

Comunicaciones II

Tema 5

Modulaciones Avanzadas (Espectro Ensanchado y Multiportadora)

Javier Rodríguez Fonollosa



Departament de Teoria
del Senyal i Comunicacions



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Indice del Tema 5

Modulaciones Avanzadas (Espectro Ensanchado y Multiportadora)

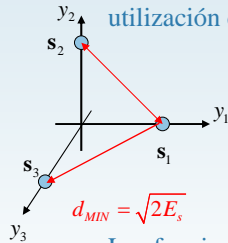
- **5.1 Esquemas de multiplexado por división en frecuencia ortogonal (OFDM)**
- **5.2 Esquemas de múltiple acceso por división en código (CDMA)**



5.1 Esquemas de multiplexado por división en frecuencia ortogonal (OFDM):

Introducción

- La modulación FSK ortogonal se podía interpretar como una modulación M -ortogonal: Cada símbolo se correspondía con la utilización de un único elemento de la base ortonormal:



$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E_s} \end{pmatrix}$$

- Las funciones base mantienen su ortogonalidad con independencia de la fase relativa entre ellas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \delta[m-n] \Rightarrow 2\pi\Delta f T = N2\pi \Rightarrow \Delta f_{\min} = \frac{1}{T}$$

- Pueden plantearse constelaciones más complejas en esta base? Se aplicará la idea de repartición de bits en cada dimensión asignando un símbolo QAM a cada elemento de la base

10/11/2006

COM II

T5-3

Introducción (II)

Complejos

- El equivalente paso bajo de la señal transmitida toma la forma:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{[n]}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{s}_{mk[n]} \varphi_k(t - nT)$$

- Las coordenadas de los elementos de la base son símbolos complejos QAM que contienen b_k bits cada uno (repartidos entre la parte real y la imaginaria):

$$s_{mk} = i_{mk} + jq_{mk} ; \quad m \in \{1, \dots, M_k\} ; \quad b_k = \log_2 M_k$$

- Definiendo $b = \sum_{k=0}^{N-1} b_k$

la señal $s_{[n]}(t)$ contiene un total de b bits que se transmiten en un periodo de símbolo T (símbolo OFDM)

- Equivale a N modulaciones QAM (que pueden tener distintas constelaciones) en paralelo.

10/11/2006

COM II

T5-4

Introducción (III)

- Finalmente nos interesará que las señales $s_{m[n]}(t)$ no se solapen en el tiempo cuando el canal presente dispersión temporal

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{[n]}(t)$$

$$r(t) = s(t) * h(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{[n]}(t) * h(t) + w(t)$$

- Se utilizará un periodo de guarda (o prefijo cíclico) de duración T_{cp} superior a la duración de la respuesta impulsional del canal evitándose de esta forma la interferencia intersimbólica (ISI).
- Si se cumple esta condición:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{[n]}(t) * h(t) + w(t) = s_{[m]}(t) * h(t) + w(t) \quad ; \quad t \in [mT + T_{cp}, (m+1)T]$$

Modelo de señal OFDM continuo

- Las funciones base siguen la siguiente expresión (en banda base):

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \exp\left(j2\pi \frac{k}{T-T_{cp}}(t-T_{cp})\right) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad ; \quad k \in \{0, \dots, N-1\}$$

$$\operatorname{Re}\{\varphi_k(t)\} = \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \cos\left(2\pi \frac{k}{T-T_{cp}}(t-T_{cp})\right) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

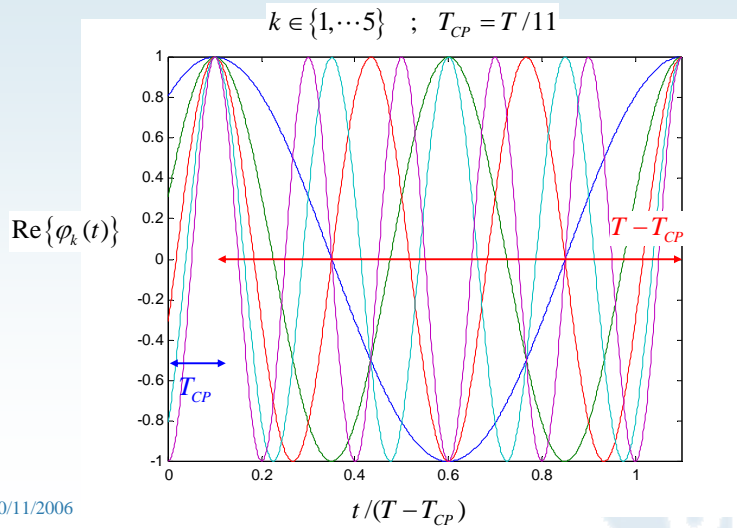
$$\operatorname{Im}\{\varphi_k(t)\} = \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{k}{T-T_{cp}}(t-T_{cp})\right) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

- Cada una de las funciones base está centrada en la frecuencia $k/(T-T_{cp})$ y tiene un ancho de banda de aproximadamente $2/T$ con pulsos rectangulares $((1+\alpha)/T$ con pulsos de coseno realzado)
- El ancho de banda de transmisión será por tanto el fijado por la función base de mayor frecuencia:

