-1)/4$

3.– *Maig 1994*

Demostreu que un quadrilàter convex és inscriptible a una circumferència si i només si els angles d'un dels parells d'angles oposats són suplementaris. Si aquest és el cas, què en podeu dir de l'altra parella d'angles oposats?

4.– *Juliol 1994*

Siguin B_1, B_2, B_3 i B_4 punts sobre els costats A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 i A_4A_1 d'un quadrat donat $A_1A_2A_3A_4$ tals que

$$(A_1, B_1, A_2) = (A_2, B_2, A_3) = (A_3, B_3, A_4) = (A_4, B_4, A_1)\ .$$

1. Proveu que els segments A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4 i A_4B_1 determinen un quadrat.
2. Calculeu-ne l'àrea, en funció del valor λ de les quatre raons simples i suposant que el costat del quadrat donat té longitud unitat.
3. Descriviu quin és el lloc geomètric del punt $Q = (B_1A_3) \cap (A_2B_4)$ quan el punt B_1 recorre el segment A_1A_2 (raoneu sintèticament).

5.– *Novembre 94*

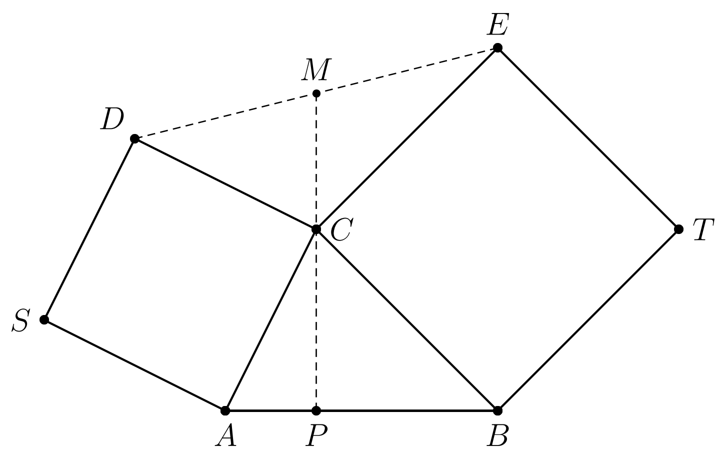
Donat un punt P del costat AB d'un triangle ABC, proveu que P pertany a la bisectriu de l'angle C si i només si es cumpleix

$$PA \cdot CB = PB \cdot CA.$$

6.– *Abril 1995*

Sigui ABC un triangle i construïm quadrats $ACDS$ i $BTEC$ com a la figura. Demostreu que:

(a) El punt M d'intersecció de l'altura h_C amb ED és el punt mitjà del segment ED.
(b) $\overline{CM} = \overline{AB}/2$.
(c) Els triangles CMD i CEM tenen la mateixa àrea.
(d) Els triangles ABC i CED tenen la mateixa àrea.



7.– *Juny 1995*

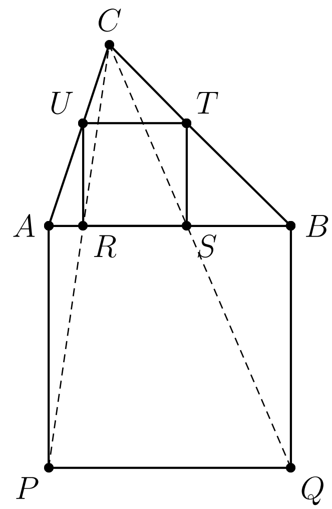
Donat un triangle equilàter ABC, orientat en sentit antihorari, proveu que existeix una única terna de punts A', B', C' sobre els costats BC, CA, AB, respectivament, i tal que els angles $\widehat{BC'A'}$, $\widehat{CA'B'}$ i $\widehat{AB'C'}$ són rectes. Calculeu les raons simples (A, B, C'), (B, C, A') i (C, A, B').

8.– *Setembre 1995*

Es dóna un triangle acutangle ABC i es construeix el quadrat $APQB$ com a la figura.

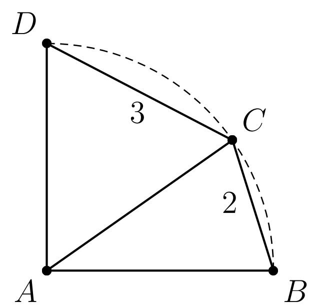
1. Proveu que $RSTU$ és un quadrat.

2. Inscriviu un rectangle en el triangle ABC tal que la proporció dels seus costats sigui $2:1$.



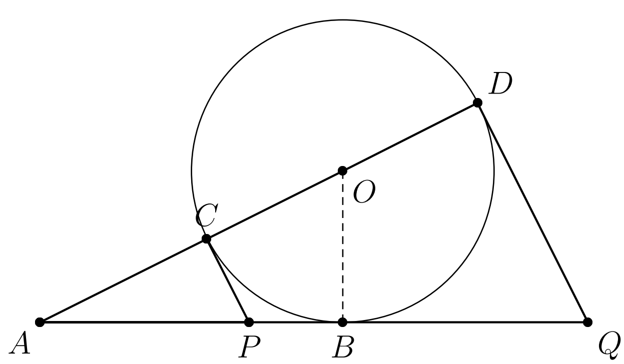
9.– *Novembre 95*

Trobeu l'àrea del polígon $ABCD$ de la figura següent:



10.– *Abril 96*

A la figura, la circumferència és tangent a AB en el punt B i el seu diàmetre és igual a AB. Els segments PC i QD són tangents a la circumferència en els punts C i D, respectivament. Expliqueu raonadament quines de les parelles de segments que segueixen tenen la propietat que el primer és segment auri del segon: (AC, AB), (AB, AD), (AO, AQ), (PB, OC), (OB, BQ), (PB, PC) i (PB, PA).



11.– *Juny 96*

Siguin P, Q, R i S els centres dels quadrats construïts externament sobre els quatre costats d'un rombe. Demostreu que $PQRS$ és un quadrat. Suposant que el costat del rombe és fix, quina és l'àrea màxima que pot tenir $PQRS$, i quin és el valor d'aquesta àrea?

12.– *Juliol 1997*

Es dóna una circumferència inscrita en un trapezi isòsceles de base major a i costat c. Es demana trobar l'àrea del triangle format per la base major del trapezi i les dues rectes definides pels costats del trapezi.

13.– *Juliol 1998*

Donat un punt P interior a un triangle ABC, siguin X, Y, Z els peus de les perpendiculars des de P als costats BC, CA i AB, respectivament. Proveu que

$$YZ = \frac{a}{2\rho}PA \qquad ZX = \frac{b}{2\rho}PB \qquad XY = \frac{c}{2\rho}PC,$$

on ρ és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

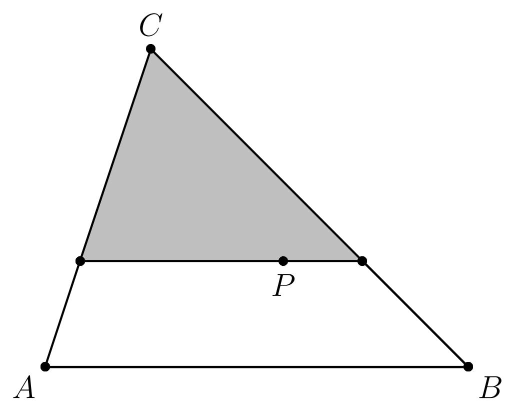
14.– *Novembre 1998*

Sigui ABC un triangle i siguin $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les longituds dels seus costats.

1. Donat un punt P interior al triangle, les rectes per P paral·leles als costats AB, BC i CA determinen, respectivament, triangles semblants al triangle ABC (en el cas del costat AB, vegeu el triangle ombrejat de la figura). Proveu que si λ, μ i ν són, respectivament, les tres raons de semblança, llavors

$$\lambda + \mu + \nu = 2.$$

2. Considerem el segment de cada una de les tres paral·leles esmentades que té extrems sobre els altres dos costats (per exemple, el segment gruixut de la figura és el segment de la recta paral·lela per P a AB que té extrems sobre AC i BC). Suposem que el punt P és tal que aquests tres segments són iguals. Expresseu la seva longitud en funció de a, b i c.



15.– *Gener 1999*

1. Proveu que si u i v són vectors d'un espai euclidià, llavors es compleix la identitat
$$\| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 = 2 \| u \|^2 + 2 \| v \|^2 .$$
2. Deduïu-ne que si a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle i m la mitjana corresponent al costat a, llavors $4m^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$.
3. Proveu que un triangle de costats a, b, c compleix $a : b : c \equiv 13 : 10 : 5$ si la seva circumferència inscrita divideix en tres segments iguals la mitjana corresponent al costat b. [Indicació: relacioneu les potències de B i del punt mitjà del costat b respecte del cercle inscrit]

16.– *Juliol 1999*

Siguin A, B i C tres punts d'una circumferència K, i sigui M el punt mitjà de l'arc de K que conté C i té extrems A i B (en aquest ordre: A, M, C, B). Sigui P el peu de la perpendicular a AC per M. Proveu que $AP = PC + CB$.

17.– *Novembre 1999*

Sigui ABC un triangle del pla euclidià, O el centre del seu triangle circumscrit (circumcentre) i G el seu baricentre.

1. Quina és la condició, en termes del triangle ABC, per tal que G coincideixi amb O?

   En el que resta de l'exercici suposarem que $G \neq O$. Si A' és el punt mitjà del segment BC i D és el punt tal que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, demostreu que
2. $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA'}$.

   Sigui ara E el punt tal que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
3. Proveu que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OD}$.
4. Quina és la condició, en termes del triangle ABC, per tal que E coincideixi amb A?
5. Si $A \neq E$, digueu què representa la recta AE per al triangle ABC.
6. Proveu que E és l'ortocentre de ABC.
7. Proveu que G és un punt del segment OE i determineu la raó simple $\sigma(O, E, G)$.

   Aplicació.

   Siguin O i A dos punts diferents del pla. Posem $\mathcal{C}$ per denotar la circumferència de centre O que passa per A i sigui H un punt interior de $\mathcal{C}$, $H \neq O$.

   L'objecte de les tres qüestions que segueixen és determinar els triangles inscrits a $\mathcal{C}$ que tenen un vèrtex coincident amb A i l'ortocentre dels quals és H.

8. Proveu que el peu de la mitjana d'un tal triangle es pot determinar a partir de A, O i H.

9. Demostreu que el problema té una única solució.

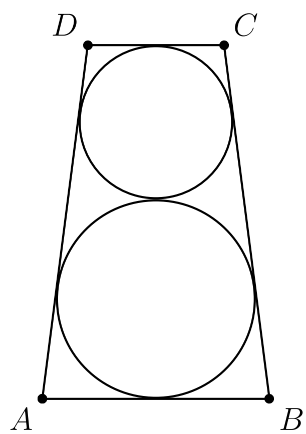
10. Comproveu que el triangle obtingut compleix que el seu ortocentre és H.

18.– *Gener 2000*

Sigui ABC un triangle, K la seva circumferència circumscrita, i b_A, b_B, b_C les rectes prolongació de les bisectrius internes dels angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ i $\widehat{C}$. Donades rectes r_A, r_B i r_C per A, B i C, siguin r'_A, r'_B i r'_C les seves simètriques respecte de b_A, b_B i b_C. Proveu que si r_A, r_B i r_C són paral·leles, aleshores r'_A, r'_B i r'_C són concurrents en un punt de K. [Indicació: es pot utilitzar el fet que un quadrilàter és inscrit en una circumferència si, i només si, angles oposats sumen 180°]

19.– *Juliol 2000*

Calculeu l'altura del trapezi isòsceles de la figura en funció de $a = AB$ i $b = CD$.



20.– *Novembre 2000*

Suposant que les longituds dels costats d'un triangle són 6, 8 i 10 unitats, proveu que existeix una única recta que biseca la seva àrea i el seu perímetre.

21.– *Novembre 2001*

Determineu els triangles tals que l'altura i la mitjana concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en 3 parts iguals.

22.– *Novembre 2002*

Sigui P un pentàgon regular. Ronant sobre P, proveu que:

1. $\cos 36° = \frac{1}{2}\Phi$, on Φ és el nombre d'or, és a dir, el nombre positiu Φ tal que $\Phi^2 = \Phi+1$.

2. El quocient entre diagonal i costat de P val Φ.

3. Les diagonals de P determinen un altre pentàgon. Trobeu, en funció de Φ, el quocient entre les àrees del gran i del petit.

23.– *Novembre 2004*

Donada una circumferència, considerem dues cordes perpendiculars, AC i BD, que es tallen en un punt I. Per a cadascun dels 4 triangles en què el quadrilàter $ABCD$ queda dividit per les dues cordes, proveu que l'altura de cada triangle relativa al vèrtex I coincideix amb la mitjana relativa al vèrtex I del triangle oposat.

24.– *Novembre 2005*

Siguin ABC un triangle i P, Q i R punts situats sobre les rectes BC, CA i AB, respectivament. Per a cada dos punts U i V, denotarem per $|UV|$ la longitud del segment que determinen.

1. Demostreu que la perpendicular per P a BC, la perpendicular per Q a CA, i la perpendicular per R a AB són concurrents si, i només si,

$$|AR|^2 + |BP|^2 + |CQ|^2 = |AQ|^2 + |CP|^2 + |BR|^2.$$

2. Demostreu que la perpendicular per A a QR, la perpendicular per B a PR, i la perpendicular per C a PQ són concurrents si, i només si, la perpendicular per P a BC, la perpendicular per Q a CA, i la perpendicular per R a AB són concurrents.

25.– *Novembre 2006*

Diem que un tetràedre $ABCD$ és *ortocèntric* quan les seves quatre altures concurreixen en un punt (aquest punt rep el nom d'*ortocentre*, i es denota per H).

(a) Demostreu que $ABCD$ és ortocèntric si, i només si, cada parell d'arestes oposades són perpendiculars entre sí.

(b) Expresseu la condició que $ABCD$ sigui ortocèntric en termes dels vectors $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}, w = \overrightarrow{AD}$.

(c) Demostreu que si ABCD és ortocèntric aleshores els segments que uneixen els punts mitjans d'arestes oposades tenen tots la mateixa longitud.

Espais afins

26.– *Independència lineal de punts.*

Es diu que $a_1, ..., a_k$ punts d'un espai af¡ $\mathbb{A}$ són linealment independents quan les igualtats

$$\lambda_1 \overrightarrow{pa_1} + ... + \lambda_k \overrightarrow{pa_k} = \vec{0} \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

impliquen $\lambda_i = 0 \quad \forall i$. Proveu :

1. Aquesta definició no depèn de l'origen p dels vectors posició.
2. Es té : $a_1, ..., a_k$ són linealment independents si i només si els vectors $\overrightarrow{a_i a_1}, ..., \overrightarrow{a_i a_{i-1}}, \overrightarrow{a_i a_{i+1}}, ..., \overrightarrow{a_i a_k}$ són linealment independents, per a i qualsevol.
3. Proveu que si $a_1, ..., a_k$ són linealment independents, existeix una £nica varietat lineal de dimensió $k-1$ que els conté.

27.– Donats n punts $x_1, ..., x_n$ en un espai af¡ $\mathbb{A}$, proveu que el punt x definit per $x = p + \sum_1^n t_i \overrightarrow{px_i}$, on $\sum_1^n t_i = 1$, no depèn de p, en el sentit que sempre que $\sum_1^n t_i = 1$ es té

$$p + \sum_1^n t_i \overrightarrow{px_i} = q + \sum_1^n t_i \overrightarrow{qx_i} \qquad \forall p, q \in A.$$

Se sol escriure:

$$x = \sum_1^n t_i x_i$$

28.– Donats els punts A, B, C d'un espai afí, dibuixeu els punts

1. $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$
2. $\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C$.

29.– *Baricentre de n punts.*

Es defineix en un espai afí el baricentre de $a_1, ..., a_r \in \mathbb{A}$ com el punt g tal que $\sum_1^r \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}$.

1. Proveu que aquesta definició equival a $\overrightarrow{pg} = \sum_1^r \frac{1}{r} \overrightarrow{pa_i} \; \forall p \in \mathbb{A}$. O sigui, es pot escriure $g = \frac{1}{r}(a_1 + \ldots + a_r)$.

2. Si g_i és el baricentre dels punts $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_r$, proveu $g \in \bigcap_1^r \overline{a_i g_i}$ i val la igualtat en el cas $a_1, ..., a_r$ linealment independents.
3. $(a_i, g_i, g) = \frac{r-1}{r} \quad \forall i$
4. Doneu una interpretació a $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

30.– Determineu segons els valors de a la varietat intersecció de de les següents varietats de $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ 2x-y+3z &=& -5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& -4 \\ ax+y+2z &=& 2 \end{array}\right\}$$

31.– Trobeu la recta paral·lela a t que talla r i s, éssent t, r, s les rectes :

$r: \quad x-y+1=0, 2x+z=0$

$s: \quad x+3y-z=1, y+z=2$

$t: \quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$

32.– Donats els punts $A(0,1,1), B(1,2,-3), C(1,1,1), D(1,3,0), E(3,1,0)$, trobeu la recta per E que talla les determinades per AB i CD.

33.– Proveu que un quadrilàter éés paral·lelogram si i només si les seves diagonals es bisequen mutuament.

34.– Determineu el paral·lelepípede que té tres arestes sobre les rectes:

- $2x+y+z=0, \quad 3y+z=2$
- $x+2y=1, \quad 2x-y-2z=1$
- $x=y=z$

35.– Donades tres rectes que es creuen dos a dos i paral·leles a un pla, proveu que les rectes que tallen les tres són totes paral·leles a un mateix pla.

36.– Proveu que si pels vèrtexs d'un tetràedre $ABCD$ es tracen plans paral·lels a les respectives cares oposades, s'obté un nou tetràedre $A'B'C'D'$ tal que les rectes AA', BB', CC', DD' es tallen en un punt G, que és el baricentre comú dels dos tetràedres.

37.– *Teorema de Menelao.*

Siguin A, B, C, tres punts linealment independents d' un espai afí $\mathcal{A}$, de dimensió 2 i siguin A', B', C' punts de les rectes determinades per BC, AC i AB respectivament, diferents de A, B, C.

