Vol. XV, N$^{\underline{o}}$ 2, Diciembre (2007)
Matemáticas: 91–102

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Teoría de Galois diferencial: una aproximación

Primitivo B. Acosta Humánez
Universitat Politécnica de Catalunya

Jesús Hernando Pérez Alcázar
Universidad Sergio Arboleda

Recibido Nov. 20, 2006 Aceptado Oct. 8, 2007

Abstract

This paper is a short introduction to differential galois theory, also known as Picard - Vessiot theory. We begin by comparing the classical version of the Galois theory with the differential version, until arriving to Liouville's problem, similar to the adjunction of roots in the classical version.

Keywords: Differential Fields, Liouvillian extensions, Picard - Vessiot theory

MSC(2000): Primary: 12H05, Secondary: 34M15

Resumen

En este artículo presentamos una descripción básica de la teoría de Galois diferencial, también conocida como teoría de Picard - Vessiot. Empezamos comparando la versión clásica de la teoría de Galois con la versión diferencial hasta llegar al problema de Liouville, análogo de la adjunción de soluciones en la versión clásica. En la presentación se utiliza el enfoque de la Teoría de Modelos, se define la d-clausura de un cuerpo diferencial y se demuestra la existencia de d-clausuras.

Palabras y frases claves: Cuerpos diferenciales, extensiones Liouvillianas, teoría de Picard - Vessiot, cuerpo diferencialmente cerrado

1 Introducción

Este artículo que ahora presentamos, es una versión mejorada de las dos sesiones sobre Teoría de Galois Diferencial realizadas en Altencoa 2004. En tales sesiones se pretendía ofrecer a los asistentes una mirada general, inspirada en la Teoría de Modelos de la TGD por medio de las definiciones básicas y teoremas principales de la también conocida como teoría de Picard - Vessiot. Actualmente la TGD ha tomado mucha relevancia en investigaciones matemáticas y es un tema apasionante para los analebristas (estudiosos de la relación análisis - álgebra).

Nuestro interés por estudiar la Teoría de Galois Diferencial, que en adelante notaremos TGD, surgió en el segundo curso de Lógica de la Universidad Sergio Arboleda, orientado por el segundo autor. En ese entonces, primer semestre de 2002, el libro guía era el Poizat (véase [14]), que contenía un capítulo dedicado a los cuerpos diferenciales y que el primer autor debía clarificar ante el curso mediante una exposición. El tema resultó apasionante y fue así como conseguimos bibliografía complementaria y establecimos contactos con algunos investigadores del tema que nos enviaban artículos, referencias y algunas sugerencias.

Luego, por iniciativa del segundo autor, se conformó en el año 2003 un seminario denominado *Mecánica y Teoría de Galois Diferencial*. En este seminario participaron estudiantes y profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda. Posteriormente, con la participación del profesor Juan J. Morales Ruiz en el *Primer Encuentro Internacional de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda*, el seminario se enriqueció significativamente.

Al final del documento damos unas referencias para motivar a los lectores que quieran profundizar en el tema.

1.1 Nociones Preliminares

Iniciamos presentando una ecuación pitagórica para mostrar la relación que existe entre las dos teorías de Galois básicas:

$$\frac{\text{Teoría de Galois Clásica}}{\text{Cuerpos}} = \frac{\text{Teoría de Galois Diferencial}}{\text{Cuerpos Diferenciales}}$$

Mientras la teoría de Galois clásica tuvo entre sus grandes exponentes a Evaristo Galois, Camille Jordan, Emil Artin, entre otros, la TGD fue desarrollada por Emile Picard, Ernest Vessiot, Joseph F. Ritt, Ellis Kolchin, entre otros. Esta nueva teoría también recibió el nombre de *Teoría de Galois de Ecuaciones Diferenciales*.

Ahora, dando por hecho que el lector está familiarizado con la teoría de Galois clásica, podemos centrarnos en la TGD.

