



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

**Determinación de las capacidades de fabricación y
almacenaje óptimas en un sistema con logística
inversa y demanda periódica**

Ernest Benedito, Albert Corominas.

IOC- Divisió d'Enginyeria d'Organització i Logística

IOC-DT-P-2008-08

Juny 2008

**Institut d'Organització i Control
de Sistemes Industrials**



Determinación de las capacidades de fabricación y
almacenaje óptimas en un sistema con logística
inversa y demanda periódica

Ernest Benedito, Albert Corominas

16 de junio de 2008

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Descripción del sistema | 4 |
| 3. Política de fabricación óptima | 7 |
| 3.1. Supuesto simplificado | 8 |
| 3.2. Caso general | 11 |
| 3.2.1. Política óptima en el intervalo $[t_1, t_3]$ | 11 |
| 3.2.2. Cálculo de I_{\max} , t_1 , t_2 y t_3 | 13 |
| 3.2.3. Política óptima en el intervalo $[t_3, T + t_1]$ | 15 |
| 4. Capacidades de fabricación y almacén óptimas | 16 |
| 4.1. Capacidad de almacén S | 16 |
| 4.2. Ejemplo | 16 |
| 4.3. Cálculo de la capacidad de fabricación óptima P | 17 |
| 4.4. Ejemplo | 18 |
| 5. Dependencia de las capacidades óptimas respecto del desfase | 20 |
| 6. Conclusiones | 22 |

1. Introducción

La legislación española responsabiliza a las empresas fabricantes y distribuidoras de productos de los daños que éstos puedan causar en el medioambiente cuando finaliza su vida útil, Rubio (2003). La correcta gestión de los productos fuera de uso puede ser rentable: por un lado, mejora la imagen de la empresa ya que su gestión contribuye a la sostenibilidad medioambiental y, por otro lado, los productos pueden ser reutilizados con el consiguiente beneficio económico.

En este sentido, la logística inversa es un área de gestión cada vez más importante ya que es necesaria para la correcta gestión de los residuos y productos fuera de uso.

Según *The European Group on Reverse Logistics*, REVLOG, de Brito and Dekker (2004) la logística inversa se define como:

Las tareas de planificación, implementación y control de los flujos de retorno de materias primas, producción en curso, envases y productos acabados desde el lugar de su fabricación, distribución o uso hasta el lugar de su recuperación o eliminación adecuada.

Esta definición engloba los retornos de cualquier producto, tanto si es materia prima, material semielaborado o producto acabado, que sean recuperados o eliminados.

En cuanto a las tareas para la recuperación de los productos, Thierry et al. (1995) las divide en categorías, de las cuales las más importantes son:

- Reutilización directa: el producto recupera su valor después de realizar operaciones de limpieza y mantenimiento. Algunos ejemplos son la reutilización de botellas, palets y contenedores.
- Reparación de productos defectuosos.
- Refabricación: se realizan operaciones de desensamblaje, revisión y sustitución de piezas en un producto para que recupere su condición de producto nuevo sin perder su identidad original.
- Reciclaje: se realiza una recuperación del material del producto de tal forma que pierde su identidad durante el proceso. Algunos ejemplos son la recuperación de vidrio, papel y plásticos.

Cualquiera de las tareas de recuperación de los productos conlleva cambios en la gestión de la producción y almacenaje de los productos. En este sentido hay numerosos trabajos que utilizan modelos matemáticos para determinar políticas óptimas

de fabricación y refabricación, en Fleischmann et al. (1997) se clasifican en dos categorías: los modelos con demanda y retornos estocásticos y los modelos deterministas. En la primera categoría se encuentran por ejemplo Fleischmann and Kuik (2003), van der Laan et al. (1999), Buchanan and Abad (1998), Teunter (2006) y en la segunda categoría Choi et al. (2007), Kiesmüller et al. (2004).

En los últimos años existe un interés creciente por la logística inversa como área de investigación, Rubio et al. (2008), sin embargo, no es frecuente encontrar trabajos que estudien el impacto de la recuperación de productos en la capacidad de fabricación. Es evidente que al refabricar productos, las compañías deben modificar su sistema productivo, añadiendo ciertas capacidades para las tareas de recuperación y refabricación, y dependiendo de las tareas que se realicen, habrá una disminución de las necesidades de fabricación de producto nuevo. Con este enfoque en Benedito and Corominas (2008) se proporciona un método para calcular las capacidades de fabricación y refabricación en un sistema con logística inversa.

Uno de los factores que influyen en el cálculo de la capacidad de fabricación, refabricación y almacenaje cuando hay logística inversa es el comportamiento de los retornos en cuanto a la cantidad y momento en que se producen, Rubio and Corominas (2008).

En este trabajo se describe un método para calcular la capacidad de fabricación y de almacenaje en un sistema con logística inversa en el que la demanda es determinista y los retornos dependen de la demanda. Utilizando el método descrito, se muestra un ejemplo de la influencia que tiene la función de los retornos en las capacidades de fabricación y almacenaje.

El resto del trabajo se compone de cinco secciones más. En la segunda sección se describe el sistema que se va a estudiar. En la tercera, se proporciona un método para calcular la política de fabricación óptima, considerando fijadas las capacidades de fabricación y almacenaje. En la cuarta, se calculan las capacidades de fabricación y almacén óptimas utilizando el método descrito en la sección anterior. En la quinta, se aplica el método explicado en las secciones anteriores para estudiar la influencia del desfase de los retornos en las capacidades óptimas de fabricación y almacenaje. Finalmente se exponen las principales conclusiones del trabajo.

2. Descripción del sistema

Se trata de una compañía que produce y vende un tipo de producto, y que puede recuperar el producto una vez ha finalizado su vida útil y, mediante un proceso de refabricación o reutilización, lo puede volver a vender en las mismas condiciones que un producto nuevo. La variable temporal del sistema es continua. Se definen las siguientes funciones dependientes del tiempo:

- $d(t)$ Demanda del producto (unidades de producto por unidad de tiempo).
- $u_r(t)$ Productos retornados para refabricar (unidades de producto por unidad de tiempo).
- $p(t)$ Fabricación de producto nuevo (unidades de producto por unidad de tiempo).
- $r(t)$ Refabricación de producto retornado (unidades de producto por unidad de tiempo).
- $I_n(t)$ Stock de producto acabado (unidades de producto).
- $I_u(t)$ Stock de producto retornado (unidades de producto).
- $w(t)$ Producto desechado (unidades de producto por unidad de tiempo).

La demanda del producto y los retornos son funciones deterministas, no negativas, con primera derivada continua. Para satisfacer la demanda, la compañía dispone de inventario de producto acabado $I_n(t)$ que se alimenta del sistema de producción a un ritmo $p(t)$ y del sistema de refabricación de productos retornados a un ritmo $r(t)$; se supone que la compañía no admite rupturas de inventario. El sistema de refabricación dispone de inventario de producto retornado $I_u(t)$. Parte del producto retornado se desecha a un ritmo $w(t)$.