Proveu que es compleix :

$$A', B', C' \quad \text{alineats si i només si} \quad (A', B, C) \cdot (B', C, A) \cdot (C', A, B) = 1.$$

38.– *Teorema de Ceva.*

Siguin p_0, p_1, p_2, tres punts linealment independents d' un espai afí $\mathbb{A}$ de dimensió 2. Donats q_0, q_1, q_2 punts dels costats p_1p_2, p_0p_2, p_0p_1 respectivament, proveu:

$$p_0q_0, p_1q_1, p_2q_2 \text{ són concurrents} \quad \text{si i només si} \quad (q_0, p_1, p_2) \cdot (q_1, p_2, p_0) \cdot (q_2, p_0, p_1) = -1.$$

(Indicació: aplicar dues vegades el teorema de Menelao).

39.– *Novembre 95*

En un paral·lelogram $ABCD$ una paral·lela als costats AD i BC talla els costats AB i DC en M i N, respectivament. Una paral·lela als costats AB i DC talla els costats AD i BC en P i Q, respectivament. Si H és el punt d'intersecció de les rectes PN i MQ, proveu que A, C i H estan alineats.

40.– *Novembre 96*

A l'espai afí real de dimensió 3 es consideren dues referències afins:

$$\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\} \quad \text{i} \quad \overline{\mathcal{R}} = \{\overline{O}; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}.$$

Siguin (p,q,r) les coordenades de $\overline{O}$ a $\mathcal{R}$ i A la matriu de les components (en columna) dels vectors $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ en la base e_1, e_2, e_3.

1. Proveu que un pla té la mateixa equació $ax + by + cz + d = 0$ en les dues referències si i només si (a, b, c) és vector propi de A^t i es té $ap + bq + cr + (1 - \lambda)d = 0$, on λ és el valor propi corresponent.

2. Deduïu que dos plans π i π' mantenen les mateixes equacions respectives en un canvi d'origen de O a $\overline{O}$ si i només si el vector $\overline{O} - O$ és director de la recta $\pi \cap \pi'$.

41.– *Gener 2002*

Siguin A i B dos punts diferents del pla i m un real diferent de 1 i -1.

1. Proveu que existeixen dos punts únics C i D que compleixen, respectivament:

$$\overrightarrow{CA} = m\overrightarrow{CB} \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{DA} = -m\overrightarrow{DB}.$$

   Es diu que els punts A, B, C i D formen una divisió harmònica.

2. Expresseu el vector $\overrightarrow{CD}$ mitjançant m i $\overrightarrow{AB}$.

   Deduïu m en cada un dels casos: a) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ b) $CD = AB$ (longituds).

3. Sigui I el punt mitjà del segment AB. Proveu que $\overrightarrow{IC} = \left(\dfrac{m+1}{m-1}\right)^2 \overrightarrow{ID}$.

   Dibuixeu tots els punts precedents en el cas $m = 3$.

4. Siguin A, B, C, D quatre punts que formen una divisió harmònica i O un punt qualsevol no alineat amb A, B. Es diu que les rectes OA, OB, OC, OD formen un feix harmònic. Sigui Δ una recta paral·lela a AB que talla les quatre rectes del feix respectivament en A', B', C', D'.

   Proveu que els punts A', B', C', D' formen també una divisió harmònica.

42.– *Novembre 2004*

1. En el pla afí, siguin a_0, a_1, a_2 els vèrtexs d'un triangle i p un punt del pla. Sigui a_i' la projecció de p des d'a_i sobre el costat oposat; se suposa que aquestes projeccions estan determinades, és a dir, que cap recta per p i un vèrtex del triangle és paral·lela a la recta que determinen els altres dos vèrtexs.

   Prenem la referència $\{a_0; \overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}\}$; siguin (p_1, p_2) les coordenades de p en aquesta referència.

   - Calculeu les cordenades de a_0', a_1' i a_2'.
   - Calculeu les raons simples $(a_0, a_0', p), (a_1, a_1', p), (a_2, a_2', p)$.
   - Comproveu que:

   $$(a_0, a_0', p) + (a_1, a_1', p) + (a_2, a_2', p) = 2.$$

2. Generalització a un espai afí de dimensió n.

   Donats $n+1$ punts linealment independents $a_0, a_1, \ldots, a_n$, i p un punt de l'espai, sigui a_i' la projecció de p des d'a_i sobre l'hiperplà oposat. Suposarem que les projeccions a_i' estan totes determinades.

   Demostreu que es té

   $$\sum_{i=0}^{n} (a_i, a_i', p) = n.$$

Afinitats

Per defecte, les afinitats són bijectives

43.– Donats $x_1, ..., x_n$ punts d'un espai afí $\mathbb{A}$, i una afinitat f del grup afí d'$\mathbb{A}$, proveu que si $\sum_1^n t_i = 1$, aleshores es cumpleix

$$f(\sum_1^n t_i x_i) = \sum_1^n t_i f(x_i)$$

Deduïu que f conserva els baricentres.

44.– Apliqueu el problema anterior per provar que si H és un subgrup finit del grup afí d'$\mathbb{A}$, existeix un punt p que és fix per totes les afinitats de H.
Com a cas particular, deduïu que que si $f^n = I$, aleshores f té punts fixos.

45.– Proveu que tota afinitat d'un espai afí de dimensió n queda determinada per la imatge de $n+1$ punts linealment independents.

46.– Donada l'afinitat al pla afi real $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, trobeu:

1. Els punts fixos
2. La transformada de la recta $2x + 3y = 1$.
3. L'antiimatge de l'anterior recta
4. Existeixen rectes dobles ?

47.– Siguin $(x'\, y'\, 1)^t = \overline{A}\,(x\, y\, 1)^t$ les equacions d'una afinitat en una certa referència d'un espai afí de dimensió 2, i $ax + by + c = 0$ l'equació d'una recta r.

1. Proveu que l'equació de la recta $f(r)$ és $(a\, b\, c)\,(\overline{A}^{\text{adj}})^t\,(x\, y\, 1)^t = 0$.
2. Proveu que l'equació de la recta $f^{-1}(r)$ és $(a\, b\, c)\,\overline{A}\,(x\, y\, 1)^t = 0$.

48.– Donat un triangle qualsevol, proveu que existeix una única afinitat que aplica cada vèrtex al punt mitjà del costat oposat, i estudieu-la.

49.– Donats 4 punts a, b, c, d en el pla tals que tres formen triangle, proveu que la condició necessària i suficient perquè existeixi una afinitat f del pla tal que

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = d, f(d) = a$$

és que a, b, c, d siguin els vèrtexs consecutius d' un paral·lelogram.

50.– Donat un tetràedre $abcd$, siguin $a'b'c'd'$ i $a''b''c''d''$ els tetràedres determinats pels baricentres de les seves cares i els plans paral·lels a aquestes traçades per cada vèrtex. Estudieu l'afinitat que transforma $a'b'c'd'$ en $a''b''c''d''$.
(Indicació: considereu $a'b'c'd' \longrightarrow abcd$ i $abcd \longrightarrow a''b''c''d''$)

51.– *Novembre 93*

1. Justifiqueu que, en un espai afí real de dimensió 3, existeix una referència afí en la qual dues rectes donades r , s que es creuen tenen equacions

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

2. Trobeu la matriu genèrica, en la referència anterior, de les afinitats que deixen fixos els punts de la recta r i, al mateix temps, deixen fixa la recta s.

3. Proveu que les imatges d'un punt donat (x_0, y_0, z_0) per totes les afinitats de la família anterior pertanyen totes a una recta.

52.– *Abril 1995*
(a) En una referència afí donada de l'espai afí de dimensió 3, trobeu l'expressió genèrica de les afinitats que deixen fixos el punt $(0, 0, 1)$ i les rectes del pla xy que passen per l'origen de coordenades.
(b) Trobeu els plans fixos per una d'aquestes afinitats.
(c) Descriviu el lloc geomètric de les imatges d'un punt P donat per totes les afinitats de la família.

53.– *Juny 1997*
Sigui $f \neq Id$ una afinitat del pla afí real amb una recta r de punts fixos.

1. Proveu que existeix una referència $\mathcal{R}$ en la qual la matriu de f és

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i que a és un invariant de f (és a dir, que a només depèn de f i no de $\mathcal{R}$).

2. Suposem que $a = 1$. Proveu que existeix una referència $\mathcal{R}'$ en la qual la matriu de f és
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudieu les rectes fixes de f.

3. Suposem que $a \neq 1$. Proveu que existeix una referència $\mathcal{R}'$ en la qual la matriu de f és
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudieu les rectes fixes per f.

4. Seguint amb el cas $a \neq 1$, doneu una interpretació de a en termes de la raó simple $\sigma(P, P', P'')$, on P és qualsevol punt no fix per f, $P' = f(P)$ i $P'' = r \cap PP'$.

54.– *Novembre 2000*

Trobeu la matriu genèrica d'una afinitat que deixa fixos el punt $P \equiv (2, 1, 1)$, la recta $r \equiv \{x + z = 2, y = 0\}$ i el pla $\pi \equiv \{z = 0\}$.
(Indicació: resoleu primer el problema en la referència $[A, u, v, w]$, on $A = r \cap \pi$, $u = P - A$, v un vector director de r i $w \in W(\pi)$ escollit apropiadament, i després feu el canvi a la referència original.)

55.– *Novembre 2002*

Siguin $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ espais afins de dimensions 2, 3 i $\mathcal{R} = \{a; e_1, e_2\}$ i $\mathcal{S} = \{b; v_1, v_2, v_3\}$ referències en $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, respectivament.
Sigui $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ una aplicació definida pel sistema
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2x + 3y + 1 \\ y' & = & 4x - y - 2 \\ z' & = & x + y \end{array} \right.$$
on (x, y) són les coordenades d'un punt qualsevol $p \in \mathbb{A}_2$ en $\mathcal{R}$ i (x', y', z') són les coordenades de $f(p)$ en $\mathcal{S}$.

a. Demostreu que f compleix la condició d'afinitat. Raoneu si és bijectiva.

b. Trobeu les equacions cartesianes en $\mathcal{S}$ de la varietat lineal $f(\mathbb{A}_2)$.

c. Considerem la recta de $\mathbb{A}_3$: $L = (2, 0, 0)_{\mathcal{S}} + < (0, -1, 1)_{\{v_1, v_2, v_3\}} >$. Demostreu que $f^{-1}(L)$ és una varietat lineal de $\mathbb{A}_2$ i expresseu-la en la forma punt+direcció.

   Doneu una explicació geomètrica del resultat.

d. Doneu la matriu de f en les referències $\overline{\mathcal{R}} = \{a + e_1 - e_2;\ e_2, e_1 - e_2\}$ en $\mathbb{A}_2$, $\overline{\mathcal{S}} = \{b - \frac{1}{3}v_3;\ v_2 + v_3,\ v_1 + v_3,\ v_1 + v_2\}$ en $\mathbb{A}_3$.

56.– *Novembre 2005*

Sigui $ABCD$ un tetràedre de l'espai afí de dimensió 3, I, J, K els punts mitjans respectius dels segments AB, CD, BJ. Es consideren els punts L, N, M definits per: $\overrightarrow{AL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Demostreu que els punts I, J, L estan alineats. Sigui r la recta que els conté.
2. Es considera l'afinitat f de l'espai afí de dimensió 3 tal que $(A, B, C, D) \to (C, D, A, B)$.
   (a) Trobeu l'antiimatge de la recta r.
   (b) Sigui T el punt mitjà del segment BD. Trobeu la imatge del pla $r \vee T$.
   (c) Demostreu que $f^{2005} = f$.

Espais euclidians

Nota: les referències no explicitades es consideraran rectangulars orientades positivament.

57.– Proveu que en tot paral·lelogram, la suma dels quadrats dels 4 costats és igual a la suma dels quadrats de les diagonals.

58.– Com a generalització del problema anterior, proveu que en tot quadrilàter, la suma dels quadrats dels 4 costats és igual a la suma dels quadrats de les 2 diagonals més 4 vegades el quadrat del segment que uneix els punts mitjans de les diagonals.

59.– Trobeu la distància del punt $(-1,2,1)$ a la recta $x = 1+t, y = 1-2t, z = 1+t$.

60.– Trobeu l'equació de la perpendicular comuna i la distància entre les dues rectes :

$$x = y - 2 = \frac{z}{3} \qquad\qquad \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{0}.$$

61.– Trobeu els vèrtexs d'un octàedre regular si es coneixen dos d'ells contigus, $A(1,0,1)$, $B(2,1,3)$, i el vector director v de la diagonal que no conté ni A ni B, $\quad v = (-1,1,0)$. Quantes solucions hi ha?

62.– D'un triangle del pla es coneixen dos vèrtexs $A(0,0), B(2\sqrt{3},0)$ i el seu incentre $I(\sqrt{3},1)$. Calculeu el tercer vèrtex.

63.– D'un triangle del pla es coneixen dos vèrtexs $A(1,1), B(6,0)$ i el seu ortocentre $O(3,2)$. Calculeu el tercer vèrtex.

64.– Trobeu les rectes del pla $x + y + z = 1$ que tallen la bisectriu de l'angle XOZ d'una referència rectangular i formen amb l'eix OY un angle de 60^o.

65.– Es dóna un tetràedre $ABCD$, amb:

- $\overline{AB} = \overline{AC} = 1, \quad \overline{AD} = 2$
- $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^o, \quad \widehat{CAD} = 30^o$

Calculeu l'altura sobre la cara BCD, l'angle $\widehat{ABC}$, l'angle de les cares en l'aresta AB, i la distància entre les arestes AB i CD.

66.– Proveu :

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$.

2. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$ (identitat de Jacobi)
3. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
4. $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v}^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \sin^2 \widehat{\vec{u}\vec{v}}$

67.– Proveu que l'àrea del triangle ABC ve donada per

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2},$$

éssent $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

68.– Proveu vectorialment el teorema del cosinus en un triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

69.– Proveu que la longitud l de la bisectriu de l'angle C dins el triangle ABC val

$$l = \frac{ab}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}}.$$

70.– Proveu que en un tetràedre qualsevol, la suma dels 4 vectors perpendiculars a les cares, de mòdul l'àrea de cada cara, i sentit de dins a fora, val 0.

71.– Demostreu que si dos parells d'arestes oposades d'un tetràedre són perpendiculars, també ho són les del tercer parell.
Comproveu que un tetràedre regular compleix la propietat anterior.

72.– Proveu que els 6 plans mediatrius de les arestes d'un tetràedre són concurrents en un punt.

73.– A l'espai vectorial E_3 ordinari es considera l'aplicació $h : E_3 \to \mathcal{L}(E_3, E_3)$, donada per:

$$h(\vec{v}) = h_{\vec{v}}, \quad h_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{v} \wedge \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in E_3$$

Proveu :

1. h és un monomorfisme d'espais vectorials.
2. $h_{\vec{u} \wedge \vec{v}} = h_{\vec{u}} \circ h_{\vec{v}} - h_{\vec{v}} \circ h_{\vec{u}}$.
3. ${h_{\vec{v}}}^3 + \| \vec{v} \|^2 h_{\vec{v}} = 0$.

74.– *Abril 1993*

A E_3 es dónen 3 vectors unitaris i ortogonals 2 a 2 : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
En una referència de $\mathbb{R}^3$ $\{p; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ amb

$$\vec{e}_1 = \vec{j}, \quad \vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{k}, \quad \vec{e}_3 = \vec{j} - \vec{k},$$

es donen les rectes $y = z = 0$ i $x = 0, y = z + 1$.
Trobeu la perpendicular comuna i la distància entre elles.

75.– *Juny 1993*

En un octàedre regular d'aresta l s'inscriu un cub amb vèrtexs els baricentres de les cares d'aquell, i dins d'aquest cub s'inscriu de manera similar un altre octàedre regular.

1. Proveu que l'aresta d'aquest nou octàedre val $l/3$.
2. Doneu (sense fer càlculs) la proporció de volum que ocupa l'octàedre petit dins del gran.

76.– *Novembre 1993*

1. En un espai afí euclidià de dimensió 3 es donen els plans
$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad Ax + By + Cz + D' = 0$$
en una referència de mètrica G. Trobeu, en funció de A, B, C, D, D', i G la distància entre els dos plans.
2. Donat un tetràedre regular $ABCD$ d'aresta 1, trobeu en la referència $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ els plans paral.lels a la cara BCD que estan a distància $\sqrt{2/3}$ d'aquesta.

77.– *Abril 1994*

Sigui ABC un triangle d'un pla euclidià i P un punt del segment AB. Posem $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$, $w = \overrightarrow{PC}$, $r = | u |$, $s = | v |$, $t = | w |$, $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$.
Demostreu:

1. $su + rv = 0$
2. $a^2 r + b^2 s = c(t^2 + rs)$

(Aquest resultat s'anomena *teorema de Stewart*).

78.– *Abril 1994*

En un espai euclidià de dimensió 3 tenim una referència $[O, e_1, e_2, e_3]$ tal que e_2 i e_3 són ortogonals, $e_1 \cdot e_1 = 3$, $e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = e_1 \cdot e_2 = 1$ i $e_1 \cdot e_3 = -1$. Sigui H el pla $3x + y - z + 1 = 0$, L la recta

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x + z &= 1 \end{cases}$$

i M el punt $(0, 1, 4)$. Trobeu:

1. La recta continguda al pla H que talla i és perpendicular a L.
2. Una recta per M, perpendicular a L i que formi un angle de $\pi/6$ amb el pla H.

Nota: Especifiqueu clarament, abans d'iniciar els càlculs, els procediments que seguireu per resoldre 1 i 2.

79.– *Novembre 1994*

En un tetràedre regular ABCD d'aresta a es traça per l'altura AO un pla AMN que talla BC a M i BD a N. Si $x = \overline{BN}$ i $y = \overline{BM}$, proveu que

$$a(x + y) = 3xy.$$

80.– *Abril 1995*

(a) Proveu que les coordenades de l'incentre del triangle ABC en la referència $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ són

$$\left(\frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right),$$

on $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$.

(b) Deduïu-ne que si l'incentre coincideix amb el baricentre, llavors el triangle és equilàter.

(c) Calculeu les coordenades de l'incentre en la referència $[B; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$.

81.– *Febrer 1996*

Sigui $ABCDE$ una piràmide quadrangular regular, de base el quadrat $ABCD$. Sobre la cara BCE i cap a l'exterior es construeix un tetràedre regular $BCEF$.

1. Trobeu les coordenades de tots els vèrtexs del políedre A, B, C, D, E, F obtingut, en la referència rectangular $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{w}]$ (E situat a l'octant positiu).
2. Proveu que el políedre $ABCDEF$ té només 5 cares.