Definición 1.1. *Un anillo diferencial $\mathcal{R}$, es un anillo (conmutativo con unidad) provisto de una operación de derivación d.*

$$d(x+y) = dx + dy \qquad\qquad d(x \cdot y) = x \cdot dy + dx \cdot y \tag{1}$$

Ejemplo. El anillo $\mathcal{R}[x]$ de los polinomios en una indeterminada x con coeficientes en el anillo $\mathcal{R}$, con el operador $d(x^n) = nx^{n-1}$. Por comodidad, supondremos que el anillo tiene característica cero, es decir,

$$n \cdot 1 = 1 + ... + 1 = 0 \Rightarrow n = 0$$

Ejemplo. Dado un anillo diferencial $\mathcal{R} = (R, +, -, \cdot, d, 0, 1)$ y un conjunto X no vacío, el anillo diferencial $R\{X\}$ se define en la siguiente forma:

1. Para cada elemento $x \in X$, se introducen indeterminadas

$$x, dx = x', d^2x = x'', \ldots, d^nx = x^{(n)}, \ldots$$

y se considera el anillo

$$R\{x\} = R\big[(x, x', x'', ..., x^{(n)}, ...)| \quad x \in X\big].$$

2. Para cada $x \in X$, se define el operador

$$d(x^{(n)}) = x^{(n+1)}$$

y se extiende algebraicamente, procurando que se cumplan las propiedades de la ecuación (1).

Definición 1.2. *Si* $\mathcal{R} = (R, +, -, \cdot, d, 0, 1)$ *es un anillo diferencial,* $C_R = \{x \in R \mid dx = 0\}$ *es un subanillo de* R *y se llama el subanillo de las constantes o simplemente, las constantes de* $\mathcal{R}$.

Ejemplo. Las constantes del anillo $R[x]$ son los elementos constantes de R.
Ejemplo. Las constantes del anillo $R\{X\}$, donde R es un anillo diferencial y X un conjunto no vacío, son los elementos constantes de R.
Ejemplo. Si K es un cuerpo sin derivación, las constantes del anillo $K[X]$ del primer ejemplo es el conjunto K.

Ahora supongamos que $\mathcal{R} = (R, +, -, \cdot, d, 0, 1)$ es un anillo diferencial y que R no tiene divisores de cero, entonces, el cuerpo de fracciones $Q(\mathcal{R})$ admite un operador de derivación que extiende al operador d. Esta extensión es única y está dada por

$$d\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{da \cdot b - a \cdot db}{b^2}. \tag{2}$$

La ecuación (2) conduce naturalmente a la noción de cuerpo diferencial: $Q(\mathcal{R})$ es un cuerpo diferencial.

De manera natural, las congruencias en un anillo diferencial $\mathcal{R}$ están determinadas por los ideales diferenciales; es decir, aquellos ideales para los cuales $d(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. Por ejemplo, si R es anillo sin derivación e I es un ideal en R, entonces, $I\{x\}$ es un ideal diferencial en $R\{x\}$.

Los homomorfismos entre anillos diferenciales serán aquellos homomorfismos entre anillos que respetan la derivación; es decir,

$$f(x)' = f(x').$$

Estas funciones se llamaran también d-homomorfismos o d-morfismos.

De manera también natural, existe el concepto de $R-$álgebra diferencial y por supuesto, $R-$módulo diferencial.

Definición 1.3. *Si* $\mathcal{R} = (R, +, -, \cdot, d, 0, 1)$ *es un anillo diferencial, entonces un* $\mathcal{R}-$*módulo diferencial* $\mathcal{M} = (M, +, -, d, 0, *)$ *es un grupo abeliano* $(M, +, -, 0)$ *provisto de una estructura de* $(R, +, -, \cdot, 0, 1)-$ *módulo y de un operador* $1-$*ario notado también* d *tal que*

$$d(x + y) = dx + dy, \ \ x, y \in M \tag{3}$$

$$d(a * x) = da * x + a * dx, \ \ a \in R, x \in M \tag{4}$$

donde $*$ *es la operación entre escalares y vectores.*

Si además en M existe una multiplicación $\cdot$ que convierte a $\mathcal{M}$ en una $\mathcal{R}-$álgebra, entonces, debe cumplirse que

$$d(a \cdot b) = a \cdot db + da \cdot b, \ \ a, b \in M \tag{5}$$

Ejemplo. Si $\mathcal{R} = (R, +, -, \cdot, d, 0, 1)$ es un anillo diferencial, R^n es un $\mathcal{R}-$módulo diferencial con el operador

$$d(x_1, ..., x_n) = (dx_1, ..., dx_n)$$

Ejemplo. $\mathcal{M}_n(R)$, el anillo de las matrices $n \times n$ con entradas en el anillo diferencial R, es una $R-$álgebra diferencial.