Función de coste

Para la función de costes, se tienen los siguientes:

- c_p coste variable de fabricar una unidad de producto nuevo.
- c_u coste variable de refabricar una unidad de producto retornado.
- c_w coste variable de desechar una unidad de producto retornado.
- h_s coste de inventario final: es el coste por unidad de tiempo de tener una unidad de producto final en el inventario.
- h_u coste de inventario de retornos: es el coste por unidad de tiempo de tener una unidad de producto retornado pendiente de ser refabricado.
- $C_p(P)$ coste fijo de fabricación de producto nuevo que depende de la capacidad de fabricación P , es decir de la tasa máxima de fabricación que se puede alcanzar.
- $C_r(R)$ coste fijo de refabricación de producto retornado que depende de la capacidad de refabricación R .

- $H_s(S_n)$ coste fijo del almacén de producto final que depende de la capacidad del almacén de producto terminado S_n .
- $H_u(S_u)$ coste fijo del almacén de producto retornado que depende de la capacidad del almacén de producto retornado S_u .

Se supone que c_p , c_u , c_w , h_s y h_u son constantes y $C_p(P)$, $C_r(R)$, $H_s(S_n)$ y $H_u(S_u)$ son funciones continuas con primera derivada no negativa y continua.

Los costes incurridos en el periodo T son:

$$c_T = C_p(P) + C_r(R) + H_s(S_n) + H_u(S_u) + \int_0^T (c_p p(t) + c_r r(t) + c_w w(t) + h_s I_n(t) + h_u I_u(t)) dt \quad (1)$$

Deben cumplirse las siguientes restricciones:

$$\frac{d I_n}{dt} = p(t) + r(t) - d(t) \quad (2)$$

$$\frac{d I_u}{dt} = u_r(t) - r(t) - w(t) \quad (3)$$

$$0 \leq p(t) \leq P \quad (4)$$

$$0 \leq r(t) \leq R \quad (5)$$

$$0 \leq w(t) \quad (6)$$

$$0 \leq I_n(t) \leq S_n \quad (7)$$

$$0 \leq I_u(t) \leq S_u \quad (8)$$

Para determinar las capacidades óptimas de fabricación, refabricación y de los almacenes se resuelve el problema de minimizar la función c_T sujeta a las relaciones anteriores.

En las siguientes secciones se resuelve el problema anterior con las siguientes condiciones:

- La función de demanda es periódica de periodo T .
- La función de los retornos depende de la demanda, siendo $u_r(t) = \rho d(t - \tau)$ dónde ρ es la tasa de retorno y τ es el desfase temporal entre la venta del producto y el retorno.
- La demanda es mayor que los retornos $d(t) \geq \rho d(t - \tau)$
- La compañía refabrica todo el producto retornado en el momento que lo recibe, es decir $r(t) = u_r(t) = \rho d(t - \tau)$.

- El sistema está en estado estacionario, es decir, las funciones del sistema que dependen del tiempo toman el mismo valor en t y en $t + T$.

Como consecuencia de estas condiciones se tiene que $w(t) = 0$, $I_u(t) = 0$, $S_u = 0$ y $R = \text{máx}\{r(t) \mid 0 \leq t \leq T\}$.

Se define la función de demanda neta:

$$\hat{d}(t) = d(t) - \rho d(t - \tau) \quad (9)$$

$\hat{d}(t)$ es una función determinista, periódica de periodo T , no negativa, con primera derivada continua.

Integrando (2) entre $t = 0$ y $t = T$ se obtiene:

$$\int_0^T p(t) dt = \int_0^T \hat{d}(t) dt \quad (10)$$

y por tanto el coste variable de producción en el periodo T únicamente depende de la demanda neta, por lo que no influirá en la minimización de c_T .

Teniendo en cuenta las condiciones expuestas, las capacidades de fabricación y almacén óptimas se obtendrán de resolver el siguiente programa matemático:

$$\begin{aligned} [MIN] c_T &= C(P) + H(S) + \int_0^T h I(t) dt \\ \text{s.a :} & \\ &\frac{dI}{dt} = p(t) - \hat{d}(t) \\ &0 \leq p(t) \leq P \\ &0 \leq I(t) \leq S \end{aligned} \quad (11)$$

donde se han eliminado todos los subíndices de las funciones y variables ya que con las condiciones impuestas ya no son necesarios.

El programa se resolverá en 2 etapas: en primer lugar se determinará la política óptima de fabricación para unas capacidades P, S dadas y en segundo lugar se calcularán las capacidades óptimas de fabricación y almacenaje de producto final.

3. Política de fabricación óptima

Partiendo del problema de optimización (11) y suponiendo que la capacidad de fabricación P y la capacidad del almacén S están fijadas, en esta sección se determinará la política óptima de fabricación. En primer lugar se expone un caso sencillo

a modo de ejemplo y a continuación se generaliza para sistemas con funciones de demanda periódicas.

3.1. Supuesto simplificado

Se empieza considerando el caso de una empresa con una demanda con comportamiento senoidal de periodo 52 semanas con valor medio de 100 uds/semana (figura 1). Si se quiere suministrar toda la demanda, la capacidad de producción será como mínimo de 100 uds/semana. Si éste es el caso, la empresa siempre fabricará al máximo de su capacidad y dispondrá de inventario suficiente para cubrir la demanda entre $t = 26$ y $t = 52$ ya que durante este intervalo de tiempo la demanda será mayor que la capacidad de producción. Para calcular la capacidad del almacén basta darse cuenta que el máximo stock se alcanzará en la semana $t = 26$ (ya que a partir de este momento la producción no cubre la demanda) y el stock mínimo se alcanzará en $t = 52$. La diferencia de stock entre estas dos semanas es el área delimitada por la curva de la demanda y la de capacidad de producción entre $t = 26$ y $t = 52$ y su valor es 827,6. Por tanto, la capacidad de almacén será como mínimo $S = 827,6$ uds.

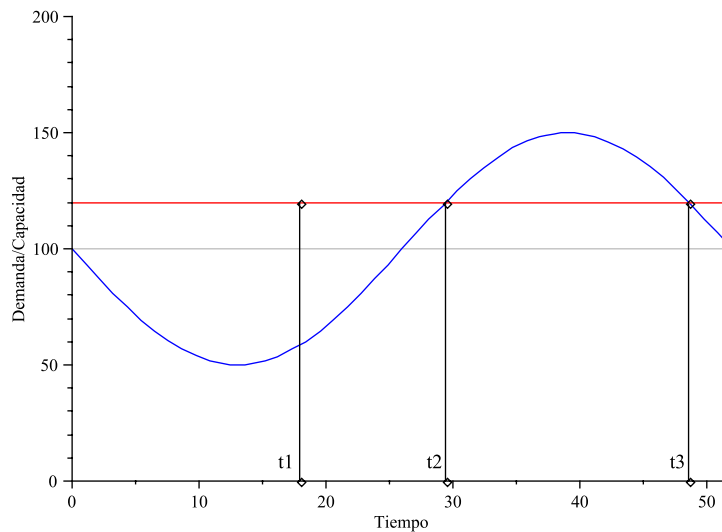


Figura 1: Gráfico de la demanda en un intervalo de 52 semanas. Los puntos marcados corresponden a $t_1 = 17,9$, $t_2 = 29,4$ y $t_3 = 48,6$. La línea horizontal roja indica la capacidad de fabricación y la línea horizontal gris indica el valor medio de la demanda