$$B_T = \frac{N-1}{T-T_{cp}} + \frac{1}{T} \approx \frac{N}{T}$$

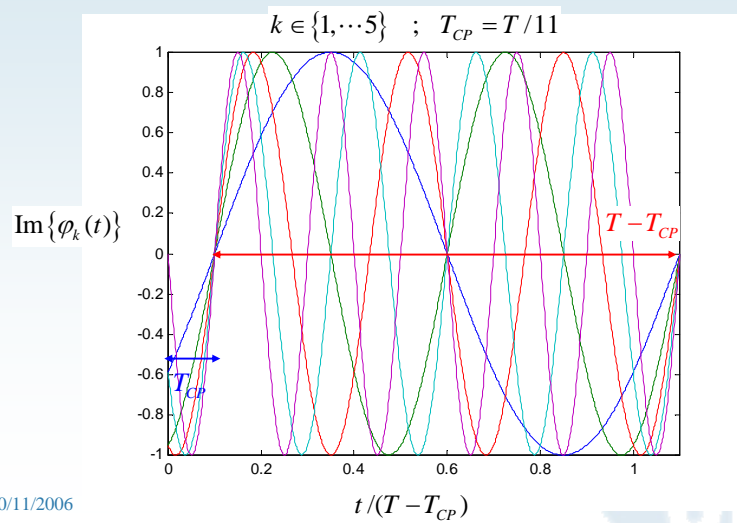
Modelo de señal OFDM continuo (II)

- Representación temporal de cada subportadora: Parte Real



Modelo de señal OFDM continuo (III)

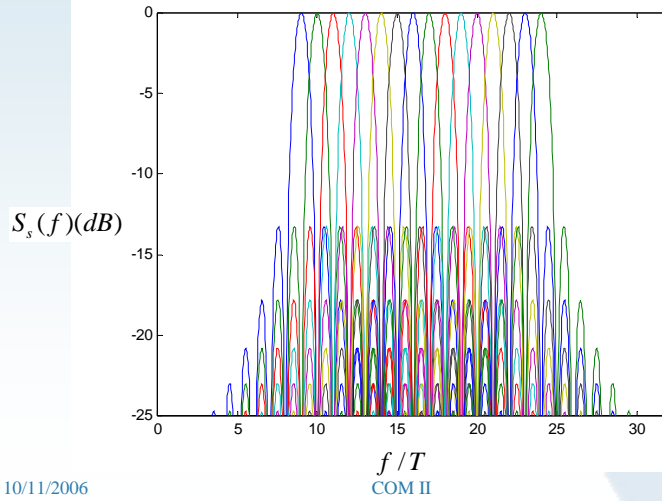
- Representación temporal de cada subportadora: Parte Imaginaria



Modelo de señal OFDM continuo (IV)

- Representación frecuencial (pulso rectangular)

$$N = 16 ; T_{CP} \ll T$$

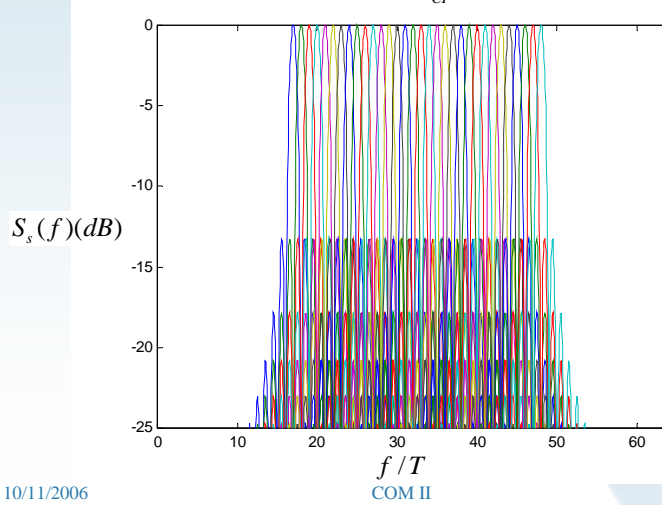


T5-9

Modelo de señal OFDM continuo (V)

- Representación frecuencial (pulso rectangular)

$$N = 32 ; T_{CP} \ll T$$



T5-10

Modelo de señal OFDM discreto

- Una de las características más importantes de esta modulación es la posibilidad de implementarla de forma muy eficiente.
- La señal correspondiente a un símbolo OFDM es:

$$s_{[n]}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_{mk[n]} \varphi_k(t - nT) = \frac{1}{\sqrt{T - T_{CP}}} \sum_{k=0}^{N-1} s_{mk[n]} \exp\left(j2\pi \frac{k}{T - T_{CP}} (t - nT - T_{CP})\right)$$

$$t \in [nT, (n+1)T]$$

- Muestreando en $t = nT + T_{CP} + q \frac{T - T_{CP}}{N}$; $q \in \{0, \dots, N-1\}$

$$S[q] = s_{[n]}(nT + T_{CP} + q \frac{T - T_{CP}}{N}) = \frac{1}{\sqrt{T - T_{CP}}} \sum_{k=0}^{N-1} s_{mk[n]} \exp(j2\pi kq / N) ; q \in \{0, \dots, N-1\}$$

- Esta expresión indica que la señal OFDM en banda base puede generarse a partir de una transformada de Fourier discreta (DFT) de los símbolos QAM de cada función base

10/11/2006

COM II

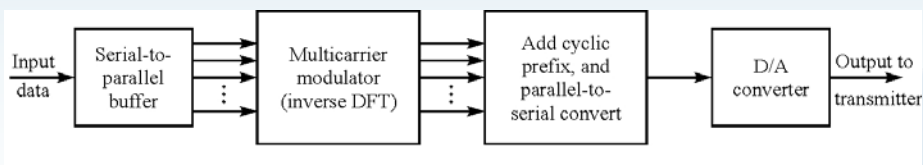
T5-11

Modelo de señal OFDM discreto (II)

- Esta expresión permite una implementación mediante módulos FFT:

$$S[q] = \frac{1}{\sqrt{T - T_{CP}}} \sum_{k=0}^{N-1} s_{mk[n]} \exp(j2\pi kq / N) ; q \in \{0, \dots, N-1\}$$

$$\{S[0], \dots, S[N-1]\} = \frac{N}{\sqrt{T - T_{CP}}} DFT^{-1} \{s_{m0[n]}, \dots, s_{m(N-1)[n]}\}$$