Definición 1.4. *Si $f \in K\{x\}$, donde K es un cuerpo y x una indeterminada, el orden de f es el mayor $n \in \mathbb{N}$ tal que $f = ... + a(x^{(n)})^k + ...$, con $a \in K$, $a \neq 0$ y $k \geq 1$.*

Ejemplo. $(x'')^2 + x$ es de orden 2 (y de grado 2).

Definición 1.5. *Un cuerpo diferencial K es d- cerrado (cerrado diferencialmente) si y solo si, para todo $f, g \in K\{x\}$, tales que orden $(g) <$ orden (f), existe $a \in K$ de tal manera que $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$.*

Un cuerpo d-cerrado es algebraicamente cerrado. En efecto, si $f(x)$ es un polinomio en el cual no figuran derivaciones entonces tiene orden 0 y por tanto no existen polinomios de orden menor.

2 Teoremas fundamentales

Teorema 2.1. *Todo cuerpo diferencial está contenido (como sub - estructura) en un cuerpo $d-$ cerrado.*

Teorema 2.2 (Hilbert Nullstellensatz)**.** *Si k es un cuerpo diferencial y Σ es un sistema finito de ecuaciones e inecuaciones diferenciales consistente (tiene solución en alguna extensión diferencial L de k), entonces, Σ tiene solución en cualquier extensión d-cerrada de k.*

Como ilustración haremos la demostración del Teorema 2.1. basada en en los siguientes dos lemas:

Lema 2.3. *Si $\mathcal{R} = (R, +, -, \cdot, 0, 1, d)$ es un anillo diferencial y $f \in R\{x\}$ es un polinomio diferencial irreducible, entonces, si $S = \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}$, y $n =$orden(f),*

$$J = \{g \in R\{x\} \mid S^k g \in R\{x\} \cdot f \text{ para algún } k \geq 0\} \tag{6}$$

es un ideal diferencial primo.

Esto implica que $R\{x\}/J$ es un anillo diferencial sin divisores de cero, en el cual f tiene una raíz. Existe, entonces, un cuerpo diferencial que contiene a R y en el cual f tiene una solución.

Lema 2.4. *Si $f \in k\{x\}$, k cuerpo diferencial, existe un cuerpo diferencial F que extiende a k y tal que en F existe a de manera que $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$ para todo $g \in k\{x\} - \{0\}$ con orden $(g) <$orden (f).*

Demostración. Sea n = orden(f). Podemos suponer que f es irreducible en el sentido del anillo $k\{x\}$ (si f no lo fuera, tomaríamos uno de sus factores irreducibles) . Sea K el cuerpo que se obtiene a partir de k añadiendo primero $a, a', ...,$ $a^{(n-1)}$ indeterminadas y luego añadimos una solución y de la ecuación

$$f(a, a', ..., a^{(n-1)}, y) = 0$$

Llamemos $a^{(n)}$ a esta solución y definamos una derivación δ en K, mediante las relaciones: δ en k es la derivación en k,

$$\delta a = a', \delta a' = a'', ..., \delta a^{(n-1)} = a^{(n)},$$

$$\delta a^{(n)} = \frac{-f^*\left(a, ..., a^{(n)}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}\left(a, ..., a^{(n)}\right) \cdot \delta\left(a^{(i)}\right)}{\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\left(a, ..., a^{(n)}\right)}. \tag{7}$$

Como $a, a', ..., a^{(n-1)}$ son algebraicamente - diferencialmente independientes, a no puede ser solución de un polinomio diferencial de orden menor que n. □

Observación 2.5. *En la expresión* (7) f^* *es el polinomio*

$$f^*(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum d(a_i) m_i,$$

donde $f = \sum a_i m_i$ *para* $a_i \in k$ *y* m_i *monomios diferenciales.*

Veamos ahora la Demostración del Teorema 2.1

Demostración. Sea α un número ordinal tal que α es el ordinal de un cierto buen orden sobre $k\{x\}$. Aplicando los lemas anteriores, se define, por inducción transfinita K_β, un cuerpo diferencial, para cada $\beta < \alpha$ y de tal manera que:

1. Si $\beta, \gamma \in \alpha$ y $\beta < \gamma$, K_β es un subcuerpo diferencial de K_γ.
2. K_0 es el cuerpo diferencial para f_0 establecido por el lema 2.4
3. $K_{\beta+1}$ es el cuerpo diferencial estipulado por el lema 2.4 para $f_\beta \in k\{x\} \leq K_\beta\{x\}$.
4. $K_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} K_\gamma$ para β ordinal límite.

