

EL DIAMETRO DE CIERTOS DIGRAFOS  
CIRCULANTES DE TRIPLE PASO

P. Morillo, M.A. Fiol

ABSTRACT

*This paper studies some diameter-related properties of the 3-step circulant digraphs with set of vertices  $V = \mathbb{Z}_N$  and steps  $(\pm a, b)$ . More precisely, it concentrates upon maximizing their order  $N$  for any fixed value of their diameter  $k$ . In the proposed geometrical approach, each digraph is fully represented by a T-shape tile which tessellates periodically the plane. The study of these tiles leads to the optimal solutions.*

1. Introducción.

Recordemos primero algunos conceptos básicos sobre digrafos que se utilizan en este trabajo. Ver, por ejemplo, [1].

Un grafo dirigido o digrafo  $D=(V,A)$  está formado por un conjunto finito (no vacío)  $V$  de vértices y un conjunto  $A$  de arcos o pares ordenados de vértices distintos. Si  $[i,j]$  es un elemento de  $A$ , diremos que  $i$  es adyacente hacia  $j$  y que  $j$  es adyacente desde  $i$ .

El número de vértices adyacentes hacia un vértice  $i$  es el

grado de entrada  $d^-(i)$  y el número de vértices adyacentes desde  $i$  es el grado de salida  $d^+(i)$ . Un digrafo se llama d-regular si  $\forall i \in V, d^+(i) = d^-(i) = d$ .

La distancia de  $i$  a  $j$ ,  $d(i, j)$ , es el número mínimo de arcos de un camino dirigido de  $i$  a  $j$ . El diámetro  $k$  de un digrafo es el máximo de las distancias entre pares de vértices del digrafo.

Se define el orden de un digrafo como el cardinal del conjunto  $V$  (número de vértices).

Sean  $a_1, \dots, a_d, N$ , enteros positivos tales que  $N \geq 2$  y los  $a_k$ 's (llamados pasos) son distintos y satisfacen  $1 \leq a_k \leq N-1$ . En el digrafo d-circulante, que denotamos  $D_N(a_1, a_2, \dots, a_d)$ , los vértices se identifican con los elementos de  $Z_N$ -anillo de enteros módulo  $N$  — y existe un arco desde el vértice  $i$  al  $j$  si y solo si  $j = i + a_k$  para algún  $k, 1 \leq k \leq d$ .

Los digrafos d-circulantes son, evidentemente, d-regulares y también han sido considerados con otras denominaciones tales como "de lazo múltiple" o "de paso fijo", en el contexto del estudio de topologías para redes de interconexión [2], [5] - [7]. En la referencia [2] puede encontrarse un breve análisis cronológico del tema en el caso de digrafos de doble lazo (2-circulantes). En general, un digrafo d-circulante puede asociarse, de forma natural, a una teselación del espacio euclídeo d-dimensional  $R^d$ . Esta teselación caracteriza completamente al digrafo y facilita el estudio de algunas de sus características, en particular las relacionadas con la distancia entre vértices. Ver referencias [2] a [6].

En este trabajo consideramos una familia de digrafos 3-circulantes que, debido a que dos de los pasos son opuestos, admiten una representación mediante teselaciones del plano euclideo  $R^2$ .

## 2. Digrafos 3-circulantes.

Consideramos el digrafo 3-circulante  $D_N(\pm a, b)$ , con  $1 \leq a \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ . En la Figura 1 se muestra  $D_7(1, 3)$ , donde las líneas representan

pares de arcos opuestos.

Básicamente, se consideran los dos problemas siguientes:

a) Maximizar el orden  $D_N(\pm a, b)$  para cualquier valor dado del diámetro.

b) Minimizar el diámetro para cada valor del orden  $N$ .

Ambas cuestiones tienen interés práctico por cuanto valores reducidos del diámetro del digrafo implican mínimos retrasos de transmisión en la correspondiente red de interconexión, [2].