10/11/2006

COM II

T5-12

Receptor OFDM y efecto del canal

- Demostraremos que el receptor OFDM resulta inmune a la dispersión introducida por el canal siempre que se ésta sea inferior al tiempo de guarda (duración del prefijo cíclico). En este caso vimos que la expresión recibida es:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{[n]}(t) * h(t) + w(t) = s_{[m]}(t) * h(t) + w(t) \quad ; \quad t \in [mT + T_{CP}, (m+1)T]$$

- Estudiaremos en primer lugar la distorsión introducida por el canal exclusivamente:

$$y_k(t_n) = y_k((n+1)T) = r(t) * \psi_k(t) \Big|_{t=(n+1)T} = \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) \psi_k((n+1)T - \lambda) d\lambda$$

- El filtro en recepción para la subportadora k será el filtro adaptado a la función base k de duración $T - T_{CP}$:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \varphi_k^*(T-t) & ; \quad t \in [0, T - T_{CP}] \\ 0 & ; \quad t \notin [0, T - T_{CP}] \end{cases}$$

Receptor OFDM y efecto del canal (II)

- Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} y_k(t_n) &= y_k((n+1)T) = \int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T} r(\lambda) \varphi_k^*(T - (n+1)T + \lambda) d\lambda = \\ &= \int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T} (s_{[n]}(\lambda) * h(\lambda)) \varphi_k^*(-nT + \lambda) d\lambda = \int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T} \int_0^{T_{CP}} h(\tau) s_{[n]}(\lambda - \tau) \varphi_k^*(\lambda - nT) d\lambda d\tau = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T} \int_0^{T_{CP}} h(\tau) s_{m[l]} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} \exp\left(j2\pi \frac{l}{T-T_{CP}} (\lambda - \tau - nT - T_{CP})\right) \Pi\left(\frac{\lambda - \tau - nT - T/2}{T}\right)}_{\varphi_l(\lambda - \tau - nT)} \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} \exp\left(-j2\pi \frac{k}{T-T_{CP}} (\lambda - nT - T_{CP})\right)}_{\varphi_k^*(\lambda - nT)} d\lambda d\tau \end{aligned}$$

- Nota: Esta expresión supone la utilización del prefijo cíclico:

$$\varphi_l(t) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}} \exp\left(j2\pi \frac{l}{T-T_{CP}} (t - T_{CP})\right) \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad ; \quad t \in [0, T]$$

y no es válida si se utiliza un periodo de guarda:

Receptor OFDM y efecto del canal (III)

- Esta expresión puede simplificarse como sigue:

$$\begin{aligned}
 y_k(t_n) &= \\
 &= \frac{1}{T-T_{CP}} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{nT+T_{CP}}^{(n+1)T} \mathbf{s}_{ml[n]} \exp\left(j2\pi \frac{l-k}{T-T_{CP}} (\lambda - nT - T_{CP})\right) d\lambda \int_0^{T_{CP}} h(\tau) \exp\left(-j2\pi \frac{l}{T-T_{CP}} \tau\right) d\tau = \\
 &= \frac{1}{T-T_{CP}} \sum_{l=0}^{N-1} H\left(\frac{l}{T-T_{CP}}\right) \mathbf{s}_{ml[n]} \int_0^{T-T_{CP}} \exp\left(j2\pi \frac{l-k}{T-T_{CP}} \alpha\right) d\alpha = \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} H\left(\frac{l}{T-T_{CP}}\right) \mathbf{s}_{ml[n]} \delta[k-l] = \mathbf{s}_{mk[n]} H\left(\frac{k}{T-T_{CP}}\right)
 \end{aligned}$$

En ausencia de ruido: $y_k(t_n) = \mathbf{s}_{mk[n]} H\left(\frac{k}{T-T_{CP}}\right)$

- La señal a la salida del filtro adaptado está libre de ISI y de ICI incluso con canal no ideal siempre que su dispersión sea inferior a la de prefijo cíclico.
- Se se utiliza periodo de guarda se evita la ISI pero no la ICI.

10/11/2006

COM II

T5-15

Receptor OFDM y efecto del ruido

- Del resultado anterior se deduce que cada uno de los símbolos QAM correspondientes a cada portadora puede recuperarse de forma independiente de todos los demás (de la misma u otras portadoras) y tan sólo queda afectado por un factor multiplicativo igual a la respuesta frecuencial del canal en el centro de la banda:

$$y_k(t_n) = \mathbf{s}_{mk[n]} H\left(\frac{k}{T-T_{CP}}\right) + \beta_k = \mathbf{s}_{mk} H[k] + \beta_k$$

- El ruido a la salida del filtro adaptado de la subportadora k presenta una potencia:

$$\begin{aligned}
 E\left[|\beta_k|^2\right] &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} w^*(t) \varphi_k(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda) \varphi_k^*(\lambda) d\lambda\right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E\left[w^*(t) w(\lambda)\right] \varphi_k(t) \varphi_k^*(\lambda) dt d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_w(t-\lambda) \varphi_k(t) \varphi_k^*(\lambda) dt d\lambda = \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\lambda) \varphi_k(t) \varphi_k^*(\lambda) dt d\lambda = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(\lambda) \varphi_k^*(\lambda) d\lambda = \frac{N_0}{2}
 \end{aligned}$$

10/11/2006

COM II

T5-16

Receptor OFDM y efecto del ruido (II)