Se supone ahora que la capacidad de producción es de 120 uds/semana. Tal como se muestra en la figura 2 el instante de máximo stock se produce en $t_2 = 29,4$ y el

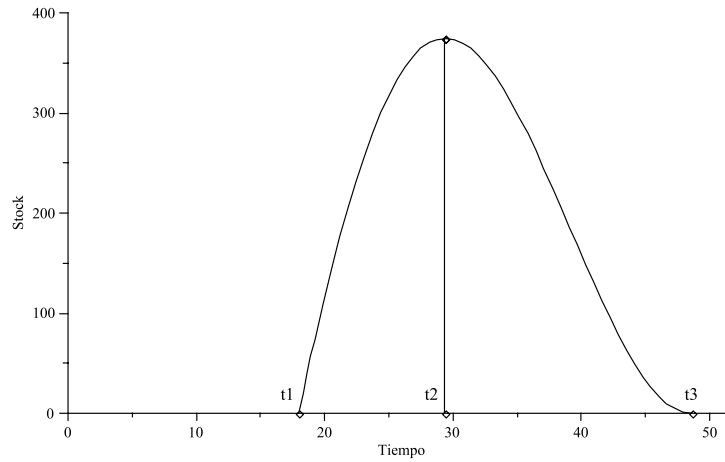


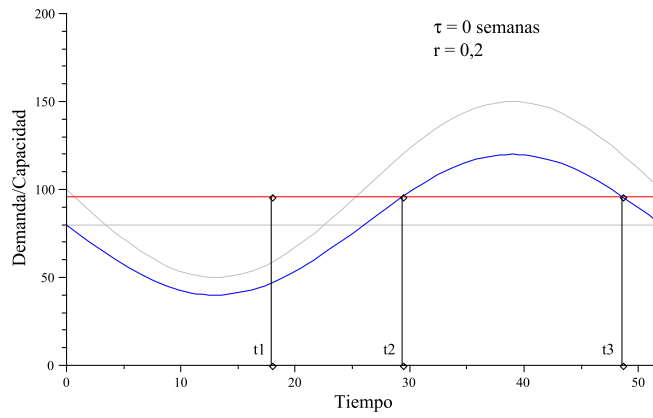
Figura 2: Gráfico del stock utilizando una política de producción óptima con capacidad de producción 120 uds/semana. Los puntos marcados corresponden a $t_1 = 17,9$, $t_2 = 29,4$ y $t_3 = 48,6$

de mínimo stock en $t_3 = 48,6$. Realizando un cálculo análogo al del caso anterior se tiene que la capacidad de almacén no debe ser inferior a $S = 374,7$ uds. En algún momento antes de t_2 se empezará a producir al máximo de la capacidad para acumular existencias y llegar a t_2 con el inventario necesario. Sea t_1 este instante que se calcula igualando S al excedente de producción entre t_1 y t_2 . Tal como muestra la figura 1, $t_1 = 17,9$. Por tanto, la política de fabricación óptima será producir el máximo posible entre t_1 y t_3 y fuera de este intervalo de tiempo la producción deberá ser igual a la demanda.

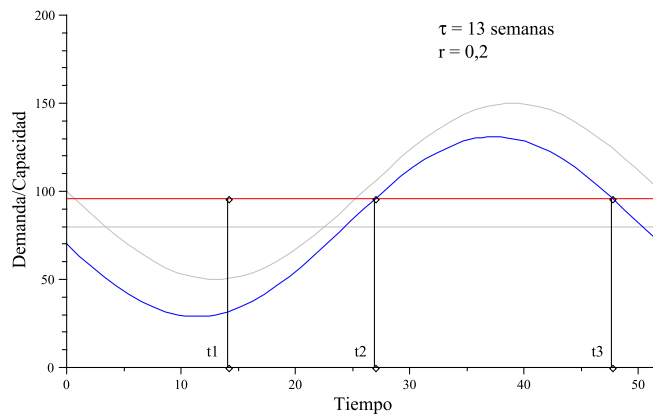
Supóngase ahora que hay un retorno de producto que se vuelve a vender como nuevo después de pasar por un proceso de refabricación y que τ son las semanas que transcurren desde la venta inicial hasta que el producto vuelve a estar disponible para vender. Se supone que se retornan el 20% de las ventas ($\rho = 0,2$) y se quiere saber la capacidad de almacén necesaria. Para ello se analiza la curva de demanda neta (demanda menos retornos) tal modo como se hecho en los casos anteriores en que no había retornos. En las figuras 3(a), 3(b) y 3(c) se ve que para cada valor de τ existe un requerimiento de capacidad de almacén y un intervalo de tiempo entre t_1 y t_3 en el cual se produce al máximo. En los tres casos estudiados se ha fijado una capacidad de producción de 96 uds (20% superior a la demanda neta media).

En el cuadro 1 se muestra el resumen de los resultados obtenidos para diferentes valores del desfase de los retornos.

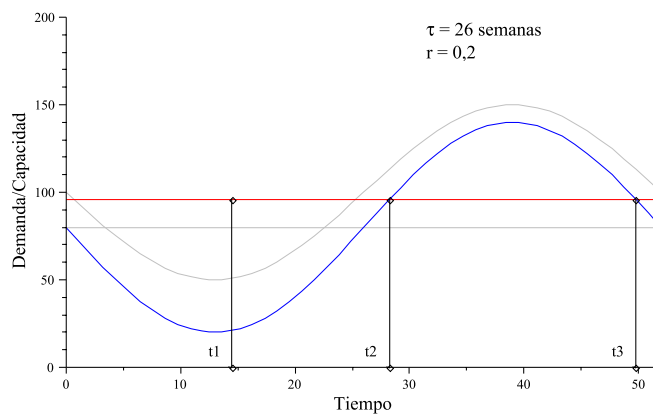
Del estudio expuesto se extraen las siguientes conclusiones para una función de demanda periódica con un pico y un valle:



(a) $t_1 = 17,9$, $t_2 = 29,4$ y $t_3 = 48,6$. $S = 299,8$.



(b) $t_1 = 14,1$, $t_2 = 27,0$ y $t_3 = 47,7$. $S = 470,0$.



(c) $t_1 = 14,4$, $t_2 = 28,2$ y $t_3 = 49,8$. $S = 612,6$.