El método desarrollado en esta sección, basado en las baldosas que teselan el plano, permite resolver completamente a) -secciones 3,4,5- y dar resultados parciales para b) -sección 6-.

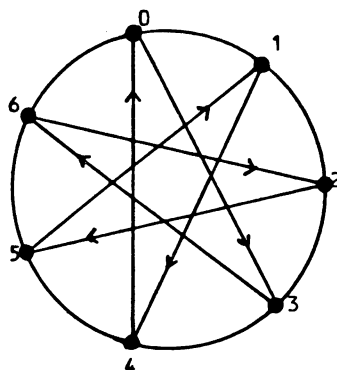


Fig. 1

Debido a la simetría del digrafo, podemos estudiar su diámetro desde cualquier vértice. Lo haremos desde el 0.

Desde este vértice, en un paso alcanzamos los vértices  $\pm a$  y  $b$  mod  $N$ ; en dos pasos  $\pm 2a$ ,  $\pm a+b$ ,  $2b$  mod  $N$ ; en tres pasos  $\pm 3a$ ,  $\pm 2a+b$ ,  $\pm a+2b$ ,  $3b$  mod  $N$ , y así sucesivamente.

Entonces, el orden máximo en un digrafo con diámetro  $k$  sería

$$N = 1+3+5+7+\dots+(2k+1) = (k+1)^2$$

si los números  $ma+nb$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$  y  $|m|+n \leq k$  fuesen todos distintos módulo  $N$ .

Observemos que una condición necesaria y suficiente para alcanzar todos los vértices desde el 0 es  $(a, b, N) = 1$ .

En efecto, si  $(a, b, N) = r \neq 1$  sólo podremos alcanzar los vértices que son múltiplos de  $r$ . Recíprocamente, si  $(a, b, N) = 1$  existen enteros  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tales que  $\alpha a + \beta b + \gamma N = 1$ , es decir,  $\alpha a + \beta b = 1 \pmod N$  y por tanto existirán enteros  $\alpha'$  y  $\beta'$ , con  $0 \leq \alpha', \beta' \leq N-1$  tales que  $\alpha' a + \beta' b = 1 \pmod N$ . Entonces el vértice 1, y en consecuencia todos los demás, puede alcanzarse desde el 0.

Los vértices que alcanzamos sucesivamente a partir de 0 pueden situarse en el plano tal como muestra la Figura 2

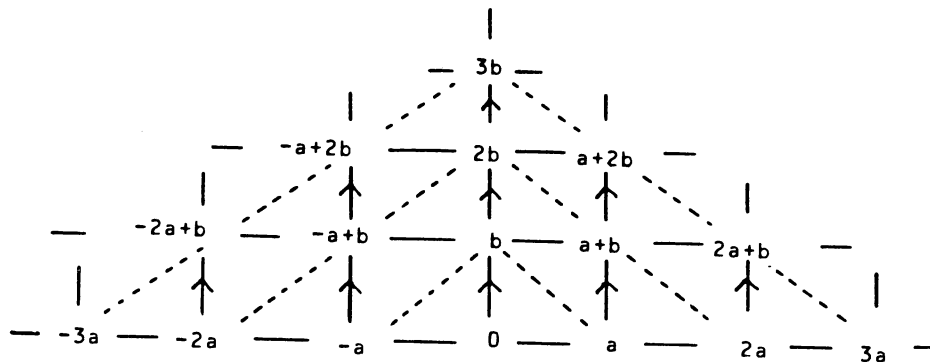


Fig. 2

Como consecuencia de esta representación observamos dos propiedades de tipo geométrico:

1. Periodicidad. Consideremos el plano dividido en cuadrados igua

les, numerados como indica la Figura 2, situando el 0 en uno cualquiera de ellos. Cada cuadrado contiene un número entre 0 y  $N-1$  y la distribución de estos números en el plano se repite periódicamente.