- Mientras que la energía utilizada para la transmisión de un símbolo QAM por la subportadora k es el valor esperado de la energía de:

$$\mathbf{s}_{mk[n]}\varphi_k(t-nT) = \frac{1}{\sqrt{T-T_{CP}}}\mathbf{s}_{mk[n]}\exp\left(j2\pi\frac{k}{T-T_{CP}}(t-nT-T_{CP})\right) \quad ; \quad t \in [nT, (n+1)T]$$

$$E\left[\int_{nT}^{(n+1)T} |\mathbf{s}_{mk[n]}\varphi_k(t-nT)|^2 dt\right] = \frac{1}{T-T_{CP}} \int_{nT}^{(n+1)T} E\left[|\mathbf{s}_{mk[n]}|^2\right] dt = \frac{T}{T-T_{CP}} E_s = \frac{1}{1-\gamma_{CP}} E_s = E_b \log_2 M_k$$

- Finalmente la probabilidad de error de bit en cada subportadora QAM resulta:

$$BER_k \approx \frac{4}{\log_2 M_k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M_k}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M_k}{M_k - 1} \frac{|H[k]|^2 E_b (1-\gamma_{CP})}{N_0}}\right)$$

- Si fuera BPSK sería:

$$BER_k \approx Q\left(\sqrt{\frac{2|H[k]|^2 E_b (1-\gamma_{CP})}{N_0}}\right)$$

10/11/2006

COM II

T5-17

Receptor OFDM y efecto del ruido (III)

- Con lo la BER promedio resulta:

$$BER = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{N-1} b_k BER_k \quad ; \quad b_k = \log_2 M_k \quad ; \quad b = \sum_{k=0}^{N-1} b_k$$

- La utilización del prefijo cíclico implica una pérdida de relación señal a ruido (pérdida que no se produce si se utiliza un periodo de guarda)

$$SNR_{CP} = 10 \log_{10} \frac{T}{T-T_{CP}} = 10 \log_{10} \frac{1}{1-T_{CP}/T}$$

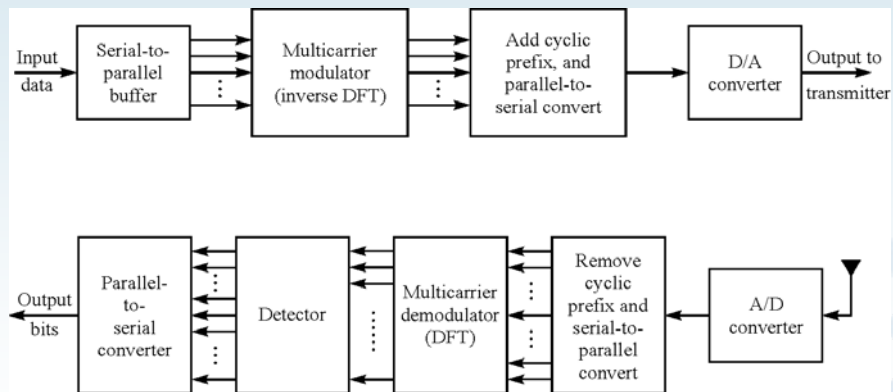
10/11/2006

COM II

T5-18

Receptor OFDM y efecto del ruido (IV)

- Esquema de implementación práctico resulta:



10/11/2006

COM II

T5-19

Limitaciones de OFDM

- La recuperación de los símbolos QAM sin ICI e ISI tan sólo es posible si la respuesta impulsional del canal se mantiene constante a lo largo de todo el bloque (T).
- La demodulación OFDM también es sensible a errores de sincronismo de portadora.
- La implementación mediante esquemas FFT supone la utilización de pulsos rectangulares en cada subportadora. En consecuencia su densidad espectral no es de banda limitada.
- La generación de la señal resulta en general en niveles altos de relación de potencia de pico a potencia media lo que requiere la utilización de amplificadores lineales (poco eficientes)
- La detección coherente requiere la estimación del canal en dominio frecuencial y (dependiendo de su variabilidad) en el temporal. Se suelen utilizar símbolos “piloto” distribuidos en el plano tiempo-frecuencia

10/11/2006

COM II

T5-20

5.2 Esquemas de múltiple acceso por división en código (CDMA)

- Ejemplo básico de comunicaciones multiusuario
- Esquemas de acceso múltiple en el que los distintos “usuarios” comparten el canal de transmisión en el tiempo y la frecuencia: Evita la necesidad de sincronizar a todos los usuarios entre si y la utilización de bandas frecuenciales “peores” por alguno de ellos.
- Se utiliza un gran ancho de banda, pero no de forma exclusiva.
- La detección de la señal transmitida requiere del conocimiento del código utilizado en la transmisión, y su sincronismo.
- Desde el punto de vista del espacio de la señal es equivalente a la utilización por parte de cada usuario de funciones diferentes de la base ortonormal (código).
- El canal hará que estos códigos frecuentemente dejen de ser ortogonales

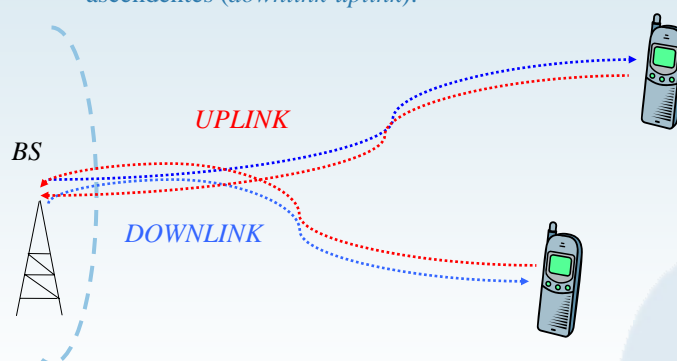
10/11/2006

COM II

T5-21

Introducción a CDMA

- Aplicación síncrona en enlaces descendentes y asíncrona en ascendentes (*downlink-uplink*).