Figura 3: Gráfico de la demanda neta (demanda - retornos) con diferentes desfases. La línea horizontal roja indica la capacidad de fabricación y la línea horizontal gris indica el valor medio de la demanda neta. La curva gris es la demanda sin retornos

- La capacidad de fabricación determina los requerimientos mínimos de almacén.
- Cuando el sistema tiene retornos, los requerimientos de almacén dependen de la capacidad de fabricación y del desfase entre la venta y el retorno del producto. Obsérvese que la capacidad de almacén cuando el desfase es de 26 semanas es el doble que con un desfase de 0 semanas.

| Desfase (τ) | t_1 | t_2 | t_3 | S |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 17,9 | 29,4 | 48,6 | 299,8 |
| 13 | 14,1 | 27,0 | 47,7 | 470,0 |
| 26 | 14,4 | 28,2 | 49,8 | 612,6 |

Cuadro 1: Tiempos y capacidades de almacén requeridas para un sistema con demanda senoidal y retornos del 20% con desfase τ .

A continuación se extienden las conclusiones anteriores al caso general de funciones de demanda periódicas.

3.2. Caso general

Sean I_{\max} e I_{\min} los valores máximo y mínimo del stock:

$$I_{\max} = \max_{t \in [0, T]} I(t)$$

$$I_{\min} = \min_{t \in [0, T]} I(t)$$

La solución del programa (11) deberá cumplir que $I_{\min} = 0$ ya que en el caso que fuera $I_{\min} > 0$ se podría tener una solución del programa con $\bar{I}(t) = I(t) - I_{\min}$ con coste inferior.

Sea $t_2 \in [0, T]$ un instante en que el stock es máximo, ($I(t_2) = I_{\max}$). Si $I_{\max} = 0$ entonces la política óptima es $p(t) = \hat{d}(t) \forall t$, pero esto sólo es posible si $P \geq \hat{d}(t) \forall t$.

Si $I_{\max} \neq 0$, considérese t_1 y t_3 los instantes anterior y posterior a t_2 respectivamente, más próximos a t_2 en que el stock es mínimo ($I(t_3) = I_{\min}$). Se sabe que t_1 , t_2 y t_3 existen porque $I(t)$ es continua y periódica.

3.2.1. Política óptima en el intervalo $[t_1, t_3]$

La política óptima en el intervalo $[t_1, t_3]$ es $p(t) = P$. Para demostrarlo, se va a ver que cualquier otra política no es óptima.

Supóngase que se tiene una política tal que $p(t) < P$ en algún intervalo $(t_4, t_5) \subset [t_1, t_3]$. Sea $I(t)$ la función que corresponde al stock al aplicar dicha política; considérese un instante \bar{t}_1 tal que:

- $t_1 < \bar{t}_1 < t_4$
- $I(\bar{t}_1) \leq I(t) \quad t \in [\bar{t}_1, t_5]$
- $I(\bar{t}_1) \leq \int_{t_4}^{t_5} (P - p(t)) dt$

Se sabe que \bar{t}_1 existe porque $I(t)$ es una función continua y estrictamente positiva en (t_1, t_3) . Considérese el instante \bar{t}_4 tal que:

- $t_4 < \bar{t}_4 < t_5$
- $I(\bar{t}_1) = \int_{\bar{t}_4}^{t_5} (P - p(t)) dt$

Entonces la siguiente política $\bar{p}(t)$:

$$\bar{p}(t) = \begin{cases} \hat{d}(t) & \text{si } t \in [t_1, \bar{t}_1] \\ p(t) & \text{si } t \in (\bar{t}_1, \bar{t}_4) \\ P & \text{si } t \in [\bar{t}_4, t_5] \\ p(t) & \text{si } t \notin (t_1, t_5) \end{cases}$$

y la función correspondiente del stock $\bar{I}(t)$:

$$\bar{I}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [t_1, \bar{t}_1] \\ I(t) - I(\bar{t}_1) & \text{si } t \in (\bar{t}_1, \bar{t}_4) \\ I(t) - I(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_4}^t (P - p(t)) & \text{si } t \in [\bar{t}_4, t_5] \\ I(t) & \text{si } t \notin (t_1, t_5) \end{cases}$$

cumplen las restricciones del programa (11). El coste de la política $\bar{p}(t)$ es inferior al de la política $p(t)$ ya que $\bar{I}(t) < I(t)$ en el intervalo (t_1, t_5) .

Por tanto, la política óptima en el intervalo $[t_1, t_3]$ es $p(t) = P$, $I(t_1) = I(t_3) = 0$ y

$$I_{\max} = \int_{t_1}^{t_2} (P - \hat{d}(t)) dt = \int_{t_3}^{t_2} (P - \hat{d}(t)) dt \quad (12)$$

y por tanto:

$$\int_{t_1}^{t_3} (P - \hat{d}(t)) dt = 0 \quad (13)$$

3.2.2. Cálculo de I_{\max} , t_1 , t_2 y t_3

Supóngase que $p^*(P, t)$ es la política de fabricación óptima cuando la capacidad de fabricación es P . Entonces $p(t) = p^*(P, t)$ es solución del programa matemático (11); integrando la primera restricción se tiene que:

$$I(t_b) - I(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} (p^*(P, t) - \hat{d}(t)) dt \quad \forall t_a, t_b \quad (14)$$

teniendo en cuenta la segunda restricción de (11) entonces $p^*(P, t) \leq P \quad \forall t$ y por tanto se obtiene:

$$I(t_a) - I(t_b) \geq \int_{t_a}^{t_b} (\hat{d}(t) - P) dt \quad \forall t_a \leq t_b$$

y haciendo el máximo en cada lado de la desigualdad, se tiene:

$$I_{\max} \geq \max_{t_a \leq t_b} \{I(t_a) - I(t_b)\} \geq \max_{t_a \leq t_b} \left\{ \int_{t_a}^{t_b} (\hat{d}(t) - P) dt \right\} \quad (15)$$

Debido a que $p^*(t, P)$ es la política óptima, en la sección (3.2.1) se ha visto que existen t_2 y t_3 que cumplen (12), por tanto:

$$\max_{t_a \leq t_b} \left\{ \int_{t_a}^{t_b} (\hat{d}(t) - P) dt \right\} \geq \int_{t_2}^{t_3} (\hat{d}(t) - P) dt = I_{\max} \quad (16)$$

Uniendo las cadenas de desigualdades (15) y (16) se cumple que:

$$I_{\max} = \max_{t_a \leq t_b} \int_{t_a}^{t_b} (\hat{d}(t) - P) dt \quad (17)$$

Por tanto, I_{\max} se obtiene al resolver el siguiente programa no lineal:

$$[MAX] \quad f(x, y) = \int_x^y (\hat{d}(t) - P) dt \quad (18)$$

s.a :

$$x - y \leq 0 \quad (19)$$

Supóngase que $f(\bar{x}, \bar{y})$ es el valor óptimo de la función objetivo (18), entonces

$$I_{\max} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Para hallar el punto (\bar{x}, \bar{y}) se distinguen dos casos:

1. Si $P - \hat{d}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, entonces $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ y (\bar{x}, \bar{y}) puede ser cualquier punto de la frontera de la región definida por (19), es decir $\bar{x} = \bar{y}$. Por tanto,

$$I_{\max} = 0$$

2. En caso contrario (\bar{x}, \bar{y}) se encuentra en el interior de la región definida por (19), es decir $\bar{x} < \bar{y}$. Dicho punto debe ser necesariamente un óptimo local y por tanto cumple las siguientes condiciones:

- $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Realizando los cálculos se obtienen las condiciones:

$$\hat{d}(\bar{x}) = P \quad \hat{d}(\bar{y}) = P \quad (20)$$

- La matriz Hessiana de f en el punto (\bar{x}, \bar{y}) es semidefinida negativa. La matriz Hessiana de f está compuesta por las derivadas parciales de segundo orden de f :

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{d}'(x) & 0 \\ 0 & \hat{d}'(y) \end{pmatrix}$$

Para que sea semidefinida negativa debe cumplir que:

$$\hat{d}'(\bar{x}) \geq 0 \quad \hat{d}'(\bar{y}) \leq 0 \quad (21)$$

Por tanto, (\bar{x}, \bar{y}) es un punto que verifica (20) y (21), y además maximiza f .