En la Figura 3 vemos un ejemplo con  $N=13$ ,  $a=1$  y  $b=9$ .

10	11	12	0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
9	10	11	12	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
8	9	10	11	12	0	1	2	3	4

Fig. 3

2. Teselación. Supongamos  $(a,b,N)=1$  y formemos una baldosa con  $N$  cuadrados cualesquiera numerados de 0 a  $N-1$ . Esta baldosa tesela periódicamente (por traslaciones) el plano; para ello basta colocar el cuadrado de la baldosa numerado con el 0 sobre todos los cuadrados del plano numerados con el 0. En la Figura 3 se muestra una posible teselación.

Como consecuencia de estas observaciones, se deduce que la cota  $N=(k+1)^2$  no es alcanzable para  $k>1$ , ya que la correspondiente baldosa no tesela (por traslaciones) el plano, como se muestra en la Figura 4 para  $k=3$ .

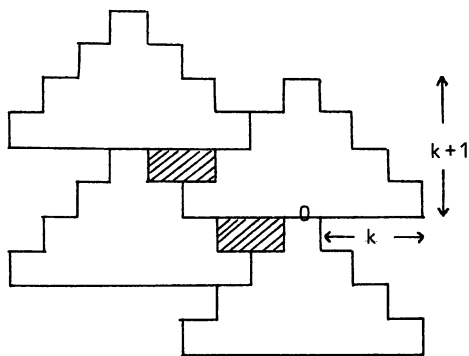


Fig. 4

Además, en este contexto, los problemas planteados se reducen a construir baldosas que teselen el plano y correspondan a digrafos con orden máximo para un diámetro dado (problema a) o mínimo diámetro fijado el orden (problema b)). Para tal fin veremos, en la siguiente sección, que cada digrafo  $D_N(\pm a, b)$  tiene asociada una baldosa en forma de T, lo que permite restringir el estudio a dichas formas canónicas.

### 3. Forma de las baldosas

Suponiendo  $(a, b, N) = 1$ , para construir la baldosa asociamos con un cuadrado numerado con el 0 los cuadrados numerados de 1 a  $N-1$  que estén a la menor distancia posible de él.

Demostraremos que siempre es posible hacer esta construcción de modo que la baldosa obtenida tenga la forma mostrada en la Figura 5, donde  $m, m', n, n' \geq 0$  y  $l, l' > 0$ .

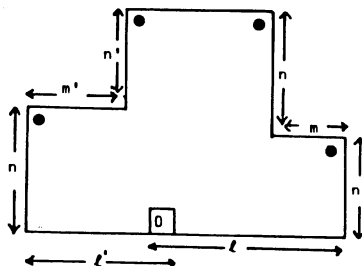


Fig. 5

El método de formación de la baldosa se basa en el propuesto por Wong y Coppersmith en [6].

En el semiplano superior ( $y \geq 0$ ) del plano euclideo, procedemos a llenar los puntos reticulares  $(x, y \in \mathbb{Z})$  con los vértices alcanzados desde el 0 en 0 pasos, 1 paso, 2 pasos, etc. En el punto reticular  $(x, y)$  colocamos el valor  $r$  determinado por la ecuación  $xa+by=r \pmod N$ ; por tanto el vértice  $r$  se alcanza en  $|x|+y$  pasos.

Realizamos el proceso empezando en el origen  $(0,0)$  y recorriendo sucesivamente, de derecha a izquierda, las líneas  $\{(x, y) / |x| + y = d\}$ ,  $d=1,2,3,\dots$ . Ver Figura 6.