82.– *Abril 1996*

Donat un triangle ABC del pla afí, siguin A', B' i C' els punts dels costats BC, AC i AB, respectivament, tals que $(A, B, C') = (B, C, A') = (C, A, B') = \frac{1}{3}$.

1. Trobeu les coordenades de A, B i C en la referència $[A', B', C']$.
2. Si A, B i C són tres vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular de costat 1, calculeu la matriu de la mètrica en la referència $[A', B', C']$.

83.– *Juny 1997*

Es considera un tetràedre les cares del qual són triangles isòsceles de costats 4, 4 i 2.

1. Proveu que hi ha exactament dues arestes de longitud 2 i que aquestes són oposades.
2. Proveu que les arestes de longitud 2 són perpendiculars.
3. Calculeu el volum del tetràedre.

84.– *Gener 1998*

En una referència rectangular es dóna la recta r d'equacions

$$x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{4}$$

i la família F de rectes d'equacions

$$x - 1 = \frac{y-2}{a} = \frac{z-3}{a+2} \quad (a \in \mathbb{R})$$

1. Comproveu que cap recta de F talla r.
2. Calculeu les distàncies de les rectes de F a r.
3. Trobeu, si és que existeixen, les rectes de F paral·leles a r.
4. Quin objecte geomètric és la unió de tots els punts de les rectes de F?

85.– *Novembre 1998*

Demostreu que en tot triedre no trirectangle els plans per les arestes perpendiculars a la cara oposada són concurrents en una recta.

86.– *Gener 2001*

En una referència rectangular de $\mathbb{R}^4$ es consideren el pla P d'equacions

$$x - y + 2z + t = 1, \quad 2x - y - z + t = 0$$

i el punt $A \equiv (1, 0, 2, 1)$. Trobeu:

1. Equació cartesiana de l'hiperplà H per A i P.

2. Equacions cartesianes del pla P' per A paral·lel a P.
3. Equacions cartesianes del pla P'' per A perpendicular a P.
4. Distància d de A a P.

87.– *Novembre 2001*

Donat un tetràedre de volum V, calculeu el volum del tetràedre determinat pels baricentres de les cares d'aquell.

88.– *Gener 2003*

En el pla euclidià es donen tres punts A, B, C que formen triangle. Escrivim els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ com u, v, respectivament. Diem G a la matriu de la mètrica en la base u, v.

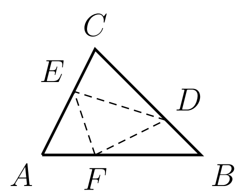
1. Proveu que l'àrea del triangle ABC és: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\det G}$.
2. Siguin $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ els vectors u,v expressats en una base $\{e_1, e_2\}$. Sigui G_e la matriu de la mètrica en aquesta base i escrivim $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.

   Proveu que l'àrea del triangle ABC és:
   $$\text{Àrea } = \frac{1}{2}|\det M| \cdot \sqrt{\det G_e}.$$
3. Proveu que si les coordenades dels punts A, B, C en una referència de mètrica G_e són, respectivament, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), aleshores l'àrea del triangle ABC és:
   $$\text{Àrea } = \frac{1}{2}\text{ABS}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \sqrt{\det G_e}.$$
4. Es donen els punts $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(2, -5)$ en una referència on els vectors base tenen longituds 2, 3 i formen un angle de 120°.

   Calculeu l'àrea del triangle ABC.

89.– *Novembre 2003*

Siguin ABC un triangle i D, E, F punts dels segments BC, CA i AB amb raons simples $(B, C, D) = \alpha$, $(C, A, E) = \beta$, $(A, B, F) = \gamma$, respectivament.



1. Demostreu que

$$\frac{\text{àrea}(DEF)}{\text{àrea}(ABC)} = 1 - \alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

2. Deduïu-ne que si M_A, M_B, M_C són els punts mitjans respectius dels costats BC, CA i AB, i sobre aquests costats tenim parelles de punts D', D''; E', E''; F', F'', respectivament, tals que $D'M_A = M_A D''$, $E'M_B = M_B E''$, $F'M_C = M_C F''$, aleshores

$$\text{àrea}(D'E'F') = \text{àrea}(D''E''F'').$$

90.– *Gener 2004*

Siguin ABC un triangle de costats $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, amb incentre I, i P, Q, R els punts on les bisectrius en A, B i C tallen els respectius costats oposats

(a) (1 punt). Utilitzant el Teorema de la bisectriu trobeu el valor de λ, en termes de a, b i c, de forma que $\overrightarrow{PB} = \lambda \cdot \overrightarrow{PC}$.

(b) (9 punts). Demostreu que $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

91.– *Juliol 2004*

Considerem una referència $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en què $||e_1|| = ||e_2|| = 1, ||e_3|| = 2, \widehat{e_1, e_2} = \pi/2, \widehat{e_2, e_3} = \pi/3, \widehat{e_3, e_1} = \pi/3$.

1. Trobeu el volum del tetràedre format per l'origen, el punt $P = (2, 2, 2)$ i els punts P_x, P_y, que s'obtenen projectant P ortogonalment sobre l'eix Ox i l'eix Oy, respectivament.

2. Trobeu dos punts sobre l'eix Ox que juntament amb P formin un triangle equilàter.

92.– *Juliol 2006*

Considerem un quadrat $ABCD$ de costat 1. Demostreu que existeix un únic rombe R que tingui un vèrtex a A, l'oposat sobre la recta BD i els altres dos sobre les rectes BC i CD. Determineu també l'àrea de R i la longitud dels seus costats.

93.– *Novembre 2007*

En una referència rectangular de $\mathbb{R}^3$ es consideren els plans Π i Π' d'equacions respectives $x + z = 1$ i $x + y + z = 0$, i la recta r d'equacions $x = y = z$. Denotarem per $\widehat{\Pi}$ el pla de coordenades $z = 0$.

Per a cada punt $p \in \Pi$ considerem la recta per p ortogonal a Π, la qual tallarà el pla $\widehat{\Pi}$ en un punt que anomenarem $\widehat{p}$; després prenem la recta r_p que passa per $\widehat{p}$ i és paral·lela a r i definim el punt $p' = r_p \cap \Pi'$.

(i) Expresseu les coordenades (α', β') de p' en la referència $\mathcal{R}' = \{(2,-1,-1); v_1 = (1,-1,0), v_2 = (0,1,-1)\}$ de Π', en termes de les coordenades (α, β) de p en la referència $\mathcal{R} = \{(1,0,0); u_1 = (1,0,-1), u_2 = (0,1,0)\}$ de Π, i demostreu que l'aplicació $f : \Pi \longrightarrow \Pi'$ definida per $f(p) = p'$ és una transformació afí [7p.].

(ii) Trobeu els punts fixos de f [3p.].

Desplaçaments. Semblances

Nota: les referències no explicitades es consideraran rectangulars orientades positivament.

94.– Estudieu el desplaçament donat en una referència rectangular :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3} \\ y' &=& -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{2}{3} \\ z' &=& \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z \end{array}\right.$$

95.– Estudieu el desplaçament donat en una referència rectangular :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \\ -8 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

96.– Trobeu les equacions del gir d'angle $\pi/3$ respecte la recta $x = y,\ z = 1$, orientada pel vector $(1, 1, 0)$.

97.– Trobeu les equacions de la simetria respecte el pla $4x - 3z = 4$.
Feu-ho de dues maneres:

1r. Directament.

2n. Construint un sistema de referència adequat.

98.– Descriviu el moviment producte de dos simetries axials a $\mathbb{R}^3$

1. Amb eixos paral·lels.
2. Amb eixos que es tallen.

99.– Proveu que en el pla, dos punts p, q i les seves imatges p', q', amb $d(p, q) = d(p', q')$, i posició genèrica, determinen un moviment directe i un altre d'invers.
Descriviu gràficament els elements d'aquests moviments.

100.– Donat un tetràedre regular $ABCD$, proveu que l'afinitat que transforma A, B, C, D en B, C, D, A respectivament, és un desplaçament i classifiqueu-lo.

101.– Proveu que el producte de dos simetries axials d'eixos dos arestes oposades d'un tetràedre regular és una translació de vector amb direcció la perpendicular comuna, i mòdul el doble de la distància entre les dues rectes, seguida d'una simetria d'eix la perpendicular comuna.

102.– Estudieu els desplaçaments del pla que deixen fix:

1. Un quadrat.
2. Un rombe.
3. Un punt i una recta que no passa per ell.

103.– Estudieu els desplaçaments de $\mathbb{R}^3$ que deixen fix:

1. Un punt i una recta.
2. La base d'un cub.
3. Dos punts diferents.

Problemes de moviments en el pla per fer sintèticament:

104.– Proveu :

1. El producte de dues simetries axials del pla d'eixos que es tallen segons un angle α és un gir d'angle 2α i centre el punt de tall.
2. El producte de dues simetries axials del pla d'eixos paral·lels és una translació de vector perpendicular als eixos, sentit el donat per les rectes i mòdul el doble de la distància entre les rectes.
3. Deduïu que les simetries axials generen el grup de moviments del pla.

105.– Determineu gràficament, utilitzant la descomposició en simetries axials, el producte de:

1. Dos girs d'angles α i β (distingiu els casos $\alpha \neq -\beta, \quad \alpha = -\beta$).
2. Gir per translació.
3. Simetria axial per translació.
4. Simetria axial per gir.
5. Dos simetries centrals.

106.– Trobeu el producte dels tres girs d'angle 60^o que tenen per centre els tres vèrtexs d'un triangle equilàter.

107.– Resoleu analíticament el problema anterior, prenent la referència $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$.

108.– Trobeu el producte dels 4 girs d'angle $\pi/2$ i centres els vèrtexs consecutius d'un quadrat (distingir els dos sentits en agafar els 4 vèrtexs).

109.– Trobeu el producte de les 4 simetries d'eixos els costats d'un quadrat.

110.– Caracteritzeu el producte $S_{AB} \circ G(O, 60^o)$, on A i B són vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular de centre O.

111.– Emprant el producte de simetries centrals, construïu gràficament un pentàgon donats els punts mitjans dels costats.

Problemes d'aplicació dels desplaçaments per fer sintèticament:

112.– Trobeu dos punts P , P', un a cadascuna de dos circumferències donades, tals que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$, on $\vec{v}$ és un vector donat.

113.– Construïu un trapezi coneixent:

1. Bases i diagonals.
2. Els 4 costats.

114.– Donada una circumferència de radi r, siguin les cordes $\overline{AB} = r$ fixa i $\overline{AC}$ variable. Trobeu el lloc geomètric dels punts D tals que $ABCD$ és un paral·lelogram.

115.– Donada una recta i dos circumferències en diferent semiplà respecte d'ella, traceu una perpendicular a la recta de manera que determini cordes iguales en les dos circumferències.

116.– Donat un quadrat i un punt en un dels seus costats, construïu un triangle equilàter inscrit en el quadrat amb un vèrtex en aquest punt.

117.– Per un punt comú a dos circumferències traçeu una recta que determini dues cordes iguals (que no sigui la corda comuna).

Semblances

118.– Trobeu les semblances de la família d'afinitats donades en una referència rectangular

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax + by + a \\ y' & = & -bx - ay - a \end{array} \right.$$

119.– En una referència rectangular es dóna l'afinitat $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax + y + 1 \\ y' & = & x + by - 1 \end{array} \right.$

1. Trobeu a i b perquè sigui un deplaçament, i classifiqueu-lo.
2. Trobeu a i b perquè sigui una semblança, i classifiqueu-la.
3. Trobeu el lloc geomètric dels punts fixos de 2), en variar a i b.

120.– Identificant els punts (x, y) d'un sistema rectangular del pla $\mathbb{R}^2$ amb els complexos $z = x + iy$, proveu que l'equació d'una semblança directa de centre z_0, angle α i raó r ve donada per :

$$z' - z_0 = r_\alpha \cdot (z - z_0)$$

on $z \rightarrow z'$ i $r_\alpha = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$.
Apliqueu-ho a trobar un punt C tal que $\widehat{BAC} = 60^o$, $\overline{AC} = 3\overline{AB}$, on $A(2, 0)$, $B(1, -1)$.

121.– Construir tots els quadrats de vèrtexs $(0, 1), (2, 5)$.

122.– Construir el triangle equilàter tal que $(1, 1)$ n'és un vèrtex i $(0, 3)$ el baricentre.

123.– Construir tots els hexàgons regulars tals que tenen els punts $(1, 0), (0, 1)$ com a vèrtexs consecutius.

124.– *Abril 1993*

Trobeu tots els desplaçaments de $\mathbb{R}^3$ que deixen invariant el sistema format per dos plans perpendiculars.

125.– *Abril 1993*

1. Demostreu el resultat següent:

   Un triangle és equilàter si i només si el producte dels tres girs de centres els seus tres vèrtexs presos en sentit horari i angles de 120° és la identitat.

2. Proveu que els baricentres dels triangles equilàters construïts externament sobre els costats d'un triangle qualsevol determinen a la seva vegada un triangle equilàter.

126.– *Setembre 1993*

Estudieu el moviment composició de les 3 simetries axials respecte de 3 arestes d'un cub que es creuen perpendicularment dos a dos.
Si l'aresta del cub val 1, quina és la distància entre els centres del cub origen i el cub imatge ?

127.– *Novembre 1993*

Estudieu i descriviu (sintèticament) el moviment producte de dues simetries axials a $\mathbb{R}^3$ d'eixos dues rectes que es creuen.

128.– *Abril 1994*

Siguin Q un quadrat i Q' un quadrilàter.

1. Doneu una condició necessària i suficient per tal que existeixi una afinitat que transformi Q en Q', i demostreu-la.
2. Doneu una condició necessària i suficient per tal que existeixi una semblança que transformi Q en Q', i demostreu-la.
3. Siguin $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ i $(0,1)$ els vèrtexs de Q i $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$ i $(2,4)$ els de Q'. Raoneu quants desplaçaments hi ha que transformen Q en Q' i d'entre ells estudieu els directes.

129.– *Setembre 1994*

Siguin r i r' dues rectes de l'espai euclidià que es tallen perpendicularment. Considereu els girs g i g' d'amplitud $\alpha \in (0, 2\pi)$ i eixos r i r', respectivament.

1. Proveu que $g' \circ g$ és un gir, i determineu-ne l'eix (diguem-ne v_α).
2. Mostreu que existeix un pla que conté tots els v_α, per a $\alpha \in (0, 2\pi)$.
3. Determineu els valors d'α per tal que l'amplitud de $g' \circ g$ sigui 2α.

130.– *Novembre 1994*

Donat un rombe $ABCD$, es consideren les afinitats que transformen B en el punt mitjà de CD, D en el punt mitjà de CB, i el punt A en un punt de la diagonal AC.

1. Proveu que cap d'aquestes afinitats és un desplaçament.
2. Trobeu les semblances de la família d'afinitats.
3. Estudieu-les.

131.– *Febrer 1995*

Sigui f una afinitat del pla afí real; escriurem $f(X) = X'$ per a cada punt X. Sigui X'' el punt alineat amb X, X' tal que $(X, X', X'') = \lambda$, on λ és un real fixat. Sigui φ la transformació $X \to X''$.

1. Proveu que φ és una afinitat, amb endomorfisme associat
$$\widetilde{\varphi} = \lambda \widetilde{f} + (1-\lambda)I.$$
2. Si f és una translació de vector v, què és φ?
3. Si f és una homotècia de centre O i raó r, proveu que φ és també una homotècia del mateix centre (cas $\lambda \neq 0$). Quina raó té?
4. Sigui f una semblança directa de raó r i angle de gir α; suposem ara $\lambda \in (0,1)$.
   Proveu que
$$\| \widetilde{\varphi}(v) \|^2 = k \cdot \| v \|^2 \qquad \forall v,$$
   on $k = (1-\lambda)^2 + r^2\lambda^2 + 2r\lambda(1-\lambda)\cos\alpha$.
   Deduïu que φ és també una semblança.
5. Apliqueu el resultat anterior per demostrar el resultat següent: donats dos quadrats $ABCD$ i $A'B'C'D'$ orientats els vèrtexs en sentit antihorari, els punts mitjans A'', B'', C'', D'' respectivament de AA', BB', CC', DD' determinen un altre quadrat.
6. Generalitzeu el resultat anterior fent servir també l'apartat 4).

132.– *Juny 1995*

Sigui φ la rotació vectorial de l'espai euclidià E_3 d'angle α i eix $< \vec{v} >$, $\vec{v} \in E_3$ unitari (suposem $< \vec{v} >$ orientat per $\vec{v}$).

1. Proveu que:
$$\varphi(\vec{x}) = \cos(\alpha)\vec{x} + \sin(\alpha)\vec{v} \wedge \vec{x}$$
   per a tot vector $\vec{x}$ ortogonal a $\vec{v}$.
2. Proveu que:
$$\varphi(\vec{x}) = \cos(\alpha)\vec{x} + \sin(\alpha)\vec{v} \wedge \vec{x} + (1-\cos(\alpha))(\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}$$
3. Apliqueu la fórmula anterior per calcular les equacions del gir d'amplitud $\pi/3$ i eix la recta
$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$$
   (la recta es considera orientada pel vector director $(1, 1, 1)$).

133.– *Setembre 1995*

En aquest problema els punts pertanyen a un pla euclidià donat. Si P és un punt, posem s_P per denotar la simetria central de centre P.

1. Siguin A i B són dos punts diferents. Proveu que $s_B \circ s_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$.
2. Donats quatre punts A, B, C, D, diferents dos a dos, proveu que són els vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram si i només si
$$s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A = I\ .$$
3. Donats sis punts A, B, C, D, E, F, diferents dos a dos, proveu que
$$s_F \circ s_E \circ s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A = I$$
si i només si existeix un punt M tal que $ABCM$ i $MDEF$ són paral·lelograms.

134.– *Novembre 1995*

1. Classifiqueu el moviment producte de dues simetries especulars respecte plans paral·lels.
2. Classifiqueu el moviment producte de dues simetries especulars respecte plans secants.
3. Proveu que tot moviment a l'espai de dimensió 3 és un producte de simetries especulars.
4. A l'espai euclidià de dimensió 3 es pren una referència rectangular orientada.

   Considereu el moviment helicoidal f d'eix la recta $x - 1 = y = z + 2$, angle $60°$ i vector translació $(3, 3, 3)$, amb l'eix de gir orientat pel vector $(1, 1, 1)$. Expresseu f com a producte de simetries especulars (cal donar les equacions dels plans de simetria i l'ordre del producte).