Para calcular el valor óptimo de f no hace falta encontrar todos los puntos que cumplen (20) y (21) sino que se puede restringir la búsqueda a la región de puntos (x, y) tales que $x \in [0, T]$, $y \in [x, x + T]$, debido a que f tiene las siguientes propiedades:

- $f(x, y) = f(x + T, y + T) \forall x$, ya que $\hat{d}(t)$ es periódica de periodo T .
- $f(x, y + y') = f(x, y) + f(y, y') \forall x, y, y'$
- $f(x, x + T) \leq 0 \forall x$ ya que si no fuera así, utilizando la propiedad anterior se tendría que

$$\int_0^T (\hat{d}(t) - P) dt = \int_x^{x+T} (\hat{d}(t) - P) dt > 0$$

y por tanto, no existiría ninguna política de fabricación que cumpliera (10).

Cuando $x < y$, por la primera propiedad se tiene que si $f(x + T, y + T)$ es el valor óptimo, entonces $f(x, y)$ también lo es.

De la segunda propiedad resulta que

$$f(x, y + T) = f(x, y) + f(y, y + T)$$

y por la tercera propiedad se tiene que $f(x, y + T) \leq f(x, y)$. Por tanto, cuando $x < y$, si $f(x, y + T)$ es óptimo, entonces $f(x, y)$ también.

Por tanto, el siguiente método permite calcular I_{\max} , t_1 , t_2 y t_3 :

a) Determinar los conjuntos \mathcal{U} y \mathcal{V} definidos cómo:

$$\mathcal{U} = \{x \in [0, T] \mid \hat{d}(x) = P \text{ y } \hat{d}'(x) \geq 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{y \in [0, 2T] \mid \hat{d}(y) = P \text{ y } \hat{d}'(y) \leq 0\}$$

b) Calcular I_{\max} utilizando la siguiente expresión:

$$I_{\max} = \text{máx} \left\{ \int_x^y (\hat{d}(t) - P) dt \mid x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}, x < y < x + T \right\} \quad (22)$$

c) t_2 y t_3 son los elementos de \mathcal{U} y \mathcal{V} respectivamente que cumplen (22)

d) El instante t_1 es el más cercano a t_2 que cumple (13) y $t_1 \leq t_2$.

3.2.3. Política óptima en el intervalo $[t_3, T + t_1]$

Debido a que el sistema es periódico, si se conoce la política óptima en el intervalo $[t_1, T + t_1]$ entonces es inmediato calcularla en $[0, T]$. La ventaja de utilizar el intervalo $[t_1, T + t_1]$ es que sólo queda por calcular la política óptima en el subintervalo $[t_3, T + t_1]$ que cumple $I(t_3) = I(T + t_1) = 0$.

Sea $t'_3 \in [t_3, T + t_1]$ el instantante más próximo a $T + t_1$ tal que $\hat{d}(t'_3) = P$, es decir:

$$t'_3 = \max\{t \in \mathcal{V} \cap [t_3, T + t_1]\}$$

La política óptima en el intervalo $[t'_3, T + t_1]$ es $p(t) = \hat{d}(t)$. Para demostrarlo sólo hace falta ver que $I(t'_3) = 0$ ya que en ese caso, utilizando dicha política se tendrá $I(t) = 0$ en ese intervalo. Supóngase que se utiliza una política óptima $p(t)$ y que $I(t'_3) > 0$. Sea $t''_3 \leq t'_3$ el instante más cercano a t'_3 tal que $I(t''_3) = 0$; integrando la primera restricción del programa matemático (11) se tiene:

$$I(t'_3) = \int_{t''_3}^{t'_3} (p(t) - \hat{d}(t)) dt$$

$$I(t'_3) = \int_{t'_3}^{T+t_1} (\hat{d}(t) - p(t)) dt$$

Debido a que $I(t'_3) > 0$ entonces existe un intervalo $[t_4, t_5] \subset [t'_3, t'_3]$ en que $p(t) > \hat{d}(t)$ y un intervalo $[t'_4, t'_5] \subset [t'_3, T + t_1]$ en que $\hat{d}(t) > p(t)$. Se define la siguiente política:

$$\bar{p}(t) = \begin{cases} p(t) & \text{si } t \in [t_3, t_4) \\ p(t) - \epsilon_1 & \text{si } t \in [t_4, t_5] \\ p(t) & \text{si } t \in (t_5, t'_4) \\ p(t) + \epsilon_2 & \text{si } t \in [t'_4, t'_5] \\ p(t) & \text{si } t \in (t'_5, T + t_1] \end{cases}$$

Donde ϵ_1 y ϵ_2 se escogen de tal forma que $\bar{p}(t)$ cumpla las restricciones del programa (11) y que $(t_5 - t_4)\epsilon_1 = (t'_5 - t'_4)\epsilon_2$. La función de stock resultante $\bar{I}(t)$ es:

$$\bar{I}(t) = \begin{cases} I(t) & \text{si } t \in [t_3, t_4) \\ I(t) - (t - t_4)\epsilon_1 & \text{si } t \in [t_4, t_5] \\ I(t) - (t_5 - t_4)\epsilon_1 & \text{si } t \in (t_5, t'_4) \\ I(t) - (t_5 - t_4)\epsilon_1 + (t - t'_4)\epsilon_2 & \text{si } t \notin [t'_4, t'_5] \\ I(t) & \text{si } t \in (t'_5, T + t_1] \end{cases}$$

El coste de la política $\bar{p}(t)$ es inferior al de la política $p(t)$ y por tanto la política $p(t)$ no puede ser óptima, lo cual contradice la hipótesis inicial. Por tanto $I(t'_3) = 0$ y la política óptima en $[t'_3, T + t_1]$ es $p(t) = \hat{d}(t)$.

A continuación se calcula la política óptima en el intervalo $[t_3, t'_3]$:

Sea $t'_1 \in [t_3, t'_3]$ el instante más próximo a t'_3 tal que

$$\int_{t'_1}^{t'_3} (P - \hat{d}(t)) dt = 0 \quad (23)$$

Entonces la política óptima en el intervalo $[t'_1, t'_3]$ es $p(t) = P$ ya que se puede aplicar el mismo razonamiento al realizado en la sección 3.2.1 sustituyendo t_1 por t'_1 y t_3 por t'_3 .

