

**Notas del Primer
Seminario de Integrabilidad de la
Universitat Politècnica de Catalunya**

**Notas del Primer
Seminario de Integrabilidad de la
Universitat Politècnica de Catalunya**

Barcelona – España

Marzo 29 y 30, 2005

Editor

Primitivo B. Acosta Humánez
Universitat Politècnica de Catalunya

INTRODUCCIÓN

Estas notas corresponden a las exposiciones presentadas en el *Primer Seminario de Integrabilidad*, dentro de lo que se denomina *Aula de Sistemas Dinámicos*. Durante este evento se realizaron seis conferencias, todas presentadas por miembros del grupo de Sistemas Dinámicos de la UPC. El programa desarrollado fue el siguiente:

AULA DE SISTEMAS DINÁMICOS

<http://www.ma1.upc.es/recerca/seminaris/aulasd-cat.html>

SEMINARIO DE INTEGRABILIDAD

Martes 29 y Miércoles 30 de marzo de 2005
Facultad de Matemáticas y Estadística, UPC
Aula: Seminario 1

PROGRAMA Y RESÚMENES

Martes 29 de marzo

- 15:30. Juan J. Morales-Ruiz. *El problema de la integrabilidad en Sistemas Dinámicos*

Resumen. En esta presentación se pretende dar una idea de conjunto, pero sin entrar en detalles, sobre las diversas nociones de integrabilidad, asociadas a nombres de matemáticos tan ilustres como Liouville, Galois-Picard-Vessiot, Lie, Darboux, Kowalevskaya, Painlevé, Poincaré, Kolchin, Lax, etc. Además también mencionaremos la revolución que supuso en los años sesenta del siglo pasado el descubrimiento de Gardner, Green, Kruskal y Miura sobre un nuevo método para resolver en algunos casos determinadas ecuaciones en derivadas parciales.

- 16:00. David Gómez-Ullate. *Superintegrabilidad, pares de Lax y modelos de N -cuerpos en el plano*

Resumen. Introduciremos algunas técnicas clásicas para construir modelos de N -cuerpos integrables, como los pares de Lax o la dinámica de los ceros de un polinomio. Revisaremos la noción de integrabilidad Liouville y superintegrabilidad, y discutiremos un nuevo método debido a F. Calogero para contruir modelos de N -cuerpos en el plano con muchas órbitas periódicas. La exposición se acompañará de animaciones del movimiento de los cuerpos, y se plantearán algunos problemas abiertos.

- 17:00. Pausa
- 17:30. Yuri Fedorov. *Análisis de Kovalevskaya–Painlevé y Sistemas Algebraicamente Integrables*

Resumen. Muchos sistemas integrables poseen una propiedad remarkable: todas sus soluciones son funciones meromorfas del tiempo como una variable compleja. Tal comportamiento, que se refiere como propiedad de Kovalevskaya–Painlevé (KP) y que se usa frecuentemente como una ensayo de integrabilidad, no es accidental y tiene unas raíces geométricas profundas. En esta charla describiremos una clase de tales sistemas (conocidos como los sistemas algebraicamente integrables) y subrayaremos sus propiedades geométricas principales que permiten predecir la estructura de las soluciones complejas y además encontrarlas explícitamente. Eso lo ilustraremos con algunos sistemas de la mecánica clásica. También mencionaremos unas generalizaciones útiles de la noción de integrabilidad algebraica y de la propiedad KP.

Miércoles 30 de marzo

- 15:30. Rafael Ramírez-Ros. *El método de Poincaré*

Resumen. Dado un sistema Hamiltoniano autónomo cercano a completamente integrable Poincaré probó que, en general, no existe ninguna integral primera adicional uniforme en el parámetro de perturbación salvo el propio Hamiltoniano. Esbozaremos las ideas principales del método de prueba y comentaremos algunas extensiones y generalizaciones.

- 16:30. Chara Pantazi. *El Método de Darboux*

Resumen. Darboux, en 1878, presentó su método para construir integrales primeras de campos vectoriales polinomiales utilizando sus curvas invariantes algebraicas. En esta exposición presentaremos algunas extensiones del método clásico de Darboux y también algunas aplicaciones.

- 17:30. Pausa

- 18:00. Juan J. Morales-Ruiz. *Métodos recientes para detectar la no integrabilidad*

Resumen. En 1982 Ziglin utiliza la estructura de la ecuación en variaciones de Poincaré (sobre una curva integral particular) como una herramienta fundamental para detectar la no integrabilidad de un sistema Hamiltoniano. En esta charla se pretende dar una idea de esta aproximación a la no integrabilidad, junto con técnicas más recientes que involucran la teoría de Galois de ecuaciones diferenciales lineales, haciendo énfasis en los ejemplos más que en la teoría general. Ilustraremos estos métodos con resultados sobre la no integrabilidad de algunos problemas de N cuerpos en Mecánica Celeste.

Finalmente, deseo expresar mi más profunda gratitud a mis maestros Amadeu Delshams y Juan Morales-Ruiz por encomendarme la tarea de organizar estas notas, misión en la cual conté con el apoyo incondicional de los expositores y de mis compañeros del seminario *Métodos algebraicos en sistemas dinámicos* David Blázquez y Sergi Simón.

Primitivo B. Acosta Humánez

Editor

Grupo de Sistemas Dinámicos

Universitat Politècnica de Catalunya

www-ma2.upc.edu/primi

primitivo.acosta@upc.edu

Barcelona, Junio 23 de 2005

COMITÉS SEMINARIO DE INTEGRABILIDAD – 2005

COMITÉ EDITORIAL

*Notas del Primer Seminario de Integrabilidad de la
Universitat Politècnica de Catalunya*

Primitivo Acosta-Humánez (Editor) – UPC, Barcelona, España

COMITÉ CIENTÍFICO

*Primer Seminario de Integrabilidad de la
Universitat Politècnica de Catalunya*

Amadeu Delshams – Universitat Politècnica de Catalunya, España

COMITÉ ORGANIZADOR

*Primer Seminario de Integrabilidad de la
Universitat Politècnica de Catalunya*

Juan J. Morales-Ruiz – Universitat Politècnica de Catalunya, España

CONTENIDO

Introducción	v
Comités Seminario de Integrabilidad – 2005	ix
El problema de la integrabilidad en Sistemas Dinámicos <i>J.J. Morales-Ruiz</i>	1
Superintegrabilidad, pares de Lax y modelos de N –cuerpos en el plano <i>D. Gómez-Ullate</i>	10
Análisis de Kovalevskaya–Painlevé y Sistemas Algebraica- mente Integrables <i>Y. Fedorov</i>	22
El Método de Poincaré <i>R. Ramírez-Ros</i>	38
El Método de Darboux <i>Ch. Pantazi</i>	50
Métodos Recientes para Detectar la no Integrabilidad <i>J.J. Morales-Ruiz</i>	63

EL PROBLEMA DE LA INTEGRABILIDAD EN SISTEMAS DINÁMICOS

Juan J. Morales-Ruiz

*Departamento de Matemática Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
juan.morales-ruiz@upc.edu*

En este artículo se pretende dar una idea de conjunto, pero sin entrar en detalles, sobre las diversas nociones de integrabilidad, asociadas a nombres de matemáticos tan ilustres como Liouville, Galois-Picard-Vessiot, Lie, Darboux, Kowalevskaya, Painlevé, Poincaré, Kolchin, Lax, etc. Además también mencionaremos la revolución que supuso en los años sesenta del siglo pasado el descubrimiento de Gardner, Green, Kruskal y Miura sobre un nuevo método para resolver en algunos casos, determinadas ecuaciones en derivadas parciales.

Palabras Clave: Integrabilidad, Sistemas Dinámicos, Teoría de Picard- Vessiot.

1. El problema

Iniciamos preguntándonos: ¿es posible resolver *analíticamente* cualquier ecuación diferencial? (\sim simetrías, grupos). Ahora bien, ¿qué significa resolver analíticamente?. Conocemos los métodos elementales para resolver ecuaciones diferenciales, entre los cuales se encuentra el de factores integrantes, etc. Como ejemplo ilustrativo veamos la ecuación de Riccati asociada a Airy.

Ejemplo 1.1 (Airy).

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2 \tag{1}$$

La ecuación (1), no puede resolverse con lápiz y papel (mediante funciones elementales y/o Liouvillianas) utilizando los métodos clásicos de un curso de ecuaciones diferenciales. Entonces, tratemos de ver en que marco se justifica esta afirmación y así determinar el procedimiento que debemos seguir.

El origen del marco se basa en la Teoría de Galois de polinomios (resolución mediante radicales: muy precisa).

A continuación veremos los personajes y sus trabajos mas reelevantes relacionados con el problema de la integrabilidad, el cual dividiremos en dos partes:

- Integrabilidad de ecuaciones diferenciales.
- Integrabilidad de sistemas hamiltonianos

2. Integrabilidad de ecuaciones diferenciales

2.1. *E. Galois (1811-1832)*

Aunque Galois no trabajó en ecuaciones diferenciales, su trabajo fue inspiración debido a la dualidad entre *grupo de Galois y simetrías* en la teoría clásica de polinomios, obteniendo la resolubilidad mediante radicales. Este trabajo fue la base de lo que hoy se conoce como *teoría de Galois* permitiendo desarrollar en gran manera a la teoría de grupos.

Recordemos que Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) había demostrado que toda ecuación polinómica irreducible de grado n con coeficientes racionales tiene n raíces. Galois demostró que estas raíces pueden calcularse a partir de los coeficientes de la ecuación polinómica mediante números racionales, las cuatro operaciones con éstos y las raíces de cualquier índice a condición de que la ecuación polinómica admita un grupo llamado *grupo resoluble*.

Después de la muerte de Galois, su hermano y Chevalier (su amigo), enviaron copia de sus trabajos a algunos matemáticos, entre los cuales estaban Gauss y Jacobi. Había sido deseo de Galois que Jacobi y Gauss emitieran algún concepto sobre su trabajo. Ningún expediente existe de cualquier comentario que estos hombres hicieran. No obstante los artículos llegaron a manos de Liouville.

El lector interesado puede consultar la página:

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Galois.html>, en donde puede encontrar una completa biografía de Galois.

2.2. J. Liouville (1809-1882)

Publicó en septiembre de 1846 *la memoria de Galois*. En 1840 enunció el teorema que hoy en día lleva su nombre, *Teorema de Liouville* y que fue formulado geoméricamente por V. Arnold, razón por la cual también se conoce como *el teorema de Liouville-Arnold*.

Definición 2.1. Sea $H : U \subset \mathbb{K}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si $(x, y) \in U$, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ entonces

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (2)$$

se conocen como *ecuaciones de Hamilton*, y al escribirlas como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales se denomina *sistema hamiltoniano* con n grados de libertad.

Definición 2.2. Sean $f, g : U \rightarrow \mathbb{K}$, el *paréntesis de Poisson* de f y g se define como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

Si $\{f, g\} = 0$, se dice que f y g están en *involución*.

Teorema 2.1 (Liouville, 1840). *Si existen funciones $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ independientes* y en involución, donde $k = 1, \dots, n$, $f_1 = H$, entonces el sistema hamiltoniano (2) es integrable por cuadraturas.*

Un sistema hamiltoniano que cumpla el teorema 2.1 se denomina *completamente integrable* (o *integrable*).

Como ejemplos de sistemas hamiltonianos integrables en este sentido se tienen los siguientes:

- Todos los de 1 un grado de libertad.
 - Oscilador armónico
 - Péndulo simple
 - Campo central

*Al hablar de independencia nos referimos a la independencia funcional: no puede existir una función que relacione a f_i con f_j para $i \neq j$.

- El sistema de Henon-Heiles

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - x_2^2 x_1 - 2x_1^3.$$

Para motivar un poco la lectura de la conferencia 6 (§6), se presenta un ejemplo de un sistema no integrable, mediante integrales primeras racionales

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - x_2^2(x_1 + 1).$$

2.3. S. Lie (1842-1899)

Matemático noruego, inspirado y motivado por los trabajos de Galois intentó aplicar las ideas de Galois a las ecuaciones diferenciales ordinarias. En su trabajo *memorias sobre los grupos de transformaciones y de simetrías* (1888-1893) definió grupos de simetrías de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), lo que hoy se conoce como *grupos de Lie*.

2.4. E. Picard (1856-1951)

Al igual que S. Lie, Picard intentó aplicar la teoría de Galois a las ecuaciones diferenciales, pero sólo a las lineales. El caso no lineal está aún por resolverse. Las memorias de Picard son publicadas entre 1883 y 1895.

2.5. E. Vessiot (1865-1952)

Vessiot, basado en los trabajos de Picard y Lie, realiza su tesis doctoral en 1892. Con el título *sobre las ecuaciones diferenciales lineales*, este trabajo se convertiría junto con los trabajos de Picard, en la base de lo que hoy en día se conoce como *Teoría de Picard-Vessiot*.

2.6. E. Kolchin (1916-1991)

Después de casi treinta años en el olvido, Kolchin retoma la teoría de Picard-Vessiot, utilizando el lenguaje actual. Prueba la existencia y unicidad de las extensiones de Picard-Vessiot. Sus publicaciones las realizó entre 1948 y 1976. Para ampliar esta información se recomienda la lectura de libros sobre *differential Galois theory*^{5,11} incluyendo sus referencias.

2.7. *B. Malgrange (1928-)*

Sus publicaciones sobre este tema son recientes, principalmente ha aportado mediante sus investigaciones en los siguientes temas:

1. Ecuaciones en derivadas parciales a coeficientes constantes.
2. Geometría diferencial: re-demostración y extensión de los pseudo-grupos de Lie elípticos del teorema de Newlander-Nirenberg; extensión del teorema de Frobenius en el caso singular.
3. Singularidades diferenciales: demostración del teorema de preparación diferenciable (conjeturado por R. Thom); extensión a sistemas de teorema de división de distribuciones de Hörmander-Lojasiewicz.
4. Singularidades analíticas: relaciones entre la monodromía de una singularidad de una función, las integrales asintóticas, y los polinomios de Bernstein-Sato; teoremas del tipo Riemann-Roch y Atiyah-Singer para los D-módulos; singularidades irregulares de ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier; deformaciones isomonodrómicas; propiedad de Painlevé.
5. A partir del año 2001 he hecho importantes aportaciones en el caso no lineal, es decir, una versión de la teoría de Galois diferencial para ecuaciones no lineales.

Actualmente es miembro de la Academia de Ciencias en Grenoble y profesor emérito de la Universidad Joseph Fourier.

3. Integrabilidad de sistemas hamiltonianos

Basados en el trabajo de Liouville (1840), varios matemáticos intentaron resolver el caso de la integrabilidad o no integrabilidad de un sistema hamiltoniano.

3.1. *S. Kowalevskaya (1850-1891)*

En su artículo sobre el sólido (1889), presentó un nuevo caso de integrabilidad usando el tiempo complejo, en donde la solución general era meromorfa. Esta información se amplía en la conferencia 3 (§3).

3.2. *P. Painlevé (1863-1933)*

En su trabajo *Lecciones de Estocolmo* (1895), aparecen algunos de los que hoy conocemos como trascendentes de Painlevé. En total son seis

trascendentes, de los cuales cinco fueron encontrados por Painlevé y sus alumnos, el sexto fue encontrado por Fuchs (ver el libro de Ince⁴) y contiene los cinco anteriores. A continuación se presentan los cuatro primeros trascendentes de Painlevé:

$$[PI] \quad y'' = x + 6y^2, \quad (4)$$

$$[PII] \quad y'' = 2y^3 + xy + \alpha, \quad (5)$$

$$[PIII] \quad y'' = \frac{y'^2 + \delta}{y} + \frac{\alpha y^2 + \beta - y'}{x} + \gamma y^3, \quad (6)$$

$$[PIV] \quad y'' = \frac{y'^2 + 2\beta}{2y} + \frac{3y^3 +}{2} + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y, \quad (7)$$

En 1906 Painlevé publica un artículo con los seis trascendentes. Obsérvese el comportamiento alrededor de ∞ (al hacer el cambio $x = 1/t$) de cada una de estas ecuaciones. Se sabe además, que ninguno de los seis trascendentes de Painlevé puede resolverse mediante funciones elementales.

Actualmente, basados en los trabajos de Kowalevskaya y Painlevé, los matemáticos Adler-Van Moerbeke-Mumford (2004), han desarrollado lo que se conoce como *test de Kowalevskaya-Painlevé* para sistemas algebraicamente integrables (Ver Conferencia 3).

3.3. G. Darboux (1842-1917)

El trabajo de Darboux (1878) tiene como eje fundamental los *campos en el plano*:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = h(x, y), \quad g(x, y) = f(x, y)h(x, y)$$

donde a primer orden se tiene el método de los factores integrantes. Ver Conferencia 5 (§5).

3.4. H. Poincaré (1854-1912)

En su obra *métodos nuevos de la mecánica celeste* Tomo I (1892), aparece el concepto *integrabilidad uniforme*. Poincaré demostró la no

integrabilidad del problema de 3 cuerpos mediante integrales primeras analíticas respecto a las masas. (Implica meromorfa respecto a las masas) El teorema de Bruns-Poincaré nos dice:

*No existe integral primera algebraica adicional
en el problema de tres cuerpos.*

El teorema de Bruns será explicado en la conferencia 4 (§4).

3.5. *Gardner-Green-Kruskal-Miura (1967)*

En su publicación muestran un nuevo método para “resolver” la ecuación de Korteweg-De Vries (KdV)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

En su artículo Gardner, Green, Kruskal y Miura muestran que la KdV se puede escribir como un “sistema hamiltoniano infinito dimensional completamente integrable”, encontrando sus “integrales primeras” mediante el llamado método *inverso espectral* (*inverse scattering*).

3.6. *P. Lax (Premio Abel 2005)*

Expresa la KdV mediante conmutadores, los cuales hoy se conocen como el *par de Lax* (1968). El par de Lax son dos operadores diferenciales A, L tales que $\dot{L} = [A, L]$. Las contribuciones de Lax a los solitones, a la entropía, y a las ondas expansivas se consideran de mucho valor. Sobre el par de Lax se hablará en la conferencia 2 (§2).

3.7. *Krichever-Novikov (1980-)*

La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{1}{4} \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{8} \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} + \frac{3}{2} \frac{p(u)}{u_x^2},$$

donde

$$p(u) = \frac{1}{4}(4u^3 - g_2u - g_3),$$

se denomina *ecuación de Krichever-Novikov*. Los casos especiales $p(u) = (u - e_1)^2(u - e_2)$ $p(u) = u^3$ pueden reducirse a la KdV mediante un cambio adecuado de variables.