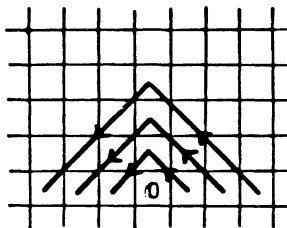


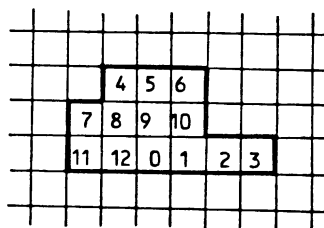
Fig. 6

En cada punto  $(x, y)$ , si el valor  $r$  todavía no ha aparecido lo escribimos, en caso contrario lo dejamos en blanco. Acabamos cuando hemos encontrado todos los valores de  $r$ ,  $r=0,1,\dots,N-1$ .

Veamos que la baldosa así construida tiene la forma indicada.

Observemos que con esta construcción, si  $(x_0, y_0)$  está en blanco y  $x_0 > 0$  [ resp.  $x_0 < 0$  ] entonces todos los puntos reticulares del conjunto  $\{(x, y) / x \geq x_0, y \geq y_0\}$  [ resp.  $\{(x, y) / x \leq x_0, y \geq y_0\}$  ] también están en blanco. Análogamente, si  $(0, y_0)$  está en blanco todos los puntos en  $\{(x, y) / y \geq y_0\}$  están en blanco.

Por ejemplo, en la Figura 7 el punto  $(2, 1)$ , que tiene asignado el valor 11, está en blanco ya que  $(-2, 0)$  tiene el mismo valor. Entonces  $(2, 2)$  también estará en blanco por tener asignado el mismo valor que  $(-2, 1)$ .



$N=13, a=1, b=9$

Fig. 7

En general, cuando dos puntos reticulares  $(x,y), (x',y')$  tengan asignado el mismo valor, es decir,  $xa+yb=x'a+y'b \pmod N$ , diremos que son congruentes y escribiremos

$$(x,y) \equiv (x',y')$$

En consecuencia la baldosa tiene la forma mostrada en la Figura 8.

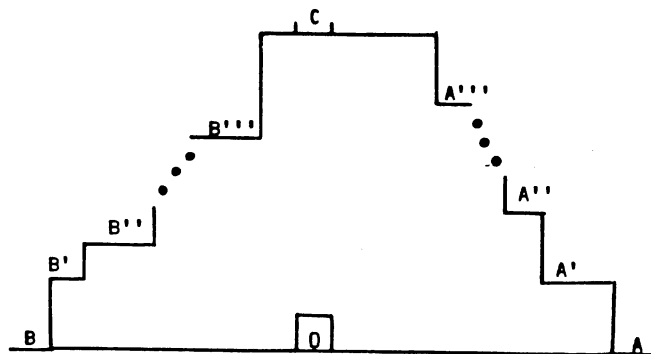


Fig. 8

Sea  $A=(\ell,0)$  el primer punto en blanco en el semieje positivo de las  $x$ 's. Entonces existen  $p,q \in \mathbb{Z}$  tales que  $|p|+q < \ell$  y  $pa+qb = \ell a \pmod N$ . Supongamos  $p > 0$  y consideremos el punto  $(\ell-1,0)$ , se cumpliría  $(p-1)a+qb = (\ell-1)a \pmod N$  y  $(p-1)+q < \ell-1$ ; por tanto el punto  $(\ell-1,0)$  estaría en blanco, lo que contradice la elección de  $p > 0$ .



En consecuencia, redefiniendo  $p$  como  $-p$ ,

$$(\ell, 0) \equiv (-p, q), \quad |p| + q < \ell, \quad p \geq 0 \quad (1)$$

Análogamente, si  $B = (-\ell', 0)$  es el primer punto en blanco en el semieje negativo de las  $x$ 's, se tiene:

$$(-\ell', 0) \equiv (p', q'), \quad |p'| + q' \leq \ell', \quad p' \geq 0 \quad (2)$$