La política óptima en el intervalo $[t_3, t'_1]$ se calcula de forma recursiva utilizando el razonamiento expuesto en esta sección sustituyendo $T + t_1$ por t'_1 .

4. Capacidades de fabricación y almacén óptimas

4.1. Capacidad de almacén S

Dada una capacidad de fabricación S , la capacidad óptima del almacén S es igual a I_{\max} ya que si fuera superior se tendría una capacidad de almacén que nunca se iba a utilizar y si fuera inferior se producirían rupturas de inventario.

Obsérvese que I_{\max} , S , t_2 y t_3 dependen de P ya que todos ellos dependen del valor de los elementos de \mathcal{U} y \mathcal{V} , y estos dependen de P .

4.2. Ejemplo

Considérese el caso con la siguiente demanda:

$$d(t) = 100 \left[1 - 0,3 \sin \left(\frac{\pi}{26}(t + 4) \right) + 0,25 \sin \left(\frac{\pi}{13}(t - 13,3) \right) \right]$$

Con un índice de retornos $\rho = 0,2$, un desfase de retornos de $\tau = 26$ semanas y una capacidad de fabricación $P = 96$ uds/semana se quiere determinar la capacidad de almacén S . En la figura 4 se muestra el ejemplo.

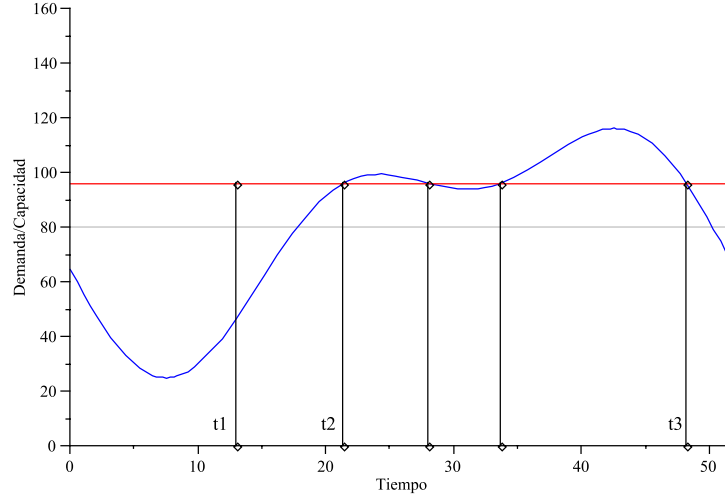


Figura 4: Gráfico de la demanda neta (demanda - retornos) del ejemplo con desfase 26 semanas ($\tau = 26$). Los puntos marcados corresponden a las semanas $t_1 = 13,0$, $t_2 = 21,4$ y $t_3 = 48,2$. $P = 96$

Entonces:

- $\mathcal{U} = \{21,4 \quad 33,7\} \quad \mathcal{V} = \{28,0 \quad 48,2 \quad 80,0 \quad 100,19\}$
- $S = 180,4$ uds
- $t_1 = 13,0 \quad t_2 = 21,4 \quad t_3 = 48,2$

4.3. Cálculo de la capacidad de fabricación óptima P

Se definen P_{\min} y P_{\max} :

$$P_{\min} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{d}(t) dt$$

$$P_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \hat{d}(t)$$

Para valores de P inferiores a P_{\min} no existe ninguna política de fabricación que cumpla (10) y por tanto el el programa matemático (11) no tiene solución.

Para $P \geq P_{\max}$, $I_{\max} = 0$. Debido a que $C(P)$ es una función creciente, los costes mínimos para $P \geq P_{\max}$ se alcanzan en $P = P_{\max}$.

Por tanto la capacidad óptima de fabricación se encuentra en el intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$. Dado un valor de $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$, el coste c_T incurrido en un periodo $[0, T]$ se calcula siguiendo los siguientes pasos:

1. Se determina la política óptima de fabricación $p^*(P, t)$ según el procedimiento descrito en la sección 3
2. Se calcula S según se ha descrito en la sección 4.1
3. Se calcula $I(t)$ utilizando (14):

$$I(t) = \int_{t_1}^t (p^*(P, t') - \hat{d}(t')) dt' \quad (24)$$

4. Se calcula el coste incurrido en el periodo $[0, T]$:

$$c_T = C(P) + H(S(P)) + h \int_0^T I(t) dt \quad (25)$$

La expresión $S(P)$ representa la dependencia entre S y P descrita en la sección 4.1 y $p^*(P, t)$ es la política óptima cuando la capacidad de producción es P descrita en la sección 3.

El valor óptimo de la capacidad se calcula numéricamente utilizando los pasos anteriores para valores de $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$.

4.4. Ejemplo

Consideramos el caso con la misma demanda del ejemplo de la sección anterior, la misma tasa de retorno ($\rho = 0, 2$), el mismo desfase de retornos ($\tau = 26$ semanas) y las siguientes funciones de coste:

$$C(P) = 250 (P - 80) + 14000$$

$$H(S) = 7 S$$

Utilizando el procedimiento descrito en la sección 3 se ha calculado la política óptima para 25 valores de P en el intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$ siendo $P_{\min} = 80$ y $P_{\max} = 116, 06$. En la figura 5 se muestran los valores de t_1 , t_2 y t_3 . Obsérvese que la dependencia de

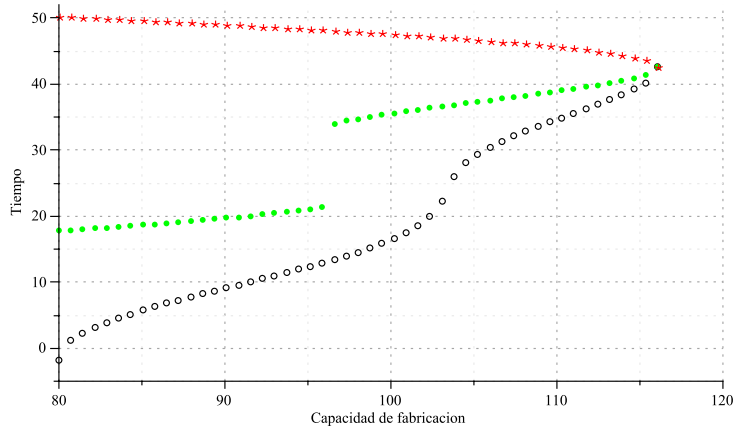


Figura 5: Gráfico que muestra la dependencia de t_1 (círculos negros), t_2 (círculos sólidos verdes) y t_3 (asteriscos rojos) respecto de la capacidad de fabricación

t_2 respecto de la capacidad P no es continua; en general, la dependencia de t_1 , t_2 y t_3 respecto de P no es continua. Para cada valor de P se ha calculado la capacidad de almacén óptima utilizando el método explicado en 4.1. En la figura 6 se muestra la dependencia de la capacidad óptima del almacén respecto de la capacidad de fabricación, es decir $S(P)$.