3.8. Ziglin (1982, 1983)

Ziglin analiza la no integrabilidad de un sistema hamiltoniano mediante la ecuación en variaciones. Estos trabajos los realiza con antecedentes de Poincaré y Lyapunov. En la conferencia 6 (§6) se ampliará esta información y se enuncia el Teorema de Ziglin.

3.9. Métodos Galoisianos (1989-...)

En mi tesis doctoral *Técnicas algebraicas para la no integrabilidad de Sistemas Hamiltonianos* (1989) se aplicó por primera vez la Teoría de Galois diferencial en la no integrabilidad de un sistema hamiltoniano, sin embargo simultáneamente, Churchill y Rod obtuvieron resultados parecidos. Mas tarde, gracias a una estancia postdoctoral en Francia y trabajando con J.P. Ramis se gesta lo que hoy se conoce como *teoría de Morales-Ramis* (1998).

Bibliografía

1. P. ACOSTA-HUMÁNEZ, *La teoría de Morales-Ramis y el algoritmo de Kovacic*, *Lecturas Matemáticas*, Volumen Especial (2005), 21–56
2. P. ACOSTA-HUMÁNEZ & D. BLÁZQUEZ-SANZ, *Non-Integrability of some hamiltonian systems with rational potentials*, preprint available at: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0610010>
3. P. ACOSTA-HUMÁNEZ & J.H. PÉREZ, *Una Introducción a la Teoría de Galois Diferencial*, *Boletín de Matemáticas*, Universidad Nacional de Colombia **11**, (2004), 138–149.
4. E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, Nova York, 1956.
5. J. J. MORALES-RUIZ, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhäuser, Basel 1999.
6. J. J. MORALES-RUIZ & J. P. RAMIS, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, I*, *Methods and Applications of Analysis* **8** (2001), p. 33-96.
7. J. J. MORALES-RUIZ & J. P. RAMIS, C. SIMÓ, *Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Groups of Higher Variational Equations*, to appear.
8. S. T. SADETOV, *On algebraic integrals of Hill Problem and Restricted Circle Plane Three-Body Problem on a level of energy* (current title), preprint.
9. C. SIMÓ, *An overview on some problems in Celestial Mechanics*, included in “Iniciación a los sistemas dinámicos”, *Cursos de Verano*, Universidad Complutense de Madrid, El Escorial, 1997. Available at <http://www-ma1.upc.es/escorial/index.html>.
10. C. SIMÓ & T. J. STUCHI, *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the Planar Hill Problem*, *Physica* **D140** (2000), p. 1–32.
11. M. F. SINGER & M. VAN DER PUT, *Galois Theory of Linear Differential*

Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume **328**, Springer, 2003.

12. S. L. ZIGLIN, *Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics. I.*, Functional Analysis and Applications, **16** (1982), p. 181-189.

SUPERINTEGRABILIDAD, PARES DE LAX Y MODELOS DE N -CUERPOS EN EL PLANO

David Gómez-Ullate

*Departamento de Matemática Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
david.gomez-ullate@upc.edu*

Introduciremos algunas técnicas clásicas para construir modelos de N -cuerpos integrables, como los pares de Lax o la dinámica de los ceros de un polinomio. Revisaremos la noción de integrabilidad Liouville y superintegrabilidad, y discutiremos un nuevo método debido a F. Calogero para contruir modelos de N -cuerpos en el plano con muchas órbitas periódicas. Aunque la exposición se acompañó de animaciones del movimiento de los cuerpos, aquí nos limitaremos a presentar algunas figuras y se plantean algunos problemas abiertos.

Palabras Clave: Integrabilidad, Órbitas Periódicas, Pares de Lax, Sistemas Dinámicos, Superintegrabilidad.

1. Integrabilidad Completa (Liouville)

Si existen integrales primeras tales que

1. son funcionalmente indepeditentes,
2. satisfacen $\{I_i, I_j\} = 0$ y
3. generan flujos completos,

entonces existe una transformación canónica $(q_i, p_i) \rightarrow (J_i, \varphi_i)$ a las variables acción ángulo tal que:

$$H(q, p) = \tilde{H}(J). \quad (1)$$

Para cada conjunto de condiciones iniciales, el movimiento está confinado a la subvariedad del espacio de fases determinada por los conjuntos de nivel

$$M_I = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{2N} : I_i(q, p) = c_i\}. \quad (2)$$

Si la variedad M_I es compacta, entonces es difeomorfa al toro \mathbb{T}^N , esto es equivalente a decir que

$$M_I \simeq \mathbb{T}^n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N, \quad \text{mod } 2\pi\}, \quad (3)$$

además, la evolución en las nuevas variables es trivial, es decir, $J_i = J_i^0$ y $\varphi_i = \varphi_i^0 + \omega_i t$. Si las frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_N$ son independientes sobre los racionales, entonces las trayectorias llenan densamente el toro y el movimiento se denomina *cuasi-periódico*.

Las trayectorias completamente periódicas solo ocurren cuando todas las frecuencias son múltiplos racionales de una de ellas, es decir, se tendrían *toros resonantes*. Véase al respecto las figuras de Lissajous.

2. Super-integrabilidad

Un sistema puede tener más de N constantes del movimiento, independientes. Si existen $(N + k)$ constantes, el movimiento tiene lugar en un toro $(N - k)$ -dimensional \mathbb{T}^{N-k} y por lo tanto,

si $k = N - 1$ entonces casi toda órbita acotada es periódica.

e.g. Una partícula en el espacio tridimensional bajo un potencial:

- Todo potencial central $V = V(r)$ es integrable.
- Sólo $V(r) = r^{-1}$, $V(r) = r^2$ son super-integrables.

c.f. Avances del perihelio en movimientos planetarios.

Nota 2.1 (Sistemas super-integrables). *Se piensa tradicionalmente en los sistemas super-integrables como algo ciertamente singular y especial.*

El approach *tradicional* a la super-integrabilidad es fundamentalmente algebraico, y se basa en encontrar integrales del movimiento mediante...

1. La búsqueda de simetrías, lo cual es difícil para sistemas de N -cuerpos.
2. Proyección de movimiento libre en una variedad de dimensión más alta.
3. Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi.
4. Encontrar un par de Lax para el sistema.

En este escrito se observa un approach diferente, de espíritu más analítico, que se centra no tanto en la presencia de las integrales del

movimiento, como en la presencia de órbitas periódicas.

Pares de Lax. Un truco para asegurar la integrabilidad de sistemas dinámicos de N -cuerpos. Dados $L = L(q, p), M = M(q, p) \in L(\mathbb{R}^N)$, las ecuaciones de Hamilton se tienen si y sólo si $\dot{L} = [L, M]$, en donde las raíces del polinomio característico asociado a L dependen de (q, p) y son constantes de movimiento. Las matrices L, M que satisfacen $\dot{L} = [L, M]$ se denomina *par de Lax*. Como es natural, $[L, M] = LM - ML$ es el conmutador. Ahora bien, la existencia del par de Lax, $\dot{L} = [L, M]$, implica que hay tres conjuntos de cantidades conservadas, los cuales son:

- autovalores de L , es decir, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$
- trazas de las potencias de L , es decir, $T_k = \text{Tr}(L^k) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k$, donde $k = 1, \dots, N$
- invariantes simétricos de L , es decir, $\det(L - \lambda I) \equiv \lambda^N + \sum_{i=1}^N J_i \lambda^{N-i}$

3. Ansatz para sistemas integrables de N -cuerpos

Dadas las matrices de Lax L, M , tales que

$$L_{ii} = p_i, \quad L_{ij} = \alpha(q_i - q_j), \quad M_{ii} = \sum_{k=1}^N \beta(q_i - q_k), \quad M_{ij} = \gamma(q_i - q_j) \quad \forall i \neq j.$$

Ahora bien, la evolución de Lax $\dot{L} = [L, M]$, implica que

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = \sum_{k=1}^N V'(q_i - q_k), \quad (4)$$

las cuales son las conocidas *ecuaciones de Hamilton* de

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i < j=1}^N V(q_i - q_j). \quad (5)$$

Además, $\gamma(q) = \alpha'(q)$, $V(q) = \alpha(q)\alpha(-q)$, $\beta(q) = \beta(-q)$, y la ecuación funcional es

$$\frac{\alpha(x)\alpha'(x) - \alpha(y)\alpha'(y)}{\alpha(x+y)} = \beta(x) - \beta(y). \quad (6)$$

Una solución particular de la ecuación funcional (6) es

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{ig}{x} \\ \beta(x) &= \frac{ig}{x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V(q) = \frac{g^2}{x^2}, \quad (7)$$

lo cual conduce al modelo *Calogero-Moser*:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + g^2 \sum_{i<j=1}^N \frac{1}{(q_i - q_j)^2}. \quad (8)$$

*Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum
inverse proportionalibus recta linea se moventiur*

C. Jacobi, *Gesammelte Werke*, vol 4 (1866).

La solución general de la ecuación funcional proporciona:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + g^2 \sum_{i<j=1}^N \wp(q_i - q_j | \omega, \omega'). \quad (9)$$

3.1. Dinámica de los ceros de un polinomio

Dado un polinomio mónico con coeficientes dependientes del tiempo, es decir

$$P(z, t) = z^N + \sum_{i=1}^N c_i(t) z^{N-i} = \prod_{i=1}^N [z - z_i(t)], \quad (10)$$

por lo tanto existe una relación entre los ceros y coeficientes de $P(z, t)$, dando lugar a funciones simétricas elementales. Esto es:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\sum_i z_i \\ c_2 &= \sum_{i<j} z_i z_j \\ &\vdots \\ c_N &= (-1)^N z_1 z_2 \dots z_N. \end{aligned} \quad (11)$$

La relación anterior, (11), indica que conocidos $c_i(t)$ en el tiempo t , se calculan $z_i(t)$ mediante una operación algebraica que consiste en hallar los ceros del polinomio. Por lo tanto se tiene lo siguiente:

*La evolución sencilla de los coeficientes se da si y solo si
se da la evolución compleja de los ceros.*

Para ilustrar la anterior situación se plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 (EDP lineal). Si $P(z, t)$ satisface la EDP lineal $P_{tt} = 0$, entonces $\ddot{c}_i = 0$,

$$\ddot{z}_i = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\dot{z}_i \dot{z}_j}{z_i - z_j}, \quad i = 1, \dots, N.$$

3.2. El truco para órbitas periódicas

Partamos del sistema cuya resolubilidad acabamos de probar

$$\zeta_i'' = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\zeta_i' \zeta_j'}{\zeta_i - \zeta_j}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \zeta_i = \zeta_i(\tau), \quad \tau \in \mathbb{C},$$

donde ahora la variable independiente es un *tiempo complejo*.

El paso siguiente es realizar cambio de variables, para esto hacemos

$$\tau = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}, \quad \zeta_i(t) = z_i(t),$$

luego se tiene

$$\ddot{z}_i - i\omega \dot{z}_i = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\dot{z}_i \dot{z}_j}{z_i - z_j}, \quad (12)$$

donde como es natural, $z_i(0) = \zeta_i(0)$, $\dot{z}_i(0) = \zeta_i'(0)$.

Al variar t entre 0 y $T = \frac{2\pi}{\omega}$, τ describe una circunferencia C de radio $1/\omega$ en el plano complejo. Esto nos conduce a la siguiente idea clave:

Hay estructura analítica si y solo si hay periodicidad de la órbita.

Se tienen los siguientes hechos:

- si $\zeta_i(\tau)$ es analítica o meromorfa dentro de C , entonces $z_i(t)$ es periódica con periodo T
- si $\zeta_i(\tau)$ tiene un solo punto de ramificación de orden q dentro de C , entonces $z_i(t)$ sea periódica con periodo qT

Si $\zeta_i(t)$ es cualquier solución de un sistema de Ecuaciones diferenciales ordinarias analíticas, su analiticidad está garantizada al menos en un disco D en torno a $\tau = 0$ y posiblemente conteniendo a C . El tamaño de D depende de los datos iniciales que corresponden a la posición de la singularidad más próxima al origen. Si los datos iniciales son tales que el disco D contiene al disco C , entonces $z_i(t)$ es periódica con periodo T .

Cualquier sistema dinámico obtenido mediante este truco tiene una región de medida finita en el espacio de fases, tal que todas las trayectorias que parten de esa región son periódicas, de hecho, son *isócronas*. En esta región el sistema es superintegrable, nos preguntamos ahora... donde están las cantidades conservadas?

4. El modelo Goldfish

El modelo Goldfish para el problema de N -cuerpos de Calogero describe el movimiento de N partículas puntuales sujetas a interacción mutua con velocidades dependiendo bajo la acción de un campo magnético constante transversal al plano de movimiento. Cuando todas las constantes acopladas son iguales a uno, el modelo tiene la propiedad que para un dato genérico inicial, todos los movimientos del sistema son periódicos. De ahora en adelante, nos referiremos simplemente como el modelo Goldfish, entendiéndose como problema de N -cuerpos en el plano.

4.1. Descripción y trucos del Goldfish

El modelo Goldfish está descrito mediante las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \omega \hat{\mathbf{k}} \wedge \dot{\mathbf{r}}_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{r_{ij}^2} [\dot{\mathbf{r}}_i (\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}) + \dot{\mathbf{r}}_j (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}) - \mathbf{r}_{ij} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j)], \quad (13)$$

donde $\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i(t)$ denota la posición en el plano de la i th partícula, la cual por conveniencia notacional la imaginaremos inmersa en el espacio tri-dimensional ordinario, así que $\mathbf{r}_i \equiv (x_i, y_i, 0)$; como es natural, $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector unitario ortogonal al plano, es decir, $\hat{\mathbf{k}} \equiv (0, 0, 1)$, por lo tanto $\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{r}_n \equiv (-y_n, x_n, 0)$, y se tiene que

$$r_{ij}^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

es el cuadrado de la distancia entre dos partículas. El modelo caracteriza pares de velocidades dependientes que decrecen cuando las partículas se

alejan mucho. Por simplicidad asumimos que las constantes acopladas a_{ij} son todas reales y que $\omega > 0$ es una constante positiva para el cual el periodo fundamental

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14)$$

puede ser asociado.

Este problema de N -cuerpos, modelo Goldfish, satisface las siguientes propiedades:

- es invariante bajo el grupo conforme del plano, es decir, traslaciones, rotaciones y cambios de escala.
- cuando la velocidad dependiente de los dos cuerpos no está presente, el modelo tiene una interpretación física simple: se describe el movimiento de N cargas puntuales bajo la acción de un campo magnético constante ortogonal al plano, lo cual se denomina *un ciclotrón*.

Es obvio que toda partícula cae, en este caso, en un movimiento circular uniforme. Sin embargo, menos obvio puede ser el hecho que cuando las interacciones están presentes, existe una región R en el espacio de fases que tiene la misma dimensión que el espacio de fases completo tal que toda trayectoria originada en R es periódica.

Ahora, al hacer la identificación natural

$$\mathbf{r}_n \equiv (x_n, y_n, 0) \Leftrightarrow z_n \equiv x_n + iy_n ,$$

se obtiene una ecuación parecida a (12), pero ahora intervienen los coeficientes a_{ij} del polinomio mencionado anteriormente, es decir

$$\ddot{z}_i - i\omega\dot{z}_i = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \frac{\dot{z}_i \dot{z}_j}{z_i - z_j}. \quad (15)$$

Las ecuaciones del movimiento se derivan del siguiente hamiltoniano

$$H(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \sum_{n=1}^N \left[i\omega z_n + e^{p_n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N (z_n - z_j)^{-a_{nj}} \right], \quad (16)$$

donde \mathbf{z} denota el N -vector $\mathbf{z} \equiv (z_1, z_2, \dots, z_N)$.

Al aplicar el truco se tiene:

- Cambio de variables

$$z_i(t) = \zeta_i(\tau), \quad \tau = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}$$

- Transformación de ecuaciones

$$\ddot{z}_i - i\omega\dot{z}_i = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \frac{\dot{z}_i \dot{z}_j}{z_i - z_j} \Rightarrow \zeta_i'' = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \frac{\zeta_i' \zeta_j'}{\zeta_i - \zeta_j}.$$

- Análisis de coeficientes

- Si $a_{ij} = 1$ entonces el sistema es integrable y $z_i(t)$ son los ceros de un polinomio cuyos coeficientes varían en el tiempo de forma periódica. Las órbitas son periódicas para cualquier condición inicial.
- Si $a_{ij} \neq 1$ entonces no sabemos resolver el sistema. Pero nos gustaría al menos saber algo sobre la estructura de singularidades de las soluciones $\zeta_i(t)$... que podemos hacer?

4.2. Análisis de Painlevé para el Goldfish

Para realizar este análisis, se tienen en cuenta los siguientes pasos:

- Suponer que $\tau = \tau_b$ corresponde a una singularidad del sistema.
- Insertar un desarrollo local de las soluciones en un entorno de $\tau = \tau_b$

$$\zeta_i \sim c(\tau - \tau_b)^\gamma + o(|\tau - \tau_b|^{\Re\gamma}),$$

donde $\Re\gamma$ denota la parte real del complejo γ .

- Ver en que términos de la serie aparecen constantes arbitrarias (resonancias).
- Calcular los exponentes de los términos dominantes.

Como resultado se tiene que si $\tau = \tau_b$, corresponde a una colisión entre la i -ésima y j -ésima partículas. Es decir, $\zeta_i(\tau_b) = \zeta_j(\tau_b)$, y esto implica que

$$\gamma = \frac{1}{1 + a_{ij}},$$

de tal modo que al aplicar la ecuación (13),

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \omega \hat{\mathbf{k}} \wedge \dot{\mathbf{r}}_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{r_{ij}^2} [\dot{\mathbf{r}}_i (\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}) + \dot{\mathbf{r}}_j (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}) - \mathbf{r}_{ij} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j)],$$

se tenga la conocida expresión

$$\gamma = \frac{1}{1 + a_{ij}}, \quad \zeta_i \sim c(\tau - \tau_b)^\gamma,$$

donde los coeficientes a_{ij} son como se detallan a continuación.

- Si $a_{ij} \in \mathbb{Q}$, entonces existen órbitas periódicas de periodo más alto y HSL (*Hic Sunt Leones*).
- Si $a_{ij} \in \mathbb{C}$ con $\Im a_{ij} < 0$, entonces existen ciclos límite.
- Si $a_{ij} \in \mathbb{C}$ con $\Im a_{ij} > 0$, entonces existen órbitas no acotadas.