En el enlace ascendente $h_i(t) \neq h_j(t)$

En el enlace descendente $h_i(t) = h_j(t) = h(t)$

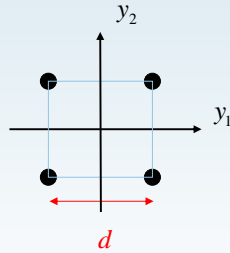
10/11/2006

COM II

T5-22

Introducción a CDMA (II)

- En una situación ideal, los usuarios utilizan códigos perfectamente ortogonales y por tanto pueden detectarse de forma independiente (equivale a QAM). Ejemplo con dos usuarios BPSK:

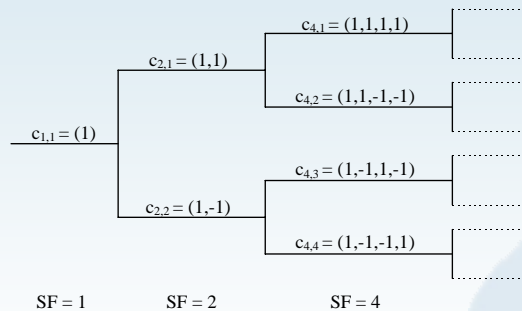


$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_1[n]\phi_1(t-nT) + \alpha_2[n]\phi_2(t-nT))$$

- En la práctica debido a que el canal no es ideal, errores de sincronismo y la utilización de un número elevado de usuarios (N) los códigos no resultan totalmente ortogonales
- Si no existen mecanismos de control de potencia, los distintos usuarios pueden recibirse con potencias muy dispares: efecto cerca-lejos (*near-far*)

Introducción a CDMA (III)

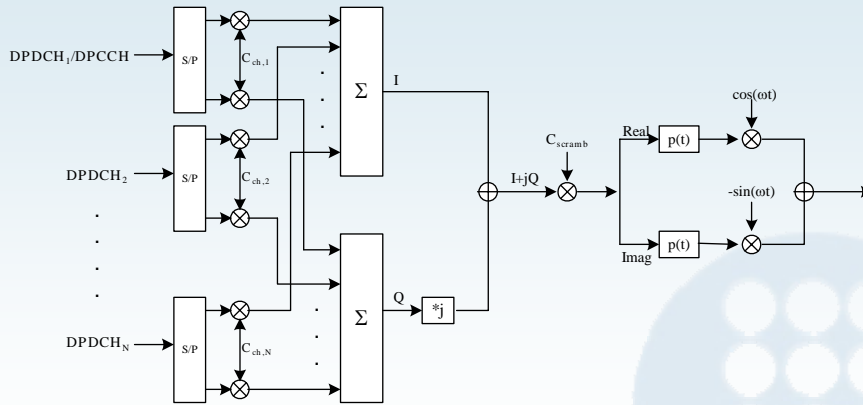
- Ejemplos de códigos ortogonales, las funciones de Walsh.



Code-tree for generation of Orthogonal Variable Spreading Factor (OVSF) codes

Introducción a CDMA (IV)

- Ejemplos de generación de un canal UMTS.



Spreading/modulation for downlink DPCH

10/11/2006

COM II

T5-25

Introducción a CDMA (IV)

- El ancho de banda se aumenta tras la introducción del *spreading* en un factor equivalente a la relación entre el periodo de símbolo y el periodo de chip:

$$SF \triangleq \frac{T}{T_c}$$

- Ejemplo BPSK: Tras una codificación CDMA del usuario i :

$$s_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i[n] \varphi_i(t - nT) \quad ; \quad \alpha_i[n] \in \sqrt{E_{bi}} \{-1, 1\}$$

$$\varphi_i(t) = \sum_{l=0}^{SF-1} c_i[l] \varphi_c(t - lT_c) = \sum_{l=0}^{SF-1} c_i[l] \Pi\left(\frac{t - T_c/2 - lT_c}{T_c}\right) \quad ; \quad c_i[l] \in \{-1, 1\}$$

Las funciones base se definen de forma que sean ortogonales:

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt &= \sum_{l=0}^{SF-1} \sum_{p=0}^{SF-1} c_i[p] c_j[l] \int_0^T \varphi_c(t - pT_c) \varphi_c(t - lT_c) dt = \\ &= \sum_{l=0}^{SF-1} \sum_{p=0}^{SF-1} c_i[p] c_j[l] \delta[p-l] = \sum_{l=0}^{SF-1} c_i[l] c_j[l] = 0 \quad ; \quad i, j \in \{1, \dots, M\} \end{aligned}$$

10/11/2006

COM II

T5-26

Introducción a CDMA (V)

- Ejemplo BPSK: El receptor óptimo del usuario i en el caso ideal:

$$s_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i[n] \varphi_i(t - nT) \quad ; \quad \alpha_i[n] \in \sqrt{E_{bi}} \{-1, 1\}$$

es el filtro adaptado convencional.

- La señal recibida es:

$$r(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) + w(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i[n] \varphi_i(t - nT) + w(t) \quad ; \quad \alpha_i[n] \in \sqrt{E_{bi}} \{-1, 1\}$$

y la señal a la salida del filtro adaptado al usuario i es:

$$y_i[n] = y_i((n-1)T) = \int_0^T r(\tau) \varphi_i(t - nT - \tau) d\tau = \alpha_i[n] + \beta_i[n]$$

equivalente a la detección de la señal en fase o en cuadratura en QAM.