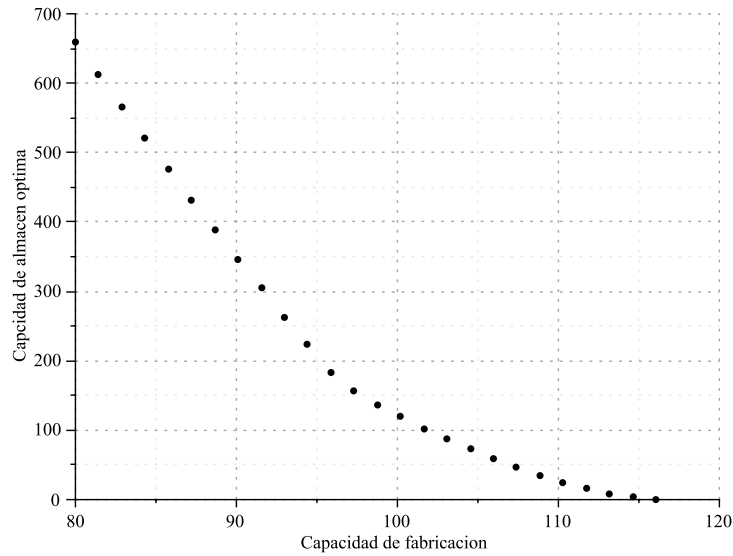


Figura 6: Gráfico de la capacidad óptima de almacén en función de la capacidad de fabricación

Para cada valor de P se ha calculado el coste total incurrido en el periodo T utilizando (25). En la figura 7 se muestra la dependencia del coste respecto de la capacidad

de fabricación cuando la política de fabricación y la capacidad de almacén utilizadas son óptimas.

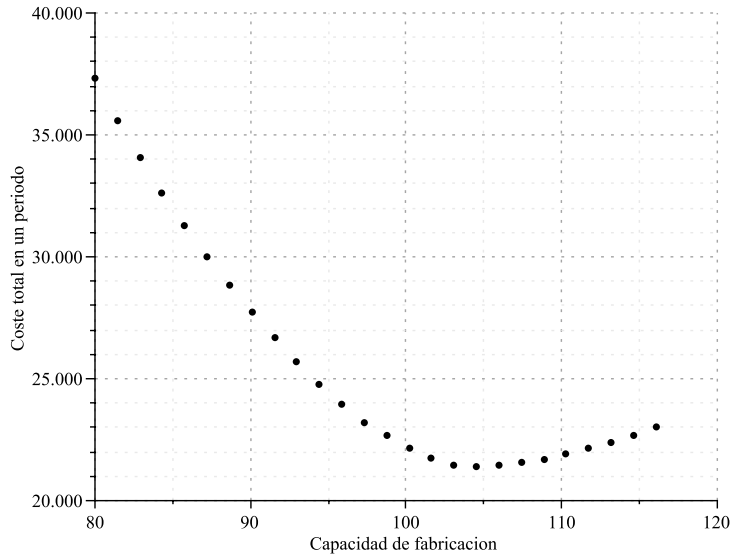


Figura 7: Gráfico del coste total en un periodo T utilizando la política óptima en función de la capacidad de fabricación

Finalmente se ha obtenido numéricamente la capacidad de fabricación óptima que minimiza el coste total en el periodo T que resulta ser $P^* = 104,42$. Con esta capacidad, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 27,79 & t_2 &= 37,05 & t_3 &= 46,84 \\
 S(P^*) &= 73,29 & C(P^*) &= 20105 & H(S(P^*)) &= 513 & c_T(P^*) &= 21394
 \end{aligned}$$

5. Dependencia de las capacidades óptimas respecto del desfase

En la sección 3.1 se mostró que si se mantiene fija la capacidad de fabricación y se consideran diferentes valores del desfase, entonces se obtienen diferentes valores de la capacidad de almacén, es decir, que hay una dependencia entre la capacidad de almacén y el desfase.

En esta sección se muestran los resultados del estudio de la dependencia de las capacidades de fabricación y almacén óptimas respecto del desfase de los retornos en un sistema como el del ejemplo de la sección 4.4.

En primer lugar se ha calculado las capacidades de fabricación y almacén óptimas cuando el sistema no tiene retornos, obteniendo los valores siguientes:

$$P^* = 119,20 \quad t_1 = 20,31 \quad t_2 = 37,79 \quad t_3 = 48,35$$

$$S(P^*) = 118,61 \quad C(P^*) = 23800 \quad H(S(P^*)) = 830 \quad c_T(P^*) = 25951$$

A continuación se han calculado las capacidades óptimas y los costes asociados a las mismas cuando el desfase de los retornos se hace variar entre 0 y 52 semanas. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 8, 9 y 10.

En la figura 8 se muestra que la capacidad de almacén óptima tiene fluctuaciones muy importantes del orden del 100% entre el máximo y el mínimo. También se observa que la capacidad de almacén óptima cuando el sistema tiene retornos puede ser superior a la del sistema sin retornos.

En cuanto a la capacidad de fabricación, las variaciones son apenas del 10%, tal como se puede ver en la figura 9.

Se puede observar en la figura 10 que el coste óptimo varía de forma significativa al variar el desfase. Teniendo en cuenta el coste calculado para el sistema sin retornos (25951), se podría dar el caso que fuera inferior al del sistema con retornos ya que en el cálculo de estos últimos faltaría añadir los costes de capacidad de refabricación.

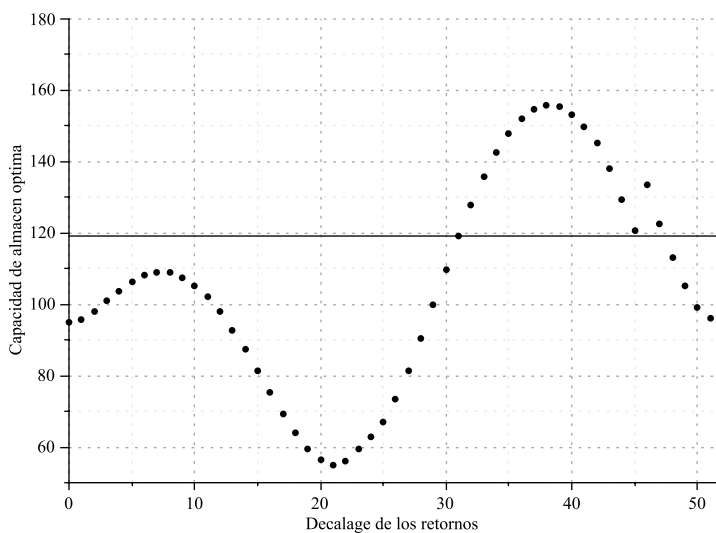


Figura 8: Dependencia de la capacidad de almacén óptima S respecto del desfase τ , en el supuesto del ejemplo de la sección 4.4. Los puntos corresponden a las capacidades de almacen óptimas del sistema con retornos y la línea continua a la capacidad de almacen óptima del sistema sin retornos.