El cuerpo diferencial $K = \bigcup_{\beta\in\alpha} K_\beta$ tiene las siguientes propiedades:

1. K es una extensión de k.
2. Si $f \in K\{x\}$, existe $a \in K$ tal que $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$ para todo polinomio $g \in K\{x\}$ de orden menor que el orden de f y $g \neq 0$.

Por inducción finita definamos ahora los siguientes cuerpos diferenciales $K_0 = k$, $K_1 = K, ...,$ y K_{n+1} un cuerpo diferencial tal que si $f \in K_n[x]$, existe $a \in K_{n+1}$ de manera que $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$ para $g \in K_n\{x\} - \{0\}$, de orden menor que el orden de f, lo cual se puede hacer por el lema 2.4 y tomamos $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ es un cuerpo diferencial d-cerrado. $\square$

Definición 2.6. *Un polinomio $L \in k\{x\}$, de grado 1 y de orden n, es decir, de la forma*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x + a_n, \tag{8}$$

que además es mónico en $x^{(n)}$ lo llamaremos operador diferencial lineal. Si $a_n = 0$, diremos que L es un operador diferencial lineal homogéneo.

Definición 2.7. *Una ecuación diferencial lineal es una ecuación de la forma $L = 0$, donde L es un operador lineal en $k\{x\}$ y de tal manera que, se debe encontrar $a \in K$, donde K es un cuerpo diferencial que extiende a k y $L(a) = 0$.*

Lema 2.8. *Si K es una d-clausura de k, entonces C_K es una extensión algebraica de C_k. En particular, si C_k es algebraicamente cerrado, entonces $C_K = C_k$.*

Lema 2.9. *Si K es una d-clausura de k entonces, todo elemento de K es algebraico sobre k.*

Definición 2.10. *Para $a_0, ..., a_n \in k$, k cuerpo diferencial, se define*

$$W(a_0, ..., a_n) = W = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_n \\ a_0' & a_1' & ... & a_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{(n)} & a_1^{(n)} & ... & a_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Lema 2.11. *Para $x_0, ..., x_n \in k$, $\{x_0, ..., x_n\}$ es linealmente independiente sobre C_k si y solo si $W \neq 0$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supóngase que $c_0x_0 + ... + c_nx_n = 0$, $c_i \in C_k$ no todos nulos. Derivando n veces se tiene que

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \\ \vdots \\ x_i^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y así } W(x_0, ..., x_n) = 0.$$

$\Rightarrow$) Por inducción sobre n. Supóngase que $W(x_0, ..., x_n) = 0$. Existen $a_i \in k$, no todos nulos y tales que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \\ \vdots \\ x_i^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $a_0 = 1$. Por hipótesis de inducción tenemos que $W(x_1, ..., x_n) \neq 0$

$$x_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(j)} = 0, j < n. \text{ Derivando para } j < n \text{ se tiene}$$

$$x_0^{(j+1)} + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(j+1)} + \sum_{i=1}^{n} d(a_i) x_i^{(j)} = 0, \text{ y así}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d(a_i) x_i^{(j)} = 0, \text{ lo que implica que } d(a_i) = 0;$$

porque $W(x_1, ...x_n \neq 0)$; es decir, $a_i \in C_k$. □

Teorema 2.12. *Si $a_i \in K \supseteq k, i = 0, 1, ..., n$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $L(a_i) = 0$, donde L es un operador lineal homogeneo sobre k, entonces $W(a_0, ..., a_n) = 0$ y por lo tanto $\{a_0, a_1, ..., \ a_n\}$ son dependientes sobre C_k.*

Demostración. Como $a_i^{(n)} = -c_0 a_i^{(n-1)} - ... - c_{n-1} a_i$, porque se satisfacen $L(a_i) = 0$, entonces,

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_n \\ a_0' & a_1' & ... & a_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sum_{j=1}^{n-1} c_j a_0^{(j)} & -\sum_{j=1}^{n-1} c_j a_1^{(j)} & ... & -\sum_{j=1}^{n-1} c_j a_n^{(j)} \end{pmatrix}.$$