Sea ahora  $C = (0, h)$  el primer punto en blanco en el eje  $y$ . Existen  $r, s \in \mathbb{Z}$  tales que  $|r| + s \leq h$  y  $ra + sb = hb \pmod{N}$ . Si suponemos  $s > 0$  tendríamos  $|r| + s - 1 \leq h - 1$  y  $ra + (s - 1)b = (h - 1)b \pmod{N}$ ; entonces  $(0, h - 1)$  estaría en blanco, lo que contradice la elección de  $C$ . Por tanto:

$$(0, h) \equiv (r, 0), \quad |r| \leq h \quad (3)$$

Con un razonamiento similar se deduce que, para que en la baldosa no se produzcan repeticiones, cada uno de los puntos  $A', A''', A''''', \dots$  ha de ser congruente con  $(-\ell' + 1, 0)$ ; esto implica que existe como máximo un punto en blanco  $A'$ , ya que en caso contrario los puntos  $A' - (1, 0), A'' - (1, 0), \dots$  serían congruentes. Además se cumple que  $A' = (p', q') + (1, 0)$ .

De forma análoga existe como máximo un punto en blanco  $B'$ , con  $B' \equiv (\ell - 1, 0)$  y  $B' = (-p, q) + (-1, 0)$ .

En base a estos razonamientos, se deduce que la forma de la baldosa es la mostrada en la Figura 9.

Por último, para ver que la baldosa tiene la forma representada en la Figura 5 sólo falta demostrar que:

$$h = q + q' \quad (4a)$$

ó

$$q = q' = 0 \quad (\Leftrightarrow \ell - p' = \ell' - p = 1) \quad (4b)$$

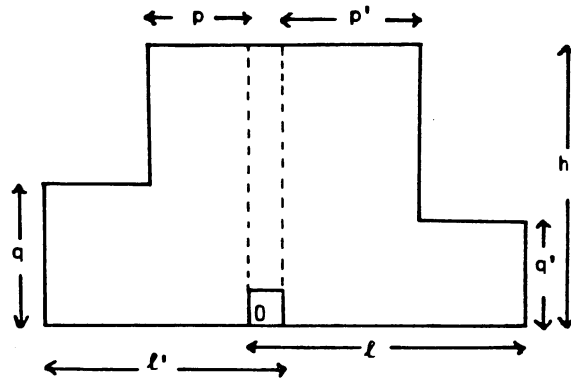


Fig. 9

Sumando las expresiones (1) y (2) se tiene  $(l-l', 0) \equiv (-p+p', q+q')$  o, equivalentemente,

$$(l-l'+p-p', 0) \equiv (0, q+q') \tag{5}$$

Según la expresión (3),  $(0, 0) \equiv (r, -h)$ , que sumado a (5) da

$$(l-l'+p-p', 0) \equiv (r, q+q'-h) \tag{6}$$

Ahora, el punto  $(l-l'+p-p', 0) = ((l-p') - (l'-p), 0)$  está dentro de la baldosa ya que

$$-l' < -(l'-p) < (l-p') - (l'-p) < l-p' < l$$

Si  $q+q'-h \geq 0$ , el punto  $(r, q+q'-h)$  también está dentro de la baldosa ya que, trivialmente,  $-l' < r < l$  y  $0 \leq q+q'-h \leq \min\{q, q'\}$ . Entonces, como en la baldosa no hay repeticiones, la congruencia (6) ha de ser una igualdad y por tanto se verifica (4a).

Si  $q+q'-h < 0$ , el punto  $(0, q+q')$  está en la baldosa y razonando como en el caso anterior, (5) implica (4b). Además es fácil

comprobar que en este caso  $l=l'$ .

#### 4. Obtención de los pasos.

Según hemos visto, basta considerar baldosas en forma de T. Entonces el problema a) puede descomponerse en dos partes:

- 1) Fijado el diámetro  $k$ , hallar la baldosa en forma de T con máxima área (=número de cuadrados unitarios).
- 2) Para cada baldosa obtenida en 1) hallar, si existen, los pasos  $a$  y  $b$  que puedan "generarla".