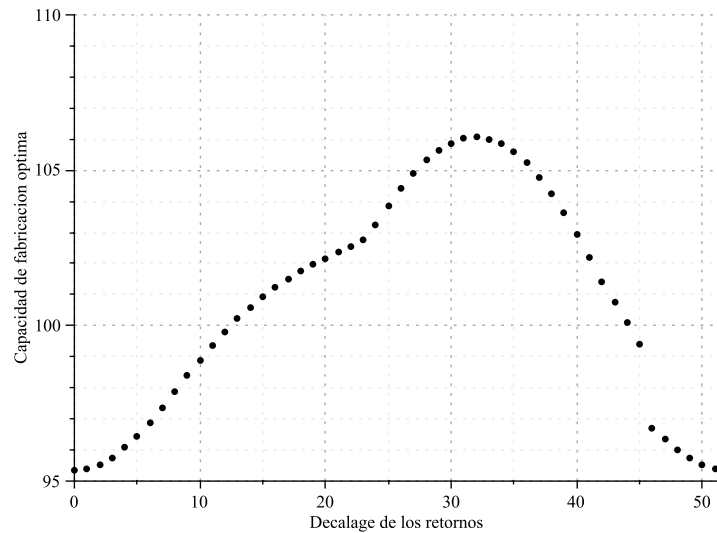


Figura 9: Dependencia de la capacidad de fabricación óptima P respecto del desfase τ , en el supuesto del ejemplo de la sección 4.4.

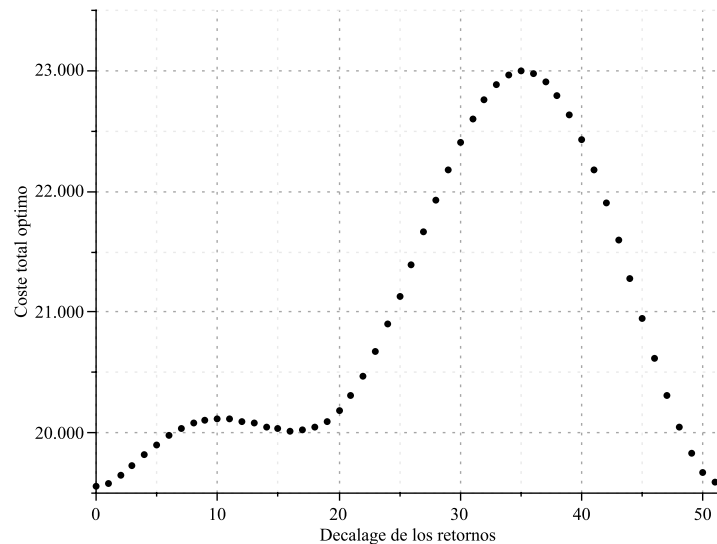


Figura 10: Dependencia del coste óptimo respecto del desfase τ , en el supuesto del ejemplo de la sección 4.4.

6. Conclusiones

En este trabajo se presenta un método para determinar las capacidades de fabricación y almacenaje óptimas en un sistema con logística inversa en el que se refabrica todo el producto retornado y con demanda periódica. Los aspectos más relevantes del método son:

- Fijando las capacidades de fabricación y almacenaje, el método permite calcular la política de fabricación óptima del sistema.
- Permite calcular la capacidad de fabricación y almacenaje óptimas.
- Se trata de un método de fácil implementación y que se utiliza en la sección cinco para estudiar el comportamiento de las capacidades óptimas en función del desfase de los retornos.

Otras conclusiones importantes del trabajo son las que se extraen del estudio realizado en la sección 5, de las cuales la más relevante es que la función de los retornos influye de forma muy significativa en las necesidades de almacén y en la rentabilidad total del sistema.

El método descrito se puede utilizar también como base para diferentes tipos de análisis como por ejemplo:

- Estudio de rentabilidad de implementación de un sistema con logística inversa.
- Viabilidad de inversiones en políticas que modifiquen el valor del desfase de los retornos.
- Influencia de la tasa de retorno ρ en las capacidades de fabricación y almacenaje.

El sistema estudiado es una aproximación de un sistema real y por tanto, algunas de las conclusiones pueden extenderse a sistemas más generales. En este sentido el presente trabajo puede ampliarse en el futuro, analizando sistemas más generales como por ejemplo los que disponen de stocks de producto retornado y de capacidad de refabricación limitada.

Referencias

- Benedito, E., A. Corominas. 2008. Optimal manufacturing and remanufacturing capacities of systems with reverse logistics and deterministic demand. *Working Paper* .
- Buchanan, D. J., P. L. Abad. 1998. Optimal policy for a periodic review returnable inventory system. *IIE Transactions* **30** 1049–1055.
- Choi, D.-W., H. Hwan, S.-G. Koh. 2007. A generalized ordering and recovery policy for reusable items. *European Journal of Operational Research* **182** 764–774,.
- de Brito, M. P., R. Dekker. 2004. A framework for reverse logistic. R. Dekker, M. Fleischmann, K. Inderfurth, L.Ñ. Van Wassenhove, eds., *Reverse Logistics. Quantitative Models for Closed-Loop Supply Chais*. Springer-Verlag, Germany, 3–27.
- Fleischmann, M., J. M. Bloemhof-Ruwaard, R. Dekker, E. Van der Laan, J. van Nunen, L.Ñ. Van Wassenhove. 1997. Quantitative models for reverse logistics: A review. *European Journal of Operational Research* **103** 1–17.
- Fleischmann, M., R. Kuik. 2003. Optimal inventory control with independent stochastic item returns. *European Journal of Operational Research* **151** 25–37.
- Kiesmüller, G. P., S. Minner, R. Kleber. 2004. Managing dynamic product recovery: An optimal control perspective. R. Dekker, M. Fleischmann, K. Inderfurth, L.Ñ. Van Wassenhove, eds., *Reverse Logistics. Quantitative Models for Closed-Loop Supply Chais*. Springer-Verlag, Germany, 221–247.
- Rubio, S. 2003. El sistema de logística inversa en la empresa: análisis y aplicaciones. Ph.D. thesis, Universidad de Extremadura.
- Rubio, S., A. Chamorro, F. J. Miranda. 2008. Characteristics of research on reverse logistics (1995-2005). *International Journal of Production Research* **4**(15) 1099–1120.
- Rubio, S., A. Corominas. 2008. Optimal manufacturing-remanufacturing policies in a lean production environment. *Computers & Industrial Engineering*. doi 10.1016/j.cie.2007.12.009.
- Teunter, R. H. 2006. Determining optimal disassembly and recovery strategies. *Omega. The International Journal of Management Science* **34** 533–537.
- Thierry, M. C., M. Salomon, J. van Nunen, L.Ñ. Van Wassenhove. 1995. Strategic issues in product recovery management. *California Management Review* **37** 114–135.

van der Laan, E., M. Salomon, R. Dekker, L. Van Wassenhove. 1999. Inventory control in hybrid systems with remanufacturing. *Management Science* **45** 733–747.