Introducción a CDMA (VI)

- En el caso de utilizar un canal de propagación dispersivo la señal a la salida del filtro adaptado presentará ISI (puede evitarse con un prefijo cíclico) e interferencia de otros usuarios (*Multiple Access Interference* MAI) ya que los códigos dejan de ser ortogonales.

$$\varphi_i'(t) = \varphi_i(t) * h_i(t) \quad ; \quad \varphi_j'(t) = \varphi_j(t) * h_j(t)$$
$$\int \varphi_i'(t) \varphi_j'(t) dt \neq \delta[i - j]$$

- En el enlace ascendente se suele evitar la sincronización de las unidades móviles y no es posible asegurar la ortogonalidad de las secuencias de códigos recibidas (incluso en canal ideal).

$$\int \varphi_i(t - \tau_i) \varphi_j(t - \tau_j) dt \neq 0 \quad \text{para } \tau_i \neq \tau_j$$

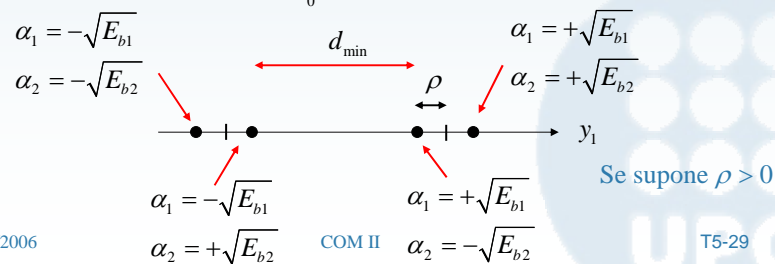
Interferencia Multiusuario: Receptor monousuario

- Efecto de la interferencia multiusuario en el receptor monousuario
 - Se supone un enlace CDMA síncrono en el que se reciben dos señales con códigos no ortogonales.

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_1[n]\phi_1'(t-nT) + \alpha_2[n]\phi_2'(t-nT)) + w(t) \quad ; \quad \begin{aligned} \alpha_1[n] &\in \sqrt{E_{b1}} \times \{-1, 1\} \\ \alpha_2[n] &\in \sqrt{E_{b2}} \times \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$$y_1[n] = y_1((n+1)T) = r(t) * \phi_1(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} \approx \alpha_1[n] + \rho\alpha_2[n] + \beta[n]$$

$$\rho \triangleq \int_0^T \phi_2'(t)\phi_1(t)dt$$



Interferencia Multiusuario: Receptor monousuario (II)

- La interferencia multiusuario en el receptor monousuario supone una disminución de la distancia mínima

$$d_{\min} = 2(\sqrt{E_{b1}} - |\rho|\sqrt{E_{b2}}) = 2\sqrt{E_{b1}} \left(1 - |\rho| \frac{\sqrt{E_{b2}}}{\sqrt{E_{b1}}}\right) = 2\sqrt{E_{b1}} (1 - |\rho|C)$$

$$BER \approx Q \left(\sqrt{\frac{2E_{b1} (1 - |\rho|C)^2}{N_0}} \right)$$

- El factor C modela la relación entre las amplitudes de ambos usuarios.
- Este tipo de receptor requiere estrictamente control de potencia

Receptor multiusuario

- El receptor óptimo es multiusuario y se obtiene a partir de la señal recibida

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_1[n]\varphi_1'(t-nT) + \alpha_2[n]\varphi_2'(t-nT)) + w(t) \quad ; \quad \begin{aligned} \alpha_1[n] &\in \sqrt{E_{b1}} \times \{-1,1\} \\ \alpha_2[n] &\in \sqrt{E_{b2}} \times \{-1,1\} \end{aligned}$$

generando una base ortonormal:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_1'(t) \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\varphi_2'(t) - \rho\varphi_1'(t)) \end{aligned} \quad \rho \triangleq \int_0^T \varphi_2'(t)\varphi_1'(t)dt$$

y obteniendo las componentes de la señal recibida en el espacio de la señal correspondiente:

$$y_1[n] = y_1((n+1)T) = r(t) * \varphi_1(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} \approx \alpha_1[n] + \rho\alpha_2[n] + \beta_1[n]$$

10/11/2006

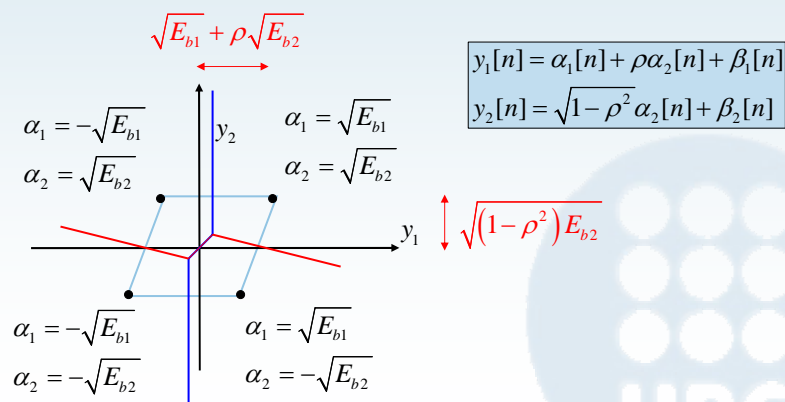
COM II

T5-31

Receptor multiusuario (II)

- En la segunda componente tan sólo aparece contribución del segundo usuario:

$$y_2[n] = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\alpha_2[n] + \rho^2\alpha_2[n]) + \beta_2[n] = \sqrt{1-\rho^2}\alpha_2[n] + \beta_2[n]$$



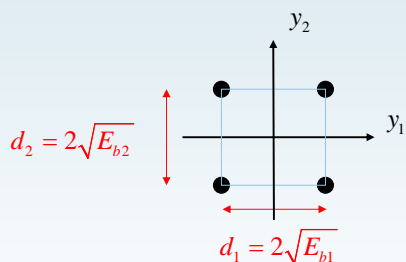
10/11/2006

COM II

T5-32

Receptor multiusuario (III)