135.– *Febrer 1996*

Donades en el pla dues rectes paral.leles r i s, trobeu tots els moviments que transformen r en s.

136.– *Abril 1996*

Siguin a, b i c tres rectes del pla euclidià.

1. Suposant que a, b i c formen un triangle, proveu que el producte de les simetries $S_c \circ S_b \circ S_a$ respecte de les tres rectes és una simetria amb lliscament.

2. Suposant que a, b i c són diferents dues a dues, proveu que $(S_c \circ S_b \circ S_a)^2 = I$ si i només si les rectes són o bé concurrents en un punt o bé paral·leles.

137.– *Juny 1996*

Donades dues circumferències K_1 i K_2 de radis ρ_1 i ρ_2, amb $\rho_1 \neq \rho_2$, i centres C_1 i C_2:

1. Proveu que existeixen una única homotècia de raó positiva, h, i una única homotècia de raó negativa, h', que transformen K_1 en K_2.
2. Siguin c_1 i c_2 els vectors de posició de C_1 i C_2 respecte d'un punt arbitrari O. Si Z i Z' són el centres de h i h', proveu que
$$z = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}(\rho_1 c_2 - \rho_2 c_1)$$
és el vector de posició de Z.
3. Trobeu una fórmula similar per al vector de posició de Z'.
4. Proveu que Z i Z' estan alineats amb C_1 i C_2.
5. Trobeu Z en el cas que K_1 i K_2 siguin les circumferències donades per les equacions $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 3$ i $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$.
6. Si $h_{O,\lambda}$ denota l'homotècia de centre O i raó λ, estudieu el producte $h_{O,\lambda} \circ h_{O',\lambda'}$ i digueu quins són els seus elements característics segons els valors de λ i λ' i segons la posició de O i O'.
7. Donades tres circumferències K_1, K_2, K_3, amb centres no alineats C_1, C_2, C_3 i amb radis diferents dos a dos, siguin h_{ij} i h'_{ij} les homotécies de raó positiva i negativa que transformen K_i en K_j, i siguin Z_{ij}, Z'_{ij} els centres de h_{ij} i h'_{ij}, respectivament. Proveu que Z_{12}, Z_{23}, Z_{13} estan alineats. Proveu també que el mateix passa amb Z_{12}, Z'_{23}, Z'_{13}, amb Z'_{12}, Z_{23}, Z'_{13}, i amb Z'_{12}, Z'_{23}, Z_{13}.

138.– *Juliol 1996*

Sigui $ABCDE$ una piràmide quadrangular recta de base el quadrat de costat unitari $ABCD$ i les cares laterals de la qual són triangles equilàters. Sobre la cara BCE i vers l'exterior es construeix un tetràedre regular $BCEF$. Posem $u = B - A$, $v = D - A$ i sigui w el vector unitari ortogonal a u i a v i que forma un angle agut amb el vector $E - A$.

1. Trobeu les coordenades, en la referència $[A; u, v, w]$, de tots els vèrtexs del políedre $\Pi = ABCDEF$ així obtingut.
2. Proveu que F és coplanari amb els punts A, B, E i coplanari amb els punts C, D, E. Useu aquests fets per determinar quina figura és el políedre Π.

3. Proveu que hi ha dos desplaçaments tals que $A \mapsto C$, $B \mapsto D$ i $D \mapsto B$. Classifiqueu-los i digueu si deixen el políedre invariant.

139.– *Novembre 1996*

Les coordenades dels punts es referiran sempre a un sistema rectangular orientat positivament.

1. Donats dos punts del pla A i B i un angle orientat α no nul, proveu que existeix un únic centre de gir X_0 d'angle α que transforma A en B.

2. Proveu que X_0 ve donat per la fórmula

$$X_0 = (I - \rho(\alpha))^{-1} \cdot (B - \rho(\alpha)A),$$

on A, B i X_0 representen les matrius columna de coordenades dels punts A, B i X_0, respectivament, i

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3. Proveu que $(I - \rho(\alpha))^{-1} = \dfrac{1}{2} \operatorname{cosec} \dfrac{\alpha}{2} \rho(\dfrac{\pi - \alpha}{2})$.

4. Proveu que donats quatre punts del pla A, B, C i D, existeix un gir d'angle α que transforma A en B i C en D si només si es té:

$$\rho(\alpha) \cdot (A - C) = B - D,$$

on A, B, C i D representen les matrius columna de coordenades dels punts A, B, C i D, respectivament.

5. Donats els punts $A(0,1)$ i $B(2,0)$, calculeu els vèrtexs dels rombes que tenen per diagonal AB i un angle de 30°.

6. Trobeu el lloc geomètric dels centres dels girs d'angle 90° que transformen un punt de la recta $x + y + 1 = 0$ en el punt $(2,0)$.

140.– *Abril 1997*

Sigui ABC un triangle del pla afí. Denotarem per D el punt tal que $ABDC$ és un paral·lelogram.

1. Trobeu l'expressió general, en la referència $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de la família Φ d'afinitats que tenen la recta AD com a recta de punts fixos i deixen fixa la recta BC.

2. Si $\varphi \in \Phi - \{Id\}$, és possible que φ sigui una homotècia? Raoneu la resposta.

3. Si $\varphi, \varphi' \in \Phi - \{Id\}$, és possible que existeixi una recta fixa per φ, però no per φ'? Raoneu la resposta.

4. Suposant que l'espai afí és euclidià, demostreu que entre les afinitats de Φ diferents de la identitat hi ha com a màxim un desplaçament. Doneu també la condició que ha de complir el triangle ABC perquè existeixi aquest desplaçament i, en aquest cas, digueu en què consisteix.

141.– *Abril 1997*

En una referència rectangular, sigui r l'eix Ox i s la recta $\{z = 1, y = mx\}$ $(m \neq 0)$.

1. Trobeu les equacions de la recta r', simètrica de r respecte de s, i de la recta s', simètrica de s respecte de r.

2. Calculeu l'angle entre r i s per tal que r' i s' siguin coplanàries.

142.– *Maig 1997*

Sigui ABC un triangle. Siguin $BA'C$ el triangle equilàter contruït sobre BC, amb A' en el semiplà oposat al de A; ACB' el triangle equilàter contruït sobre AC, amb B' en el semiplà oposat al de B; i ABC' el triangle equilàter contruït sobre AB, amb C' en el mateix semiplà que C. Si M és el baricentre de ABC', demostreu que M equidista de A' i de B' i que $\widehat{A'MB'} = \frac{2\pi}{3}$.
Indicació: es pot fer sintèticament utilitzant un producte de dos girs.

143.– *Juliol 1997*

Trobeu els desplaçaments de l'espai que deixen fix el sistema format per dues rectes perpendiculars que es tallen i un punt que no pertany al pla que determinen les rectes.

144.– *Gener 1998*

Sigui r una recta del pla, $\vec{v}$ un vector, i $\lambda \neq 0, 1$ un nombre real. Per a cada punt P del pla, sigui P_1 la projecció ortogonal de P sobre r, i P^* la imatge de $P_1 + \vec{v}$ per l'homotècia de centre P i raó λ. Proveu que la correspondència $P \mapsto P^*$ és una afinitat i trobeu-ne els punts fixos i les rectes fixes.

145.– *Juliol 1998*

Sigui f la simetria axial respecte de la recta r d'equacions $x/3 = (y - 1)/2 = z$, g la simetria central respecte del punt $P(0, 1, -1)$ i h la simetria especular respecte del pla perpendicular a r que passa per P. Estudieu el desplaçament $h \circ g \circ f$.

146.– *Juliol 1999*

Una referència $\mathcal{R} = [O; e_1, e_2]$ del pla euclidià compleix que els vectors e_1 i e_2 són unitaris i que formen un angle α. Considerem els punts $A(1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C(2, 1)$,

$A'(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B'(-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2})$, $C'(-1+\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. Trobeu els valors de α per als quals el triangle $A'B'C'$ és congruent amb el triangle ABC.

147.– *Gener 2000*

En un espai euclidià $\mathbb{A}$ de dimensió 3, considerem l'afinitat f que en una referència rectangular té les equacions següents:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(\ 2x + 2y - \ \ z) + 3 \\ y' = \frac{1}{3}(\ 2x - \ \ y + 2z) + 2 \\ z' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) + 1 \end{cases}$$

1. Proveu que f és un desplaçament i classifiqueu-lo.
2. Trobeu el mínim de les distàncies entre P i $f(P)$, P un punt arbitrari de $\mathbb{A}$.

148.– *Juliol 2000*

Considerem els punts $A = (0,0,0)$ i $B = (0,1,0)$, i les rectes r i s d'equacions $x = z - 1 = 0$ i $y = z = 0$, respectivament. Siguin t una recta arbitrària de l'espai i C un punt a distància 1 de t.

1. Demostreu que existeixen exactament quatre desplaçaments que transformen A en C i r en t, i que, d'aquests desplaçaments, dos són directes i dos són inversos.
2. Doneu les equacions explícites d'un desplaçament invers que transformi B en A i s en r, i descriviu-lo completament (si fos, posem per cas, una simetria especular, haurieu d'especificar el pla que la defineix).

149.– *Gener 2001*

Donats un punt O i un vector v a l'espai euclidià $\mathbb{A}^3$, considereu l'aplicació $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $P \mapsto P' = f(P)$, determinada per la relació

$$P' = O + v \wedge (P - O).$$

Demostreu que f és el producte d'una projecció, un gir i una homotècia, i determineu-los.

150.– *Novembre 2001*

Es donen en el pla dues rectes r,s que formen un angle α. Considereu l'aplicació del pla en sí mateix tal que a cada punt p li fa correspondre un punt p' de tal manera que: 1r) el punt mitjà de pp' pertany a r i 2n) la recta pp' és paral·lela a s.

1. Proveu que és una afinitat i determineu en quins casos és un desplaçament.
2. Doneu els punts i les rectes fixes per l'afinitat.

151.– *Gener 2002*

Sigui F_y el conjunt format pels plans de $\mathbb{R}^3$ que contenen l'eix de les y, és a dir

$$F_y = \{\Pi_z : \; z = 0\} \cup \{\Pi_a : \; x + az = 0; \; a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Escriviu l'equació matricial de la simetria especular respecte del pla Π_a.
2. Classifiqueu els desplaçaments de la forma $\tau \circ \sigma$, on σ és la simetria especular respecte d'un pla de F_y i τ és la translació de vector $(1, 2, b)$.

152.– *Juliol 2002*

Donat un tetràedre regular de vèrtexs A,B,C,D, proveu que la transformació afí$A \mapsto C$, $B \mapsto A$, $C \mapsto D$ i $D \mapsto B$ és un moviment. Classifiqueu-lo i descriviu-lo.
Indicació: pot ser convenient treballar en la referència d'origen A i vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

153.– *Gener 2003*

Es considera una referència $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2\}$ del pla euclidià en què $||e_1|| = 1$, $||e_2|| = 2$, $\widehat{e_1 e_2} = 60°$.
Demostreu que hi ha exactament dues semblances que porten el punt $A(0, 1)$ al punt $A'(4, -1)$ i la recta r d'equació $y = 0$ a la recta r' d'equació $x + y = 1$, i doneu-ne les equacions.
Alguna d'elles és desplaçament?

154.– *Juliol 2003*

Siguin f, g dos afinitats bijectives d'un espai afí $(\mathbb{A}, E)$, i siguin $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ els endomorfismes respectius associats. Si t_u denota la translació de vector u, proveu:

1. $\tilde{f} = \tilde{g} \iff \exists u \in E : \;\; f = t_u \circ g \iff \exists v \in E; : \;\; f = g \circ t_v$
2. Ara $(\mathbb{A}, E)$ és un espai afí euclidià 3-dimensional. Siguin S_r, S_s les simetries axials d'eixos les rectes r, s d'equacions respectives (en una referència rectangular):

$$\left\{ \begin{array}{c} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} ax + by + cz + e = 0 \\ a'x + b'y + c'z + e' = 0 \end{array} \right.$$

Proveu que $\tilde{S}_r = \tilde{S}_s$ i calculeu els vectors u i v tals que $S_r = t_u \circ S_s = S_s \circ t_v$

155.– *Novembre 2003*

Sigui $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ una referència cartesiana rectangular de l'espai euclidià de dimensió 3. Considereu el gir g d'amplitud $\pi/2$ al voltant de l'eix $O + \langle u_3 \rangle$ orientat per u_3, i la simetria especular s respecte del pla $O + \langle u_1, u_2 - u_3 \rangle$. Considereu el desplaçament $f = g \circ s$.

1. Calculeu la matriu de $\tilde{s}$ (la transformació lineal associada a s).
2. Demostreu que f és la composició d'un gir g' i la simetria especular respecte del pla perpendicular per O a l'eix del gir g'.
3. Determineu l'eix de g' i $\cos(\alpha)$, on α és la seva amplitud.
4. Trobeu la imatge per g' de la recta $O + \langle u_1 + u_2 + u_3 \rangle$.

156.– *Gener 2004*

Sigui f una afinitat del pla euclidià que transformi un cert cercle C_1 en un cert cercle C_2.

(a) Demostreu que f transforma el centre de C_1 en el de C_2.

(b) Demostreu que f és una semblança.

157.– *Juliol 2004*

En una referència rectangular de $\mathbb{R}^3$, considerem la recta r, d'equacions $y = z = 0$, orientada pel vector $(1, 0, 0)$, i la recta s, que passa per l'origen i és orientada pel vector $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, on $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Anomenem $g_{\alpha,\beta}$ el moviment que s'obté fent un gir g^r_α d'angle α al voltant de r, seguit d'un gir g^s_β d'angle β al voltant de s.

1. Trobeu les equacions del gir g^s_β.
2. Trobeu tots els parells de valors (α, β) tals que $g_{\alpha,\beta}$ és un gir al voltant de l'eix de les z, i digueu quin seria l'angle de tal gir.
3. Raoneu que donada qualsevol recta t per l'origen que no estigui continguda en el pla $z = 0$, sempre existeixen angles α, β tals que $g_{\alpha,\beta}$ és un gir al voltant de t.

   Nota: els apartats b) i c) poden fer-se sintèticament.

158.– *Gener 2005*

En el pla referit a un sistema de coordenades rectangulars es dóna la família d'afinitats

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & (c-b)x - by + a \\ y' & = & bx + (c+b)y + a \end{array} \right.$$

1. Estudieu els desplaçaments de la família.
2. Estudieu les semblances de la família i trobeu el lloc geomètric dels centres de les semblances de la família que en tinguin.

159.– *Juliol 2005*

Es donen en el pla dos punts diferents $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$, referits a coordenades rectangulars. Hi ha dos polígons regulars que tenen $n \geq 3$ costats i vèrtexs consecutius A_1, A_2. Detalleu com calcular, a partir de les dades A_1 i A_2, els centres C i C' dels dos polígons i els respectius vèrtexs $\{A_3, \ldots, A_n\}$ i $\{A'_3, \ldots, A'_n\}$.

160.– *Gener 2006*

1. Donades dues rectes no paral·leles de l'espai euclidià de dimensió 3, r i s, demostreu que existeix un una referència rectangular $\mathcal{R}$ en la qual les equacions de r i s tenen la forma
$$\begin{cases} y = mx \\ z = d \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -mx \\ z = -d \end{cases}$$
i digueu quin és el significat geomètric de m i d en termes de la posició de les dues rectes.

2. Trobeu les equacions en la referència $\mathcal{R}$ d'un gir que porti r a s.

3. Demostreu que donades dues rectes qualssevol r_1 i r_2 de l'espai tridimensional, sempre existeix un gir que porta r_1 a r_2.

161.– *Novembre 2006*

Es dóna un triangle equilàter al pla euclidià $\mathbb{A}^2$ i es considera l'aplicació $\alpha : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ que transforma cada punt P en el baricentre dels punts P_1, P_2, P_3 que són les projeccions ortogonals de P sobre els costats del triangle.

1. Demostreu que és una afinitat.

2. Decidiu si és un desplaçament o una semblança, i, en cas afirmatiu, doneu-ne els seus elements característics.

162.– *Juliol 2007*

Considerem l'espai euclidià dotat d'una referència rectangular. Sigui $\mathcal{C}$ la circumferència del pla xy amb centre a l'origen i radi 1.

a) Partint del fet que $\mathcal{C}$ és $(\cos t, \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$ és una parametrització de $\mathcal{C}$, obtingueu, mitjançant canvis de referència, una parametrització de la circumferència $\mathcal{C}'$ del pla $2x - y + 3z = 4$ de radi 1 i centre el punt d'aquest pla que està més pròxim a l'origen de coordenades.

b) Doneu l'equació matricial o equacions cartesianes d'algun desplaçament de l'espai que transformi $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

163.– *Novembre 2007*

En una referència cartesiana rectangular de $\mathbb{R}^3$ es dóna una família amb paràmetre a de desplaçaments mitjançant les seves equacions:

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}z - 2 \\ y' &= y + a \\ z' &= -\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}z + 1 \end{cases}$$

(i) Demostreu que tots els desplaçaments de la família són del mateix tipus, i descriviu-lo [5p.].

(ii) Calculeu els desplaçaments de la família que compleixen la condició següent: la distància entre la recta $z = 2x, y = 0$ i la seva imatge val 3 [3p.].

(iii) Si f és un desplaçament de la família, descriviu el desplaçament f^n, per a qualsevol nombre natural n [2p.].

164.– *Gener 2008*

Sigui V un espai vectorial euclidià i f un endomorfisme d'V. Se sap que e_1, e_2 és una base d'V, amb $\|e_1\| = 1, \|e_2\| = \sqrt{2}, \widehat{e_1 e_2} = 45°$, i, a més, $f(e_1) = -e_1 + 4e_2, f(e_2) = 6e_1 + e_2$.

(a) [3p.] Proveu que la matriu d'f és simètrica en qualsevol base ortonormal d'V.

(*Indicació*: demostreu que es compleix $f(u) \cdot v = u \cdot f(v)\ \forall\, u, v \in V$)

(b) [3p.] Demostreu que f és producte d'una homotècia vectorial per una isometria lineal.

(c) [4p.] Sigui $(\mathbb{A}, V)$ un espai afí euclidià. Sigui a l'afinitat que té equacions en la referència $\{P, e_1, e_2\}$, on P és un punt d'$\mathbb{A}$:

$$\begin{cases} x' &= -x + 6y - 6 \\ y' &= 4x + y \end{cases}$$

Proveu que a és una semblança, classifiqueu-la i doneu els seus elements característics.