Como es natural, \Im denota la parte imaginaria de un complejo. Ahora bien, hemos integrado las ecuaciones del movimiento con un método Runge-Kutta de paso variable (Fehlberg).

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \omega \hat{\mathbf{k}} \wedge \dot{\mathbf{r}}_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{r_{ij}^2} [\dot{\mathbf{r}}_i (\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}) + \dot{\mathbf{r}}_j (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}) - \mathbf{r}_{ij} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j)].$$

Para ilustrar esta situación consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 ($N = 3$). *Sea el número de partículas $N = 3$ (Partícula 1, Partícula 2, Partícula 3). Las constantes de acoplamiento están dadas por*

$$a_{12} = 2, \quad a_{13} = 4, \quad a_{23} = 6.$$

Los datos iniciales están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(0) &= (0, 0), & \mathbf{r}_2(0) &= (0, 1), & \mathbf{r}_3(0) &= (-1, 0), \\ \dot{\mathbf{r}}_1(0) &= \lambda(-1, 1), & \dot{\mathbf{r}}_2(0) &= \lambda(1, 0), & \dot{\mathbf{r}}_3(0) &= \lambda(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Vamos a explorar la complejidad de las órbitas para diferentes valores del parámetro λ :

λ	0,5	0,780	0,781	1	1,213	1,214	1,219	1,220	1,241
<i>Periodo</i>	1	1	6	6	6	49	49	50	50

λ	1,242	1,25	1,293	1,294	1,295	1,400	1,401	1,41	1,442
<i>Periodo</i>	51	51	51	57	58	58	59	59	59

λ	1,443	1,721	1,722	1,8	1,944	1,945	2,053	2,054	2,1
<i>Periodo</i>	65	65	66	66	66	68	68	71	71

λ	2,108	2,109	2,164	2,165	2,17	2,171	2,172	2,2	2,5
<i>Periodo</i>	71	72	72	74	74	74	HSL	HSL	HSL

Nota 4.1 (Cambio complejo). *Al tomar la evolución en el tiempo real de un sistema dinámico.*

$$\ddot{z}_i - i\omega\dot{z}_i = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \frac{\dot{z}_i \dot{z}_j}{z_i - z_j}, \quad z_i = z_i(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt}$$

y hacer el cambio de variables

$$z_i(t) = \zeta_i(\tau(t)),$$

se tiene una especie de “evolución” en el tiempo complejo

$$\zeta_i'' = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \frac{\zeta_i' \zeta_j'}{\zeta_i - \zeta_j}, \quad \zeta_i = \zeta_i(\tau), \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad \zeta_i' = \frac{d\zeta_i}{d\tau}$$

mas una curva en el “tiempo complejo” parametrizada por el tiempo real

$$\tau(t) = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}.$$

De acuerdo con la nota 4.1, la evolución del sistema físico corresponde a viajar en la superficie de Riemann asociada a la solución de un sistema asociado en un tiempo complejo.

Existe complejidad de la evolución en tiempo real si y sólo si existe complejidad de la superficie de Riemann asociada a la solución en tiempo complejo.

El análisis de Painlevé ayuda a entender la superficie de Riemann, pues permite determinar qué tipo de puntos de ramificación existen, pero esto no es suficiente debido a:

- No permite determinar cuantos puntos de ramificación hay.
- No permite determinar cuantas hojas tiene la superficie de Riemann.
- No permite determinar el cómo están conectadas entre sí las diferentes hojas de la superficie de Riemann.

5. Cuestiones abiertas

Quedan por resolver las siguientes cuestiones:

- Análisis en profundidad de las propiedades de la superficie de Riemann en un modelo sencillo.

- Comparación de este mecanismo de transición al caos con indicadores clásicos de comportamiento caótico (exponentes de Lyapunov, espectros de frecuencias, entropías de Renyi, etc.)
- Universalidad de este mecanismo.

Bibliografía

1. F. CALOGERO, *Classical many-body problems amenable to exact treatments*, Lecture Notes in Physics Monograph **m 66**, Springer, Berlin, 2001.
2. F. CALOGERO, *The “Neatest” Many-Body Problem Amenable to Exact Treatments (a “Goldfish”?)*, *Physica D* **152/153** (2001), 78–84.
3. F. CALOGERO, *Motion of Poles and Zeros of Special Solutions of Nonlinear and Linear Partial Differential Equations, and Related ‘Solvable’ Many-Body Problems*, *Nuovo Cimento* **B43** (1978), 177–241.
4. F. CALOGERO, *A class of integrable Hamiltonian systems whose solutions are (perhaps) all completely periodic*, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 5711–5719.
5. F. CALOGERO, *A complex deformation of the classical gravitational many-body problem that features a lot of completely periodic motions*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 3619–3627.
6. F. CALOGERO, *Solvable Three-Body Problem and Painlevé Conjectures*, *Theor. Math. Phys.* **133** (2002), 1443–1452; Erratum **134** (2003), 139.
7. F. CALOGERO, *Tricks of the Trade: Relating and Deriving Solvable and Integrable Dynamical Systems*, in *Calogero–Moser–Sutherland Models*, Editors: van Diejen J F and Vinet L, Proceedings of the Workshop on Calogero–Moser–Sutherland Models held in Montreal, 10–15 March 1997, CRM Series in Mathematical Physics, Springer, 2000, 93–116.
8. F. CALOGERO & J-P. FRANÇOISE, *Periodic motions galore: how to modify nonlinear evolution equations so that they feature a lot of periodic solutions*, *J. Nonlin. Math. Phys.* **9** (2002), 99–125.
9. F. CALOGERO, J-P. FRANÇOISE & M. SOMMACAL, *Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane. II. Analysis of various motions*, *J. Nonlinear Math. Phys.* **10** (2003) 157–214.
10. F. CALOGERO, D. GÓMEZ-ULLATE, P. M. SANTINI & M. SOMMACAL, *Chaos as travel on a Riemann surface*, work in progress.
11. F. CALOGERO & V. I. INOZEMTSEV, *Nonlinear harmonic oscillators*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 10365–10375.
12. P. ERDÖS, P. TURÁN, *On Some Problems of Statistical Group Theory*, *Z fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*, **18** (1965), 151–163.
13. D. GÓMEZ-ULLATE, A. N. W. HONE & M. SOMMACAL, *New many-body problems in the plane with periodic solutions*, *New J. Phys.* **6** (2004), 1–23.
14. J. GRANTHAM, *The Largest Prime Dividing the Maximal Order of an Element of S_n* , *Math. Comput.* **64** (1995), 407–410.
15. E. LANDAU, *Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades*, *Archiv der Math. und Phys.* (1903), 92–103.

- Handbuch der Lehre von der Verteilung der primzahlen, 2nd Ed. Chelsea, New York, 1953.
16. J. MASSIAS, *Majoration explicite de l'ordre maximum d'un element du group symétrique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5), **6** (1984) no. 3-4, 269-281.
 17. J. MASSIAS, J. NICOLAS & G. ROBIN, *Effective Bounds for the Maximal Order of an Element in the Symmetric Group*, Math. Comput. **53** (1989), 665-678.
 18. W. MILLER, *The Maximum Order of an Element of a Finite Symmetric Group*, The American Mathematical Monthly, **94** (1987), 497-506.
 19. M. B. NATHANSON, *On the Greatest Order of an Element of the Symmetric Group*, The American Mathematical Monthly, **79** (1972), 500-501.
 20. J. L. NICOLAS, *Sur l'ordre maximum d'un élément dans le group S_n des permutations*, Acta Arithmetica XIV (1968) 315-325.
 21. J. L. NICOLAS, *Calcul de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Rev. Francaise Informat. Recherche Operationelle, **3** (1969), 43-50.
 22. I. NIVEN & H. S. ZUCKERMAN, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., Wiley, New York, 1980.
 23. T. PROSEN, *Parametric statistics of zeros of Husimi representations of quantum chaotic eigenstates and random polynomials*, J. Phys. A, **29** (1996) 5429-5440.
 24. S. N. M. RUIJSENAARS & H. SCHNEIDER, *A New Class of Integrable Systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. (NY) **170** (1986) 370-405.
 25. S. M. SHAH, *An inequality for the arithmetical function $g(x)$* , J. Ind. Math. Soc. **3** (1938), 316-318.

ANÁLISIS DE KOVALEVSKAYA-PAINLEVÉ Y SISTEMAS ALGEBRAICAMENTE INTEGRABLES

Yuri Fedorov

*Departamento de Matemática Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
yuri.fedorov@upc.edu*

Muchos sistemas integrables poseen una propiedad recalculable: *todas sus soluciones son funciones meromorfas del tiempo como una variable compleja*. Tal comportamiento, que se refiere como propiedad de Kovalevskaya-Painlevé (KP) y que se usa frecuentemente como una ensayo de integrabilidad, no es accidental y tiene unas raíces geométricas profundas. En este artículo describiremos una clase de tales sistemas (conocidos como los sistemas algebraicamente integrables) y subrayaremos sus propiedades geométricas principales que permiten predecir la estructura de las soluciones complejas y además encontrarlas explícitamente. Eso lo ilustraremos con algunos sistemas de la mecánica clásica. También mencionaremos unas generalizaciones útiles de la noción de integrabilidad algebraica y de la propiedad KP.

Palabras Clave: Integrabilidad Algebraica, Propiedad de Kovalevskaya-Painlevé, Sistemas Algebraicamente Integrables.

1. Introducción

Posiblemente, Newton fue el primero en darse cuenta que las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias analíticas pueden ser representadas como series de potencias en $t - t_0$ con algún valor inicial en el tiempo t . Por otra parte, la naturaleza de las funciones analíticas se puede entender solamente sobre la continuación al plano complejo. Estas observaciones nos conducen a la idea de considerar el tiempo t como una variable compleja. Para las ecuaciones de la dinámica, este primer enfoque fue aplicado por Weierstrass y Poincaré, quienes representaron la solución del problema clásico de tres cuerpos como una serie convergente específica, la cual converge para todos los valores de t (hasta el momento de una posible colisión).

Luego, Sundman demostró que la solución se puede continuar más

allá de momentos de colisión doble, mientras que Sophie Kovalevskaya⁶ descubrió un nuevo caso integrable en el problema del sólido rígido cuando respondía la pregunta de Weierstrass: *encontrar las condiciones para que las soluciones de este problema sean funciones meromorfas del tiempo complejo*. Esto fue estimulado por el resultado bien conocido de Jacobi sobre la integrabilidad de los casos de Euler y de Lagrange en términos de funciones elípticas, es decir, funciones meromorfas doblemente periódicas que dependen de t . Muchos otros problemas integrables de la dinámica también gozan de esta propiedad.

Todo lo anterior conduce a la siguiente idea: *dado un sistema de ecuaciones diferenciales, para averiguar su integrabilidad primero se puede verificar si admite soluciones univaluadas o meromorfas (la propiedad de Kovalevskaya – Painlevé), o no*. Claramente, una respuesta negativa no implica necesariamente la no integrabilidad del sistema. Por ejemplo, soluciones generales de algunos sistemas integrables mecánicos no holónomos, en particular, el problema de la esfera de Chaplygin, no son univaluadas y no resultan ser meromorfas sino hasta después de una reparametrización apropiada del tiempo.

En esta artículo seguimos principalmente Adler y van Moerbeke,^{2,9,12} presentando en forma de resumen, una relación cercana entre la propiedad de Kovalevskaya–Painlevé y los llamados *sistemas algebraicamente completamente integrables*.

2. Un ejemplo histórico: el problema del movimiento del cuerpo rígido

Las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido con el tensor de inercia $\mathbb{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ y la velocidad angular $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathbb{J}\dot{\omega} &= \mathbb{J}\omega \times \omega + \gamma \times \mathbf{d}, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \\ \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T, \quad \mathbf{d} = \text{const} \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}\tag{1}$$

siendo γ el vector unitario vertical (evaluado en el marco del sólido) y siendo \mathbf{d} el vector posición constante del centro de masa. Estas ecuaciones son llamadas *las ecuaciones de Euler–Poisson*.

Pregunta: ¿Para cuales valores de parámetros (J_1, J_2, J_3) , (d_1, d_2, d_3) las

ecuaciones admiten soluciones en series *formales* de Laurent

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(t) &= \frac{1}{(t-t_0)} \left(\omega_\alpha^{(0)} + \omega_\alpha^{(1)}(t-t_0) + \dots \right), \\ \gamma_\alpha(t) &= \frac{1}{(t-t_0)^2} \left(\gamma_\alpha^{(0)} + \gamma_\alpha^{(1)}(t-t_0) + \dots \right), \quad \alpha = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{2}$$

cuyos coeficientes dependen del posible número máximo de parámetros libres (en este caso 5)?

Respuesta: *Solamente* para los casos

- i. $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, \mathbb{J} siendo arbitrario (El caso de Euler);
- ii. $\mathbf{d} = (0, 0, d_3)$, $\mathbb{J} = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$ (El caso de Lagrange);
- iii. $\mathbf{d} = (d_1, d_2, 0)$, $\mathbb{J} = \text{diag}(J_1, J_1, J_1/2)$ (El caso de Kovalevskaya).

El cuerpo rígido correspondiente al caso (iii), es conocido como *el sólido de Kovalevskaya* (o la peonza de Kovalevskaya). En este caso las ecuaciones (1) tienen 4 integrales primeras independientes, una de ellas es una integral cuártica encontrada por Kovalevskaya⁶ en 1889.

Solución Genérica de la peonza de Kovalevskaya. Haciendo una sustitución (bastante complicada!)

$$\omega_i = \bar{\omega}_i(\mu_1, \mu_2, c_1, \dots, c_4), \quad \gamma_i = \bar{\gamma}_i(\mu_1, \mu_2, c_1, \dots, c_4),$$

siendo μ_1, μ_2 *variables separadas* introducidas por Kovalevskaya⁷ en 1889, siendo $\bar{\omega}_i, \bar{\gamma}_i$ unas funciones *simétricas* respecto μ_1, μ_2 y siendo c_i constantes de movimiento, las ecuaciones se reducen a cuadraturas

$$\begin{aligned}\int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{d\mu_1}{\sqrt{R_5(\mu_1)}} + \int_{\mu_0}^{\mu_2} \frac{d\mu_2}{\sqrt{R_5(\mu_2)}} &= u_1, \\ \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{\mu_1 d\mu_1}{\sqrt{R_5(\mu_1)}} + \int_{\mu_0}^{\mu_2} \frac{\mu_2 d\mu_2}{\sqrt{R_5(\mu_2)}} &= u_2,\end{aligned}\tag{3}$$

$$u_1 = \text{const}, \quad u_2 = t + \text{const},$$

siendo $R_5(\mu)$ un polinomio de grado 5 cuyos coeficientes dependen de las constantes c_1, \dots, c_4 y los parámetros del cuerpo rígido.

Nota 2.1 (Diferenciales holomorfas). *Las cuadraturas contienen diferenciales holomorfas sobre la curva hiperelíptica $\Gamma = \{w^2 = R_5(\mu)\}$ de género 2.*

Invirtiendo las integrales arriba, se obtienen funciones *meromorfas* de dos variables complejas, $\omega_i(u_1, u_2)$, $\gamma_i(u_1, u_2)$, las cuales tienen 4 periodos independientes:

$$\omega_i(\mathbf{u} + \mathbf{v}_j) = \omega_i(\mathbf{u}), \quad \gamma_i(\mathbf{u} + \mathbf{v}_j) = \gamma_i(\mathbf{u}), \quad \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{C}^2.$$

Puesto que u_1, u_2 dependen linealmente en el tiempo complejo t , las soluciones $\omega_i(t), \gamma_i(t)$ son también meromorfas.

Observación: Las funciones $\omega_i(u_1, u_2)$ y $\gamma_i(u_1, u_2)$ no son elípticas con respecto a cada variable u_1, u_2 , en donde funciones con tales propiedades son conocidas como funciones *Abelianas*. Dichas funciones pueden ser vistas como funciones meromorfas en el toro complejo $\mathcal{A} = \mathbb{C}^2(u_1, u_2)/\Lambda$, el factor de \mathbb{C}^2 por el retículo $\Lambda = \{\mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbb{Z}\mathbf{v}_4\}$. Además, ellas tienen polos como una subvariedad de codimensión uno (divisor de Painlevé) $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$.

3. El Acercamiento de Kovalevskaya–Painlevé.

Consideremos un *sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas con pesos*

$$\dot{z}_i = f_i(z_1, \dots, z_n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4)$$

los cuales son invariantes con respecto a transformaciones de similitud

$$t \rightarrow t/\alpha, \quad z_1 \rightarrow \alpha^{g_1} z_1, \quad \dots, \quad z_n \rightarrow \alpha^{g_n} z_n$$

con pesos enteros positivos g_1, \dots, g_n . Equivalentemente, la condición de invariancia tiene la forma

$$f_i(\alpha^{g_1} z_1, \dots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^{g_i+1} f_i(z_1, \dots, z_n). \quad (5)$$

Sistemas homogéneos con peso solían salir en varias aplicaciones. El ejemplo más simple es dado por sistemas cuadráticos homogéneos, es decir, f_i son funciones cuadráticas homogéneas con $g_1 = \dots = g_n = 1$. Para las ecuaciones de Euler–Poisson (1) describiendo la rotación de un cuerpo rígido, tenemos $g_{1,2,3} = 1$, $g_{4,5,6} = 2$.

Para concretizar, en consecuencia suponemos que las funciones $f_i(z)$ sean *polinomiales*. Busquemos una solución de (4) en forma de serie de Laurent formal

$$z_i(t) = \frac{1}{(t-t_0)^{g_i}} \left(z_i^{(0)} + z_i^{(1)}(t-t_0) + \dots \right), \quad z_i^{(\alpha)} = \text{const}, \quad (6)$$

donde $i = 1, \dots, n$.

Teorema 3.1 (Adler & van Moerbeke²). *Si el sistema polinomial homogéneo (4) admite la solución formal (6), entonces*

1) *los coeficientes $z_i^{(m)}$ son determinados a partir de la cadena de las ecuaciones*

$$g_i z_i^{(0)} + f_i(z_i^{(0)}) = 0, \quad (7)$$

$$(K - mI)z^{(m)} = Y^{(m)}, \quad (8)$$

$$z^{(m)} = (z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)})^T, \quad m = 1, 2, \dots, \quad K_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z^{(0)}) + \delta_{ij} g_i \right),$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker, $Y^{(m)}$ es un cierto vector polinomial de $z^{(0)}, \dots, z^{(m-1)}$,

2) *las series formales (6) son de hecho convergentes.*

Así que, los coeficientes $z_i^{(m)}$ pueden ser encontradas a partir de (7), (8) por un procedimiento recursivo. Siguiendo a Yoshida,¹³ la matriz K y sus valores propios ρ_1, \dots, ρ_n son llamados *la matriz de Kovalevskaya* y *los exponentes de Kovalevskaya* respectivamente.