(análogamente para el problema b)).

Por ser la parte 2) común a ambos problemas, empezamos por ella y, en esta sección, resumimos el método, junto con los resultados teóricos, que permite obtener los pasos  $a$  y  $b$  asociados a una baldosa de dimensiones  $m, m', n, n', l, l'$ . Ver [2] y [7].

La teselación del plano producida por una baldosa dada determina la posición relativa de los cuadrados numerados con el 0, ver Figura 10. Recíprocamente, dada una posición de los "ceros", incluso si existen varias baldosas que la determinan, todas pueden obtenerse con los mismos pasos  $a$  y  $b$ .

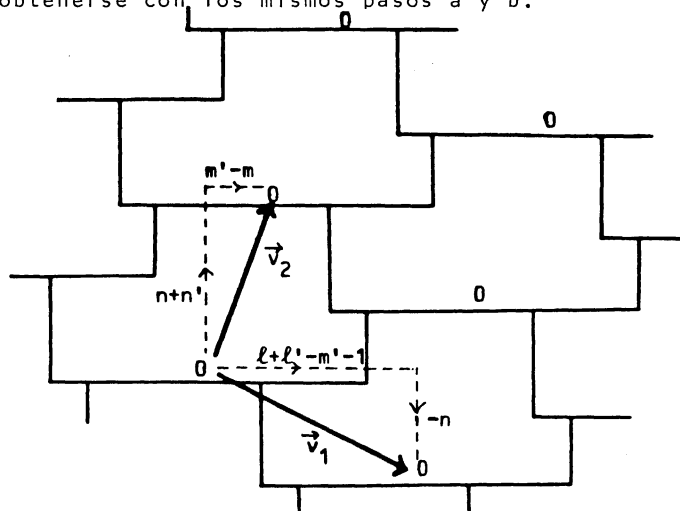


Fig. 10

Para obtener una distribución de "ceros" dada, basta expresar el efecto nulo de las traslaciones a lo largo de un par de vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  que generen esta distribución, es decir, que sean una base del retículo. Eligiéndolos como en la Figura 10, y denotando  $h=n+n'$  y  $t=l+l'-1$ , se tiene:

$$\begin{cases} (t-m')a-nb = 0 & \text{mod } N \\ (m'-m)a+hb = 0 & \text{mod } N \end{cases} \quad (7)$$

Este sistema tiene soluciones no triviales ya que el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = h(t-m')+n(m'-m) = N = 0 \quad \text{mod } N$$

Entonces, para obtener unos pasos asociados a una baldosa dada, se han de hallar soluciones de (7) que cumplan

$$(a,b,N) = 1 \quad (8)$$

Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para que existan unos pasos  $a$  y  $b$  que verifiquen (8) es

$$(t-m',n,m'-m,h) = 1$$

Además, si  $a$  y  $b$  generan una baldosa entonces  $\lambda a$  y  $\lambda b$ , con  $1 \leq \lambda < N$  y  $(\lambda,N)=1$ , también son pasos asociados a dicha baldosa, pues trivialmente cumplen (7) y (8). Por tanto si una baldosa puede generarse, existen al menos  $\psi(N)$  pares de pasos válidos, donde  $\psi$  es la función de Euler. De hecho se demuestra que existen exactamente  $\psi(N)$  pares de pasos.

##### 5. Baldosa óptima (orden máximo)

Volviendo al primer problema planteado (problema a)), y según el punto 1) de la sección anterior, interesa conocer ahora

cuáles son las baldosas que corresponden a digrafos con orden máximo para valores dados del diámetro  $k$ .

Los vértices de la baldosa que están a mayor distancia del 0 son los situados en las esquinas señaladas de la Figura 5, así dicho parámetro viene dado por

$$k = \max(\ell+n'-2, h+\ell-m-2, \ell'+n-2, h+\ell'-m'-2)$$

El problema considerado equivale pues a hallar la baldosa que tenga área máxima para dicho valor de  $k$ .