165.– *Juliol 2008*

Siguin r la recta $x = z + 1 = 0$ i s la recta $x - y = z - 1 = 0$. Trobeu les equacions de tots els desplaçaments que transformin r en s i alhora s en r. Raoneu explícitament per què el vostre mètode dóna *tots* els desplaçaments possibles.

Llocs geomètrics (lineals)

Nota: les referències no explicitades es consideraran rectangulars orientades positivament.

166.– Una recta variable talla 2 rectes donades que es creuen. Determineu el lloc geomètric del punt mitjà del segment interceptat.

167.– Una recta variable talla segons angles iguals dues rectes donades que es creuen. Determineu el lloc geomètric del punt mitjà del segment interceptat.

168.– Es consideren en el pla dues rectes perpendiculars i una recta variable que les talla en punts A i B tals que $d(O,A)+d(O,B)=k$, on k és constant i O és el punt de tall de les dues rectes. Trobeu el lloc geomètric del vèrtex C d'un triangle equilàter de base AB.

169.– A $\mathbb{R}^3$ es consideren les rectes

$$\frac{x-a-b}{b}=\frac{y-a-b}{a}=\frac{z-c}{a+b} \quad ; \quad \frac{x}{-a}=\frac{y}{-b}=\frac{z}{a+b}.$$

Trobeu les condicions que han de cumplir a, b i c perquè les rectes es tallin i el lloc geomètric del punt de tall.

170.– En el pla es tenen dues rectes r, s que es tallen a p i dos punts $a\in r$, $b\in s$, on a i b són diferents de p. Calculeu el lloc geomètric de les interseccions de les rectes ab', ba' quan els punts a', b' es mouen sobre r, s respectivament, de tal manera que $d(a,a')=d(b,b')$.

171.– Trobeu el lloc geomètric dels centres dels girs del pla d'angle donat θ que transformen un punt p donat en un punt d'una recta donada r, amb $p\notin r$.

172.– Trobeu el lloc geomètric de les imatges de $(2,4)$ per les afinitats que deixen fixos els punts $(1,0),(-1,0)$ i transformen la recta $x=0$ en la recta $x=y$.

173.– Siguin A,B,C tres punts no alineats del pla. Considerem les afinitats f sense punts fixos tals que $f(A)=B$, $f(B)=C$.

1. Determineu el lloc geomètric de $f(C)$.
2. Determineu el lloc geomètric de $f^2(C)$ i de $f^n(C)$.

174.– *Abril 1995*

Donat un hexàgon regular $ABCDEF$ es consideren tots els quadrats $PQRS$ tals que $P\in AB$, $S\in EF$ i $PS\parallel AF$. Trobeu el lloc geomètric del vèrtex Q. (L'ordre dels vèrtexs, tant de l'hexàgon com del quadrat, és l'antihorari.)

175.– *Abril 1996*

Donats en el pla euclidià un punt A i dues rectes perpendiculars r i s que no el contenen, es consideren tots els rectangles de vèrtexs A, B, C i D tals que $B \in r$ i $D \in s$. Trobeu el lloc geomètric del vèrtex C.

176.– *Novembre 1999*

Considereu una referència $[O; e_1, e_2, e_3]$ tal que $\widehat{e_1 e_3} = 90°$, $\widehat{e_1 e_2} = \widehat{e_2 e_3} = 60°$, $|e_1| = 1$, $|e_2| = |e_3| = 2$, i Siguin A i B els punts de coordenades $(2, 4, 0)$ i $(6, 2, 0)$, respectivament. Trobeu

1. La matriu de la mètrica.
2. Un punt C tal que el triangle ABC sigui equilàter i el pla ABC paral·lel a l'eix Ox_3.
3. L'equació de la circumferència del pla $x_3 = 0$ que passa per O, A i B.
4. El lloc geomètric dels punts que equidisten dels tres plans de coordenades i les coordenades dels quals són totes positives.

177.– *Juliol 2003*

Es dóna en el pla una recta r i dos punts $A, B \notin r$. Trobeu el lloc geomètric dels punts P tals que es pot construir un paral·lelogram amb costats PA i PB i el 4t vèrtex en un punt de r.
Si feu el problema analíticament, es demana que la descripció del lloc geomètric no depengui de la referència presa.

Geometria projectiva

178.– *Teorema de Pappus.*
Si $(A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3)$ són dos ternes de punts alineats, no sobre la mateixa recta i diferents del punt d'intersecció de les dues rectes que determinen, aleshores els tres punts d'intersecció $A_iB_j \cap A_jB_i$ estan alineats.

179.– Reescriviu el teorema anterior a l'espai afí $\mathbb{A}_2$ i suposant que la recta per $A_iB_j \cap A_jB_i$ és la recta de l'infinit. Dibuixeu la configuració.

180.– *Cas especial del teorema de Pappus.*
Sigui O el punt de tall de les rectes $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$. Proveu que si les rectes A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 són concurrents, aleshores la recta que uneix els tres punts d'intersecció $A_iB_j \cap A_jB_i$ passa pel punt O.
(Indicació : construcció de la quaterna harmònica).

181.– Siguin A, B dos punts donats del pla projectiu, l, m dos rectes donades que no els contenen. P és un punt variable de l, i AP, BP tallen m a L, M , respectivament. Proveu que el lloc del punt d'intersecció de BL, AM és una recta que passa pel punt d'intersecció de l, m.

182.– Proveu que el triangle de vèrtexs $[1, p, p'], [q', 1, q], [r, r', 1]$ (en una certa referència) està en perspectiva amb el triangle de referència si i només si es cumpleix $pqr = p'q'r'$.

183.– Donats tres punts A_0, A_1, B d'una recta diferents dos a dos, es construeix una successió de punts $A_0, A_1, A_2, ...$ de tal manera que, per a cada $n > 1$, sigui A_n el quart harmònic de A_{n-2} respecte A_{n-1}, B. Proveu que es pot definir una abscissa projectiva θ tal que el valor de θ a A_i sigui i, $\quad i = 0, 1, 2...$

184.– *Polar harmònica d'un punt respecte d'un triangle.*

1. Si D, E, F són els punts d'intersecció dels costats BC, CA, AB d'un triangle ABC amb les rectes que uneixen A, B, C amb un punt P que no pertany a cap dels tres costats, i si D', E', F' són els quarts harmònics de D, E, F respecte els parells $(B, C), (C, A), (A, B)$, respectivament, proveu que els punts D', E', F' estan alineats (a la recta que els conté se l'anomena polar harmònica de P respecte el triangle ABC). Dibuixar aquesta recta linealment.

2. Proveu que la polar harmònica del punt $[\alpha, \beta, \gamma]$ (amb $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$) en la referència $[A, B, C; U]$ és la recta $\left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right]$.

3. Proveu que la polar harmònica del baricentre d'un triangle respecte d'aquest és la recta de l'infinit.

185.– *Generalització a l'espai projectiu de la polar harmònica.*
Siguin A_0, A_1, A_2, A_3 els vèrtexs d'un tetràedre, i P un punt fora de les seves cares. Suposem que A_iP talla la cara oposada a P_i, $\quad i = 0, 1, 2, 3$, i sigui p_i la polar harmònica de P_i respecte el triangle de vèrtexs els del tetràedre diferents de A_i.
Proveu que les quatre rectes p_i són coplanàries, i trobeu l'equació del pla que les conté sabent que les coordenades de P són $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ en la referència que té A_i com a punts fonamentals.

186.– Donat un triangle ABC on $P \in BC, Q \in AC, R \in AB$ tal que les rectes AP, BQ, CR són concurrents, es prenen X, Y, Z punts a les rectes BC, CA, AB (respectivament) tals que

$$[X, P, B, C] = [Y, Q, C, A] = [Z, R, A, B] = -1.$$

Proveu que X, Y, Z estan alineats.

187.– P és un punt del costat YZ del triangle XYZ; L és un punt qualsevol a XP, i les rectes YL, ZL tallen XZ, XY en M, N resp; la recta MN talla YZ a P'.
Proveu que el mateix punt P' s'obté per totes les posicions de L a XP.

188.– Els costats AB, BC i AC d'un triangle ABC són tallats per una recta a D, E, F, respectivament. El quart harmònic de D respecte B, A és D', i es determinen punts E', F' de manera similar sobre BC, AC. Proveu que les rectes CD', AE', BF' són concurrents.

189.– Proveu que una projectivitat entre dues rectes en dimensió 2 és perspectivitat si i només si el punt de tall és fix.

190.– Proveu que tota projectivitat entre rectes en dimensió 2 pot expressar-se com a producte de, com a molt, dues perspectivitats.

191.– Siguin A, B, P, Q, R, S sis punts alineats. O és un punt no alineat amb els anteriors, i OP, OQ tallen una altra recta per A a H i K. Si les raons dobles $[A, B, P, Q]$ i $[A, B, R, S]$ són iguals, proveu HR i KS es tallen en un punt de la recta BO. (Indicació : feu servir productes de perspectivitats)

192.– Demostreu projectivament el teorema de Thales en el pla.

193.– Proveu que en tota projectivitat de la recta projectiva que té punts fixos A i B, es té

$$[A, B, X, X^*] = \text{constant}.$$

Donats els punts A, B, X, X^*, Y, construïu geomètricament el punt Y^*.
Si aquesta projectivitat és involutiva, proveu que

$$[A, B, X, X^*] = -1.$$

194.– $(A,B),(B,C),(C,A)$ són tres parells de punts diferents homòlegs per una projectivitat a la recta projectiva. Si P és un altre punt de la recta, i si (P,Q) i (Q,R) són parells de punts homòlegs, proveu que els punts (R,P) són també homòlegs.

195.– Donats a $P_1(\mathbb{R})$ els punts A,B,C,A',B',C'tals que

$$[A,A',B,C]=[B,B',C,A]=[C,C',A,B]=-1$$

sigui π la projectivitat tal que $(A,A'),(B,B'),(C,C')$ són parells de punts homòlegs. Proveu que $\pi^2=I$.

196.– Trobeu les equacions de la projectivitat a $P_2(\mathbb{R})$ que deixa els tres punts afins $(2,0)$, $(-1,\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$ invariants i transforma el punt de l'infinit de l'eix X en el punt $(0,0)$.

197.– Trobeu els punts fixos de la projectivitat

$$x':y':z'=3x-2z:3y:x-y.$$

198.– Proveu que les projectivitats del pla projectiu que deixen invariant el punt $[0,0,1]$ i la recta per $[1,0,0],[0,1,0]$ són de la forma :

$$x':y':z'=ax+by:cx+dy:z, \quad \text{amb} \quad ad-bc\neq 0.$$

199.– Siguin A,B,A',B' quatre punts fixats del pla i l una recta fixada que passa pel punt $AB\cap A'B'$. Es defineix una transformació $P\longrightarrow P'$ (on $P\notin AB$) per la condició que $PA,P'A'$ es tallen en un punt de l, i també $PB,P'B'$.
Proveu que es tracta d' una projectivitat, que l és una recta de punts fixos. Hi ha un punt fix més?.
(Indicació : prendre referència els punts $AB\cap A'B', A, A'$ i el punt unitat sobre l.)

200.– *Problema instructiu*
Part I.
Donat un pla projectiu $\mathbb{P}^2$, en el qual els punts venen descrits per les seves coordenades en certa referència projectiva $\mathcal{R}$, considerem la recta r d'equació $\xi_0+\xi_1-2\xi_2=0$. Aleshores $\mathbb{P}^2\setminus r$ és un espai afí $\mathbb{A}$, i decidim coordenar-lo prenent la referència afí $\mathcal{A}=\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$, on A, B i C són els punts que en $\mathcal{R}$ tenen coordenades $[0,1,1]$, $[-1,1,2]$ i $[2,-1,-1]$, respectivament.

- Quina és l'equació en la referència $\mathcal{R}$ de la recta de l'infinit de $\mathbb{A}$? Quines són les equacions projectives de l'eix d'abscisses i de l'eix d'ordenades? Quins són els punts de l'infinit d'aquests eixos?

- Doneu l'expressió de les coordenades (x, y) d'un punt afí en la referència $\mathcal{A}$, com a funció de les seves coordenades projectives en la referència $\mathcal{R}$.

Part II.
Donat un pla afí $\mathbb{A}$, en el qual els punts venen descrits per les seves coordenades en certa referència afí $\mathcal{A} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, decidim completar-lo a un espai projectiu $\mathbb{P}^2$, en el qual prendrem com a referència projectiva $\mathcal{R}$ els punts P_0, P_1, P_2, U que són tots ells afins i tenen coordenades $(1, 1)$, $(10, -2)$, $(4, 7)$ i $(4, 4)$, respectivament, en la referència $\mathcal{A}$.

- Quina és l'equació en la referència $\mathcal{R}$ de la recta de l'infinit de $\mathbb{A}$?

Indicació. Dir que un punt P té coordenades (x, y) en una referència afí $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, significa que la paral·lela per P a AC talla AB en un punt P_x tal que la raó simple (A, B, P_x) és x, i que la paral·lela per P a AB talla AC en un punt P_y tal que la raó simple (A, C, P_y) és y.

201.– *Juny 1993*

Proveu que tot quadrilàter tal que les seves diagonals es tallen en el punt mitjà és un paral.lelogram. Es demana fer dues demostracions :

1. Una demostració afí.
2. Una demostració projectiva.

202.– *Setembre 1993*

Des d'els vèrtexs a, b, c d'un triangle en el pla projectiu es projecten dos punts p', p'' (que no estan sobre els costats) sobre els costats oposats respectius del triangle, i així s'obtenen els punts $a', a''; b', b''; c', c''$.

Proveu :

$$[b, c, a', a''] \cdot [c, a, b', b''] \cdot [a, b, c', c''] = 1.$$

203.– *Juny 1994*

Siguin A i B dos punts diferents del pla projectiu, a i b dues rectes diferents que no els contenen i suposem que $a \cap b \notin AB$. Associem a cada punt $P \notin AB$ el punt P' definit per la següent condició: les rectes AP i BP' es tallen a a i les rectes AP' i BP es tallen a b.

1. Demostreu que existeix una única homografia φ tal que $\varphi(P) = P'$ (preneu com a triangle de referència els punts $a \cap b$, $a \cap (AB)$ i $b \cap (AB)$).
2. Sigui $\mathcal{R}$ una referència rectangular del pla euclidià, A el punt de l'infinit de l'eix Oy, B el punt de l'infinit de l'eix Ox, a la bisectriu del primer quadrant i b la bisectriu del segon quadrant. Proveu que l'homografia φ de l'apartat (1) és, en aquest cas, un desplaçament i descriviu-lo.

204.– *Setembre 1994*

Sigui $[P_0, P_1, P_2; U]$ una referència del pla projectiu. Posem $U_0 = P_0U \cap P_1P_2$, $U_1 = P_1U \cap P_2P_0$ i $U_2 = P_2U \cap P_0P_1$. Donats punts $A_0 \in P_1P_2$, $A_1 \in P_2P_0$ i $A_2 \in P_0P_1$, (A_i diferents dels extrems dels segments), demostreu que les rectes P_0A_0, P_1A_1 i P_2A_2 són concurrents si i només si

$$[P_1, P_2, U_0, A_0] \cdot [P_2, P_0, U_1, A_1] \cdot [P_0, P_1, U_2, A_2] = 1.$$

205.– *Juny 1995*

Siguin l_1, l_2, l_3, l_4 quatre rectes concurrents, diferents dues a dues, del pla euclidià i suposem que l_3 i l_4 són perpendiculars. Proveu que l_3 i l_4 són les bisectrius de l_1 i l_2 si i només si els quatre punts de l'infinit de l_1, l_2, l_3, l_4 formen una quaterna harmònica.

206.– *Setembre 1995*

Siguin l i l' dues rectes diferents al pla projectiu i V un punt d'aquest pla exterior a l i a l'. Sigui $\varphi : l \to l'$ la perspectivitat de centre V.

1. Proveu que existeix una recta que conté, per a totes les parelles de punts diferents $P, Q \in l - l'$, el punt M d'intersecció de les rectes $P\varphi(Q)$ i $Q\varphi(P)$.

2. Interpreteu aquest resultat en el pla afí, suposant que V és un punt impropi.

207.– *Febrer 1996*

Sigui ABC un triangle del pla afí, que el considerem inclòs a la seva clausura projectiva. Sigui $[A, B, C; G]$ la referència projectiva que té punts fonamentals els vèrtexs del triangle i punt unitat el seu baricentre. Proveu que l'equació de la recta de l'infinit en aquesta referència és

$$\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 = 0.$$

208.– *Juny 1996*

Siguin r i s dues rectes diferents del pla projectiu, P un punt exterior a r i a s. Sigui π la perspectivitat de r en s amb centre P. Siguin A_1, A_2, A_3, A_4 quatre punts diferents de r i posem $A'_i = \pi(A_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

1. Proveu que les interseccions $A_1A'_4 \cap A_3A'_2$ i $A_4A'_1 \cap A_2A'_3$ són punts alineats amb P.

2. Si suposem que el pla projectiu és la clausura projectiva d'un pla afí i que el punt P és impropi, enuncieu el resultat afí que s'obté de la proposició anterior.

209.– *Juliol 1996*

Sigui $\mathcal{R}$ una referència afí del pla i $\overline{\mathcal{R}}$ la referència projectiva associada a $\mathcal{R}$. Posarem (x, y) per denotar $\mathcal{R}$-coordenades i $[X, Y, Z]$ per denotar les corresponents $\overline{\mathcal{R}}$-coordenades, de manera que $x = X/Z$ i $y = Y/Z$. Siguin $I = [1, i, 0]$ i $J = [1, -i, 0]$ (són dos punts imaginaris conjugats situats sobre la recta de l'infinit). Proveu que:

1. $\mathcal{R}$ és rectangular (és a dir, els vectors de la referència són perpendiculars i de la mateixa longitud) si i només si l'equació de qualsevol circumferència en termes de les coordenades (x, y) de $\mathcal{R}$ és de la forma $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

2. $\mathcal{R}$ és rectangular si i només si I i J són els punts impropis de qualsevol circumferència del pla.

3. Dues rectes són perpendiculars si i només si els seus punts de l'infinit formen quaterna harmònica amb I i J.

4. Donada una circumferència en el pla, proveu que existeix una referència projectiva $\mathcal{S}$ respecte de la qual la seva equació és de la forma $a\xi_0\xi_1 + b\xi_0\xi_2 + c\xi_1\xi_2 = 0$, on posem $[\xi_0, \xi_1, \xi_2]$ per denotar $\mathcal{S}$-coordenades.