- El caso particular de códigos ortonormales resulta en decisiones independientes (filtros adaptados monousuario):



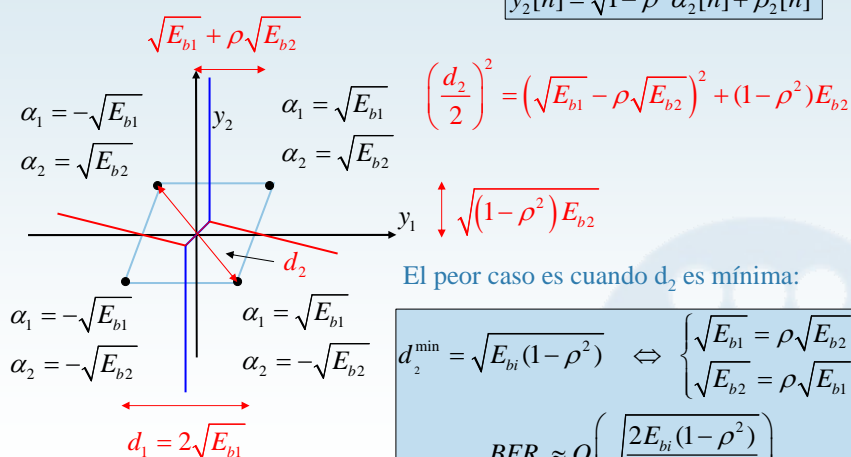
$$\begin{aligned} y_1[n] &= \alpha_1[n] + \beta_1[n] \\ y_2[n] &= \alpha_2[n] + \beta_2[n] \end{aligned}$$

$$BER_i \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bi}}{N_0}}\right)$$

Receptor multiusuario (III)

- A partir de cierto valor de la correlación se cumple: $d_2 < d_1$

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \alpha_1[n] + \rho\alpha_2[n] + \beta_1[n] \\ y_2[n] &= \sqrt{1-\rho^2}\alpha_2[n] + \beta_2[n] \end{aligned}$$



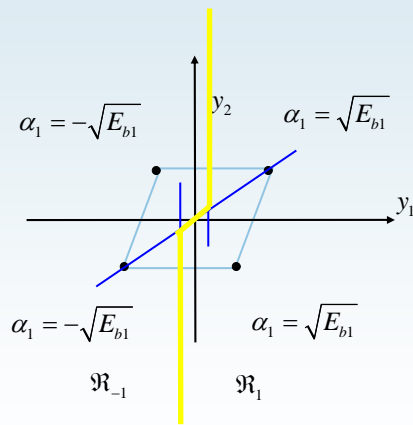
El peor caso es cuando d_2 es mínima:

$$d_2^{\min} = \sqrt{E_{b1}(1-\rho^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{E_{b1}} = \rho\sqrt{E_{b2}} \\ \sqrt{E_{b2}} = \rho\sqrt{E_{b1}} \end{cases}$$

$$BER_i \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bi}(1-\rho^2)}{N_0}}\right)$$

Cálculo de las regiones de decisión en el receptor multiusuario

- Cálculo de las regiones para el usuario 1:



$$\begin{aligned} y_1[n] &= \alpha_1[n] + \rho\alpha_2[n] + \beta_1[n] \\ y_2[n] &= \sqrt{1-\rho^2}\alpha_2[n] + \beta_2[n] \end{aligned}$$

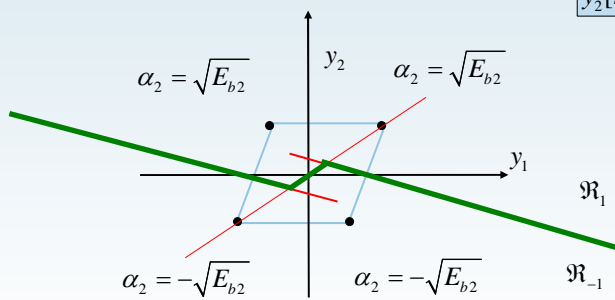
10/11/2006

COM II

T5-35

Cálculo de las regiones de decisión en el receptor multiusuario (II)

- Cálculo de las regiones para el usuario 2



$$\begin{aligned} y_1[n] &= \alpha_1[n] + \rho\alpha_2[n] + \beta_1[n] \\ y_2[n] &= \sqrt{1-\rho^2}\alpha_2[n] + \beta_2[n] \end{aligned}$$

10/11/2006

COM II

T5-36

Decorrelador

- Consiste en utilizar la expresión obtenida antes para la segunda componente como única variable de decisión sobre el segundo usuario (y crear una expresión equivalente para el primero:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (\varphi'_1(t) - \rho\varphi'_2(t))$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (\varphi'_2(t) - \rho\varphi'_1(t))$$

$$y_1[n] = \sqrt{1-\rho^2} \alpha_1[n] + \beta_1[n]$$

$$y_2[n] = \sqrt{1-\rho^2} \alpha_2[n] + \beta_2[n]$$

$$d_2^{\min} = \sqrt{E_{bi}(1-\rho^2)} \quad ; \quad BER_i \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bi}(1-\rho^2)}{N_0}}\right)$$

- El valor de la BER equivale al peor caso del receptor óptimo

Receptor multiusuario: Formulación Matricial

- La expresión general de la señal recibida es:

$$r(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) + w(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mi}[n] \varphi'_i(t - nT) + w(t)$$

- A continuación se utilizará una base ortonormal (puede utilizarse el procedimiento de Gram-Schmidt):

$$\{\varphi'_1(t), \varphi'_2(t), \dots, \varphi'_N(t)\} \Leftrightarrow \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)\}$$