El conjunto $\mathcal{C} = \{z^{(0)}\}$ de soluciones complejas *no nulas* de (7) juega un papel clave en el método de Kovalevskaya. Generalmente, es no vacío y puede contener varios componentes conexos (no necesariamente de la misma dimensión),

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_s.$$

Existen tantas soluciones de tipo Laurent (6) diferentes como componentes conexas de \mathcal{C} , y sobre cada componente el espectro de la matriz K es fija.

Las series que dependen de $n-1$ parámetros son llamados *balances principales*. En general, existen también *balances secundarios* que dependen de un menor número de parámetros.

Se dice que un sistema dinámico n -dimensional posee la *propiedad fuerte de Kovalevskaya–Painlevé*, si todas sus soluciones formales singulares son de Laurent y existe al menos una de tales soluciones que depende de $n-1$ parámetros libres.

Aparte de los tres casos integrables del movimiento del sólido mencionados en la sección 1, muchos sistemas integrables finito-dimensionales tales

como el problema de Neumann, los casos de Clebsch y de Steklov–Lyapunov de las ecuaciones de Kirchoff, poseen la propiedad fuerte de Kovalevskaya–Painlevé. Así que a esto último se le puede considerar como un buen test de la integrabilidad o, bien, integrabilidad *algebraica* (véase la sección 4).

Como aparecen los parámetros libres. Se puede mostrar que el vector $Y^{(1)}$ en la primera ecuación lineal (8) es siempre cero. Por lo tanto, para que las ecuaciones tengan soluciones no triviales, por lo menos una de éstas debe ser degenerado, es decir, al menos uno de los exponentes de Kovalevskaya ρ_1, \dots, ρ_n debe ser entero positivo. Supongamos que $\rho_1 = k > 0$ es el mínimo exponente entero. Entonces $Y^{(l)} = z^{(l)} = 0$ para todo $1 \leq l < k$, también $Y^{(k)} = 0$, y $z^{(k)}$ es el vector propio para el valor propio ρ_1 .

Ahora supongamos que la matriz de Kovalevskaya K es diagonalizable a lo largo del conjunto \mathcal{C} . En este caso $z^{(k)}$ depende precisamente de γ_k parámetros libres, donde γ_k es la multiplicidad de ρ_1 . Claramente, cada valor propio entero positivo de K conduce a un nuevo parámetro libre en la solución de Laurent (6).

Por otra parte, más grados de libertad en (6) pueden aparecer a partir de las ecuaciones (7): cada componente conexa $\mathcal{C}_l \subset \mathcal{C}$ de dimensión $\gamma_{0,l}$ da lugar a $\gamma_{0,l}$ parámetros libres. Puesto que K es la matriz Jacobiana del sistema (7) y es diagonalizable, K debe tener un valor propio cero con multiplicidad $\gamma_{0,l}$. Es decir, hay $\gamma_{0,l}$ zeros entre los exponentes de Kovalevskaya para \mathcal{C}_l .

Adicionalmente, se mantiene la siguiente propiedad

Proposición 3.1 (Adler & van Moerbeke²) *Los siguientes hechos se mantienen:*

1). *La matriz de Kovalevskaya tiene valor propio -1 con vector propio*

$$(g_1 z_1^{(0)}, \dots, g_n z_n^{(0)})^T.$$

2). *Si $\sum_{i=1}^n \partial f_i(z) / \partial z_i |_{z=z^{(0)}} = 0$, entonces*

$$\text{Tr}(K) \equiv \rho_1 + \dots + \rho_n = g_1 + \dots + g_n. \quad (9)$$

La existencia del exponente de Kovalevskaya -1 es relacionada al hecho de que el sistema (4) es autónomo.

Corolario 3.1. *Sea $\rho_1 = -1$. Entonces para obtener una familia completa de $(n - 1)$ -parámetros de soluciones de Laurent (6), la matriz K debe ser diagonalizable a lo largo de \mathbb{C} y los exponentes de Kovalevskaya ρ_2, \dots, ρ_n deben ser números enteros no negativos. Además, un parámetro libre adicional se puede introducir mediante el cambio $t \rightarrow t + a$ (traslación de a a lo largo de las trayectorias). Se sigue que si se satisfacen estas condiciones, entonces la serie (6) puede dar todas o casi todas las soluciones del sistema homogéneo con peso (4).*

4. Integrabilidad Algebraica

Supongamos que el sistemas homogéneo con peso (4) posee $n - g$ integrales primeras *polinomiales* independientes $I_1(z), \dots, I_{n-g}(z)$ que asegura su integrabilidad por uno de los teoremas de integrabilidad (en particular, por el teorema de Liouville o de Euler–Poisson) y que las variedades invariantes genéricas

$$\mathcal{I} = \cap \{I_l(z) = c_l, c_l = \text{const}\}$$

son toros g -dimensionales \mathbb{T}^g .

Siguiendo a Adler y van Moerbeke,² el sistema (1) es llamado *algebraicamente completamente integrable* si

- 1) su variedad invariante complexificada genérica $\mathcal{I}_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^n$ (la cual es no compacta) puede ser completada a una variedad Abeliana compleja \mathcal{A}^g en \mathbb{P}^n . \mathcal{A}^g es el cociente de $\mathbb{C}^g(u_1, \dots, u_g)$ por un retículo $\Lambda^{(2g)}$ generado por $2g$ vectores de periodo independiente que satisfacen las *condiciones de Riemann*.^{4,5,10}

En otras palabras, $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}$ pueden interpretarse como la parte afín de \mathcal{A}^g ,

$$\mathcal{I}_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}^g \setminus \mathcal{D}_c,$$

donde $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{A}^g$ es una unión de subvariedades analíticas de codimensión uno, la cual se denomina *el divisor de Painlevé*.

- 2) En coordenadas u_1, \dots, u_g sobre \mathbb{C}^g las trayectorias complejas del sistema son enrolladas en forma rectilínea sobre \mathcal{A}^g , a lo largo del cual (*posiblemente después de una reparametrización de tiempo t*) el movimiento es *uniforme*.

Los periodos y el divisor de Painlevé dependen de las constantes de movimiento c_1, \dots, c_{n-g} . Las variables z_i son funciones meromorfas sobre \mathcal{A}^g con polos a lo largo de \mathcal{D}_c .

Interpretación geométrica para los balances en las soluciones de Laurent. Balances principales en las soluciones de Laurent (6) ocurren cuando la trayectoria compleja sobre \mathcal{A} interseca al divisor \mathcal{D}_c transversalmente.

Puesto que $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{A}_c$ tiene codimensión uno, hay una familia $(g - 1)$ -dimensional de tales puntos de intersección. De otra forma, un toro invariante genérico pertenece a una familia $(n - g)$ -dimensional de toros en \mathbb{P}^n parametrizados por las constantes de movimiento c_i . De esta manera, $n - 1$ parámetros libres en los balances principales pueden estar divididos en dos grupos de modo que el primero corresponda a las constantes de movimiento y los otros parametrizan el divisor de Painlevé sobre cada \mathcal{A}^g .

Los balances secundarios están relacionados a las trayectorias que son tangentes a \mathcal{D}_c o atraviesan sitios singulares de \mathcal{D}_c tal como está ilustrado en la Figura 1*. Así, un sistema general completamente algebraicamente integrable debe tener una jerarquía de balances.

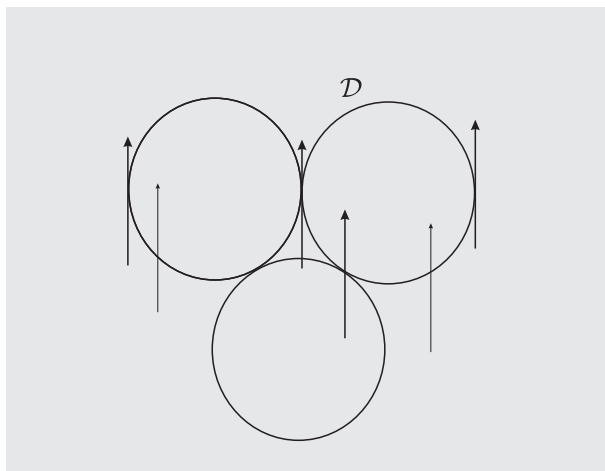


Figura 1. Un esbozo del divisor \mathcal{D} sobre una variedad Abelia \mathcal{A}^2 representado por tres círculos. En unos puntos el flujo rectilíneo es necesariamente tangente a \mathcal{D} o atraviesa sus sitios singulares (flechas gruesas) que produzca balances secundarios.

*Naturalmente, en estos sitios el orden de los polos de la solución es superior.

Observación: En contraste a los balances principales, el número y el comportamiento principal de balances secundarios dependen de la dirección del flujo complejo sobre \mathcal{A}^g .

En muchos sistemas integrables los toros Abelianos aparecen como *variedades de Jacobi* de curvas algebraicas de genero g o recubrimientos de tales variedades.^{4,5,10} En este caso un punto genérico en \mathcal{A}^g está definido por un conjunto desordenado de g puntos sobre la curva mediante la *aplicación de Abel-Jacobi*, y los vectores de periodos de \mathcal{A}^g son construidos mediante los periodos de diferenciales holomorfas sobre la curva. Un ejemplo de tal aplicación para $g = 2$ está dado por cuadraturas (3) que aparecen en el problema del sólido de Kovalevskaya.

Nota 4.1 (Polinomios homogéneos). Supongamos que conocemos todas las posibles soluciones de Laurent del sistema (4). Entonces, como se observa en,² se puede encontrar sus integrales primeras. De hecho, es suficiente encontrar polinomios homogéneos con peso $h_i(z)$ tales que cuando evaluamos a lo largo de todas las soluciones (6), ellas no tienen parte polar. Entonces las funciones $h_i(z(t))$ son holomorfas y acotadas en todas partes y por lo tanto son constantes.

5. Exponentes de Kovalevskaya y Tensores Invariantes.

Tal como se muestra en muchas publicaciones, la existencia de integrales primeras, y en general, tensores invariantes de sistemas homogéneos con peso están muy relacionados con el espectro de la correspondiente matriz de Kovalevskaya.

Esto es, consideremos el sistema homogéneo con peso (4), tales que sus pesos sean g_1, \dots, g_n . Nos referimos a un campo (p, q) -tensorial $\mathbf{T}(z)$ con componentes $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(z)$ como *homogéneas con peso* de grado entero m (con los mismos pesos) si

$$\begin{aligned} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(\lambda^{g_1} z_1, \dots, \lambda^{g_n} z_n) &= \lambda^\kappa T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(z), \\ \kappa &= m - g_{j_1} - \dots - g_{j_q} + g_{i_1} + \dots + g_{i_p}. \end{aligned} \quad (10)$$

En particular, una integral primera $F(z)$ es homogénea con peso de grado m si

$$F(\lambda^{g_1} z_1, \dots, \lambda^{g_n} z_n) = \lambda^m F(z_1, \dots, z_n).$$

Para integrales cuadráticas, $g_1 = \dots = g_n = 1$ y $m = 2$. De (5) se sigue que el campo vectorial del sistema homogéneo (4) tiene grado 1.

Ahora, sea $W(z) = \mu(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ una forma invariante de volumen ($(0, n)$ -tensor) cuya densidad $\mu(z)$ es una función homogénea con peso de grado N . Entonces $W(z)$ es homogénea con peso de grado

$$m = N + g_1 + \dots + g_n.$$

Nota 5.1 (Tensor invariante). *Campos tensoriales invariantes de sistemas homogéneos con peso pueden escogerse de manera que sean homogéneos con peso; cualquier tensor invariante puede ser desarrollado como una serie en formas homogéneas, y formas del mismo grado dan un campo tensorial homogéneo con peso.*

Teorema 5.1 (Kozlov⁸). *Supongamos que el sistema (4) admite un (p, q) -tensor invariante \mathbf{T} homogéneo con peso de grado m tal que $\mathbf{T} \neq 0$ sobre el conjunto \mathcal{C} . Entonces para algunos índices $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ los exponentes de Kovalevskaya satisfacen la relación*

$$\rho_{i_1} + \dots + \rho_{i_p} - \rho_{j_1} + \dots + \rho_{j_q} + m = 0. \quad (11)$$

Esta propiedad implica una serie de corolarios importantes. Sea $F(z)$ una integral primera de grado m tal que $dF \neq 0$ sobre \mathcal{C} . Puesto que la derivada de Lie commuta con la derivada exterior, el campo $(0,1)$ -tensorial dF es un campo invariante. As pues, llegamos ahora al siguiente resultado debido a Yoshida.¹³

Corolario 5.1 (Yoshida). *Si $F(z)$ es una integral primera homogénea con peso de grado m , y $dF \neq 0$ sobre \mathcal{C} , entonces $\rho = m$ es un exponente de Kovalevskaya.*

Ahora, supongamos que el sistema (4) posee k integrales homogéneas con peso $F_1(z), \dots, F_k(z)$ del mismo grado m .

Sea $\beta_m \leq k$ el rango de la matriz Jacobiana $\|\partial F/\partial z\|$ en un punto $c \in \mathcal{C}$. Entonces $\rho = m$ es un exponente de Kovalevskaya de multiplicidad $\geq \beta_m$ para el componente correspondiente de \mathcal{C} . Este resultado muestra una relación notable entre la meromorfía de una solución general de un sistema homogéneo con peso y la existencia de sus integrales primeras.

De forma similar, considere un campo vectorial $u(z)$ que conmuta con el flujo $v(z)$ del sistema (4). Por tanto, $u(z)$ es un campo $(1,0)$ -tensorial invariante. Entonces tenemos

Corolario 5.2 (Exponente de Kovalevskaya negativo). *Si $u(z)$ es un campo vectorial invariante homogéneo con peso de grado m , y $u \neq 0$ sobre \mathcal{C} , entonces $\rho = -m$ es un exponente de Kovalevskaya. En particular, el mismo flujo $v(z)$, como un campo vectorial homogéneo con peso de grado $m = 1$, nos da $\rho = -1^{**}$.*

En adición, si el sistema (4) admite k campos de simetrías homogéneos con peso $u_1(z), \dots, u_k(z)$ cada uno del mismo grado m , y, además,

$$\alpha_m = \dim \text{span} (u_1, \dots, u_k) \leq k$$

en un punto $z^{(0)} \in \mathcal{C}$, entonces $\rho = -m$ es un exponente de Kovalevskaya de multiplicidad mayor o igual que α_m para el componente correspondiente de \mathcal{C} .

Las observaciones anteriores conducen a la siguiente forma heurística para obtener condiciones de integrabilidad de sistemas homogéneos con peso: *el número y el tipo de sus invariantes integrales deben conducir a una serie de relaciones entre los exponentes de Kovalevskaya de la forma (11) tal que esos exponentes necesariamente sean enteros.*

6. Algunos Ejemplos

La peonza de Euler. Un ejemplo simple, pero digno de ser notado, es el clásico sólido de Euler descrito por las ecuaciones sobre el álgebra de Lie $so(3)$,

$$\frac{d}{dt} M = M \times \mathbf{a}M, \quad M = (M_1, M_2, M_3)^T, \quad \mathbf{a} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad (12)$$

donde $M = (M_1, M_2, M_3)^T$ es el vector del momento angular y \mathbf{a} es el inverso del tensor de inercia del sólido. Este sistema posee las integrales de energía y del momento

$$\frac{1}{2}(a_1 M_1^2 + a_2 M_2^2 + a_3 M_3^2) = l, \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = n \quad (13)$$

** Este último ya fue establecido por Proposición 3.1

(la última siendo una *función de Casimir* del álgebra $so(3)$) y sus variedades invariantes *compactificadas* genéricas son curvas elípticas \mathcal{E} en $\mathbb{C}P^3$, es decir, variedades Abelianas uni-dimensionales.

Las ecuaciones (12) tienen pesos $g_1 = g_2 = g_3 = 1$, y buscamos sus soluciones de Laurent en forma

$$M = \frac{1}{t} \left(M^{(0)} + M^{(1)}t + M^{(2)}t^2 + \dots \right). \quad (14)$$

Para encontrar $M^{(0)}$ llegamos a las ecuaciones algebraicas

$$M_\alpha^{(0)} + (a_\gamma - a_\beta)M_\beta^{(0)}M_\gamma^{(0)} = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3),$$

las cuales poseen cuatro soluciones complejas no nulas

$$M^{(0)} = \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)^T, (-\epsilon_1, -\epsilon_2, \epsilon_3)^T, (-\epsilon_1, \epsilon_2, -\epsilon_3)^T, (\epsilon_1, -\epsilon_2, -\epsilon_3)^T\},$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}}.$$

De esta manera, el conjunto \mathcal{C} consiste de cuatro puntos. En cada uno de estos puntos, ambas integrales (13) son independientes. Así, en vista de la Proposición 3.1 y Corolario 5.1, los exponentes de Kovalevskaya son $\{-1, 2, 2\}$, y su suma es igual a 3, lo cual es consistente con la relación (9). Las soluciones de Laurent (14) tienen 4 balances principales y no balances secundarios.

Por el lado geométrico, las variedades invariantes genéricas del sistema (12) en $\mathbb{R}^3(M_1, M_2, M_3)$ son intersecciones de las dos cuádricas dadas por (13), mientras tales variedades complejas $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ son partes afines de las curvas elípticas \mathcal{E} . Se sabe bien que la solución genérica del sistema de Euler (12) se expresa en funciones elípticas de Jacobi $\operatorname{sn}(st \mid \tau)$, $\operatorname{cn}(st \mid \tau)$, $\operatorname{dn}(st \mid \tau)$ asociadas a \mathcal{E} , s siendo un factor y τ siendo el módulo de \mathcal{E} que dependen de a_i y los constantes l, n . Estas funciones tienen precisamente 4 polos ordinarios comunes que representa el divisor de Painlevé $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ mencionado en §3.