210.– *Maig 1997*

En el pla projectiu es tenen quatre rectes diferents r_1, r_2, r_3 i r_4. Les seves equacions respecte d'una certa referència $\mathcal{R}$ són:

$$a_i\xi_0 + b_i\xi_1 + c_i\xi_2 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

1. Doneu una condició necessària i suficient, en termes dels coeficients de les equacions, per tal que les quatre rectes siguin concurrents en un punt.

2. Suposem que les quatre rectes són concurrents. Proveu que els punts $P_i = [a_i, b_i, c_i]_{\mathcal{R}}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ estan alineats i que la raó doble $\rho(P_1, P_2, P_3, P_4)$ només depèn de les quatre rectes, i no de $\mathcal{R}$.

3. Si ℓ és una recta no concurrent amb les r_i i $Q_i = \ell \cap r_i$, proveu que $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

211.– *Juliol 1997*

Donada una referència projectiva $\mathcal{R} = [P_0, P_1, P_2; A]$ del pla projectiu, siguin A_0, A_1, A_2 les projeccions de A des de P_0, P_1, P_2 sobre P_1P_2, P_2P_0, P_0P_1, respectivament. Sigui P un punt variable de la recta P_0A i B_1, B_2 els punts d'intersecció de les rectes PA_1, PA_2 amb les rectes P_2A, P_1A, respectivament.

1. Proveu que les rectes A_1A_2, B_1B_2, P_1P_2 són concurrents.

2. Si B_0 és el punt de concurrència, trobeu la raó doble $\rho(P_1, P_2, A_0, B_0)$ en termes de les $\mathcal{R}$-coordenades de P.

212.– *Gener 1998*

Siguin A_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, cinc punts del pla projectiu, tres a tres no alineats, i definim els punts

$$X = A_0A_1 \cap A_2A_3, \quad Y = A_0A_3 \cap A_4X, \quad Z = A_0A_3 \cap A_2A_4.$$

Demostreu que estan alineats:

1. els punts $P_1 = A_1A_2 \cap A_0A_3$, $P_2 = A_1Y \cap A_0A_4$, $P_3 = A_2Y \cap A_3A_4$,
2. i també els punts $Q_1 = A_3$, $Q_2 = A_1Z \cap A_4X$, $Q_3 = A_0A_4 \cap A_1A_2$

213.– *Juliol 1998*

Demostreu que si els tetràedres $ABCD$ i $A'B'C'D'$ de l'espai projectiu de dimensió 3 són en posició tal que les rectes que uneixen vèrtexs homòlegs són concurrents en un punt, aleshores les cares homòlogues es tallen dues a dues en quatre rectes coplanàries.

214.– *Gener 1999*

Sigui $\mathcal{R}$ una referència del pla afí $\mathbb{A}^2$, i $\overline{\mathcal{R}}$ la referència projectiva associada de $\mathbb{P}^2 = \overline{\mathbb{A}^2}$. Considerem la família d'homografies de P^2 que compleixen les condicions següents:

1. L'origen de $\mathcal{R}$ i el punt $(1, 1)$ són fixos.
2. El punt de l'infinit de l'eix Ox_1 té per imatge un punt de la recta $\xi_0 = \xi_1$ (on $[\xi_0, \xi_1, \xi_2]$ són les $\overline{\mathcal{R}}$-coordenades projectives corresponents a les $\mathcal{R}$-coordenades (x_1, x_2)).
3. El punt de l'infinit de l'eix Ox_2 té per imatge el punt de l'infinit de la recta $x_2 = mx_1$ (m un escalar arbitrari).

   Es demana que:

   (a) Trobeu la matriu d'aquestes homografies en la referència $\overline{\mathcal{R}}$.

   (b) Estudieu quines d'aquestes homografies defineixen una afinitat de $\mathbb{A}^2$.

   (c) De les afinitats del punt b), estudieu-ne els desplaçaments, suposant que $\mathbb{A}^2$ és un pla euclidià i que els vectors de la referència $\mathcal{R}$ són unitaris (no necessàriament ortogonals).

215.– *Juliol 1999*

Un hexàgon $ABCDEF$ del pla projectiu satisfà que els costats AB, CD i EF concorren en un punt i que els costats BC, DE i FA concorren en un altre punt. Demostreu que aleshores les diagonals AD, BE i CF també són concorrents.

216.– *Gener 2000*

Donats dos punts $[a] = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $[b] = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ de $\mathbb{P}^3$, posem $p_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$ $(0 \leq i, j \leq 3)$.

1. Proveu que $p_{ij} = 0$ per a tot i, j si i només si $[a] = [b]$.

   Suposant que $[a] \neq [b]$, sigui $P = [p_{01}, p_{02}, p_{12}, p_{03}, p_{13}, p_{23}] \in \mathbb{P}^6$.

2. Mostreu que P només depèn dels punts $[a]$ i $[b]$, i no dels seus representants a i b.

   Sigui L una recta fixa de $\mathbb{P}^3$ i suposem que $[a], [b] \in L$.

3. Proveu que P només depèn de L, és a dir, que P roman el mateix independentment de l'elecció de $[a], [b] \in L$.

4. Demostreu que si una de les coordenades de P és nul·la, llavors L talla una de les arestes del tetràedre de referència.

5. Escriviu l'equació del pla determinat pel punt $C = [c_0, c_1, c_2, c_3] \notin L$ i la recta L en termes de les coordenades de C i de P.

217.– *Juliol 2000*

Sigui $(\mathbb{A}, V, \delta)$ un espai afí real de dimensió 2 i $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus V)$ la seva clausura projectiva. Fixat $O \in \mathbb{A}$, sigui $i_O : \mathbb{A} \hookrightarrow \overline{\mathbb{A}}$ la inclusió de $\mathbb{A}$ en $\overline{\mathbb{A}}$ donada per $P \mapsto \overline{P}$, on $\overline{P} = [(1, P - O)]$.
Siguin P_1, P_2, P_3 tres punts de $\mathbb{A}$ que formen una referència afí $\mathcal{R}$ i U un quart punt de $\mathbb{A}$, diguem $U = (a, b)_{\mathcal{R}}$. Considerem els punts $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{U}$ de $\overline{\mathbb{A}}$.

1. Trobeu les condicions analítiques que han de complir a i b per tal que $[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{U}]$ sigui una referència projectiva $\overline{\mathcal{R}}$ de $\overline{\mathbb{A}}$. (En els apartats que segueixen, suposarem que aquestes condicions es compleixen).

2. Siguin $P = (x, y)_{\mathcal{R}}$ i $\overline{P} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]_{\overline{\mathcal{R}}}$. Expresseu x, y en termes de η_1, η_2, η_3 (considereu $O = P_1$ en la immersió i_O)

3. Doneu l'expressió de η_1, η_2, η_3 en funció de x, y.

4. Doneu l'equació de la recta de l'infinit en $\overline{\mathcal{R}}$-coordenades.

218.– *Gener 2001*

Siguin $P_0 = [1, 0, 0]$, $P_1 = [0, 1, 0]$, $P_2 = [0, 0, 1]$ els vèrtexs d'una referència de $\mathbb{P}^2$, i r_0, r_1, r_2 rectes per P_2 d'equacions respectives $\xi_1 = m_0\xi_0$, $\xi_1 = m_1\xi_0$, $\xi_1 = m_2\xi_0$. Es considera una recta variable r per P_1 d'equació $\xi_2 = \lambda\xi_0$. Siguin M_0 i M_1 els punts en què r talla r_0 i r_1, respectivament, i siguin M_0' i M_1' els punts en què r_2 talla les rectes P_0M_0 i P_0M_1, respectivament.

1. Demostreu que totes les rectes M_0M_1' passen per un mateix punt A, en variar r, i que totes les rectes M_1M_0' passen per un punt B.

2. En el cas $m_2 = 1$, digueu quina relació han de satisfer m_0 i m_1 per tal que $\rho(P_0, P_1, A, B) = -2$.

219.– *Juliol 2001*

1. Demostreu que una projectivitat φ de la recta projectiva, diferent de la identitat, és una involució ($\varphi^2 = I$) si, i només si, la seva matriu té traça nul·la en qualsevol referència.

2. Siguin $\varphi_1 \neq I$, $\varphi_2 \neq I$ dues involucions diferents de la recta projectiva, la primera amb punts fixos A, B, la segona amb punts fixos C, D, essent aquests quatre punts diferents. Demostreu que $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$ si, i només si, $\rho(A, B, C, D) = -1$.

   (Indicació: preneu $A \equiv [1, 0]$, $B \equiv [0, 1]$, $C \equiv [1, 1]$, $D \equiv [t, 1]$.)

220.– *Gener 2002*

Sigui φ una projectivitat de P_3 tal que el seu conjunt de punts fixos és la unió de dues rectes r, s que no es tallen. Proveu:

1. Si P és un punt qualsevol que no pertany a $r \cup s$, la recta $P\varphi(P)$ talla r i s.

2. La raó doble $(P, \varphi(P); P_r, P_s)$ és independent de P, on P_r, P_s són els punts de tall de la recta $P\varphi(P)$ amb r, s, respectivament.

Si ho feu analíticament, preneu una referència amb dos punts a r i dos a s.

221.– *Gener 2003*

Al pla projectiu es diu que dos triangles XYZ, $X'Y'Z'$ estan en perspectiva quan les rectes XX', YY', ZZ' són concurrents en un punt, que s'anomena centre de perspectiva. Siguin ABC un triangle, $A'B'C'$ un triangle inscrit en ABC que està en perspectiva amb ABC, i $A''B''C''$ un triangle circumscrit a ABC que està en perspectiva amb ABC.
Proveu que els triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$ estan també en perspectiva.
Suggeriment: preneu referència els punts A'', B'', C'' i el centre de perspectiva de ABC amb $A''B''C''$ com a punt unitat.

222.– *Juliol 2003*

Sigui φ una projectivitat de l'espai projectiu $\mathbb{P}_1$, $\mathcal{R} = [P_0, P_1; U]$ una referència projectiva de $\mathbb{P}_1$. Escrivim θ per la coordenada absoluta d'un punt P respecte $\mathcal{R}$, i θ' per la coordenada absoluta del punt $\varphi(P)$ respecte $\mathcal{R}$.

1. Proveu que θ i θ' estan relacionades de la manera següent:

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d}, \text{ on } ad \neq bc$$

2. Doneu l'expressió de φ^{-1} en termes de θ, θ'.
3. Calculeu a, b, c, d en el cas que $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $\infty \mapsto 3$.
4. Proveu que $\varphi \neq I$ és involutiva ($\varphi^2 = I$) si, i només si, $a + d = 0$.

223.– *Gener 2004*

Donats dos triangles ABC i $A'B'C'$ del pla projectiu de manera que no hi ha coincidències entre vèrtexs corresponents ni entre costats corresponents, suposem que les rectes AA', BB', CC' tallen BC, CA i AB, respectivament, en punts alineats X, Y, Z ($X \neq B, C$, $Y \neq A, C$, $Z \neq A, B$). Proveu que les tres rectes que uneixen $A'B'C'$ amb les interseccions $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$, $C'' = AB \cap A'B'$, respectivament, són concurrents.

224.– *Juliol 2004*

Considerem un triangle variable ABC del pla projectiu que satisfà les condicions següents: A i B es mouen, respectivament, sobre rectes donades u i v, $u \neq v$, i els costats AC, BC i AB passen, respectivament, per tres punts donats P, Q i R situats sobre una recta ℓ no concurrent amb u i v i de manera que $P, Q, R, u \cap \ell, v \cap \ell$ són diferents.

1. Demostreu que el lloc geomètric del vèrtex C està sobre una recta w concurrent amb u i v.
2. Mostreu que C recorre tots els punts de w llevat $u \cap v$.

225.– *Juliol 2005*

Es dóna un triangle ABC en el pla projectiu. Siguin O_1, O_2 dos punts diferents del pla no pertanyents a cap dels costats del triangle. Sigui π_1 la perspectivitat de la recta AB en la recta BC amb centre O_1 i π_2 la perspectivitat de la recta BC en la recta CA amb centre O_2. Demostreu que són equivalents

(a) $\pi_2 \circ \pi_1$ és una perspectivitat,

(b) $(\pi_2 \circ \pi_1)(A) = A$,

(c) A, O_1, O_2 estan alineats,

i expliqueu, en el cas de ser $\pi_2 \circ \pi_1$ una perspectivitat, com es determina gràficament el seu centre.

226.– *Gener 2006*

1. Siguin A_0, A_1, A_2, A_3 els vèrtexs d'un tetràedre a l'espai projectiu. Siguin $B_i \in A_0 \vee A_i, i = 1, 2, 3$, tres punts diferents dels vèrtexs. Sigui $C_i, i = 1, 2, 3$, el punt quart harmònic de B_i respecte de A_0 i A_i. Proveu que els plans $A_1 \vee A_2 \vee A_3$, $B_1 \vee B_2 \vee B_3$, $C_1 \vee C_2 \vee C_3$ es tallen en una recta.

2. Doneu l'enunciat afí corresponent al resultat anterior, suposant que els punts $B_i, i = 1, 2, 3$, són punts del pla de l'infinit.

227.– *Juliol 2006*

Sigui $\mathcal{R}$ una referència afí de l'espai afí real $\mathbb{A}_3$, sigui $\mathbb{P}^3$ la clausura projectiva de $\mathbb{A}_3$ i $\overline{\mathcal{R}}$ la referència projectiva associada a $\mathcal{R}$. Siguin

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi_0' & = & \rho(a\xi_0 + b\xi_1 + c\xi_2 + d\xi_3) \\ \xi_1' & = & \rho(e\xi_0 + f\xi_1 + g\xi_2 + h\xi_3) \\ \xi_2' & = & \rho(i\xi_0 + j\xi_1 + k\xi_2 + l\xi_3) \\ \xi_3' & = & \rho(m\xi_0 + n\xi_1 + p\xi_2 + q\xi_3) \end{array}\right.$$

les equacions en $\overline{\mathcal{R}}$ d'una projectivitat φ de $\mathbb{P}^3$. Trobeu les condicions necessàries i suficients sobre els coeficients $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q$ perquè $\varphi_{|\mathbb{A}_3}$ sigui una simetria central de centre el punt $(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{R}}$.

228.– *Gener 2007*

Una altra construcció del quart harmònic de tres punts afins

Siguin A, B, X tres punts alineats del pla euclidià, on X no és el punt mitjà del segment AB. Sigui P un punt de la semicircumferència de diàmetre AB. Sigui Y un punt de la recta AB tal que l'angle XPB és igual a l'angle BPY. Denotarem per ST la longitud del segment ST (noteu que $\overline{ST} = \overline{TS}$).

a) Demostreu que $\dfrac{BX}{BY} = \dfrac{PX}{PY}$.

b) Demostreu que $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{PX}{PY}$.

c) Deduïu que la raó doble $[AB; X, Y]$ val -1.

d) Expliqueu què passa quan X és el punt mitjà del segment AB.

229.– *Juliol 2007*

a) Siguin x_1, x_2, y_1, y_2 les coordenades absolutes, respecte d'una referència donada, de 4 punts distints de la recta projectiva. Proveu que els punts formen quaterna harmònica si i només si es compleix

$$x_1x_2 + y_1y_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = 0.$$

b) Siguin A, B, C, D, E punts alineats distints de l'espai projectiu. Calculeu el producte de raons dobles:

$$(A, B, C, D) \cdot (A, B, D, E) \cdot (A, B, E, C).$$

c) A $\mathbb{P}^1$ es pren la referència $[A, B|J]$. Demostreu que:

$$(A, B, C, D) = -1 \Longleftrightarrow (A, B, J, C) + (A, B, J, D) = 0.$$

230.– *Gener 2008*

En una referència de l'espai projectiu real $\mathbb{P}^3$ es consideren els punts $A[1, 1, 2, 0]$, $B[2, 0, 2, 1]$, $C[1, -1, 0, 1]$, que pertanyen a una recta r, i el punt $D[0, 0, 0, 1] \notin r$.

(a) [2p.] Trobeu el punt Q_λ sobre r tal que la raó doble $\rho(A, B, C, Q_\lambda)$ val λ.

(b) [4p.] Trobeu una recta s que passi pel punt $[1, 0, 0, 0]$, estigui continguda al pla $\xi_2 = \xi_3$, i la raó doble dels plans $s \vee A$, $s \vee B$, $s \vee C$, $s \vee D$, en aquest ordre, sigui λ.

(c) [4p.] Demostreu que existeix una recta t que passa per D, tal que és tallada per tota recta u de l'espai tal que la raó doble dels plans $u \vee A$, $u \vee B$, $u \vee C$, $u \vee D$, en aquest ordre, sigui λ. Doneu les equacions de t.

231.– *Juliol 2008*

a) [4 p.] Si X, Y són coordenades cartesianes d'un pla afíimmers en un pla projectiu, i x, y, z les corresponents coordenades homogènies, de tal manera que $X = x/z, Y = y/z$, proveu, utilitzant eines de l'àmbit projectiu, que el punt $C[x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2]$ de la recta que uneix els punts $A[x_1, y_1, z_1]$ i $B[x_2, y_2, z_2]$ compleix que la raó simple (A, B, C) val $\dfrac{\lambda z_2}{z_1 + \lambda z_2}$.

b) [1p.] Per a quin valor de λ el punt C és el punt mitjà de A i B?

c) [5 p.] Si la cònica no degenerada $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ talla la recta AB en els punts C, D, proveu que la quaterna A, B, C, D és harmònica si i només si es compleix $ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 = 0$.

Còniques en referència principal

Nota: les referències no explicitades es consideraran rectangulars orientades positivament.

232.– Les rectes $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0,\quad \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ s'anomenen *asímptotes* de la hipèrbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Proveu que $\lim(y_{\text{hip}}-y_{\text{as}})=0$ quan $x\to+\infty$ i $x\to-\infty$.

233.– Trobeu semieixos, excentricitat i focus de la hipèrbola $2x^2-y^2+16x+2y=-29$.

234.– Trobeu les equacions de les tangents a la el·lipse $x^2+4y^2=4$ des d'el punt $(0,3)$.

235.– Proveu que una hipèrbola admet l'equació $xy=k$ en un cert sistema de referència afí. Proveu que aquest sistema és rectangular si i només si la hipèrbola té els semieixos iguals, cas en el qual s'anomena *hipèrbola equilàtera.*

236.– Escriviuu l'equació de la tangent a la el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ en un dels seus punts (x_0,y_0). Feu el mateix per a la hipèrbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ i per a la paràbola $y^2=2px$.