Observemos primero que una condición necesaria para maximizar el area es que las cuatro esquinas señaladas estén a distancia  $k$ , tal como se muestra en la Figura 11.

Por tanto se ha de verificar:

$$\begin{cases} m = n \\ m' = n' \end{cases} \quad \begin{cases} \ell+n'-2 = k \\ \ell'+n-2 = k \end{cases}$$

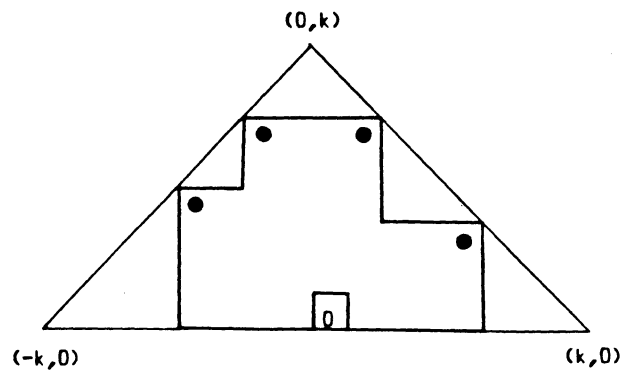


Fig. 11

Consideremos una versión continua del problema. Dados  $h, t, n$  reales positivos, se ha de maximizar la función

$$N = h(t-m') + n(m'-m) = ht - h^2 - 2n^2 + 2hn,$$

con la condición  $k = \frac{t+h-3}{2}$  constante.

Por el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene el máximo de  $N$  para  $h=2n = \frac{t}{2}$ .

Entonces, para cada valor de  $k$ , el valor máximo de  $N$  se obtendría para  $n = \frac{k}{3} + \frac{1}{2}$ ,  $t = \frac{4k}{3} + 2$  y  $h = \frac{2k}{3} + 1$ , y sería  $N = (\frac{2k}{3} + 1)(k + \frac{3}{2})$ . Como sólo nos interesan valores enteros, el número máximo de vértices de un digrafo con diámetro  $k$  sería

$$N = \left\lfloor \left( \frac{2k}{3} + 1 \right) \left( k + \frac{3}{2} \right) \right\rfloor$$

Para demostrar que esta cota es alcanzable, distinguimos tres casos:

$$\text{a) } \underline{k=3s} \quad N = \left\lfloor (2s+1) \left( 3s + \frac{3}{2} \right) \right\rfloor = 6s^2 + 6s + 1$$

Se puede obtener una baldosa con  $k=3s$  y área  $N=6s^2+6s+1$  tomando dimensiones

$$m'=n'=s, \quad m=n=s+1, \quad l=2s+2, \quad l'=2s+1$$

Además, utilizando los resultados de la Sección 4, se deduce que unos pasos asociados a esta baldosa son  $a=1$  y  $b=6s+3$ .

$$\text{b) } \underline{k=3s-1} \quad N = \left\lfloor \left( \frac{2}{3}(3s-1)+1 \right) \left( 3s-1 + \frac{3}{2} \right) \right\rfloor = 6s^2 + 2s$$

Esta baldosa es construible con dimensiones

$$m=m'=n=n'=s, \quad l=l'=2s+1$$

y pasos

$$a=s, \quad b=3s+1$$

$$c) \quad \underline{k=3s-2}$$

$$N = \left| \left( \frac{2}{3}(3s-2)+1 \right) \left( 3s-2 + \frac{3}{2} \right) \right| = 6s^2 - 2s$$

Esta baldosa es construible con dimensiones

$$m=m'=n=n'=s, \quad l=l'=2s$$

y pasos

$$a=s, \quad b=3s-1.$$

## 6. Diámetro mínimo.

Por lo que respecta al problema b), en estos digrafos el diámetro no crece siempre con el número de vértices. Por ejemplo para  $N=72$  el diámetro mínimo es  $k=10$  y para  $N=73$  es  $k=9$ . Por tanto no se puede dar una fórmula cerrada para el diámetro mínimo de un digrafo con  $N$  vértices.