El sistema Henón–Heiles. Un ejemplo más complicado es el caso integrable (ii) del sistema de Henón–Heiles sobre el espacio de configuraciones $\mathbb{R}^2 = (x, y)$ descrito por el Hamiltoniano (Ramani, Grammaticos & Bountis¹¹)

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + y^3 + \frac{yx^2}{2}.$$

Las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x} = p_x, \quad \dot{y} = p_y, \quad \dot{p}_x = -xy, \quad \dot{p}_y = -(3y^2 + x^2/2) \quad (15)$$

son homogéneos con pesos $g_1 = g_2 = 2$, $g_3 = g_4 = 3$ y tienen la integral adicional

$$F = -yp_x^2 + xp_xp_y + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{3}{16}x^4,$$

tal que $\{H, F\} = 0$ respecto el paréntesis de Poisson estándar sobre \mathbb{R}^4 . De esta forma, H y F son integrales homogéneas con pesos de grado 6 y 8 respectivamente.

Buscamos la solución de Laurent formal

$$\begin{aligned} x &= (t - t_0)^{-2}(x^{(0)} + x^{(1)}(t - t_0) + x^{(2)}(t - t_0)^2 + \dots), \\ y &= (t - t_0)^{-2}(y^{(0)} + y^{(1)}(t - t_0) + y^{(2)}(t - t_0)^2 + \dots), \\ p_x &= (t - t_0)^{-3}(p_x^{(0)} + p_x^{(1)}(t - t_0) + p_x^{(2)}(t - t_0)^2 + \dots), \\ p_y &= (t - t_0)^{-3}(p_y^{(0)} + p_y^{(1)}(t - t_0) + p_y^{(2)}(t - t_0)^2 + \dots). \end{aligned} \quad (16)$$

Las ecuaciones de Hamilton imponen las relaciones

$$p_x^{(0)} = -2x^{(0)}, \quad p_y^{(0)} = -2y^{(0)}, \quad 3p_x^{(0)} - x^{(0)}y^{(0)} = 0,$$

$$3p_y^{(0)} - (3(y^{(0)})^3 + (x^{(0)})^2/2) = 0.$$

Entonces el conjunto \mathcal{C} consiste de tres puntos

$$\mathcal{C}_1 = (x^{(0)} = 0, y^{(0)} = -2), \quad \mathcal{C}_{2,3} = (x^{(0)} = \pm 12\sqrt{-1}, y^{(0)} = -6).$$

Sobre \mathcal{C}_1 tenemos $dH \neq 0$, $dF = 0$ y los exponentes de Kovalevskaya (EK) son $\{-1, 1, 4, 6\}$ que significa la existencia de un balance principal con 3 parámetros libres. La suma de EK es 10 que, según la relación (9), coincide con la suma de los pesos g_i , mientras el número 6 entre los EK corresponde al grado de la integral H .

Observación: Puesto que $x^{(0)} = p_x^{(0)} = 0$ al \mathcal{C}_1 , las soluciones de Laurent $x(t), p_x(t)$ actualmente empiezan por $(t - t_0)^{-1}x^{(1)}$, $(t - t_0)^{-2}p_x^{(1)}$ y, debido al número 1 entre EK, los coeficientes $x^{(1)}, p_x^{(1)} = -2x^{(1)}$ son libres (dependen de condiciones iniciales). Para ciertos condiciones tenemos también $x^{(1)} = 0$. En este caso, debido al que el siguiente EK positivo es 4, los

coeficientes $x^{(2)}, x^{(3)}$ son ceros y la solución $x(t)$ tiene *un cero* de segundo orden:

$$x(t) = (t - t_0)^{-2}(x^{(4)}(t - t_0)^4 + x^{(5)}(t - t_0)^5 + \dots),$$

$x^{(4)}$ siendo libre. Este caso puede considerarse como un balance secundario con dos parámetros libres.

Sobre $\mathcal{C}_{2,3}$ tenemos $dH \neq 0$, $dF \neq 0$ y $EK = \{-3, -1, 6, 8\}$ que provee entonces dos balances secundarios con 2 parámetros. La suma de EK es de nuevo 10, mientras los 6 y 8 corresponden a los grados de H, F .

Resumiendo, recalcamos que, como se observa también en Bountis et al,^{3,11} las soluciones formales de Laurent (16) consisten de

- 1) un balance principal con $x^{(0)} = 0$, $x^{(1)} \in \mathbb{C}$, $y^{(0)} = -2$ y $EK = \{-1, 1, 4, 6\}$,
- 2) dos balances secundarios con $x^{(0)} = \dots = x^{(3)} = 0$, $x^{(4)} \in \mathbb{C}$, $y^{(0)} = -2$,
- 3) dos balances secundarios con $x^{(0)} = \pm 12\sqrt{-1}$, $y^{(0)} = -6$ y $EK = \{-3, -1, 6, 8\}$.

Desde un punto de vista geométrico, las variedades invariantes genéricas del sistema (15) son partes afines de toros complejos \mathbb{T}^2 y los divisores de Painlevé $\mathcal{D}_c \subset \mathbb{T}^2$ son curvas algebraicas $\tilde{\Theta}$. Cada toro admite involución $\sigma : x \mapsto -x$ y puede considerarse como un doble recubrimiento sin ramificación de otro toro \mathbb{T}_0^2 de manera que \mathbb{T}_0^2 es el factor de \mathbb{T}^2 por σ . En consecuencia consideraremos el comportamiento de Painlevé sobre este factor. El factor $\tilde{\Theta}/\sigma \subset \mathbb{T}_0^2$ es una curva de genero 2 a lo largo de la cual las funciones x^2, y tienen polos de 2o orden.^{1,12} Esto da la explicación al comportamiento del balance principal (1).

Además, x^2 tiene ceros de 2o orden a lo largo de una translación Θ_0 de Θ . La intersección $\Theta_0 \cap \Theta$ consiste de dos puntos $\{O, S\}$. Como fue observado por Abenda-Fedorov¹ y Vanhaecke,¹² la dirección del flujo (15) linearizado sobre \mathbb{T}_0^2 es bastante especial: en el punto S el flujo es tangente a Θ_0 y transversal a Θ (véase el esbozo en la Figura 2). Se puede mostrar que en este punto el comportamiento de $x^2(t - t_0)$ es $O((t - t_0)^6) / ((t - t_0)^2)$, es decir, en lugar de un polo, $x^2(t - t_0)$ tiene un cero de orden 4 (y $x(t - t_0)$ un cero doble), mientras $y(t - t_0)$ mantiene un polo doble. Este provee una

explicación geométrica del balance secundario (2).

En el punto O la situación es inversa: el flujo es tangente a Θ y transversal a Θ_0 . Aquí el comportamiento de $x^2(t-t_0)$ es $O((t-t_0)^2)/((t-t_0)^6)$, es decir $x(t-t_0)$ tiene un polo doble. A pesar de la tangencia a Θ en O , la función $y(t-t_0)$ mantiene un polo doble también. Este presenta la base geométrica del último balance secundario (3).

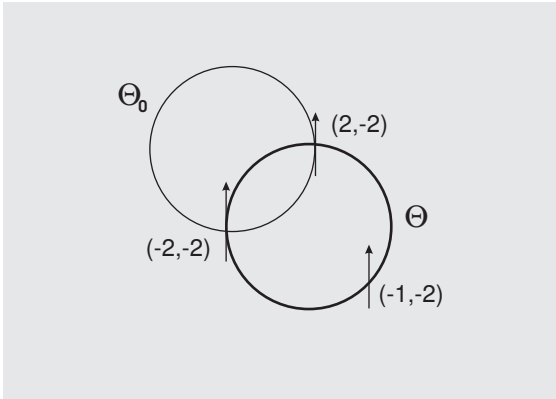


Figura 2. Un esbozo del divisor $\Theta \subset \mathbb{T}^2$ y de su translación Θ_0 con puntos de intersección O, S y el flujo (15). En los paréntesis se indican las potencias iniciales de $x(t-t_0)$ y $y(t-t_0)$.

Observación: Puesto que $\{H, F\} = 0$, el flujo Hamiltoniano \mathbf{u} generado por la integral F es un campo vectorial invariante homogéneo del flujo (15), con grado 3. Entonces, según el Corolario 5.2, los exponentes de Kowalevskaya contienen -3 siempre cuando $u \neq 0$ sobre \mathcal{C} . Este ocurre en el caso de los componentes $\mathcal{C}_{2,3}$, pero no en el caso de \mathcal{C}_1 ya que en este punto $\mathbf{u} = 0$.

Bibliografía

1. S. ABENDA & Y. FEDOROV. *On the weak Kowalevski–Painlevé property for hyperelliptically separable systems*, Acta Appl. Math., **60** (2), (2000) 137–178
2. M. ADLER & P. VAN MOERBEKE. *The complex geometry of the Kowalevski–Painlevé analysis* Invent. Math. **97**, (1989), 3–51
3. T. BOUNTIS, H. SEGUR & F. VIVALDI. *Integrable Hamiltonian systems and Painlevé property*. Phys. Rev. A. General Physics **25**, No.3 (1982), 1257–1264

4. B.A DUBROVIN, *Theta-functions and non-linear equations*. Usp.Mat. Nauk **36**, No.2 (1981), 11–80. English transl.: *Russ. Math. Surveys*. **36** (1981), 11–92
5. J. FAY, *Theta-functions on Riemann Surfaces*. *Springer Lecture Notes* **352**, Springer-Verlag, 1973
6. S. KOWALEVSKI, *Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math. **12** (1889), 177–232
7. S. KOWALEVSKI, *Sur une propriete du systeme d'equations differentielles qui definit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math. **14** (1889), 81–93
8. V. V. KOZLOV, *Tensor invariants of quasi-homogeneous systems of differential equations and the Kovalevskaya–Lyapunov asymptotic method*, Mat.Zametki. **51**, No.2, 46–52, (1992). English transl.: *Math.Notes* **51**, No.2 (1992), 138–142
9. P. VAN MOERBEKE, *Algebraic geometrical methods in Hamiltonian mechanics*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **315** (1985), 379–390
10. D. MUMFORD. TATA LECTURES ON THETA II., *Progress in Math.* **43**, 1984
11. A. RAMANI, B. GRAMMATICOS & T. BOUNTIS, *The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems*, Phys. Rep. **180**, No. 3, (1989), 159–245
12. P. VANHAECKE, *Linearizing two-dimensional integrable systems and the construction of action-angle variables*, Math. Z **211** (1992), 265–313
13. H. YOSHIDA. *Necessary condition for the existence of algebraic first integrals, I. Kovalevskaya exponents*. Journal of Celest. Mech. **31**, (1983) 363–399
14. H. YOSHIDA, B. GRAMMATICOS & A. RAMANI, *Painlevé resonances versus Kowalewski exponents: Some exact results on singularity structure and integrability of dynamical systems*, Acta Appl. Math. **8**, (1987), 75–103

EL MÉTODO DE POINCARÉ

Rafael Ramírez-Ros

*Departamento de Matemática Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
rafael.ramirez-ros@upc.edu*

Dado un sistema Hamiltoniano autónomo cercano a completamente integrable Poincaré probó que, en general, no existe ninguna integral primera adicional uniforme en el parámetro de perturbación salvo el propio Hamiltoniano. Esbozaremos las ideas principales del método de prueba y comentaremos algunas extensiones y generalizaciones.

Palabras Clave: Problema Restringido de Tres Cuerpos, Sistemas Hamiltonianos Integrables, Sistemas Hamiltonianos Próximos a Integrables, Teorema de Bruns, Teorema KAM.

1. La Mecánica Celeste como motivación

Poincaré se dedicó con especial énfasis a los problemas de la Mecánica Celeste, y con ello se preparaba el germen de la actual teoría de los Sistemas Dinámicos. Uno de los problemas más importantes e interesantes es el problema de la dinámica de tres partículas masivas sometidas a atracción gravitatoria. El movimiento de ellas está gobernado por el hamiltoniano:

$$H = \frac{\|p_1\|^2}{2m_1} + \frac{\|p_2\|^2}{2m_2} + \frac{\|p_3\|^2}{2m_3} + \frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}},$$

donde m_i representa los valores de las masas, p_i la cantidad de movimiento (momento) y r_{ij} la distancia entre a i -ésima y la j -ésima partículas.

Si suponemos que las partículas están confinadas al espacio euclideo tridimensional, entonces necesitamos tres variables para describir la posición de cada partícula, y otras tres para el momento, lo que suma un total de dieciocho variables.

Las leyes de conservación de la energía, el momento lineal y el momento angular proporcionan diez integrales primeras del sistema. Finalmente, el problema puede reducirse a un sistema hamiltoniano con cuatro grados de libertad.

Quisiéramos describir de forma cualitativa el comportamiento de las soluciones de este sistema. Un primer paso es la búsqueda de alguna integral primera independiente de las diez ya conocidas. En 1887, Bruns² probó que no existía ninguna integral primera de estas características y que fuera algebraica para ningún valor de la masas. Es una demostración larga y bastante técnica.

Poincaré estudió el mismo problema con un enfoque distinto.

2. El problema general de la Dinámica

Daremos ahora algunos preliminares teóricos para lograr una mejor comprensión del tema. Empezaremos por la definición del paréntesis de Poisson.

Definición 2.1. Dado un espacio vectorial simpléctico* (Z, Ω) y dos funciones $F, G : Z \rightarrow \mathbb{R}$, el **paréntesis de Poisson** $\{F, G\} : Z \rightarrow \mathbb{R}$ de F y G está dado por

$$\{F, G\}(z) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (1)$$

Si $\{F, G\} = 0$ se dice que F y G están en **involución**, o también que el paréntesis de Poisson **conmuta**.

2.1. Sistemas hamiltonianos integrables (Liouville)

Consideremos una variedad simpléctica V de dimensión $2n$, y un hamiltoniano H . Decimos que el sistema hamiltoniano es *integrable en sentido de Liouville* cuando existen n integrales primeras I_1, \dots, I_n en involución (*abrv. I*).

Mediante un proceso de eliminación en los paréntesis de Poisson, pueden encontrarse funciones conjugadas $\theta_1, \dots, \theta_n$, de manera que

*Sólo se considera el caso finito dimensional y por lo tanto $\dim Z = 2n$.

$\theta_1, \dots, \theta_n, I_1, \dots, I_n$ (abrv. θ, I) es un sistema de coordenadas canónicas en V , en el cuál la forma simpléctica se expresa:

$$\omega_2 = \sum_{j=1}^n dI_j \wedge d\theta_j, \quad (\text{abrv. } dI \wedge d\theta),$$

El hamiltoniano H depende únicamente de I , y por tanto las ecuaciones de la dinámica se escriben:

$$\dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}, \quad \dot{I}_j = 0.$$

En particular estamos interesados en los sistemas hamiltonianos para los cuales nuestro sistema de coordenadas canónicas θ, I definen un difeomorfismo:

$$V \rightarrow \mathbb{T}^n \times B,$$

donde \mathbb{T}^n es el toro n dimensional $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, y B es un abierto de \mathbb{R}^n . En tal caso el sistema de coordenadas θ, I recibe el nombre de sistema de coordenadas de *ángulo, acción*.

Si observamos V como un abierto del fibrado cotangente a \mathbb{T}^n , las soluciones del sistema aparecen como las geodésicas del toro plano. Podemos considerar entonces la aplicación:

$$\omega: B \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I \mapsto (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I)) = \left(\frac{\partial H}{\partial I_j} \right).$$

El sistema hamiltoniano $H(I)$ descompone en una familia de campos vectoriales, uno para cada valor de I . Al fijar $I \in B$, obtenemos el campo geodésico en el toro plano \mathbb{T}^n cuyas ecuaciones son:

$$\dot{\theta} = \omega(I),$$

Si $\theta(t)$ es una solución del campo, entonces para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\theta_i(t) = \theta_i \left(t + \frac{k}{\omega_i(I)} \right),$$

pues θ_i es una función con valores en \mathbb{R}/\mathbb{Z} . $\omega(I)$ determina la dinámica en el toro \mathbb{T}^n . La componente $\omega_i(I)$ es la frecuencia de la función $\theta_i(t)$, o equivalentemente, el toro está recorrido por geodésicas cuyo vector tangente en cada punto es $\omega(I)$. La aplicación ω de B en \mathbb{R}^n recibe el nombre de *mapa de frecuencias*.

2.2. Resonancia

Un campo geodésico constante en el toro plano \mathbb{T}^n , viene determinado por un vector de frecuencias ω ,

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

el carácter de las órbitas del campo viene dado por las relaciones de dependencia lineal sobre \mathbb{Z} de los coeficientes $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Consideremos una función lineal en las θ_j ,

$$\sum_{j=1}^n k_j \theta_j, \quad (\text{abrv. } \langle k, \theta \rangle), \quad \text{mod } \mathbb{Z},$$

dado que las funciones θ_j toman valores en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , la función $\langle k, \theta \rangle$ está globalmente definida en \mathbb{T}^n únicamente si los coeficientes k_j son números enteros. Entonces, para cada $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ se tiene que $\langle k, \theta \rangle$ es una función de \mathbb{T}^n con valores en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , y derivando con respecto del tiempo según la dinámica del sistema (2):

$$\frac{d}{dt} \langle k, \theta \rangle = \langle k, \omega \rangle,$$

Dado un vector no nulo $k \in \mathbb{Z}^n$, decimos que ω es *k-resonante*, si $\langle k, \omega \rangle = 0$. Evidentemente, si ω es *k-resonante*, entonces $\langle k, \theta \rangle$ es una integral primera del sistema (2).

Lema 2.1. *El conjunto $R(\omega) = \{k \in \mathbb{Z}^n : \omega \text{ es } k\text{-resonante}\}$ es un \mathbb{Z} -módulo libre de rango menor que n . Además, si k forma parte de un sistema libre de generadores, entonces sus componentes k_1, \dots, k_n no tienen ningún divisor común.*

Consideremos k^1, \dots, k^r un sistema de generadores de $R(\omega)$. Consideremos

$$\alpha_j = \langle k^j, \theta \rangle,$$

y la aplicación

$$\pi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^r, \quad \theta \mapsto \alpha.$$

Proposición 2.1. *Las fibras de π son toros invariantes por el sistema, de dimensión $n - r$. El sistema restringido a cada uno de estos toros tiene frecuencias linealmente independientes sobre \mathbb{Z} , y por tanto es completamente ergódico.*

Nota 2.1. *Decimos que ω es completamente resonante si $R(\omega)$ tiene rango máximo. En tal caso la aplicación $\pi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^{n-1}$ tiene por fibras orbitas periódicas.*

Nota 2.2. *El sistema es completamente resonante si y solo si podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\omega \in \mathbb{Z}^n$. Efectivamente si el sistema es completamente resonante, ω es solución de un sistema de ecuaciones:*

$$K\omega = 0,$$

donde K es una matriz $n - 1 \times n$ cuyas filas son los generadores de $R(\omega)$. El espacio de soluciones de esta ecuación admite es de dimensión 1. Si m_i es el valor del menor de rango n de K correspondiente a la eliminación de la i -ésima columna, entonces $(m_1, -m_2, \dots, (-1)^{n+1}m_n)$ es una solución del sistema, así como ω , y por tanto son proporcionales. El recíproco es igualmente elemental.