237.– Donada la el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, proveu que les tangents pels punts X,X' en que un diàmetre la talla són paral·leles. El diàmetre paral·lel a aquestes tangents s'anomena *diàmetre conjugat* del diàmetre inicial.
Proveu que la relació entre els pendents de dos diàmetres conjugats és

$$m\cdot m'=-\frac{b^2}{a^2},$$

i estudieu el cas particular de la circumferència.

238.– Proveu que els punts mitjans de totes les cordes paral·leles a un diàmetre d' una el·lipse pertanyen al seu diàmetre conjugat.

239.– Proveu que la tangent i la normal en un punt d'una el·lipse i d'una hipèrbola són les bisectrius dels radis focals (rectes que uneixen el punt amb els focus).
Interpreteu aquest fet en termes de reflexió de rajos que surten d'un focus.

240.– Proveu que en una paràbola la tangent i la normal en un punt són les bisectrius del parell de rectes format pel radi focal i la perpendicular a la directriu en el punt.
Deduïu la propietat de reflexió en miralls parabòlics.

241.– *Família de còniques homofocals.*
Donada la família de còniques

$$(b^2-\lambda)x^2+(a^2-\lambda)y^2-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)=0, \qquad a^2>b^2,$$

1. Classifiqueu-les
2. Proveu que les el·lipses i les hipèrboles de la família tenen els mateixos focus.
3. Proveu que les el·lipses i les hipèrboles de la família es tallen ortogonalment.

242.– *Setembre 1993*
Trobeu el lloc geomètric dels simètrics d'un focus d'una el.lipse donada respecte les tangents a aquesta.

243.– *Febrer 1997*
Sigui PQ un diàmetre d'una el·lipse de centre O, A un punt de la el·lipse diferent de P i de Q, tal que la tangent a la el·lipse en A és paral·lela a PQ.

1. Proveu que les tangents a la el·lipse en P i en Q són paral·leles a OA.
2. Trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans de les cordes de la el·lipse paral·leles a PQ.

244.– *Juliol 2003*
Es considera al pla euclidià referit a un sistema de coordenades rectangulars l'el·lipse E de centre $(3,2)$, longituds dels semieixos 2 i 1, i tal que el seu eix major forma un angle de 30° amb OX^+.
Siguin P_1, P_2 les paràboles de vèrtex $(3,2)$, semiparàmetre $p=\frac{1}{12}$ i eix perpendicular a l'eix major de E.
Es demana que calculeu les coordenades dels punts d'intersecció de E amb P_1 i amb P_2.

245.– *Juliol 2006*
Sigui E una el·lipse de semieixos a, b, $a>b$, i O el seu centre. Sigui $T\in E$ un punt no pertanyent a cap dels dos eixos de E. Siguin P, Q els punts de tall, respectivament, de la normal i la tangent a E per T amb l'eix major de E. Demostreu que

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=a^2-b^2$$

per a qualsevol T.

Problemes generals de còniques i quàdriques

Nota: les referències no explicitades es consideraran rectangulars orientades positivament.

246.– Reduïu i classifiqueu afinment les còniques:

1. $x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy + 4x + 7 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y + 8 = 0$
3. $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 4x + 5y + 2 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x + 2\lambda xy - 1 = 0$, segons els valors de λ.

247.– Classifiqueu euclidianament i trobeu els elements notables de les còniques següents, donades en una referència rectangular :

1. $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4(20 - \sqrt{3})x - 4(1 + 20\sqrt{3})y + 400 = 0$
2. $3x^2 - 5xy - 2y^2 + x + 12y - 10 = 0$
3. $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2 = 0$

248.– Trobeu focus, vèrtex, eix i directriu de la paràbola donada en una referència rectangular:

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

249.– Determineu totes les còniques que passen pels 4 vèrtexs d'un paral·lelogram.
(Indicació : treballeu en una referència afí adaptada a la figura)
Deduïu que no es pot inscriure cap paral·lelogram en una paràbola.

250.– Reduïu i classifiqueu afinment les quàdriques:

1. $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 1 = 0$
2. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2x - 10y - 2z + 4 = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 4x - 4y + 4z + 3 = 0$

251.– Reduïu i classifiqueu afinment les quàdriques segons els valors dels paràmetres:

1. $x^2 + (\mu + 1)y^2 + \mu z^2 + 2xy - 2yz + 2x + 2z + 4 = 0$

2. $x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xy + 2yz + 2x + 1 = 0$
3. $\lambda(x-y)^2 + \mu(x-z)^2 + \lambda(y-z)^2 = \nu$.

252.– Reduïu i classifiqueu euclidianament les quàdriques donades en una referència rectangular:

1. $2x^2 - 3y^2 - z^2 - 2\sqrt{3}yz + 16x - 4\sqrt{3}y - 4z + 20 = 0$
2. $x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 4yz - 2x + 6z + \dfrac{7}{9} = 0$
3. $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 6x - 12y - 12z = 0$

253.– Trobeu el con tangent a la cònica $x^2 - 2y = 0$ des d'el punt $(0, -1)$. Feu-ho:

1. Afinment.
2. Projectivament, utilitzant la polar del punt $(0, -1)$.

254.– Trobeu el con tangent a la quàdrica $x^2 - 2y = 0$ des d'el punt $(0, -1, 0)$.

255.– Trobeu el cilindre projectant de la quàdrica $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ en la direcció $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Feu-ho de dues maneres, afinment i projectivament.

256.– *Quàdriques reglades*
Una quàdrica es diu reglada si és una unió de rectes. Es vol demostrar que l'hiperboloide d'un full a $\mathbb{R}^3$ és una quàdrica reglada.
Proveu:

1. En una certa referència afí admet una equació de la forma $xz = (1+y)(1-y)$.
2. Les dues famílies de rectes

   $$\left\{\begin{array}{rcl} 1+y &=& \lambda x \\ \lambda(1-y) &=& z \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 1 \end{array}\right. \quad ; \left\{\begin{array}{rcl} 1+y &=& \lambda z \\ \lambda(1-y) &=& x \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ y &=& 1 \end{array}\right.$$

   estan contingudes a la quàdrica.
3. Per a cada punt de l'hiperboloide passa una i només una recta de cadascuna de les 2 famílies
4. Dues rectes diferents de la mateixa família es creuen
5. Dues rectes qualssevol, una de cada família, es tallen en un punt o són paral·leles.

6. Les dues rectes que passen per un punt estan contingudes en el pla tangent a la quàdrica en aquest punt, i

7. La intersecció d'aquest pla tangent amb la quàdrica està formada per aquestes dues rectes.

257.– Feu el mateix problema anterior per provar que el paraboloide hiperbòlic és una quàdrica reglada, amb les mateixes propietats.
(Proveu que l'equació del paraboloide en una certa referència és $xy = z$.)

258.– *Feixos lineals de quàdriques*
Si $Q_1 = 0, Q_2 = 0$ són les equaciones de dues quàdriques en una certa referència afí, es defineix el feix determinat per les dues quàdriques com el conjunt de quàdriques d'equació $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$, en variar λ, μ.
Proveu:

1. Tota quàdrica del feix conté la intersecció de Q_1 i Q_2.

2. Per tot punt $P \notin Q_1 \cap Q_2$ passa una quàdrica del feix.

Apliqueu-ho a trobar una cònica que passi pels punts $(-3,-1)$,$(-2,0)$, $(-1,2)$,$(1,-1)$,$(2,1)$.

259.– Donats P, Q, R tres punts del pla no alineats, siguin $r = 0$ l'equació de la recta PQ, $q = 0$ la de la recta PR, $p = 0$ la de la recta QR, i $l = 0$ la d'una recta per P.
Proveu que les còniques del feix $p \cdot l + \mu\, r \cdot q = 0$ passen totes per P, Q i R i tenen tangent l en P.
Apliqueu el problema anterior a trobar la cònica per $(-3,0), (-2,2), (-1,-1), (1,3)$ tangent en $(1,3)$ a la recta $y = 3$.

260.– Donats dos punts P,Q del pla i dues rectes $l = 0$, $r = 0$, que contenen respectivament P i Q, i diferents de la recta $m = 0$ que passa per P i Q, proveu que les còniques del feix $l \cdot r + \mu m^2 = 0$ passen totes per P i Q i tenen tangent l en P, i tangent r en Q.
Apliqueu el problema anterior a trobar la cònica per $(-1,2), (3,0), (0,-\frac{1}{2})$ i que en $(-1,2)$ té tangent $x + 1 = 0$ i en $(3,0)$ té tangent $x - 2y - 3 = 0$.

261.– Donada la el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, proveu:

1. La condició que ha de cumplir la recta $ux + vy = 1$ perquè intercepti una corda vista des d'el centre sota un angle de 90^o és

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

2. Proveu que les rectes que cumpleixen aquesta condició són les rectes tangents a una circumferència de centre el de l'el·lipse, de la qual es demana trobar el radi.

262.– Proveu que la secció del pla $x + 2y + z = 1$ amb la quàdrica

$$x^2 - 3y^2 - 9z^2 + 2xy - 12yz - 4x - 2y + 2z + 1 = 0$$

és una hipèrbola.

263.– Trobeu una quàdrica que passi per les còniques

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y^2 & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x - xz + z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

i pel punt $(1, 1, 1)$.

264.– Trobeu un paraboloide hiperbòlic tal que la seva secció per $z = 0$ sigui la cònica

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z = & 0 \\ x - x^2 + y & = & 0 \end{array} \right.$$

i que contingui les rectes $x = 1, y = 0$ i $x = 2z, y = 0$.

265.– Proveu que el con projectant des de l'origen de la intersecció de l'el·lipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

amb el pla $ux + vy + wz = 1$ és

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = (ux + vy + wz)^2.$$

266.– *Juny 1993*

1. Trobeu els centres de simetria, els eixos de simetria i els plans de simetria del cilindre de l'espai $\mathbb{R}^3$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
2. Trobeu els centres de simetria, els eixos de simetria i els plans de simetria de la quàdrica
$$9x^2 - 50y^2 + 16z^2 + 24xz + 30x + 40z + 50 = 0.$$

267.– *Febrer 1994*

En el pla euclidià es considera un hexàgon regular de vèrtexs consecutius A, B, C, D, E, F i centre O, i les referències $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\}$, i $\overline{\mathcal{R}}$ una referència rectangular d'origen O i primer vector base $\overrightarrow{OA}$.
Es demana:

1. Doneu les coordenades de tots els vèrtexs de l'hexàgon en les dues referències.

2. Es considera l'afinitat que transforma els punts O, A, B respectivament en els punts E, O, D. Proveu que és un desplaçament estudieu-lo.

3. Trobeu, en la referència $\overline{\mathcal{R}}$, l'equació de la simetria d'eix la recta DC.

4. Estudieu (sintèticament) el producte dels moviments dels dos apartats anteriors.

5. Es dóna la cònica en la referència $\mathcal{R}$
$$4x^2 + 5y^2 - 4xy - 8x + 4y = 0.$$
Es demana que la reduïu, classifiqueu, doneu tots els seus elements característics, i dibuixeu.

6. Es considera el con tangent a la cònica anterior de vèrtex D. Calculeu l'àrea del triangle format pel punt D i els dos punts de contacte del con amb la cònica.

268.– *Juliol 1994*

Donat l'el·lipsoide $\mathcal{Q}$ d'equació $x^2/3 + y^2/2 + z^2 = 2$, i el punt $P(1, 1, 1)$,

1. Trobeu l'equació de l'hiperplà polar, diguem-ne Π, de P respecte de $\mathcal{Q}$.

2. Determineu l'equació del pla $H = P \vee \Pi_\infty$.

3. Demostreu que H és l'únic pla tal que $C = H \cap \mathcal{Q}$ és una cònica centrada de centre P (useu la definició projectiva de centre).

4. Proveu que C és una el·lipse real i calculeu-ne l'àrea (per a classificar C podeu usar D_3 i d_2 calculats amb una equació de C respecte d'una referència arbitrària de H, però heu de tenir en compte que llavors la fórmula de l'àrea és $\pi\sqrt{\frac{gD_3^2}{d_2^3}}$, on g és el determinant de la matriu de la mètrica respecte de la mateixa referència).

269.– *Setembre 1994*

Trobeu l'angle format per les dues generatrius del con $yz + zx + xy = 0$ contingudes al pla $6x + 3y = 2z$.

270.– *Febrer 1995*

Es considera la quàdrica

$$7x^2 + 5y^2 - 3z^2 - 2\sqrt{3}xy + 28x - 4\sqrt{3}y + 18z + 1 - \mu = 0.$$

1. Si A és la matriu de la part quadràtica, calculeu una matriu ortogonal M tal que $M^t AM$ sigui diagonal.
2. Obteniu l'equació de la quàdrica en la referència definida per les equacions del canvi
$$(x\, y\, z)^t = M \cdot (x'\, y'\, z')^t$$
3. Relacioneu geomètricament (feu un dibuix) les dues referències.
4. Feu un canvi d'origen i obteniu l'equació reduïda de la quàdrica.
5. Dibuixeu la quàdrica per a $\mu = 24$, en l'última referència.
6. Classifiqueu-la segons els valors de μ.
7. Per quins valors de μ la quàdrica és reglada ?

271.– *Febrer 1995*

Sigui A la matriu d'una cònica projectiva en una certa referència, i $Y = [y_0, y_1, y_2]$ i $Z = [z_0, z_1, z_2]$ dos punts conjugats respecte la cònica que no pertanyen a aquesta. Siguin R i S els punts d'intersecció de la cònica amb la recta YZ.

1. Si escrivim els punts R i S de la forma $R = Y + \lambda Z$ i $S = Y + \mu Z$, calculeu els valors de λ i μ en funció de A, Y i Z.
2. Proveu que $[Y, Z; R, S] = -1$.
3. Deduïu que el centre d'una cònica centrada i no degenerada és el punt mitjà de qualsevol diàmetre.

272.– *Juny 1995*

Trobeu l'expressió general de les còniques centrades que passen pels punts $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ i tenen el seu centre al punt $(1/2, 0)$ (les coordenades cartesianes considerades són rectangulars).
Classifiqueu-les i digueu quina relació tenen les còniques degenerades d'aquesta família (si n'hi ha alguna) amb els quatre punts donats.

273.– *Setembre 1995*

Considerem la cònica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (ux + vy)^2$$

(referència cartesiana rectangular):

1. Classifiqueu-la en funció de a, b, u, v.

2. Considerem l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i la recta $ux + vy = 1$. Siguin A i B els punts d'intersecció de l'el·lipse i la recta. Proveu que l'equació de la cònica formada per la parella de rectes OA OB és $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (ux + vy)^2$.

274.– *Febrer 1996*

Es diu que dues circumferències són ortogonals quan les tangents en els punts comuns ho són. Proveu que la condició necessària i suficient perquè les circumferències de centres (a, b) i (a', b') (en referència rectangular) i radis respectius r i r' siguin ortogonals és

$$r^2 + r'^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2.$$

Expresseu aquesta condició quan les equacions de les circumferències són

$$x^2 + y^2 + 2A_i x + 2B_i y + C_i = 0, \qquad i = 1, 2.$$

275.– *Juny 1996*

Siguin r i s les tangents a una el·lipse en els extrems del seu eix major. Siguin M i N els punts d'intersecció d'una tangent arbitrària de l'el·lipse amb r i s. Proveu que la circumferència de diàmetre MN passa pels focus de l'el·lipse.

276.– *Juliol 1996*

Siguin (x, y, z) coordenades cartesianes rectangulars de l'espai euclidià.

1. Trobeu l'equació del con de vèrtex $V(0, 1, 2)$ i que talla el pla xy segons la circumferència de radi unitat amb centre l'origen.

2. Classifiqueu les còniques intersecció d'aquest con amb els plans que passen per la recta L d'equacions $y = z = 2$.

3. Interpreteu els resultats anteriors en termes de les interseccions del con, i dels plans que contenen la recta L, amb el pla yz.

277.– *Febrer 1997*

Donada (en referència rectangular) la quàdrica

$$Q : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 1 = 0$$

i el pla $\pi : 2x - y - 2z + 13 = 0$, es demana:

1. Proveu que la intersecció de Q amb π és una circumferència, i doneu-ne el centre i el radi.

2. Trobeu l'equació del con de centre el centre de Q i que conté la circumferència $Q \cap \pi$.

278.– *Maig 1997*

Considerem la quàdrica $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ i l'esfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sigui Π el pla tangent a $\mathcal{S}$ en el punt $P \equiv (0, \cos(\alpha), \sin(\alpha))$ i $L = \Pi \cap \{z = 0\}$. Siguin $v_1 = (1, 0, 0)$ i $v_2 = (0, -\sin(\alpha), \cos(\alpha))$.

1. Comproveu que $\mathcal{R} = [P; v_1, v_2]$ és una referència rectangular de Π i trobeu l'equació de L respecte de $\mathcal{R}$.
2. Trobeu l'equació de $C = \Pi \cap \mathcal{Q}$ en la referència $\mathcal{R}$.
3. Classifiqueu C segons els valors de α, suposant que $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.
4. Si C és no degenerada, i no és una circumferència, demostreu que P és un focus de C i que L és la seva directriu. Trobeu també l'excentricitat de C.
5. Proveu que les rectes polars respecte de $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{S}$ d'una recta continguda en el pla $\{z = 0\}$ coincideixen.
6. Trobeu la recta polar L^* de L respecte de $\mathcal{Q}$ i determineu les interseccions $L^* \cap \mathcal{S}$.

279.– *Juliol 1997*

Donats els punts $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(0, -1)$ (referència rectangular) i un punt P de la recta $x = 2$,

1. Demostreu que existeix una cònica única, $\mathcal{C}$, per A, B, C, D, P.
2. Trobeu l'equació de $\mathcal{C}$ i classifiqueu-la en funció de la posició de P.

280.– *Gener 1999*

Donada una referència cartesiana rectangular de l'espai euclidià de dimensió 3, considerem el tetràedre $OABC$ tal que $O = (0, 0, 0)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ i $C = (0, 0, c)$, on a, b, c són nombres reals positius.