□

Lema 2.13. *Supóngase que $K \supset k$ es una extensión d-cerrada del cuerpo diferencial k. En K existen $x_1, ..., x_n$ soluciones de la ecuación homogénea $L = 0$, independientes sobre C_k.*

Demostración. Dados $x_1, ..., x_m$ con $m < n$, entonces es posible encontrar $x_{m+1} \in K$ tal que

$$L(x_{m+1}) = 0, \ W(x_1, ..., x_{m+1}) \neq 0.$$

Esto es así porque, el orden de $W(x_1, ..., x_m, x_{m+1})$ en x_{m+1} es menor que n. □

En total tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.14. *Si K es una d-clausura del cuerpo diferencial k entonces, en K existen $x_1, \ldots, x_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $L = 0$. El conjunto $x_1, ..., x_n$ se denomina* sistema fundamental de soluciones de $L = 0$.

Las soluciones de la ecuación no homogénea $L(x) = b$, con $b \in k$ pertenecen al espacio afín $y + V$, donde y es una solución particular y V es el C_k- espacio vectorial de las soluciones de $L = 0$.

Definición 2.15. *Sea K/k una extensión de cuerpos diferenciales. Se dice que K es una extensión de Picard - Vessiot de k, si existe una ecuación diferencial lineal homogénea $L = 0$, con coeficientes en k y $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq K$ un sistema fundamental de soluciones tal que*

$$K = k\langle x_1, ..., x_n\rangle \text{ y } C_K = C_k,$$

donde $k\langle x_1, ..., x_n\rangle$ es el menor cuerpo diferencial que contiene a k y a $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y además está contenido en una clausura diferencial de k.

Teorema 2.16. *Sea k un cuerpo diferencial tal que C_k es algebraicamente cerrado y sea $f = 0$ una ecuación diferencial homogénea sobre k. Existe, entonces, una úinca extensión K/k de Picard - Vessiot para f. (La unicidad debe entenderse salvo isomorfismo sobre k).*

Demostración. Sea F una d-clausura de k. Como C_F es algebraico sobre C_k y C_k es algebraicamente cerrado, entonces, $C_F = C_k$. En F existe un sistema fundamental de soluciones para $f(x) = 0$.
Se define, entonces, $K = k\langle x_1, ..., x_n\rangle$ como el mínimo cuerpo diferencial que contiene a k y a $\{x_1, ..., x_n\}$. Supóngase que K_1 es otro cuerpo que es generado por un sistema fundamental de soluciones de $f(x) = 0$. Sea F_1 la d-clausura de K_1. Entonces $C_{F_1} = C_{K_1} = C_k$. Como F es una d-clausura de k, se puede sumergir F en F_1. Si $y_1, ..., y_n$ es un sistema fundamental de soluciones de $f(x)$ en F_1 tal que $K_1 = k\langle y_1, ..., y_n\rangle$ entonces, cada $x_i \in k\langle y_1, ..., y_n\rangle$ y cada $y_i \in k\langle x_1, ..., x_n\rangle$ y así $K_1 = K$. □

Definición 2.17. *La extensión K, única salvo isomorfismos se llama, La extensión de Picard - Vessiot de k para $f(x) = 0$.*

Definición 2.18. *Supóngase que K es un cuerpo diferencial y que k es un subcuerpo diferencial de K. $G(K/k)$ es el conjunto de todos los d-endomorfismos de K tales que todos los elementos de k son puntos fijos (Grupo de Galois de K sobre k). En lo que sigue aparecerán algunos ejemplos.*

El siguiente problema ha sido uno de los motores fundamentales en la teoría de Galois Diferencial.
Problema. ¿Cuales son los grupos G tales que, existe una pareja de cuerpos diferenciales (K, k) de tal manera que K es una extensión de Picard-Vessiot de k y $G(K/k) = G$?
Ejemplo. Sea k_0 un cuerpo diferencial cualquiera $X_1, ..., X_n$ variables y $K = k_0\{X_1, ..., X_n\}$. Llamemos C al cuerpo $C_{k_0} = C_K$.
El grupo $Gl_n(C)$ esta inmerso en $G(K/k_0)$ pues para cada $A = (a_{ij}) \in Gl_n(C)$ la correspondiencia

$$\sigma_A(X_i^{(m)}) = \sum a_{ij} X_i^{(m)},$$

produce un elemento de $G(K/k_0)$. LLamemos k al cuerpo fijo de $Gl_n(C)$; esto implica que $G(K/k) = Gl_n(C)$.