Lema 2.2. *El conjunto de las frecuencias ω completamente resonantes, es denso en \mathbb{R}^n .*

2.3. Sistemas hamiltonianos próximos a integrables

Poincaré observó que muchos problemas de la Mecánica Celeste se enmarcan dentro del estudio de Sistemas Hamiltonianos cercanos a integrables. Esto significa que el sistema que consideramos puede escribirse como una perturbación H_ϵ de un hamiltoniano integrable para variables de ángulo acción θ, I . Consideramos entonces,

$$H_\epsilon(\theta, I) = H(\epsilon; \theta, I),$$

analítica** en todas las variables, definida en $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \times \mathbb{T}^n \times B$, de tal manera que

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_{\epsilon=0} = 0.$$

**Bastaría decir infinitamente diferenciable.

Es decir, $H(0, \theta, I) = H_0(I)$. Tomando la aproximación lineal

$$H_1(\theta, I) = \left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0},$$

podemos desarrollar el hamiltoniano perturbado,

$$H_\epsilon(\theta, I) = H_0(I) + H_1(\theta, I)\epsilon + H_2(\theta, I, \epsilon)\epsilon^2$$

para un cierto residuo H_2 que depende de (ϵ, θ, I) .

La dinámica está dada por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Estas ecuaciones son un sistema integrable para el hamiltoniano no perturbado H_0 .

Definición 2.2. *Una función analítica*** $G_\epsilon = G(\epsilon; \theta, I)$ es una integral primera uniforme del sistema 3 si y solo si para cada valor de ϵ la función G_ϵ es integral primera del sistema H_ϵ . Esto es, si y solo si se verifica $\{H_\epsilon, G_\epsilon\} = 0$.*

Evidentemente la función H_ϵ es una integral primera uniforme de (3). Nos preguntamos, si existe alguna integral primera *adicional*, es decir, funcionalmente independiente de H_ϵ en $\mathbb{T}^n \times B$. Es decir, tal que fijado cualquier valor $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ los diferenciales dH_ϵ y dG_ϵ son linealmente independientes en casi todo el espacio de fases $\mathbb{T}^n \times B$.

3. Las condiciones suficientes de Poincaré

En esta sección analizamos las condiciones suficientes de Poincaré para la no integrabilidad. Para tal efecto consideremos el sistema perturbado H_ϵ , y la aplicación de frecuencias $\omega: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ del hamiltoniano no perturbado H_0 . Denotamos por $\mathcal{R} \subset B$ el conjunto de las $I \in B$ tal que $\omega(I)$ es *completamente resonante*. Si la imagen por ω de cada abierto de B contiene algún abierto de \mathbb{R}^n , entonces entonces \mathcal{R} es denso en B . La diferencial de ω es la matriz Hessiana de H_0 , y por tanto si

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right| \neq 0,$$

*** Al igual que la nota anterior, bastaría decir infinitamente diferenciable.

entonces ω es *no degenerado* y por tanto \mathcal{R} es denso en B .

Consideremos el desarrollo en serie de Fourier del término H_1 ,

$$H_1(\theta, I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{H}_1^k(I) e^{i\langle k, \theta \rangle}.$$

Con base en lo anterior, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Poincaré). *Si el hamiltoniano H_ϵ cumple las hipótesis de regularidad, no degeneración y genericidad siguientes:*

1. $H(\epsilon; \theta, I)$ es *análítico* en $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \times \mathbb{T}^n \times B$,
2. $\omega: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *no degenerado*,
3. Para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ no nulo, existe un vector $k' \in \mathbb{Z}^n$ no nulo proporcional a k tal que $\hat{H}_1^{k'} \neq 0$,

entonces el sistema (3) no posee ninguna integral primera uniforme adicional.

Para entender el sentido dinámico de la condición 3 se recomienda consultar a R. de la Llave.⁴

Demostración. Supongamos que existe una integral primera

$$G_\epsilon(\theta, I) = G(\epsilon; \theta, I).$$

Escribimos su desarrollo de primer orden,

$$G_\epsilon(\theta, I) = G_0(\theta, I) + G_1(\theta, I)\epsilon + G_2(\epsilon; \theta, I)\epsilon^2.$$

Al substituir en la ecuación $\{H_\epsilon, G_\epsilon\} = 0$, los desarrollos, obtenemos,

$$\{H_0, G_0\} + \epsilon(\{H_0, G_1\} + \{H_1, G_0\}) + \epsilon^2(\{H_0, G_2\} + \{H_1, G_1\} + \{H_2, G_0\}) = 0.$$

Los coeficientes deben anularse. Consideremos ahora el primer coeficiente:

$$\{H_0, G_0\} = 0.$$

Calculemos su expansión en serie de Fourier, en función de la expansión de G_0 ,

$$G_0(I, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{G}_0^k(I) e^{i\langle k, \theta \rangle}.$$

Obtenemos:

$$\{H_0, G_0\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle \omega(I), k \rangle \hat{G}_0^k(I) i e^{i\langle k, \theta \rangle}.$$

Todos los coeficientes deben anularse, por tanto, para cada $k \in \mathbb{Z}^n$ no nulo, y cada $I \in B$ si $\omega(I)$ no es k -resonante, entonces $\hat{G}_0^k(I) = 0$. El conjunto de las frecuencias k -resonantes es un hiperplano de \mathbb{R}^n , y al ser ω por hipótesis no degenerado, tenemos que \hat{G}_0^k se anula en el complementario de una hipersuperficie. Por continuidad, $\hat{G}_0^k = 0$. El unico coeficiente no nulo es entonces el promedio correspondiente a $k = 0$, y por tanto:

$$G_0 = \hat{G}_0^0(I),$$

quedando demostrado que G_0 no depende de θ . Ocupémonos ahora del segundo coeficiente,

$$\{H_0, G_1\} + \{H_1, G_0\} = 0,$$

dado que tanto H_0 como G_0 no dependen de θ , es sencillo escribir el desarrollo en serie de Fourier de la suma.

Designemos por α la aplicación de frecuencias del hamiltoniano integrable G_0 ,

$$\alpha(I) = \left(\frac{\partial G_0(I)}{\partial I_1}, \dots, \frac{\partial G_0(I)}{\partial I_n} \right).$$

Entonces,

$$\{H_0, G_1\} + \{H_1, G_0\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\langle k, \omega(I) \rangle \hat{G}_1^k(I) - \langle k, \alpha(I) \rangle \hat{H}_1^k(I) \right) i e^{\langle k, \theta \rangle}.$$

Los coeficientes son todos nulos, y por el mismo argumento que antes, se tiene que en todo B , y para cualquier $k \in \mathbb{Z}^n$ no nulo:

$$\langle k, \omega(I) \rangle \hat{G}_1^k(I) = \langle k, \alpha(I) \rangle \hat{H}_1^k(I). \quad (4)$$

Fijemos $k \in \mathbb{Z}^n$ no nulo e $I \in B$, supongamos que $\omega(I)$ es k -resonante. Por hipótesis del teorema podemos encontrar un k' proporcional a k , y tal que $\hat{H}_1^{k'}(I) \neq 0$. Para estos valores, la ecuación (4) se escribe

$$\langle k', \alpha(I) \rangle \hat{H}_1^{k'}(I) = 0.$$

Luego, $\alpha(I)$ es k' -resonante, y por tanto k -resonante.

En resumen, para cualesquiera $I \in B$, $k \in \mathbb{Z}^n$ si $\omega(I)$ es k -resonante, también lo es $\alpha(I)$, es decir:

$$R(\omega) = R(\alpha).$$

En particular si $I \in \mathcal{R}$, la recta vectorial que contiene a $\omega(I)$ está determinada por $R(\omega(I))$. Por tanto $\omega(I)$ y $\alpha(I)$ están situados sobre la misma

recta vectorial, y por tanto son proporcionales.

Las funciones ω y α son proporcionales a lo largo del conjunto denso \mathcal{R} , y por continuidad, deben ser proporcionales a lo largo de B . Por tanto existe una función de proporcionalidad λ

$$\lambda\omega = \alpha.$$

Las componentes de las aplicaciones de frecuencias ω y α son precisamente las derivadas parciales de H_0 y G_0 , y por tanto:

$$\lambda dH_0 = dG_0.$$

Los hamiltonianos H_0 , y G_0 son funcionalmente dependientes, y por tanto H_ϵ y G_ϵ son funcionalmente dependientes en $\mathbb{T}^n \times B$ cuando ϵ toma el valor cero. \square

4. Algunas extensiones

Se listan brevemente algunas extensiones de estas ideas, dando las referencias oportunas para el lector interesado:

- Poincaré [6, §83] encuentra unas condiciones suficientes similares para la no existencia de $q \geq 2$ integrales primeras uniformes independientes.
- Poincaré [6, §84] también estudia lo que sucede cuando el Hessiano de H_0 es nulo; es decir, cuando $\det(\partial_I \omega(I)) = 0$ en B .
- E. Fermi³ dió condiciones suficientes para la rotura de todas las variedades invariantes no perturbadas de codimensión uno, exceptuando, claro está, las hipersuperficies de nivel del propio Hamiltoniano $H_\epsilon(\theta, I)$.
- Condiciones suficientes para la rotura de las variedades invariantes no perturbadas de la forma $\mathbb{T}^n \times V$, donde V es un variedad de dimensión l del abierto B se encuentran en Benettin¹ et al. Aquí, $1 \leq l \leq n - 1$. Los casos $l = 1$ y $l = n - 1$ son un poco diferentes al resto. Obviamente, no se impone que las variedades invariantes perturbadas sean también del tipo $\mathbb{T}^n \times V$.
- El mismo problema pero en el marco de los flujos y las aplicaciones que preservan volumen ha sido estudiado por I. Mezić.⁵
- En el marco de las aplicaciones twist cercanas a completamente integrables, existen problemas que pueden ser atacados con las mismas técnicas que las contenidas en los trabajos de Poincaré. Mi objetivo es aplicar esas ideas a algunos problemas que provienen de los billares.

- También se puede ver que la escisión de separatrices es una obstrucción a la *integridad uniforme completa*. Por ejemplo, si el potencial de Melnikov asociado a una perturbación de una separatriz de una aplicación twist completamente integrable no es constante, entonces la aplicación perturbada no es uniformemente integrable.
- Rafael de la Llave⁴ tiene resultados muy potentes en este campo. Concretamente, Rafael explica de manera clara en significado dinámico que tienen las condiciones de genericidad del Teorema de Poincaré, aunque para eso necesita utilizar el lenguaje de deformaciones, que sobrepasa un poco las posibilidades de esta charla. También prueba que esas condiciones-obstrucciones son necesarias y suficientes para la integridad uniforme a primer orden en el parámetro (es decir, para que exista un cambio analítico de variables de forma que el nuevo Hamiltoniano sólo dependa de las acciones hasta los términos de primer orden). Eso da lugar a obstrucciones de orden superior y (atención, redoble de tambores) Rafael prueba que la anulación de las obstrucciones a todos los ordenes es una condición necesaria y suficiente para la integridad uniforme del sistema. El método de la prueba sigue un esquema de convergencia cuadrática tipo KAM.

5. Una aplicación simple

Siguiendo sus motivaciones referentes a resolver cuestiones de la Mecánica Celeste, Poincaré aplicó su Teorema al S3BP y demostró que no existen más integrales primeras uniformes que las diez ya conocidas. Aquí el parámetro perturbativo ϵ es un parámetro que depende de las masas, luego su resultado sólo es válido para pequeñas masas. Es decir, Poincaré obtiene un resultado que, por un lado (las masas), es más débil que el Teorema de Bruns, pero por otro lado (la regularidad de las integrales primeras), es más potente.

Trataremos ahora de aplicar en la forma más detallada posible el teorema de Poincaré a otro problema más simple de la mecánica celeste a modo de ejemplo.

5.1. *El problema restringido de los tres cuerpos en el plano*

Consideramos tres cuerpos en el plano con masas diferentes, de manera que el primer cuerpo tenga masa $1 - \mu$, el segundo cuerpo tenga masa μ

y el tercer cuerpo tenga masa m tan pequeña que pueda ser despreciable. Se asume**** que $0 < \mu \ll 1$. Este es un problema con dos grados de libertad, en donde (x_1, x_2) son las posiciones, mientras que las velocidades son (y_1, y_2) . De esta forma se tiene que $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Los cuerpos de masa μ y $1 - \mu$ describen dos circunferencias concéntricas alrededor de su centro de gravedad común, el cual es fijo. El radio de la circunferencia descrita por el cuerpo de masa μ es $1 - \mu$ mientras que el radio de la circunferencia descrita por el cuerpo de masa $1 - \mu$ es μ , lo cual puede expresarse de una manera más simple como $|\mathbf{r}_\mu| = r_\mu = 1 - \mu$, $|\mathbf{r}_{1-\mu}| = r_{1-\mu} = \mu$. Esto indica que la velocidad angular de las masas primarias es constante y que las posiciones, en coordenadas polares, están dadas por:

$$\mathbf{r}_\mu = ((1 - \mu) \cos t, (1 - \mu) \sin t), \quad \mathbf{r}_{1-\mu} = (\mu \cos t, \mu \sin t).$$

Ahora, podemos hacer el paso de nuestras variables (x_1, x_2, y_1, y_2) a las variables *keplerianas****** (L, G, l, g) y se tiene un sistema hamiltoniano no autónomo de dos y medio grados de libertad, el cual puede convertirse en un sistema autónomo de dos grados de libertad mediante otro cambio de variables (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) , tal como sigue:

$$x'_1 = L, \quad x'_2 = G, \quad y'_1 = l, \quad y'_2 = g - t.$$

Realmente lo que se ha hecho es pasar de las variables keplerianas a las variables acción ángulo, donde obviamente $I = (x'_1, x'_2)$ son las acciones, mientras que los ángulos son $\theta = (y'_1, y'_2)$. Por lo tanto tenemos el siguiente hamiltoniano perturbado por μ

$$H_\mu(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = H_0(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) + \mu H_1(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) + \dots,$$

donde

$$H_0 = H_0(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = \frac{1}{2x_1'^2} + x_2'.$$

Procedemos ahora a calcular el Hessiano de H_0 :

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right| = \begin{vmatrix} \frac{3}{x_1'^4} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**** Descartamos $\mu \in \{0, 1\}$ porque caeríamos en el problema giratorio de dos cuerpos, el cual obviamente es integrable (problema con un grado de libertad). También descartamos $\mu = \frac{1}{2}$ porque tendríamos dos cuerpos con masas iguales, el cual también es integrable.
***** Véase Poincaré [6, §8]

Como el Hessiano de H_0 es nulo, no tendríamos una de las hipótesis del teorema. Afortunadamente, tal como se ha dicho antes en las extensiones, Poincaré en [6, §43] muestra como la hipótesis del Hessiano no nulo se puede relajar. Basta tomar una función ϕ tal que el Hessiano de $\phi(H_0)$ no sea nulo, en nuestro caso podemos tomar $\phi(x) = x^2$, de esta forma se tiene

$$\phi(H_0) = H_0^2 = \frac{1}{4x_1'^2} + \frac{x_2'}{x_1'^2} + x_2'^2.$$

Procedemos ahora a calcular el Hessiano de H_0^2 :

$$\left| \frac{\partial^2 \phi(H_0)}{\partial I^2} \right| = \begin{vmatrix} \frac{5}{x_1'^6} & \frac{-2}{x_1'^3} \\ \frac{-2}{x_1'^3} & 2 \end{vmatrix} = \frac{6}{x_1'^6} \neq 0.$$

Ahora bien, si existiera una integral uniforme, sólo faltaría en el desarrollo de $H_1(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2)$, considerada como la *función perturbatriz* por parte de los astrónomos, siguiendo los senos y cosenos de los múltiplos de los ángulos y'_1, y'_2 , todos los coeficientes se anulen en un determinado momento, pero el estudio del desarrollo de la función perturbatriz es bien conocido y muestra que esto último no sucede. Por lo tanto, concluimos que en este caso particular del problema de los tres cuerpos, no existe una integral primera distinta de H .

Bibliografía

1. G. BENETTIN, G. FERRARI, L. GALGANI & A. GIORGILLI, *Nuovo Cimento*, **72** (1982), 137–148.
2. H. BRUNS, *Acta Math.*, **11**, (1887), 25–96.
3. E. FERMI, *Nuovo Cimento*, **26**:105–??? (1923).
4. R. DE LA LLAVE, *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, **362**:76–109 (1996).
5. I. MEZÍČ, *Phys. D*, **154**:51–67 (2001).
6. H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste (Tomo 1)*, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

EL MÉTODO DE DARBOUX

Chara Pantazi

*Departamento de Matemática Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
chara.pantazi@upc.edu*

Darboux, en 1878, presentó su método para construir integrales primeras de campos vectoriales polinomiales utilizando sus curvas invariantes algebraicas. En esta exposición presentaremos algunas extensiones del método clásico de Darboux y también algunas aplicaciones.

Palabras Clave: Cofactores, Curvas Invariantes, Factor Integrante, Integrabilidad Darboux, Sistema Polinomial en el plano.

Introducción

En su trabajo (1878), Darboux,¹² investigó la posible relación entre las curvas algebraicas y las integrales primeras para sistemas (diferenciales) polinómicos en el plano. En particular, él probó que si un sistema admite un número suficiente de curvas entonces se puede construir una función *tipo Darboux* usando tales curvas. Esta función, función tipo Darboux, juega el papel de *factor integrante* del sistema y su existencia es muy importante en el problema de centro-foco.

En este artículo primero introducimos los conceptos básicos del método de Darboux. Con el Teorema 2.1 presentamos una versión que mejora la exposición original de Darboux porque incorpora los conceptos de los factores exponenciales, los puntos singulares independientes, los invariantes y los invariantes generalizados.²¹ Adicionalmente, hemos investigado algunas preguntas *inversas* de la teoría de Darboux (ver sección 3) y hemos dado alguna aplicación de estos resultados sobre ciclos límites (ver sección 5).

Un resultado importante sobre la teoría de Darboux es debido a Singer: Singer²⁴ probó que el método de Darboux permite calcular las integrales primeras Liouvillianas de sistemas diferenciales polinómicos. En la sección

4 presentamos la relación entre los varios tipos de integrabilidad.