Sin embargo, utilizando la téselación, es posible resolver el problema de minimizar el diámetro para algunas familias determinadas. En la tabla I damos resultados obtenidos para algunos valores de  $N$  comprendidos entre  $6s^2+5s+1$  y  $6s^2-5s$ .

N	m	m'	n	n'	ℓ	ℓ'	k	a	b
$6s^2 + 5s + 1$	s	s	s+1	s	2s+1	2s+1	3s	1	6s+2
$6s^2 + 5s$	s+1	s-1	s+1	s	2s+2	2s	3s	1	6s+2
$6s^2 + 4s + 1$	s-1	s	s+1	s	2s	2s+1	3s	1	6s+1
$6s^2 + 4s$	s	s-1	s+1	s	2s+1	2s	3s	1	6s+1
$6s^2 + 3s + 1$	s-2	s	s+1	s	2s-1	2s+1	3s	1	6s
$6s^2 + 3s$	s-1	s-1	s+1	s	2s	2s	3s	1	6s
$6s^2 + 2s + 1$	s-3	s	s+1	s	2s-2	2s+1	3s	1	6s-1
$6s^2 + s$	s	s-1	s	s	2s+1	2s	3s-1	s	3s+1
$6s^2$	s	s-2	s	s	2s+1	2s-1	3s-1	s	3s+1
$6s^2 - s$	s	s-3	s	s	2s+1	2s-2	3s-1	s	3s+1
$6s^2 - 3s$	s	s-1	s	s	2s	2s-1	3s-2	s	3s+1
$6s^2 - 4s$	s	s-2	s	s	2s	2s-2	3s-2	s	3s+1
$6s^2 - 5s + 1$	s	s	s-1	s	2s	2s	3s-2	1	6s-2
$6s^2 - 5s$	s	s-3	s	s	2s	2s-3	3s-2	s	3s-1

TABLA 1



Referencias.

- [1] G. CHARTRAND y L. LESNIAK, "Graphs and Digraphs", 2nd edition, Wadsworth & Brooks / Cole Math. Ser., Monterey, 1986.
- [2] M. A. FIOL, J.L.A. YEBRA, I. ALEGRE y M. VALERO. "An optimization problem in local networks and data alignment", IEEE Trans. Comput., vol C-36, n.6, 1987, pp. 702-713.
- [3] J.L.A. YEBRA, M.A. FIOL, P. MORILLO y I. ALEGRE, "The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations", Ars Combinatoria, 20-B, 1985, pp. 159-171.
- [4] P. MORILLO, M.A. FIOL y J. FABREGA, "The diameter of directed graphs associated to plane tessellations", Ars Combinatoria, 20-A, 1985, pp. 17-27.
- [5] J.C. BERMOND, G. ILLIADES y C. PEYRAT, "An optimization problem in distributed loop computer networks", the third Int. Conf. On Comb. Math., New York, June 1985.
- [6] C.K. WONG y DON COPPERSMITH, "A combinatorial problem related to multimodule memory organizations", Journal of the Association for Computing Machinery, vol 21, n.3, July 1974, pp. 392-402.
- [7] M.A. FIOL, "Aplicaciones de la teoria de grafos al diseño de redes de interconexión de multiprocesadores", Tesis Doctoral, Universidad Politècnica de Catalunya, 1982.

Manuscript received in  
September 23, 1986 and  
in final form July 21,  
1987.

Departament de Matemàtiques  
E.T.S.E. de Telecomunicació  
Universitat Politècnica de  
Catalunya.  
BARCELONA (SPAIN).