Veamos que (K, k) es una extensión de Picard-Vessiot. Se define

$$L(Y) = \frac{W(Y, X_1, ..., X_n)}{W(X_1, ..., X_n)}$$

que es un polinomio diferencial en Y con coeficientes en $k_0\{x_1, ..., x_n\}$. Si $A \in Gl_n(C)$, entonces,

$$W(\sigma_A(X_1), ..., \sigma_A(X_n)) = \begin{vmatrix} \sigma_A(X_1) & ... & \sigma_A(X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_A^{(n)}(X_1) & ... & \sigma_A^{(n)}(X_n) \end{vmatrix}$$

$$\left| A \cdot \begin{pmatrix} X_1 & ... & X_n \\ \vdots & & \\ X_1^{(n)} & ... & X_n^{(n)} \end{pmatrix} \right| = |A| W(X_1, ..., X_n).$$

$$W(Y, \sigma_A(X_1), ..., \sigma_A(X_n)) = \left| \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & X_1 ... & X_n \\ \vdots & & \vdots \\ Y^{(n)} & X_1^{(n)} ... & X_n^{(n)} \end{pmatrix} \right|$$
$$= |A| W(Y, X_1, ..., X_n).$$

En consecuencia $L(Y)$ es invariante para cada $A \in Gl_n(C)$ y así, $L(Y) \in k\{Y\}$. Claramente $X_1, ..., X_n$ es un sistema fundamental de soluciones de $L(Y) = 0$ y por lo tanto (K, k) es una extensión de Picard - Vessiot.

El siguiente teorema es un primer avance en la respuesta a la pregunta formulada.

Teorema 2.19. *Si K/k es una extensión de Picard - Vessiot de orden n (existe $f \in k\{x\}$, de orde n y $f(x) = 0$), entonces, $G(K/k)$ es isomorfo a un subgrupo algebraico de $Gl_n(C)$. ($C = C_k = C_K$)*

En otras palabras, existe un ideal I en $C[X_{ij}]$, anillo de polinomios en las indeterminadas x_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$ co coeficientes en C, tal que

1. $G = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(C) \mid f(A) = 0 \ \forall f \in I\}$,

2. G es un subgrupo de $Gl_n(C)$ y,

3. $G \cong G(K/k)$.

Otro teorema fundamental es el siguiente

Teorema 2.20. *Sea k un cuerpo diferencial con C_k algebraicamente cerrado. Si (K, k) es una extensión de Picard - Vessiot entonces, K es normal (para cada $x \in K - k$, existe $\sigma \in G(K/k)$ tal que $\sigma(x) \neq x$). $L \to G(K/L)$ produce una correspondencia uno a uno entre los subcuerpos diferenciales intermedios y los subgrupos algebraicos de $G(K/k)$. Un subgrupo algebraico H es normal si y solo si*

$$Fix(H) = \{x \in K \mid \forall_{\sigma \in H}\ \sigma(x) = x\}$$

es una extensión normal. En este último caso

$$G(Fix(H/k) \cong G(K/k)/H.$$

Se tiene entonces, la siguiente situación:

Dado un grupo G, si se quiere representar como un grupo de Galois de una ecuación lineal homogénea, entonces, este grupo debe ser un grupo algebraico sobre algún cuerpo algebraicamente cerrado.

3 Problema de Liouville

En esta última sección consideraremos el problema de Liouville.

3.1 Añadir una integral

Considérese la ecuación $y' = a$, donde $a \in k$, k cuerpo diferencial tal que $b' \neq a$ $\forall_{b \in k}$. En la d-clausura K de k, sea b tal que $b' = a$, y allí, considérese el menor cuerpo diferencial que contiene a b y a $k : k\{b\}$. Veamos que la pareja $(k\{b\}, k)$ es una extensión de Picard - Vessiot. ya que las constantes de este cuerpo coinciden con las de k.

La ecuación homogénea de segundo grado

$$w'' = \left(\frac{a'}{b'}\right) w',$$

tiene como soluciones independientes 1 y b. Esto significa que $k\{b\} = k\{1, b\}$ es una extensión de Picard - Vessiot.