- Obteniéndose las componentes de la señal recibida en el espacio de señal:

$$y_i[n] = y_i((n+1)T) = r(t) * \varphi_i(T-t) \Big|_{t=(n+1)T} = \sum_{l=1}^N \rho_{il} \alpha_{ml}[n] + \beta_i[n]$$

Receptor multiusuario: Formulación Matricial (II)

- En notación matricial y eliminando la dependencia temporal:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ \vdots \\ \alpha_{mN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$$

- Se han definido las matrices de correlación y el vector de símbolos de cada usuario:

$$\mathbf{R}_s \triangleq \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{bmatrix} ; \mathbf{s}_m \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$$

10/11/2006

COM II

T5-39

Receptor multiusuario: Formulación Matricial (III)

- El vector de ruido sigue una distribución idéntica a la vista en el Tema 2:

$$\mathbf{n} \sim N(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_N)$$

- Se puede aplicar exactamente el mismo criterio del receptor MAP visto en el Tema 2

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \max_{\mathbf{s}_m} \Pr\{\mathbf{s}_m | \mathbf{y}\} = \arg \max_{\mathbf{s}_m} \left[\frac{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m)}{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})} \Pr\{\mathbf{s}_m\} \right] = \arg \max_{\mathbf{s}_m} [f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \Pr\{\mathbf{s}_m\}]$$

en donde $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m)$ es la función de máxima verosimilitud (ML) y $\Pr\{\mathbf{s}_m\}$ es la probabilidad "a priori" de cada vector de símbolos multiusuario \mathbf{s}_m

- En el caso de símbolos equiprobables en cada usuario:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \max_{\mathbf{s}_m} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) ; f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) \sim N(\mathbf{R}_s \mathbf{s}_m, \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_N)$$

10/11/2006

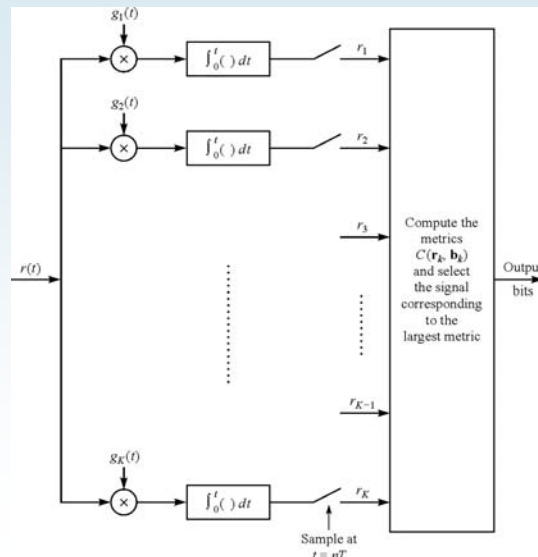
COM II

T5-40

Receptor multiusuario: Formulación Matricial (IV)

- Resulta el criterio de distancia mínima en el espacio de señal multiusuario:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m\|^2$$



10/11/2006

Decorrelador: Formulación Matricial

- La aplicación del criterio óptimo requiere *en principio* la búsqueda exhaustiva de todas las combinaciones posibles de símbolos para todos los usuarios.

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \arg \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m\|^2$$

- Como aproximación subóptima podríamos buscar el vector que minimiza la distancia de la función de coste (aunque no se corresponda con ninguna combinación de símbolos):

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_s \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{R}_s \mathbf{s}_m + \mathbf{n}) = \mathbf{s}_m + \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n}$$

- Una vez obtenido el vector \mathbf{x} los símbolos pueden estimarse mediante su cuantificación. En el caso BPSK:

$$\hat{\mathbf{s}}_m = \text{sgn}(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{y}) = \text{sgn}(\mathbf{s}_m + \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{n})$$

10/11/2006

COM II

T5-42

Decorrelador: Formulación Matricial (II)

- Podemos comprobar como para $N=2$ obtenemos la solución vista anteriormente (T5-37):

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_s \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{R}_s^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}'$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \sqrt{1-\rho^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \sqrt{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta''_1 \\ \beta''_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \sqrt{1-\rho^2} \mathbf{s}_m + \mathbf{n}''$$

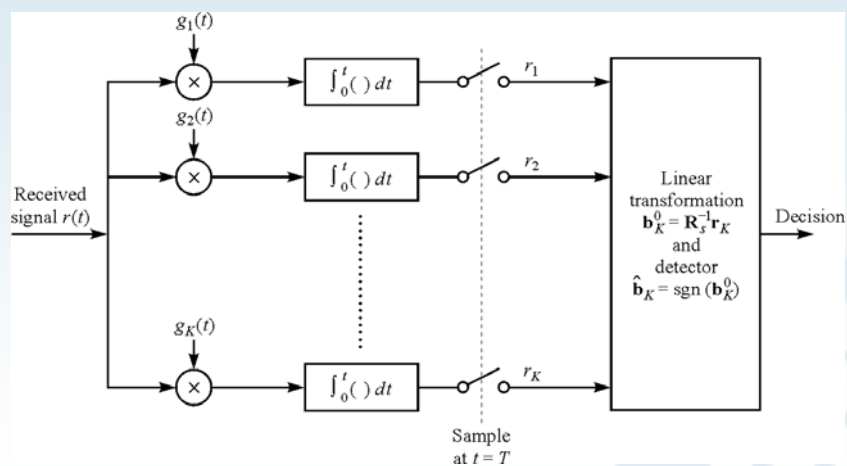
10/11/2006

COM II

T5-43

Decorrelador: Formulación Matricial (III)

- Diagrama de bloques del decorrelador:



10/11/2006

COM II

T5-44