1. Trobeu el centre, F, de l'esfera circumscrita al tetraàedre.
2. Proveu que la recta OF conté el baricentre, G, del triangle ABC.
3. Si $\mathcal{S}$ és una esfera que passa pels punts A, B, C, trobeu els punts A', B', C' en què $\mathcal{S}$ talla de nou les rectes OA, OB, OC, respectivament.
4. Demostreu que per a tot punt P de la recta OF es compleix que els vectors $P - A'$, $P - B'$ i $P - C'$ són ortogonals als vectors $B' - C'$, $C' - A'$ i $A' - B'$, respectivament.

5. Mostreu, finalment, que la intersecció de la recta OF amb el pla $A'B'C'$ és l'ortocentre, H, del triangle $A'B'C'$ (així, doncs, els punts O, F, G, H estan alineats).

281.– *Gener 1999*

Siguin A, B dos punts distints del pla projectiu $\mathbb{P}^2$, i siguin P i Q punts de $\mathbb{P}^2$ tals que $P \in AB$, $P \neq A, B$, i $Q \notin AB$. Es considera la família de còniques no degenerades que són tangents a AB en el punt P i a AQ en el punt Q. Cada cònica $\mathcal{C}$ de la família talla la recta BQ en el punt Q i en un altre punt $M = M_{\mathcal{C}}$. Considerem la recta tangent a $\mathcal{C}$ en el punt M, $L_{\mathcal{C}}$. Proveu que, en variar $\mathcal{C}$, les rectes $L_{\mathcal{C}}$ són concurrents en un punt.

282.– *Juliol 1999*

Trobeu el paraboloide que passa pel punt $(1, 0, -5)$, té per eix la recta $\{x = 0, y = z\}$, i talla el pla $z = 0$ segons la circumferència $\{z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$.

283.– *Juliol 2000*

Donada la paràbola $y^2 = x$ i tres dels seus punts $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(4, 2)$, proveu que:

1. Existeix un quart punt D de la paràbola que és concíclic amb A, B, C.
2. Existeix una segona paràbola que passa pels 4 punts A, B, C, D i té eix perpendicular al de la paràbola donada. Doneu també l'equació de l'eix, i les coordenades del focus, d'aquesta segona paràbola.
3. Proveu que els eixos de les dues paràboles es tallen en el baricentre dels quatre punts.

284.– *Gener 2001*

En el pla euclidià es dóna una paràbola que té paràmetre focal $p = 1$. Se sap que la seva equació en una referència $\mathcal{R}$ de vectors unitaris i que formen un angle α és

$$y^2 = 4x + 2\sqrt{2}y.$$

Es demana:

1. Calcular l'angle α.
2. Donar, en la referència $\mathcal{R}$, les coordenades del vèrtex i del focus de la paràbola i l'equació de la directriu.

   [Indicació: passeu a una referència cartesiana rectangular]

285.– *Juliol 2001*

Siguin r la recta $x + 2y = 0$ i C_α la família de còniques d'equacions:

$$(\alpha - 2)x^2 + (\alpha - 2)y^2 + 2xy + 2\alpha x = 0$$

1. Classifiqueu les còniques de la família en funció del paràmetre α.
2. Hi ha alguna paràbola de la família tangent a r?
3. Hi ha alguna hipèrbola de la família amb asímptota r?
4. Hi ha alguna el·lipse de la família amb centre sobre r?

286.– *Gener 2002*

Trobeu i classifiqueu la secció pel pla $z = 0$ del conjunt de rectes paral·leles a l'eix z tangents a la quàdrica

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 3xz + 2y - 3 = 0.$$

287.– *Juliol 2002*

Sigui $\mathcal{C}$ una cònica del pla projectiu i $\mathcal{Q}$ un quadrilàter complet. Suposem que dues parelles de vèrtexs oposats de $\mathcal{Q}$ són parelles de punts conjugats respecte $\mathcal{C}$. Demostreu que els vèrtexs de la tercera parella de vèrtexs oposats són també conjugats.

288.– *Juliol 2002*

Es dóna a l'espai afí la quàdrica d'equació

$$4x + yz + 3 = 0$$

en una referència afí $\mathcal{R}$.

1. Trobeu una referència afí $\mathcal{R}'$ en la qual l'equació de la quàdrica sigui
$$z = x^2 - y^2.$$
2. Doneu l'equació en $\mathcal{R}$ d'una recta r que passi per l'origen de $\mathcal{R}'$ i estigui continguda a la quàdrica.

289.– *Gener 2003*

Sigui a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ la quàdrica Q que té, en una referència projectiva $\mathcal{R}$, equació:

$$\xi_2^2 - 2\xi_4^2 + 2\xi_2\xi_3 - 2\xi_1\xi_4 = 0.$$

1. Digues quina és la classe projectiva de Q.
2. Suposem l'espai projectiu clausura d'un espai afí, i $\xi_1 + \xi_4 = 0$ l'equació, en $\mathcal{R}$, del pla de l'infinit. Demostreu que la part afí de Q és un paraboloide hiperbòlic i doneu l'equació de cada una de les dues rectes de l'infinit de Q.

3. Si el pla de l'infinit té equació $\xi_1 + k\xi_4 = 0$, classifiqueu la part afí de Q segons els valors de k.

290.– *Juliol 2004*

Considereu la quàdrica C d'equació (en coordenades cartesianes rectangulars)

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz + 2x - 2z + 1 = 0.$$

1. Mostreu que C és una paraboloide el·líptic.
2. Trobeu l'equació de l'eix de C.
3. Calculeu el vèrtex V de C i el pla tangent a C en el punt V.

291.– *Gener 2005*

Considerem la família de quàdriques C_λ de l'espai projectiu real

$$\xi_0^2 + 2\xi_0\xi_2 + \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_3 + 2\lambda\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Trobeu, si existeixen, els valors de λ per als quals la recta $\xi_0 = \xi_2 = 0$ és tangent a C_λ.

b) Trobeu, si existeixen, els valors de λ per als quals el pla $\xi_1 = 0$ és tangent a C_λ.

c) Classifiqueu projectivament la cònica $C_\lambda \cap (\xi_0 = 0)$.

d) Classifiqueu afinment la quàdrica $C_1 \setminus \{\xi_0 - \xi_1 = 0\}$ (és a dir, la quàdrica afí que s'obté quan $\lambda = 1$ i ens restringim a l'espai afí complementari del pla $\xi_0 - \xi_1 = 0$).

292.– *Juliol 2005*

Considerem l'el·lipsoide d'equació, en referència rectangular,

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 - 2z = 0.$$

Calculeu els valors de γ per als quals la projecció de l'el·lipsoide en la direcció del vector $\vec{v} = (1, 0, \gamma)$ dóna una ombra circular en el pla $z = 0$.

293.– *Gener 2006*

Sigui Q una cònica no degenerada del pla afí que conté els vèrtexs d'un paral·lelogram $ABCD$.

1. Demostreu que Q té centre, i determineu-lo.

2. Demostreu que hi ha infinites el·lipses circumscrites al paral·lelogram.

3. Proveu que hi ha una única el·lipse $\mathcal{E}$ circumscrita al paral·lelogram tal que la recta tangent a $\mathcal{E}$ en A és paral·lela a la diagonal BD, i que la tangent a $\mathcal{E}$ en C és també paral·lela a la diagonal BD.

294.– *Juliol 2006*

Escriviu l'equació de la quàdrica que és tallada pel pla $x = 0$ segons la cònica $\{y^2 + z^2 - 2y + 1 = 0,\ x = 0\}$, és tangent al pla de l'infinit en el punt de l'infinit de l'eix x, i passa pel punt $(1, 0, 0)$. Classifiqueu-la.

295.– *Gener 2007*

Es considera un triangle equilàter de costat 2, amb vèrtexs ABC en sentit antihorari; denotem per M el pumt mitjà del segment AC. Sigui $\mathcal{R}$ la referència afí $A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$.

a) Trobeu l'equació en la referència $\mathcal{R}$ de la paràbola de focus C i directriu la recta AB.

b) Trobeu les equacions en la referència $\mathcal{R}$ del gir de centre B i angle $90°$.

296.– *Gener 2007*

Es dóna la cònica d'equació $ax^2 + by^2 = 1$ en una certa referència afí $\mathcal{R}$ i un punt del pla $P(x_0, y_0)$.

a) Trobeu el punt de l'infinit de la recta polar de P respecte de la cònica donada, en la referència projectiva $\overline{\mathcal{R}}$ associada a $\mathcal{R}$.

b) Demostreu que la corda de la cònica que té punt mitjà el punt P té equació $ax_0x + by_0y = ax_0^2 + by_0^2$.

297.– *Gener 2008*

(a) [3p.] Sigui $F(x, y) = 0$ l'equació d'una hipèrbola $\mathcal{H}$ en coordenades rectangulars. Si (x_0, y_0) és el centre d'$\mathcal{H}$, proveu que l'equació del con asimptòtic d'$\mathcal{H}$ és $F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0$.

(b) [2p.] Trobeu l'equació de la hipèrbola que passa pel punt $(1, -1)$ i té asímptotes les rectes $2x + y - 3 = 0$ i $x = y$.

(c) [5p.] Proveu que l'àrea del triangle determinat per una tangent qualsevol a una hipèrbola i les seves asímptotes és constant. Expresseu aquesta àrea en termes d'invariants euclidians.

Llocs geomètrics (còniques i quàdriques)

Nota: les referències no explicitades es consideraran rectangulars orientades positivament.

298.– Trobeu el lloc geomètric dels centres de la fam¡lia de còniques

$$x^2 + y^2 + 2axy - 2x - 1 = 0.$$

299.– Proveu que el lloc geomètric dels punts del pla tals que les tangents des d'ells a la el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

són perpendiculars, és la circumferència $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

300.– Proveu que el lloc geomètric dels ortocentres dels triangles inscrits en una hipèrbola equilàtera és la mateixa hipèrbola.

301.– Trobeu el lloc geomètric dels centres dels quadrats que tenen un vèrtex en un punt fix i un altre sobre una el·lipse.

302.– Trobeu el lloc geomètric dels punts del pla tals que les tangents des d'ells a una paràbola són perpendiculars.

303.– Proveu que la superf¡cie engendrada a $\mathbb{R}^3$ per una el·lipse de semieixos proporcionals a 2 i a 3 que es mou mantenint els seus eixos paral·lels als OX i OY i el seu centre sobre l'eix OZ, mentre va "recolzant-se"en la hipèrbola

$$\{x^2 - 9z^2 = 1,\ x = y\}$$

és un hiperboloide d'un full.

304.– Un triedre trirectangle mòbil de vèrtex P es mou a l'espai de manera que dos de les seves arestes estan sempre en dos plans donats (cadascuna en un). Trobeu el lloc geomètric de la tercera aresta.

305.– Proveu que el lloc geomètric dels punts de l'espai que equidisten de dues rectes que es creuen és un paraboloide hiperbòlic.

306.– Estudieu les còniques que s'obtenen de la intersecció del pla $z = 0$ amb el con tangent a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ des del punt (a, b, c).

307.– Trobeu el lloc geomètric dels punts P de l'espai tals que el con de vèrtex P tangent a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, en tallar-lo amb el pla $z = 0$, dóna una paràbola.

308.– En una recta variable de l'espai hi ha 4 punts fixats. Proveu que quan cadascun dels tres primers es mou en una cara d'un triedre trirectangle, aleshores el quart descriu un el·lipsoide.

309.– Donat un tetràedre $abcd$, trobeu el lloc geomètric dels punts de les rectes que tallen les dues arestes oposades ab, cd en punts p, q (resp.) tals que $(a, b, p) = (c, d, q)$.

310.– *Juny 1993*

Donades dues rectes que es creuen, per una d'elles es traça un pla variable que talla l'altra en un punt A. Proveu que la superf¡cie generada per la perpendicular per A al pla considerat és una quàdrica i classifiqueu-la.

311.– *Febrer 1994*

En el pla projectiu es dóna un paral.lelogram de vèrtexs consecutius 4 punts propis A, B, C, D.

1. Proveu que hi ha una referència af¡ en la qual les coordenades dels punts A, B, C, D són , respectivament, $(1, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$.
2. Trobeu el lloc geomètric dels punts propis M tals que la raó doble de les rectes MB, MD, MC, MA és constant.
3. Estudieu el lloc geomètric segons els valors de la constant.

312.– *Juny 1994*

A l'espai euclidià de dimensió 3, considerem les rectes r i s d'equacions respectives $\{y = 0, z = 0\}$ i $\{y = c, z = mx\}$ ($c, m \in \mathbb{R}$ i referència rectangular).

1. Demostreu que el lloc geomètric de la intersecció dels parells de plans perpendiculars, un per r i l'altre per s, és una quàdrica.
2. Classifiqueu-la segons les posicions relatives de r i s.

313.– *Juliol 1994*

Una recta L de pendent $m \neq 0$ talla els eixos Ox i Oy d'una referència rectangular en dos punts A i B, respectivament. Donats $C(2, 3)$ i $D(3, 4)$, es demana:

1. Lloc geomètric del punt d'intersecció $M = (AC) \cap (BD)$ quan la recta L es desplaça paral·lelament a s¡ mateixa.
2. Classifiqueu la figura obtinguda segons els valors de m.

314.– *Setembre 1994*

Estudieu el lloc geomètric dels punts de l'espai euclidià tals que la raó de distàncies a un punt i a una recta donats és una constant $k > 0$, i classifiqueu-lo segons els valors de k.

315.– *Juny 1995*

Donada la quàdrica

$$x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy = kz$$

1. Classifiqueu-la segons els valors reals de k.
2. Considereu el cas $k = -1$ i els punts $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$. Trobeu l'equació del lloc geomètric dels baricentres dels triangles ABC, on C és un punt variable de la quàdrica, i proveu que aquest lloc geomètric és una quàdrica semblant a la primera.

316.– *Febrer 1996*

Donades dues rectes r i s a l'espai que no es tallen, trobeu el lloc geomètric dels punts de les rectes que tallen r i s i són perpendiculars a r, i classifiqueu-lo.

317.– *Juny 1996*

Sigui r la recta donada per les equacions $y = b, x = mz$ (en referència cartesiana rectangular). Trobeu el lloc geomètric de r quan gira al voltant de l'eix Oz i classifiqueu-lo segons els valors de b i de m.

318.– *Gener 1998*

Sigui r la recta $\{y = 1, z = mx\}$. Trobeu i classifiqueu el lloc geomètric dels punts que s'obtenen projectant la recta r sobre els plans del feix d'eix Ox.

319.– *Juliol 1998*

En l'espai euclidià de dimensió 3, siguin Π_1 el pla $x = y$, Π_2 el pla $y = z$, i M el punt $(0, q, 0)$, on (x, y, z) són coordenades cartesianes rectangulars. Per a cada punt P, denotem les seves projeccions ortogonals sobre Π_1 i Π_2 per P_1 i P_2, respectivament. Trobeu el lloc geomètric dels punts P tals que MP_1 i MP_2 són ortogonals i classifiqueu-lo segons els valors de q.

320.– *Gener 2000*

Es consideren els triangles del pla euclidià tals que les rectes definides per dos dels seus costats són fixes. Suposant que la longitud del tercer costat és una constant l, es demana que trobeu:

1. El lloc geomètric dels baricentres d'aquests triangles (cal especificar de quina figura es tracta).

2. La condició necessària i suficient perquè auquest lloc sigui una circumferència.

321.– *Juliol 2001*

Sigui ABC un triangle equilàter del pla euclidià $\mathbb{A}_2$.

1. Determineu el conjunt

$$M = \{\ m \in \mathbb{R} \mid \exists G_m \in \mathbb{A}_2\ :\quad m\,\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{G_mB} + \overrightarrow{G_mC} = \overrightarrow{0}\ \}$$

2. Trobeu i dibuixeu el lloc geomètric dels punts G_m, en variar $m \in M$.
3. Trobeu i dibuixeu el lloc geomètric dels punts $P \in \mathbb{A}_2$ tals que:

$$2\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\overline{AB}^2$$

322.– *Juliol 2002*

Es dóna un triangle equilàter de costat a. Es considera el lloc geomètric dels punts del pla euclidià tals que la suma dels quadrats de les seves distàncies als tres vèrtexs del triangle val λa^2. Estudieu el lloc en funció de λ.

323.– *Gener 2004*

Sigui C una cònica amb centre i V i V' els extrems d'un eix real de C. Considereu quadrilàters variables $PVQV'$ amb $Q \in C$ i amb angles rectes als vèrtexs V i V'.

1. Demostreu que el lloc geomètric del punt P està contingut en una cònica C'.
2. Determineu la classe afí i, si escau, el centre, els eixos i els semiexios de C'. Mostreu també $C' = C$ només quan C és una circumferència o una hipèrbola equilàtera.

324.– *Gener 2005*

1. Referides a coordenades rectangulars, ens donen la circumferència

$$C: \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2$$

i la recta

$$r: \quad y = c.$$

Per a cada punt P de C tracem una recta r_P perpendicular a r; sigui P^* el punt $r \cap r_P$. Trobeu el lloc geomètric del punt mitjà de P i P^* quan P recórre C. [3p.]

2. Sigui C una cònica i r i s rectes arbitràries no paral·leles. Per a cada punt P de C tracem la recta s_P paral·lela a s per P; sigui P^* el punt $r \cap s_P$. Demostreu que el lloc geomètric del punt mitjà de P i P^*, quan P recórre C, és una cònica del mateix tipus afí que C. [7p.]

325.– *Gener 2007*

Siguin r i s les rectes d'equacions $y = z = 0$ i $x = z - 1 = 0$, respectivament, i $f : r \longrightarrow s$ una afinitat. Demostreu que el lloc dels punts de les rectes determinades pels punts A i $f(A)$, quan A recorre r, és una quàdrica, i classifiqueu-la.

326.– *Juliol 2007*

Siguin una paràbola del pla afí, A un dels seus punts i r una recta no paral·lela a l'eix de P.

a) Demostreu que els punts mitjans dels extrems de les cordes $\mathcal{P}$ paral·leles a r descriuen una recta.

b) Si X és un punt variable de $\mathcal{P}$, demostreu que els punts mitjans de les cordes AX descriuen una cònica. Classifiqueu-la i descriviu la seva posició respecte de $\mathcal{P}$.

327.– *Juliol 2008*

Considerem els punts $B(-1,0)$ i $C(1,0)$ i la recta r d'equació $ax + by = b$, que suposarem que no passa per B ni per C, és a dir, que $a \neq \pm b$.

Trobeu l'equació del lloc geomètric de l'ortocentre d'un triangle variable ABC quan A descriu la recta r, classifiqueu el lloc en funció dels valors de a i b, i expliqueu el significat geomètric del lloc amb relació a les dades B, C i r.