Actualmente, la teoría de integrabilidad Darboux ha sido extendida a hipersuperficies algebraicas regulares.^{19,20}

1. Nociones Básicas

La teoría de integrabilidad Darboux funciona para ecuaciones diferenciales ordinarias polinomiales complejas (y por supuesto en particular para las reales). Consideramos el *sistema diferencial polinomial* en \mathbb{C}^2 definido por

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

con $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ y la variable independiente t puede ser real o compleja. En lo siguiente denotamos por δA el *grado del polinomio* A . Definimos $m = \max\{\delta P, \delta Q\}$ el *grado del sistema* (1).

Asociamos al sistema diferencial polinomial (1) en \mathbb{C}^2 el *campo vectorial polinomial*

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2)$$

y algunas veces escribimos $X = (P, Q)$.

Las curvas algebraicas son el punto de partida de la teoría de integrabilidad Darboux. Una curva algebraica irreducible $f(x, y) = 0$ en \mathbb{C}^2 con $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es una *curva algebraica invariante* de un sistema polinomial (1) si

$$\dot{f}|_{f=0} = 0 \text{ o } Xf = \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q = Kf, \quad (3)$$

para algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ denominado el *cofactor* de la curva $f = 0$. Notamos que debido a que el campo vectorial polinomial tiene grado m , entonces cualquier cofactor tiene como máximo grado a $m - 1$ (y es independiente del grado de la curva $f = 0$!). Esto reduce el problema de calcular curvas invariantes de un sistema dado de un problema de algebra lineal al espacio de los cofactores.

Observamos que para los puntos de la curva $f = 0$ el lado derecho de (3) es cero. Esto significa que el gradiente $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ es ortogonal al campo vectorial (P, Q) en esos puntos. Sin embargo el campo vectorial

(P, Q) es tangente a la curva $f = 0$. De aquí se tiene que la curva $f = 0$ es formada por trayectorias del campo vectorial (P, Q) . Esto explica el por qué la curva algebraica $f = 0$ es invariante bajo el flujo del campo vectorial (P, Q) .

Los sistemas polinomiales reales son muy especiales porque cuando tengan una curva algebraica invariante compleja, también tendrán como invariante la conjugada (ver Christopher & Llibre⁸).

Una *integral primera* del sistema (1) sobre un subconjunto abierto U de \mathbb{C}^2 es una función analítica no constante $H : U \rightarrow \mathbb{C}$ la cual es constante sobre toda curva solución $(x(t), y(t))$ de (1) sobre U . Esto significa que $H(x(t), y(t)) = c$ donde $c \in \mathbb{C}$ para todo tiempo t para el cual la solución $(x(t), y(t))$ está definida sobre U . De (2) tenemos que H es una integral primera en U si y sólo si $XH \equiv 0$ sobre U . Decimos que el sistema polinomial (1) es *integrable* sobre U si existe una integral primera sobre U .

Un *invariante* del sistema polinomial real (1) definido en el subconjunto abierto U de \mathbb{C}^2 es una función analítica no constante I en las variables x, y y t tales que $I(x(t), y(t), t)$ es constante sobre toda curva solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1) contenida en U .

Para un sistema diferencial polinomial la existencia de una integral primera $H(x, y)$ implica que trazando las curvas $H(x, y) = c$ podemos describir completamente el retrato de fases de tal sistema. Mientras, la existencia de un invariante nos dará información sobre el α -límite o el ω -límite de las órbitas del sistema, donde el tiempo t es real.

Una función analítica $R : U \rightarrow \mathbb{C}$ la cual no es idénticamente cero sobre U se denomina un *factor integrante* del sistema (1) si satisface

$$XR = -\text{div}(X)R,$$

en U . Como es usual, la *divergencia* del campo vectorial X está definida por $\text{div}(X) = \text{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$. Supongamos que U es simplemente conexo, entonces la integral primera asociada al factor integrante R es dada por

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + f(x), \quad (4)$$

satisfaciendo la condición $\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$.

A partir de la definición del factor integrante R , tenemos que $X(R) = -\text{div}(P, Q)R$. Esto implica que $R = 0$ es una curva invariante (en general no algebraica) de X teniendo como cofactor el polinomio $-\text{div}(P, Q)$. En general, es más fácil buscar una expresión para el *factor integrante inverso*^{2,3} $V = 1/R : W \rightarrow \mathbb{C}$ con $W = U \setminus \{R = 0\}$, que una expresión para el factor integrante de la integral primera.

Otra noción útil en la teoría de integrabilidad Darboux es la noción de factor exponencial, la cual se debe a Christopher,⁷

Ejemplo 1.1 (Dependencia de ϵ). *El sistema polinomial*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= (1 + \epsilon)y + x,\end{aligned}\tag{5}$$

para $\epsilon \neq 0$ tiene dos curvas invariantes: $f_1 = x = 0$ con cofactor $K_1 = 1$ y $f_2 = x + \epsilon y = 0$ con cofactor $K_2 = 1 + \epsilon$. Nótese que $\epsilon \rightarrow 0$ implica que las dos curvas se colapsan en una. En este caso decimos que la curva $f_1 = 0$ tiene multiplicidad 2.

Definición 1.1 (Factor exponencial y cofactor). Sean $h, g \in \mathbb{C}[x, y]$ primos relativos en el anillo $\mathbb{C}[x, y]$. La función $\exp(g/h)$ se denomina un factor exponencial del sistema polinomial (1) si para algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ de grado a lo sumo $m - 1$ satisface la ecuación

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K \exp\left(\frac{g}{h}\right).\tag{6}$$

Decimos que K es el cofactor del factor exponencial $\exp(g/h)$.

Proposición 1.1. Si $\exp(g/h)$ es un factor exponencial con cofactor K para el sistema polinomial (1) y si h no es una constante, entonces $h = 0$ es una curva algebraica invariante con cofactor K_h , y g satisface la ecuación $Xg = gK_h + hK$.

Debemos notar que los factores exponenciales de la forma $\exp(g/h)$ (respectivamente $\exp(g)$) aparecen cuando la curva algebraica invariante $h = 0$ (respectivamente la recta invariante en el infinito cuando proyectivizamos el campo vectorial X) tiene multiplicidad geométrica más grande que 1, para más detalles consulte a Christopher, Llibre & Pereira.¹¹

En el ejemplo 1.1 notamos que cuando las curvas $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ se colapsan ($\epsilon = 0$) aparece el factor exponencial $\exp(y/x)$ con cofactor $K = 1$.

La existencia de puntos singulares mejora la versión original del Teorema de Darboux (Teorema 2.1).⁶

Denotamos por $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ el espacio de todos los polinomios complejos de grado $m-1$ y también notamos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{m-1}[x, y] = m(m+1)/2$. Sea

$$K(x, y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}_{m-1}[x, y].$$

Consideramos el isomorfismo

$$K \longrightarrow (a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \dots, a_{0,m-1}),$$

es decir, identificamos el espacio vectorial lineal $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ con $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$.

Decimos que r puntos singulares $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$, para $k = 1, \dots, r$, del sistema polinomial real (1), son puntos singulares *independientes* con respecto a $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ si la intersección de los r hiperplanos

$$\sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x_k^i y_k^j = 0, \quad k = 1, \dots, r,$$

en $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$, es un subespacio lineal de dimensión $[m(m+1)/2] - r$. Un punto singular (x_0, y_0) del sistema polinomial (1) es *débil* si cumple la condición $\operatorname{div}(P, Q)(x_0, y_0) = 0$.

2. El Método de Darboux

La presentación de la teoría de integrabilidad Darboux puede ser resumida en el Teorema 2.1 y hasta lo que sabemos, es la versión más reciente. Esta versión es original sobre los invariantes generalizados. Las otras afirmaciones son bien conocidas.⁸

El siguiente teorema será mencionado como el *Método de Darboux*.

Teorema 2.1 (Método de Darboux). *Supongamos que el sistema polinomial (1) de grado m admite p curvas algebraicas invariantes irreducibles $f_i = 0$ con cofactores K_i para $i = 1, \dots, p$; q factores exponenciales $F_j = \exp(g_j/h_j)$ con cofactores L_j para $j = 1, \dots, q$; y r puntos singulares independientes $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ tales que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ para $i = 1, \dots, p$*

y $k = 1, \dots, r$. Por supuesto, toda h_j factoriza en producto de factores f_1, \dots, f_q , excepto si es igual a 1. Entonces las siguientes afirmaciones se mantienen.

(a) Existen $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ no todas cero tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{i=1}^q \mu_j L_j = 0, \quad (D_{fi})$$

si y sólo si la función (multivaluada)

$$H(x, y) = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}, \quad (7)$$

es una integral primera del sistema (1). Más aún, para sistemas reales la función (7) es real.

(b) Si $p + q + r = [m(m + 1)/2] + 1$, entonces existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todas cero satisfaciendo la condición (D_{fi}) .

(c) Si $p + q + r \geq [m(m + 1)/2] + 2$, entonces el sistema (1) tiene una integral primera racional, y en consecuencia todas las órbitas del sistema están contenidas en curvas algebraicas invariantes.

(d) Existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todas cero tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j + \text{div}(P, Q) = 0, \quad (D_{if}),$$

si y sólo si la función (7) es un factor integrante del sistema (1). Más aún, para sistemas reales la función (7) es real.

(e) Si $p + q + r = m(m + 1)/2$ y los r puntos singulares independientes son débiles, entonces existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todas cero satisfaciendo al menos una de las condiciones (D_{fi}) o (D_{if}) .

(f) Existen $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ no todas cero tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j + s = 0, \quad (D_{in})$$

con $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si y sólo si la función (multivaluada)

$$I(x, y, t) = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} \exp(st) \quad (8)$$

es un invariante del sistema (1). Más aún, para sistemas reales esta función es real.

Sea V un factor integrante inverso C^1 definido sobre un subconjunto abierto W de \mathbb{C}^2 .

(g) Existen $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ no todas cero tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j + \rho \operatorname{div}(P, Q) + s = 0, \quad (D_{gin})$$

con $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\rho \in \mathbb{C}$ si y sólo si la función (multivaluada)

$$G(x, y, t) = V^\rho f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q} \exp(st), \quad (9)$$

es un invariante del sistema (1) y se denominará invariante generalizado. Más aún, para sistemas reales esta función es real.

(h) Si $p + q = [m(m + 1)/2] - 1$, entonces existen $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ no todos cero satisfaciendo al menos una de las condiciones (D_{fi}) , (D_{if}) , (D_{in}) o (D_{gin}) .

Para una demostración de las afirmaciones (a)–(e) consulte Christopher & Llibre.⁸ Para las afirmaciones (f)–(h) consulte Pantazi.²¹

Una función de la forma

$$f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)^{\mu_1} \cdots \exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)^{\mu_q}, \quad (10)$$

se denomina una *función de Darboux*. Si el sistema (1) tiene una integral primera o un factor integrante de la forma (10) entonces el sistema (1) se denomina *Darboux integrable*.

3. Teoría Inversa de la Integrabilidad Darboux

Hemos visto que la teoría de integrabilidad de Darboux es un método elegante para construir integrales primeras para sistemas polinomiales (incluso paramétricos) usando las curvas algebraicas. Con el fin de entender y completar la teoría de Darboux hemos considerado los siguientes problemas:

1. Dado un conjunto de curvas algebraicas, ¿cuáles son los campos que tienen estas curvas invariantes?

Este problema ha sido estudiado por

- Zholadek (1995). Resuelve esta pregunta bajo ciertas condiciones genéricas y presenta una demostración analítica.²⁶
 - Christopher, Llibre, Pantazi y Zhang (2002). Bajo condiciones genéricas resuelven la pregunta presentando una demostración algebraica. Adicionalmente, demuestran que sin las condiciones genéricas los resultados no son validos.¹⁰
 - S. Walcher (2000). Presenta una respuesta general sin usar condiciones.²⁵
 - Christopher, Llibre, Pantazi and Walcher (2006). Resuelven el problema incorporando la multiplicidad de las curvas.⁹
2. Dada una función Darbouxiana ¿cuáles son los campos que tienen esta función como una integral primera?.

Llibre y Pantazi (2004). Relacionan el grado del sistema y el grado de las curvas.¹⁷

3. Dada una función Darbouxiana ¿cuáles son los sistemas que tienen esta función como inverso del factor integrante?.

Christopher, Llibre, Pantazi y Walcher (2006). En un escenario genérico resuelven la pregunta.⁹

Según el método de Darboux (ver Teorema 2.1), dado un campo polinomial se intenta detectar sus curvas invariantes y construir los factores integrantes o las integrales primeras. Como Teoría Inversa de la Integrabilidad Darboux entendemos que dada cierta información (funciones tipo Darboux) construir todos los campos polinomiales que tienen ciertas características, tal como indican las preguntas de esta sección.

4. Integrabilidad y Problemas Relacionados.

Denotemos por K_0 las integrables polinomiales, K_1 las integrales racionales, K_2 las integrales de Darboux (factor integrante $R = \frac{U}{V}$, $N = 1$), K_3 las integrales elementales ($R = \left(\frac{U}{V}\right)^N$), K_4 las integrales Liouvillianas ($R = \prod f_i^{\lambda_i} \exp(g_i/h_i)$), y por K_5 otros tipos de integrales. De esta forma se tiene la siguiente relación

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 \subset K_5.$$

Los siguientes son algunos resultados.

- **Prelle y Singer (1983).** Si H es una integral primera elemental, entonces su factor integrante es

$$R = \left(\frac{U}{W} \right)^{1/N}, \quad U, V \in \mathbb{C}[x, y], \quad N \in \mathbb{Z}_+.$$

Es decir, integrales primeras elementales se pueden calcular a partir de funciones Darbouxianas.²³

- **Singer (1992).** Si H es Liouvilliana, entonces R es Darbouxiana. Es decir, integrales Liouvillianas son integrales de funciones Darbouxianas.²⁴
- **Llibre y Pantazi en 2004.** Si H es Darbouxiana, entonces

$$R \in \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^p f_i f_i^{n_i}}, \frac{U(x, y)}{\prod_{i=1}^p f_i f_i^{n_i}} \right\}.$$

Para una ampliación de este resultado se recomienda consultar Llibre & Pantazi.¹⁷

Uno de los problemas mas difíciles relacionados con la existencia de las curvas invariantes y la integrabilidad de un sistema se debe a Poincaré:

*Poincaré (1891). Dar un algoritmo efectivo para calcular el grado máximo de las curvas invariantes algebraicas de un campo fijado.*²²

Jouanolou (1979) presentó el siguiente resultado: Para un campo dado, el máximo grado de las f_i (irreducibles) es acotado. El campo tiene o bien un número finito de curvas o tiene una integral primera racional (todas las órbitas del sistema están contenidas sobre curvas algebraicas¹⁶).

Chavarriga y Llibre en (2001) han demostrado: Si la curva $f = 0$ es no singular, entonces $\delta f \leq \delta X - 1$.⁴ Otras cotas sobre el grado de la curva son dadas per Carnicer y Campillo, Cerveau y Lins Neto.

Se pensaba que cuando los sistemas de grado δX tuviesen una curva de grado arbitrario, tendrían también una integral primera racional, como indica el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.1 (Integral primera racional). *El sistema*

$$\dot{x} = \nu x, \quad \dot{y} = \mu y, \quad \nu, \mu \in \mathbb{Z}_+$$

tiene la curva invariante $x^\mu - \alpha y^\nu = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, y la integral primera $H = \frac{y^\nu}{x^\mu}$, lo cual indica que H es una integral racional.

En esta dirección hay el siguiente problema abierto:

No se sabe si existe una cota uniforme del grado de las curvas algebraicas de todos los campos polinomiales que no son Darboux integrable.

Para los Darboux integrables se sabe que no existe esta cota: Olagnier (2001),⁵ Christopher y Llibre (2002),⁸ Chavarriga y Grau (2003).¹

5. Aplicaciones

Giacomini, Llibre y Viano (1996), han relacionado la existencia del factor integrante con la presencia de los ciclos límites:¹⁴

Proposición 5.1. *Sea $X \in C^1$ definido en un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, donde V es el inverso del factor integrante. Si γ es un ciclo límite de X contenido en \mathcal{U} , entonces*

$$\gamma \subset \Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}.$$

El siguiente resultado es debido a Ecalle (1992)¹³ e Ilyanshenko (1991).¹⁵

Proposición 5.2. *Cualquier campo polinomial tiene un número finito de ciclos límites.*

Llibre y Rodríguez (2000)¹⁹ obtuvieron el siguiente resultado, el cual corresponde a una de las preguntas abiertas de Hilbert.

Proposición 5.3. *Toda configuración finita de ciclos límites se puede realizar con campos polinomiales.*

Usando la Proposición 5.3 y resultados de los problemas inversos hemos demostrado que la conjetura 5.1 es falsa.¹⁸

Conjetura 5.1 (Winkel). *Para una curva dada (algebraica) $f = 0$ de grado $\delta f \geq 4$ no existen campos polinomiales X de grado $\delta X \leq 2\delta f - 1$ tales que tengan $f = 0$ invariante y que tengan exactamente los óvalos de $f = 0$ como ciclos límites.*

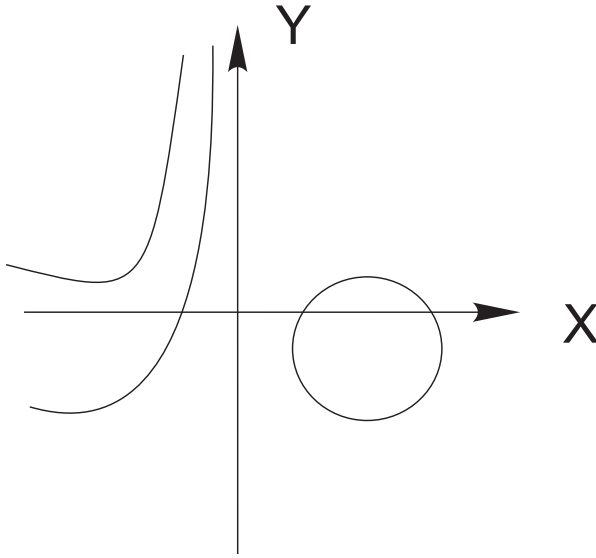


Figura 1. Ciclo límite algebraico de grado 4.

Consideramos la curva

$$f = f(x, y) = \frac{1}{4} + x - x^2 + px^3 + xy + x^2y^2 = 0, \quad (11)$$

de grado $\delta f = 4$ ($0 < p < 1/4$) que tiene tres componentes: un óvalo y dos componentes homeomorfas a rectas, (ver figura 1). Además la curva $f = 0$ es no singular.