Por otra parte su grupo de Galois G es un subgrupo de $Gl_2(C_k)$. Si $\tau \in G$ entonces $\tau(1) = 1$ y así la primera columna de la matriz de τ es $\binom{1}{0}$. Si $\tau(b) = c + db$, entonces $(a + db)' = a$ y por lo tanto $db' = da = a$, lo cual implica que $d = 1$. En conclusión, la matriz de τ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, la correspondencia C_k-lineal

$$1 \to 1, \quad b \to 1 + cb$$

se extiende unívocamente a un isomorfismo $\tau : k\{1,b\} \to k\{1,b\}$ que deja invariante los elementos de k.Conclusión:

$$Gal\,(k\{1,b\}/k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ c \in C_k \right\}.$$

3.2 Añadir una exponencial

Para un cuerpo diferencial k, y $a \in k$, se considera la ecuación

$$y' = ay. \tag{$**$}$$

Suponemos, además, que tal ecuación no es soluble en k. Sea K la d-clausura de k, $b \in K$ una solución de $(**)$. La extensión $(k\{b\}, k)$ es una extensión de Picard - Vessiot si C_k es algebraicamente cerrado.

3.3 Formulación del problema de Liouville

Dada una ecuación lineal homogénea $(L = 0)$ sobre k, ¿es posible encontrar las soluciones de $L = 0$ mediante adición de integrales, exponenciales y elementos algebraicos? Una condición necesaria es que la componente irreducible de $Gal(L)$ sea un grupo soluble.

Agradecimientos Estamos muy agradecidos con los organizadores de Altencoa 2004 por la oportunidad que nos dieron para presentar las sesiones que arrojaron como resultado este artículo. De igual manera agradecemos a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda por el apoyo brindado para hacer posible nuestra participación en el evento, y al evaluador por sus valiosos comentarios.

Referencias

[1] Acosta Humánez, P.B.: Sobre las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y el Algoritmo de Kovacic, Civilizar, Número especial de matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá D.C, 2004, pp 209–220

[2] Acosta Humánez, P.B.,Pérez, J.H.: Una Introducción a la Teoría de Galois Diferencial, Boletín de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C, 2004, pp 138–149

[3] Campos, A.: Iniciación al análisis de las ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie, Universidad Nacional, 1995.

[4] Campos, A.: La ecuación de Riccati en teoría de grupos de Lie y en teoría de Galois de ecuaciones diferenciales, Civilizar, Número especial de matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá D.C, 2004, pp 43–71

[5] Deligne, P.: Categories tannakiennes, Prog. Math., vol. 87, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.

[6] Gray, J.: Linear differential equations and group theory, Birkhäuser, Boston, MA, 2000.

[7] Kaplansky, I.: An introduction to differential algebra, Hermann, 1957.

[8] Kolchin, E.: Differential algebra and algebraic groups, Academic Press, 1973.

[9] Kuga, M.: Galois' dream: Group theory and differential equations, Birkhäuser, Boston, MA, 1993.

[10] Magid, A.: Lectures on Differential Galois Theory, University Lecture Series, vol. 7, American Mathematical Society, 1994.

[11] Marker, D.: Model Theory on Differential Fields, Model theory, algebra, and geometry, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp 53–63

[12] Morales-Ruiz, J.J.: Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems, Prog. Math., vol. 179, Birkhäuser, Boston, MA, 1999.

[13] Pérez, J.H., Acosta Humánez, P.B.: Teoría de Galois Diferencial, Conferencias, XX Coloquio Distrital de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C, 2004.

[14] Poizat, B., Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah: Cours de theorie des modeles, Springer Verlag, New York, 2000.

[15] Ritt, J.F.: Differential algebra, AMS. 1950.

[16] Van der Put, M., Singer, M.: Galois theory in linear differential equations, Springer Verlag, New York, 2003.

Dirección de los autores
Primitivo B. Acosta Humánez — Universitat Politécnica de Catalunya, Departamento Matemática Aplicada II
e-mail: `primitivo.acosta@upc.edu`
Jesús Hernando Pérez Alcázar — Universidad Sergio Arboleda, Escuela de Matemáticas
e-mail: `jhppelusa@gmail.com`