En el Teorema 5.1 demostramos que el óvalo de la curva (11) es el único ciclo límite para una 13-paramétrica familia de campos polinomiales. Observamos que $2\delta X - 1 = 7 > 5$ y esto demuestra que la conjetura no es cierta.

Teorema 5.1 (Familia 6-paramétrica). *Sean a, b, c, d, e y p números reales arbitrarios. Entonces, la curva algebraica $f = 0$ definida por (11) es invariante por la familia 6-paramétrica de los campos vectoriales polinómi-*

cos de grado 5 dados por

$$\begin{aligned}
 P = & (be - cd) + [c + 4(be - cd) - 2a(d^2 + e^2)]x - by + \\
 & 4[c + (a + c)d - be]x^2 - 4[b + cd - (a + b)e]xy - \\
 & 2[a + 2c + 2p(cd - be)]x^3 + 4[b + c - a(d^2 + e^2)]x^2y - \\
 & 2(a + 2b)xy^2 + 4cp x^4 + 4(2ad - bp)x^3y - \\
 & 4(cd - 2ae - be)x^2y^2 - 4ax^4y + 4cx^3y^2 - 4(a + b)x^2y^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q = & 2a(d^2 + e^2) - bd - ce + [b - 4((a + b + ad)d + (c + ae)e)]x + \\
 & [c + 2a(d^2 - 2e + e^2)]y - 4(-c + ad + bd - 2ae + ce)xy + \\
 & 2[a + 2b + 2d(2a + b) + 2ce + 3ap(d^2 + e^2)]x^2 + 2a(1 - 2e)y^2 - \\
 & 4(a + b + 3adp + bdp + cep)x^3 + 2(a + 2b - 2c - 6aep)x^2y + \\
 & 4(-a + c + ad^2 + ae^2)xy^2 + 2ay^3 + \\
 & 2(3a + 2b)p x^4 + 4cp x^3y - 2(4ad + 2bd + 2ce - 3ap)x^2y^2 - \\
 & 8aexy^3 + 4(a + b)x^3y^2 + 4cx^2y^3 + 4axy^4.
 \end{aligned}$$

Adicionalmente, si $ac \neq 0$, $0 < p < 1/4$ y el punto (d, e) está al interior de la región acotada limitada por el óvalo de la $f = 0$, entonces el único ciclo límite de este campo es el algebraico definido por el óvalo de la $f = 0$.

Bibliografía

1. J. CHAVARRIGA AND M. GRAU, *A family of non Darboux integrable quadratic polynomial differential systems with algebraic solutions of arbitrary high degree*, Appl. Math. Lett. **16** (2003), 833–837.
2. J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINÉ & J. LLIBRE, *On the integrability of two-dimensional flows*, J. of Differential Equations **157** (1999), 163–182.
3. J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINÉ & J. LLIBRE, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. of Differential Equations **194** (2003), 116–139.
4. J. CHAVARRIGA & J. LLIBRE, *Invariant algebraic curves and rational first integrals for planar polynomial vector fields*, J. Differential Equations **169** (2001), 1–16.
5. J. CHAVARRIGA, J. LLIBRE & M. OLLAGNIER, *On a result of Darboux*, J. of Computation and Mathematics **4** (2001), 197–210.
6. J. CHAVARRIGA, J. LLIBRE & J. SOTOMAYOR, *Algebraic solutions for polynomial vector fields with emphasis in the quadratic case*, Expositions Math. **15** (1997), 161–173.
7. C. CHRISTOPHER, *Invariant algebraic curves and conditions for a center*, Proc. Roy. Soc. Edinburg **124A** (1994), 1209–1229.

8. C. CHRISTOPHER & J. LLIBRE, *Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems*, Annals of Differential Equations **14** (2000), 5–19.
9. C. J. CHRISTOPHER, J. LLIBRE, C. PANTAZI & S. WALCHER, *Inverse problems for multiple invariant curves to appear in Proc. Royal soc. Edinburgh*.
10. C. J. CHRISTOPHER, J. LLIBRE, C. PANTAZI & X. ZHANG, *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. Physics A: Gen. Math. **35** (2002), 2457–2476.
11. C. CHRISTOPHER, J. LLIBRE & J.V. PEREIRA, *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields*, preprint, 2003.
12. G. DARBOUX, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bull. Sci. math. 2ème série **2** (1878), 60–96; 123–144; 151–200.
13. J. ÉCALLE, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, 1992.
14. H. GIACOMINI, J. LLIBRE & M. VIANO, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity **9** (1996), 501–516.
15. YU. ILYASHENKO, *Finiteness theorems for limit cycles*, Translations of Math. Monographs **94**, Amer. Math. Soc., 1991.
16. J.P. JOUANOLOU, *Equations de Pfaff algébriques*, in “Lectures Notes in Mathematics,” **708** Springer-Verlag, New York/Berlin, 1979.
17. J. LLIBRE & CH. PANTAZI, *Polynomial differential systems having a given Darbouxian first integral*, Bull. Sci. math. **128** (2004), 775–788.
18. J. LLIBRE & CH. PANTAZI, *Counterexample to a conjecture on the algebraic limit cycles of polynomial vector fields*, Geom.Dedicata. **110** no. (2005), 213–219.
19. J. LLIBRE & G. RODRÍGUEZ, *Invariant hyperplanes and Darbox integrability for d -dimensional polynomial differential systems*, Bull. Sci. Math. **124** (2000), 1–21.
20. J. LLIBRE & X. ZHANG, *Darboux integrability of real polynomial vector fields on regular algebraic hypersurfaces*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **LI** (2002), 109–126.
21. CH. PANTAZI, *Inverse problems of the Darboux Theory of integrability for planar polynomial differential systems*, PhD, 2004.
22. H. POINCARÉ, *Sur l’intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré I and II*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **5** (1891), 161–191; **11** (1897), 193–239.
23. M. J. PRELLE & M. F. SINGER, *Elementary first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 613–636.
24. M.F. SINGER, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.
25. S. WALCHER, *Plane polynomial vector fields with prescribed invariant curves*, Proc. Royal soc. Edinburgh **130 A** (2000), 633–649.
26. H. ŻHOŁĄDEK, *On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations*, Studia Math. **114** (1995), 117–126.

MÉTODOS RECIENTES PARA DETECTAR LA NO INTEGRABILIDAD

Juan J. Morales-Ruiz

*Departamento de Matemática Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
juan.morales-ruiz@upc.edu*

En 1982 Ziglin utiliza la estructura de la ecuación en variaciones de Poincaré (sobre una curva integral particular) como una herramienta fundamental para detectar la no integrabilidad de un sistema Hamiltoniano. En este artículo se pretende dar una idea de esta aproximación a la no integrabilidad, junto con técnicas más recientes que involucran la teoría de Galois de ecuaciones diferenciales lineales, haciendo énfasis en los ejemplos más que en la teoría general. Ilustraremos estos métodos con resultados sobre la no integrabilidad de algunos problemas de N cuerpos en Mecánica Celeste.

Palabras Clave: Grupo de Galois Diferencial, Integrabilidad Liouville, Sistemas Hamiltonianos, Teoría de Morales-Ramis.

1. Criterios de Integrabilidad

Durante años se han buscado criterios para determinar la integrabilidad o no integrabilidad basada en el comportamiento de las soluciones en el dominio complejo.

Existen dos criterios que permiten establecer si un sistema hamiltoniano es no integrable, el primero se debe a Poincaré y el segundo es el teorema de Morales-Ramis, el cual involucra el grupo de Galois diferencial de una ecuación variacional. Es decir, se establece una conexión entre dos conceptos diferentes de integrabilidad: integrabilidad de un campo hamiltoniano X_H e integrabilidad, en el sentido Liouvilliano, de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 1.1. *Sea M una variedad simpléctica analítica compleja de dimensión $2n$, X_H un sistema hamiltoniano holomorfo definido sobre M y Γ la superficie de Riemann correspondiente a la curva integral $z = z(t)$ del*

campo vectorial X_H . La **ecuación variacional (EV)** a lo largo de Γ se escribe como

$$\dot{\eta} = X'_H(z(t))\eta. \quad (1)$$

Nota 1.1 (EVN). Usando la parte lineal de la integral primera $dH(z(t))$ de la EV, es posible reducir esta ecuación variacional (es decir, la regla de eliminación de un grado de libertad) para obtener la conocida **ecuación variacional normal (EVN)**.

$$\dot{\xi} = J_{n-1}S(t)\xi, \text{ donde } S(t) \text{ es una matriz simétrica,}$$

$$J_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz simpléctica, I_n es la matriz idéntica de tamaño $n \times n$. Esta ecuación diferencial (EVN) es una EV de un sistema hamiltoniano lineal.

Recordemos que un sistema hamiltoniano de $2n$ grados de libertad es completamente integrable (o simplemente “integrable”) si existen n integrales primeras independientes y en involución asociadas al sistema hamiltoniano.

2. Criterios de no-integrabilidad

Poincaré dio un criterio de no integrabilidad basado en la matriz de mono-dromía (prolongaciones analíticas) de la EV a lo largo de una curva integral real periódica. Si existen k integrales primeras de un sistema hamiltoniano independiente de la curva integral, entonces la característica k de los exponentes debe ser 0. Más aún, si las k integrales primeras están en involución (su paréntesis de Poisson es 0), entonces la característica $2k$ de los exponentes deben ser necesariamente 0.

En 1888 S. Kowalevski obtuvo un nuevo caso de integrabilidad del sistema de cuerpo rígido con un punto fijo, imponiendo la condición adicional de que la solución general es una función meromorfa de tiempo complejo. Lyapunov generalizó los resultados de Kowalevski y probó que excepto para algunas soluciones particulares, la solución general es univaluada. Su método está basado en el análisis de la EV a lo largo de una solución conocida.

Luego, en 1963, Arnold y Krilow analizaron condiciones suficientes para obtener funciones univaluadas, pero fue en 1982 que Ziglin obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Ziglin). *Supongamos que un sistema hamiltoniano admite $n-k$ integrales primeras meromorfas sobre Γ y que el grupo de monodromía de la EVN contiene una transformación no resonante g . Entonces cualquier otro elemento del grupo de monodromía de la EVN envía direcciones propias de g en ella misma.*

Se dice que una transformación lineal g es *resonante* si existen enteros r_1, \dots, r_n tales que $\lambda_1^{r_1} \dots \lambda_n^{r_n} = 1$, donde λ_i son los valores propios de g .

En 1997, a partir de mi estancia postdoctoral en Estrasburgo, obtengo conjuntamente con Jean Pierre Ramis el siguiente resultado.

Teorema 2.2 (Morales-Ramis). *Si el campo hamiltoniano inicial X_H es completamente integrable, entonces la componente identidad, G^0 del grupo de Galois de la EV (o de la EVN) es abeliana.*

Si la componente identidad, G^0 del grupo de Galois de la EVN no es abeliana, entonces el sistema hamiltoniano inicial X_H no es completamente integrable. En general el recíproco del teorema 2.2 no es cierto, pues obviamente la integrabilidad de la EVN no implica la integrabilidad completa del sistema hamiltoniano.

El método para aplicar el teorema 2.2 a un sistema hamiltoniano es el siguiente.

1. Seleccionar una curva integral particular Γ
2. Escribir la ecuación variacional (EV) (o la ecuación variacional normal (EVN))
3. Hallar la componente identidad, G^0 del grupo de Galois diferencial de la EVN (o de la EV) y ver si es abeliana.

Actualmente existen grupos de investigación que están aplicando este método para detectar no integrabilidad, entre ellos el grupo *Intégrabilité réelle et complexe en Mécanique Hamiltonienne*, véase la página <http://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/ANR/ANR-html/main.html> y un grupo de investigadores en Polonia. De la misma manera, existe material en castellano^{1,2} que puede ser útil al lector novato de habla hispana.

3. Ejemplo

En mi monografía¹⁰ y en el preprint en castellano¹ hay varios ejemplos en donde se aplica el teorema, uno de ellos es el *problema de los tres*

cuerpos de Sitnikov con excentricidad uno (órbita de colisión triple) y que presentamos a continuación.

3.1. El Problema de los tres cuerpos de Sitnikov

El sistema de Sitnikov es una restricción al problema de los tres cuerpos dada por una configuración muy simétrica: los primarios con masas iguales m se mueven en elipses de excentricidad e en el plano XY alrededor de sus centros de masa O , mientras el tercer cuerpo infinitesimal se mueve a lo largo del eje OZ perpendicular al plano donde los primarios se mueven.

Tomamos, de manera usual, la normalización de unidades, de tal forma que $m = 1$, el periodo de los primarios es 2π y la constante gravitacional es igual a 1.

El hamiltoniano correspondiente al movimiento de la partícula infinitesimal a lo largo del eje OZ de este problema es

$$H(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2} - \frac{1}{(z^2 + r^2(t))^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

y la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{(z^2 + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (3)$$

siendo $r(t)$ la distancia de una de los primarios al centro de masas O .

Escogemos como nuevo tiempo la *anomalía excéntrica* τ . La transformación es dada por la ecuación de Kepler

$$t = \tau - e \sin \tau, \text{ y por lo tanto } dt = (1 - e \cos \tau) d\tau$$

entonces la ecuación (3) se transforma en

$$\frac{dz}{d\tau} = (1 - e \cos \tau)v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{(1 - e \cos \tau)z}{(z^2 + r^2(\tau))^{\frac{3}{2}}}, \quad r(\tau) = \frac{1 - e \cos \tau}{2}. \quad (4)$$

Consideramos el caso en que $e = 1$ y la distancia de una de los primarios al centro de masas O es $r(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{2}$. Con estas condiciones se denomina *órbita de colisión triple*.

El hamiltoniano correspondiente a este caso es el mismo de la ecuación (2) y la ecuación de movimiento del tercer cuerpo está dada por la ecuación (3), la cual se transforma en

$$\frac{dz}{d\tau} = (1 - \cos \tau)v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{(1 - \cos \tau)z}{(z^2 + r^2(\tau))^{\frac{3}{2}}}, \quad r(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{2}. \quad (5)$$

Aplicamos el teorema de Morales-Ramis

1. Como curva integral particular Γ tomamos la órbita de la colisión triple con $e = 1$, $r(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{2}$, $z = v = 0$.
2. La ecuación variacional EV a lo largo de Γ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \cos \tau \\ -\frac{8}{(1 - \cos \tau)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Sustituyendo, transformamos este sistema en la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} - \frac{\sin \tau}{1 - \cos \tau} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{8}{1 - \cos \tau} \xi = 0. \quad (7)$$

Para que la ecuación (7) tenga coeficientes racionales hacemos la transformación $x = \frac{\cos \tau}{2} + 1$. Así obtenemos

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \left(\frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x-1} \right) \frac{d\xi}{dx} + 4 \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} \right) \xi = 0. \quad (8)$$

Se pueden aplicar varios métodos para hallar el grupo de Galois de la ecuación (8), uno de ellos es el *algoritmo de Kovacic*,¹ o de otro modo, se tiene que la ecuación (8) corresponde a una *ecuación de Riemann*¹⁰ (también conocida como *ecuación hipergeométrica generalizada*) con tres puntos singulares que son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = \infty$. Los resultados conocidos sobre la ecuación de Riemann permiten ver fácilmente que la ecuación (8) no tiene soluciones Liouvillianas (Ver [10, §5]).

3. El grupo de Galois de la ecuación (8) es *conexo* y es exactamente $SL(2, \mathbb{C})$, es decir $SL(2, \mathbb{C}) = G^0$. La componente identidad G^0 del grupo de Galois de la ecuación (7) es la misma que la de la ecuación (8), pero $SL(2, \mathbb{C})$ no es soluble^{10,16} y por lo tanto no es abeliana, así que G^0 no es abeliana. De lo anterior se concluye que el sistema hamiltoniano inicial X_H correspondiente al problema de los tres cuerpos de Sitnikov con

órbita de colisión triple (ecuación (2)) no es completamente integrable con integrales primeras meromorfas.

Recientemente se ha aplicado un problema inverso en el teorema de Morales-Ramis para construir familias de Hamiltonianos no integrables.²

Bibliografía

1. P. ACOSTA-HUMÁNEZ, *La teoría de Morales-Ramis y el algoritmo de Kovacic*, preprint.
2. P. ACOSTA-HUMÁNEZ & D. BLÁZQUEZ-SANZ, *Non-Integrability of some hamiltonians with rational potentials*, preprint
3. P. ACOSTA-HUMÁNEZ & J.H. PÉREZ, *Una Introducción a la Teoría de Galois Diferencial*, Boletín de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia **11**, (2004), 138–149.
4. V. I. ARNOLD, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, New York, 1980.
5. R. C. CHURCHILL, D. L. ROD & M. F. SINGER, *Group-theoretic obstructions to integrability*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **15** (1995), p. 15-48.
6. G. W. HILL, *Researches in the Lunar theory*, American Journal of Mathematics **1** (1878), p. 5-6, 129-147, 245-260.
7. J. HUMPHREYS, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, 1981.
8. E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, Nova York, 1956.
9. E. MELETIDOU, S. ICHTIAROGLOU & F. J. WINTERBERG, *Non-integrability of Hill's Lunar Problem*, Celestial Dynamics and Dynamical Astronomy **80** (2001), p. 145-156.
10. J. J. MORALES-RUIZ, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhäuser, Basel 1999.
11. J. J. MORALES-RUIZ & J. P. RAMIS, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, I*, Methods and Applications of Analysis **8** (2001), p. 33-96.
12. J. J. MORALES-RUIZ & J. P. RAMIS, C. SIMÓ, *Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Groups of Higher Variational Equations*, to appear.
13. S. T. SADETOV, *On algebraic integrals of Hill Problem and Restricted Circle Plane Three-Body Problem on a level of energy* (current title), preprint.
14. C. SIMÓ, *An overview on some problems in Celestial Mechanics*, included in “Iniciación a los sistemas dinámicos”, Cursos de Verano, Universidad Complutense de Madrid, El Escorial, 1997. Available at <http://www-ma1.upc.es/escorial/index.html>.
15. C. SIMÓ & T. J. STUCHI, *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the Planar Hill Problem*, Physica **D140** (2000), p. 1–32.
16. M. F. SINGER & M. VAN DER PUT, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume **328**, Springer, 2003.

17. E. L. STIEFEL & G. SCHEIFELE, *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1971.
18. V. G. SZEBEHELY, *Theory of orbits*, Academic Press, New York, 1967.
19. E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940.
20. S. L. ZIGLIN, *Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics. I.*, *Functional Analysis and Applications*, **16** (1982), p. 181-189.